PROBLEME CU LIMITE DE FUNCȚII

GHILAN Zinaida, dr., conf. univ.,
COVALSCHI Anatolie, lector

Summary

In this paper we present some brief definitions, concepts and properties that can be used to solve the problems with limits of functions. The concept of the limit of a function at a point is rooted in the XVII and XVIII centuries. The definition of the limit of a function at a point was formulated by Karl Weierstrass, using the concept of a point neighborhood. The calculation of limits of functions supposes knowledge of methods for determining the limits of elementary functions, limits of remarkable and of the algorithms to eliminate non-determinations that may arise in this context.

În analiza matematică, prin *limită* a unei funcții într-un punct din domeniul de definiție se înțelege o valoare de care valoarea funcției se apropie oricât de mult atunci când valoarea de intrare (argumentul funcției) se apropie suficient de mult de punctul în care se caută limita. În limbajul curent, înțelesul obişnuit al termenului *limită* este acela de graniță, hotar; figurativ, prin limită se înțelege un punct până la care pot ajunge posibilitățile sau mijloacele cuiva. În matematică, limita unui şir şi (sau) limita unei funcții într-un punct este un număr. Studierea analizei matematice în şcoală începe cu studierea noțiunilor de limită şi continuitatea funcțiilor, care se consideră una din cele mai dificile noțiuni matematice. În aceasta lucrare se propun un şir de exerciții, care cere o cunoaştere profundă şi conştientă a materialului teoretic.

Definiție. Se spune că numărul *l* este limita funcției *y= f(x)* în punctul x_0, când *x* tinde către x_0, şi scriem *f (x)* →*l* când $x \to x_0$ sau $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, dacă pentru orice număr ε > 0 arbitrar, există un astfel de număr δ = δ (ε) >0, încât din inegalitatea $0 < |x - x_0| < \delta$ rezultă inegalitatea $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Exemplul 1. *Să demonstrăm că*: $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$

Rezolvare: Conform definiției trebuie să demonstrăm că pentru orice număr pozitiv ε > 0 se poate afla un astfel de număr $\delta > 0$, încît din inegalitatea $0 < |x-3| < \delta$ rezultă inegalitatea $|x^2 - 9| = |x+3| \cdot |x-3| < \varepsilon$.

Numărul δ îl vom alege treptat. Inițial vom considera vecinătatea punctului 3 de raza 1 ($\delta = 1$), adică valorile lui *x* pentru care $|x-3| < 1$.

În vecinătatea considerată avem $|x+3| = |x-3+6| \le |x-3| + 6 < 7$, deci $|x+3| \cdot |x-3| < 7|x-3|$. Pentru ca inegalitatea să fie adevărată, este suficient ca $|x-3| < \frac{\varepsilon}{7}$. Aşadar $\delta = \min(1; \frac{\varepsilon}{7})$.

Exemplul 2. *Să se calculeze limitele*

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 - 1}$

Rezolvare: În acest caz avem nedeterminare $\frac{0}{0}$. Dacă vom încerca să scriem polinomul de la numărător ca produs de două polinoame $(x^2+2)\cdot(x^2-1)$, atunci

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+2)(x^2-1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + 2) = 3.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

Rezolvare: Înlocuim valoarea lui *x=0* în limita funcției şi obținem nedeterminare $\dfrac{0}{0}$. Înmulțim numărătorul şi numitorul la conjugatul funcției de la numărător, în rezultatul unor transformări obținem

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x\sqrt{\cos 2x})\cdot(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^2 x\cdot\cos 2x)}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^2 x\cdot(1-2\sin^2 x))}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x(3-2\sin^2 x))}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot(3-2\sin^2 x)}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(3-2\sin^2 x)}{(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

Rezolvare: În acest exercițiu baza limitei este egală cu 1, iar puterea numărului tinde la infinit şi avem nedeterminarea de tipul 1^{∞}. Deseori în acest caz se spune că avem *„nedeterminarea de tip e”*. Pentru a rezolva o astfel de nedeterminare este suficient ca baza limitei să o exprimăm prin $(1+\alpha)$, iar puterea $\dfrac{1}{\alpha}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3}{2x+1}-1\right)^{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3-2x-1}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2(x+1)}{2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2(x+1)}{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2(x+1)}{2x+1}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(2+\frac{2}{x})}{x(2+\frac{1}{x})}}=e.$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}x-\sqrt{x^2-2x+2}$.

$$\lim_{x\to\infty} x-\sqrt{x^2-2x+2}=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-2x+2}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}\right)}{x+\sqrt{x^2-2x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+2x-2}{x+\sqrt{x^2-2x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{x+\sqrt{x^2-2x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(2-\frac{2}{x})}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}=1$$

Exemplul 3. Fie funcția $f:R\to R,$ definită prin $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin m(x^2-2x-3)}{n(x-3)}, dacă\ x<3\\ \dfrac{n}{m+2^{\frac{n}{3-x}}}, dacă\ x>3\\ m+n+1, dacă\ x=3\end{cases}$, unde *m* și *n* sunt parametri reali. Să se determine valorile parametrilor *m* și *n* pentru care funcția *f* are limită în punctul *x=3*. În ce caz aceasta limită este egală cu f(3)?

Rezolvare: Din condiția problemei rezultă că *n≠0.*

a) Fie *n<0,* atunci calculând limita de dreapta în punctul *x=3* obținem

$$l_d=\lim_{x\to 3+0}\frac{n}{m+2^{\frac{n}{3-x}}}=\frac{n}{m+2^{\frac{n}{0}}}=\frac{n}{m+2^{\infty}}=0$$

și respectiv pentru limita de stînga

$$l_s=\lim_{x\to 3-0}\frac{\sin m(x^2-2x-3)}{n(x-3)}=\lim_{x\to 3-0}\frac{\sin m(x^2-2x-3)}{m(x^2-2x-3)}\cdot\frac{m(x-3)(x+1)}{n(x-3)}=$$

$$=\frac{m}{n}\lim_{x\to 3-0}(x+1)=4\frac{m}{n}$$

Dacă $4\frac{m}{n}=0$, adică *m=0* în acest caz funcția *f(x)* are limită în punctul *x=3* și $\lim_{x\to 3} f(x)=l_d(3)=l_s(3)=0.$ Calculăm valoarea funcției pentru *x=3, f(3)=m+n+1, m=0,* atunci rezolvând ecuația *m+n+1=0* obținem *m=0* și *n=-1.*

b) Pentru *n>0.* atunci ca și în cazul *a)* calculăm limitele funcției de dreapta și de stînga. De unde

$$l_d=\lim_{x\to 3+0}\frac{n}{m+2^{\frac{n}{3-x}}}=\frac{n}{m+2^{\frac{n}{0}}}=\frac{n}{m+2^{-\infty}}=\frac{n}{m}$$

$$l_s=\lim_{x\to 3-0}\frac{\sin m(x^2-2x-3)}{n(x-3)}=\lim_{x\to 3-0}\frac{\sin m(x^2-2x-3)}{m(x^2-2x-3)}\cdot\frac{m(x-3)(x+1)}{n(x-3)}=$$

$$=\frac{m}{n}\lim_{x\to 3-0}(x+1)=4\frac{m}{n}$$

Funcția are limită în punctul *x=3,* dacă $l_d(3)=l_s(3)$, atunci $\frac{4m}{n}=\frac{n}{m}$, de unde obținem $4m^2=n^2$ și *n>0,* $2m=\pm n.$ Avem două cazuri:

2m=n cu limita $\lim_{x\to 3} f(x)=\frac{n}{m}=2$ și *2m=-n* cu limita $\lim_{x\to 3} f(x)=\frac{n}{m}=-2$. Condiția problemei

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$ ne aduce la două sisteme de ecuații $\begin{cases} 2m = n \\ m+n+1=2 \end{cases}$ şi $\begin{cases} 2m = -n \\ m+n+1=-2 \end{cases}$. Rezolvând aceste sisteme de ecuații obținem următoarele soluții $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ şi *(3;-6)* și numai prima satisface condiția n>0.

Astfel funcția *f(x)* are limită în punctul *m=0* şi n<0 sau $2|m| = n$ şi *n>0*. Limita dată coincide cu *f(3)* şi *n=-1* sau $m = \frac{1}{3}$ şi $n = \frac{2}{3}$.

Exemplul 4. Fie funcția $f: R \to R,$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e}{x-1}, dacă \quad x<1 \\ \dfrac{ex^2}{m}, \quad dacă\ x \ge 1 \end{cases}$.

Să se determine valorile parametrului *m* pentru care funcția *f* are limită în punctul *x=1.*

Rezolvare: Calculăm limita la dreapta în punctul *x=1* şi $m \neq 0,$ de unde obținem $l_d(1) = \lim\limits_{x\to 1+0} \frac{ex^2}{m} = \frac{e}{m}$. Analog se calculează limita de stînga în punctul x=1, avem $l_s(1) = \lim\limits_{x\to 1-0} \frac{e^x - e}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-0} e\frac{e^{x-1}-1}{x-1} = e\cdot 1.$ Funcția *f(x)* are limită în punctul *x=1,* dacă şi numai dacă $l_s(1) = l_d(1) \Rightarrow e = \frac{e}{m} \Rightarrow m = 1.$

Exemplul 5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x}, dacă \quad x < -1, \\ 2 - x^2, \quad dacă \quad -1 \le x < 2, \\ -3, \quad dacă \quad x \ge 2. \end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcției.

Rezolvare: Din teorema despre continuitatea sumei, produsului, cîtului funcțiilor rezultă că funcția este continuă în orice punct pentru $x \neq -1$ şi $x \neq 2$. Vom studia continuitatea funcției în punctul x=-1. Calculăm $l_s = \lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-0} \frac{2x+1}{x} = 1$, $l_d = \lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+0}(2-x^2) = 1$ şi $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(2-x^2) = 1$.
Aşa dar $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1) = 1.$ Prin urmare funcția este continuă în punctul *x=-1.*

Să analizăm continuitatea funcției în punctul x=2. Calculăm

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(2-x^2) = \lim_{x\to 2}(2-x^2) = -2,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}(-3) = \lim_{x\to 2}(-3) = -3.$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2+0} f(x),$ atunci $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ nu există. Prin urmare funcția f(x) în punctual *x=2* nu este continuă ci *x=2* este punct de discontinuitate.

Bibliografie

1. Галицкий, М.Л., Мошкович, М. М., Шварцбург, С.И., *Изучение курса алгебры и математического анализа*, М., 1986.
2. Bivol, L., Bulat, M., Lecții de analiza matematică, Evrica, Chişinău, 2002.

3. Nicolescu, M., Nicolescu, C., *Analiza matematică. Exerciții şi probleme pentru elevii claselor XI-XII*. Concursul de admitere în învățământul superior, Bucureşti, 2000.