GRUPURI TOPOLOGICE $G^{\boxplus}$

Boris ȚARĂLUNGĂ, dr., conf. univ.

Summary

We study the properties of the topological abelian $G^{\boxplus}$ group equipped with the finest τ - bounded topology and we prove that $G^{\boxplus}$ is Hausdorff topological groups and $(G_1 \times G_2)^{\boxplus} \to G_1{}^{\boxplus} \times\times G_2{}^{\boxplus}$.

Grupul topologic G se numeşte $\tau -$ mărginit, dacă pentru orice vecinătate V a elementului neutru e a grupului G există o submulțime $S \subseteq G$ cu $|S| \leq \tau, \tau > \omega$, încit $S \cdot V = G$.

Clasul grupurilor $\tau -$ mărginite conține clasul grupurilor $\omega -$ mărginite, a grupurilor separabile şi a grupurile precompacte. Grupurile $\tau -$ mărginite sunt definite şi studiate în [1] .Grupurile abeliene echipate cu ce mai fină topologie $\omega -$ mărginita $G^{\square}$ au fost studiate în [2, 3,4].

Pentru grupul topologic abelian (G, ρ) vom considera în G topologia determinată de familia de morfisme continue a lui G în grupul topologic H de ponderea τ . Atunci grupul G cu această topologie se notează cu (G, ρ_*) sau G^*.

Este evident, că grupul G^* este $\tau -$ mărginit ,iar topologia ρ_* este cea mai fină topologie $\tau -$ mărginită.

Dacă G este un grup abelian discret, atunci grupul G echipat cu cea mai fină topologie $\tau -$ mărginită se notează cu $G^{\boxplus}$.

În articol se studiază proprietățile grupului topologic abelian $G^{\boxplus}$. Se demonstrează, că orice grup abelian $G^{\boxplus}$ este un grup Hausdorff, iar în orice subgrup a grupului $G^{\boxplus}$ se induce ce mai fină topologie $\tau -$ mărginită şi orice subgrup este un subgrup închis în topologia indusă. Se arată, că cea mai fină topologie $\tau -$ mărginită se conservă la produse directe finite.

Propoziția 1. Fie G un grup abelian şi L un grup abelian $\tau -$ mărginit .

i) Aplicația $\varphi: G^{\boxplus} \to L$ este continue dacă şi numai dacă aplicația.

$h \circ \varphi: G^{\boxplus} \to B$ este continue pentru orice grup B de ponderea τ şi pentru orice morfism continuu $h: L \to B$.

ii) Dacă $\varphi: G \to L$ este un morfism, atunci $\varphi: G^{\boxplus} \to L$ este continuu.

Demonstrație . i) “$\Longrightarrow$" . Este evident, deoarece compoziția morfismelor continue este un morfism continuu.

“$\Longleftarrow$" Fie U o submulțime deschisă în B. Atunci $C = h^{-1}(U)$ este o submulțime deschisă în . Atunci $\varphi^{-1}(C) = (h \circ \varphi)^{-1}(C)$ este o submulțime deschisă în G deorece $\varphi \circ h: G^{\boxplus} \to B$ este continuu. Astfel φ este continuu. Atunci aplicația $\varphi: G^{\boxplus} \to L$ este continue. $a?Z$

ii) Considerăm un grup topologic B de ponderea τ şi compoziția lui φ cu morfismul continuu $h: L \to B$ şi aplicăm cazul i).

Propoziția 2. Fie G şi L două grupuri abeliene.

a) Aplicația $\varphi: G^{\boxplus} \to L^{\boxplus}$ este continue, dacă şi numai dacă pentru orice grup topologic B cu ponderea τ şi orice morfism continuu $h: L \to B$ aplicația $h \circ \varphi: G^{\boxplus} \to B$ este continue.

b) Dacă $\varphi: G \to L$ este un morfism , atunci $\varphi: G^{\boxplus} \to L^{\boxplus}$ este continuu.

c)Dacă $\varphi: G \to L$ un epimorfism , atunci $\varphi: G^{\boxplus} \to L^{\boxplus}$ este deschis.

Demonstrație. Afirmațiile a) şi b) rezultă din i) şi ii) din propoziția 1.

Demonstrăm c). Fie $S = Ker\varphi \subseteq G$. Considerăm aplicația $\pi: G^{\boxplus} \to G^{\boxplus}/B^{\boxplus}$ şi isomorfismul $\beta: G^{\boxplus}/B^{\boxplus} \to\to L^{\boxplus}$. Atunci $\varphi = \beta \circ \pi$. Cum φ este continuu (punctul b) şi π este deschis rezultă β este continuu. Grupul $G^{\boxplus}/B^{\boxplus}$ este $\tau -$ mărginit ,ca imagine epimorfică a grupului $\tau -$ mărginit $G^{\boxplus}$.

Morfismul $\beta^{-1}: L^{\boxplus} \to G^{\boxplus}/B^{\boxplus}$ este continuu după propoziția 2 , ii). Astfel β este isomorfism topologic şi φ este deschis. ■

În continuare clasele de grupuri topologice se consideră închise în raport cu imaginea topologică izomorfă. Dacă K ese un clas nevid de grupuri topologice , atunci cu PK se notează clasul ce este format din produsele directe a grupurilor clasului K, iar cu SK clasul ce constă din subgrupuri a grupurilor clasului K . Pentru orice clas arbitrar K_1 de grupuri topologice notăm $K^{\star} = S(PK_1)$.

Teorema 3. Dacă G este un grup topologic abelian , K un careva clas de grupuri topologice abeliene,atunci orice morfism din G în orice grup G_1 a clasului K este continuu , dacă şi numai dacă orice morfism din G în orice grup H a clasului $K^{\star}$ este continuu.

Demonstrație : “⇒ ". Fie $\alpha: G \to H \subset K^{\star}$-un morfism arbitrar. Exista o mulțime I, şi grupurile $G_i \subset K, i \in I$, încît $H \subset \prod_{i\in I} G_i$. După propozitia 1 [5,pag.59] aplicația $\alpha = (\alpha_i): G \to H \subset \prod_{i\in I} G_i$ este continue, unde $\alpha_i = pr_i \circ \alpha, i \in I, pr_i$ - proiectia grupului $\prod_{i\in I} G_i$ pe grupul G.

“⇐ ". Rezultă din faptul, că $K \subset K^{\star}$ $a?Z$

Teorema 4. Fie G un grup abelian discret cu $|G| \leq \tau$, ρ o topologie τ −mărginită în G . Topologia ρ coincide cu cea mai fină topologie τ −mărginită în G, dacă şi numai dacă , orice morfism a grupului (G , ρ) în orice grup divizibil discret abelian D cu $|D| \leq \tau$ este continuu.

Demonstrație . “⇒ "Rezultă din propoziția 2.

“⇐ " Fie K clasul grupurilor divizibile discrete de cardinal τ. Atunci clasul grupurilor τ −mărginite este clasul $K^{\star} = S(PK_1)$. Orice morfism din grupul (G, ρ) intr-un careva grup din K este continuu . Atunci după teorema 3 orice morfism din grupul (G, ρ) intr-un careva grup din $K^{\star}$ este continuu.

Dacă μ este cea mai fină topologie τ −marginită în G , atunci $\mu \supset \rho$. Definim $\varphi: (\mathrm{G}, \rho) \to (\mathrm{G}, \mu), \varphi(g) == g, g \in G$. Atunci $(\mathrm{G}, \mu) \in K^{\star}$, deci φ este un morfism continuu, adică $\mu \subset \subset \rho$. Astfel $\mu = \rho$. ■

Propoziția 5. Fie L un subgrup a grupului abelian G . Atunci

1) $L^{\boxplus}$ este un subrup topologic a grupului $G^{\boxplus}$;

2) $G^{\boxplus}/L^{\boxplus}$ este topologic isomorf grupului $(G/L)^{\boxplus}$.

Demonstrație . 1) Fie φ: L → D, unde D este un grup divizibil discret abelian cu |□| ≤ □ . Cum D este divizibil, dupa propzitia 17 [6,pag. 21] ,rezultă că □ se extinde la morfismul □: G → □ . Dupa teorema 4 □ este continuu , atunci si □ | □ = □ este continuu.

2) Cum □$^{\boxplus}$ este □ −mărginit , atunci şi □$^{\boxplus}$/□ este este □ −mărginit.

Considerăm morfismul □: □$^{\boxplus}$/□ → □. Notăm cu □ morfismul natural de la □$^{\boxplus}$ la □$^{\boxplus}$/□. După propoziția 2 morfismul natural □ este deschis. Atunci morfismul □ ∘ □ este continuu. După propoziția 6 [5,pag.51] □ este continuu. Conform teoremei 4 topologia grupului □$^{\boxplus}$/□ coincide cu cea mai fina topologie □ −mărginită . ■

Propoziția 6. Fie □ un grup abelian. Atunci grupul □$^{\boxplus}$ este un grup Hausdorff. În particular , orice subgrup a lui □$^{\boxplus}$ este închis.

Demonstrație . Considerăm aplicația identică □: □$^{\boxplus}$ → □$^{□}$, □(□) = □ pentru orice □ din G. Aplicația dată este o aplicație continue. Cum □$^{□}$ este un grup Hausdorff , atunci şi grupul □$^{\boxplus}$ este un grup Hausdorff. Cum orice subgrup în □$^{□}$ este închis , atunci şi orice subgrup în □$^{\boxplus}$ este închis. ■

Propoziția 7. Fie □$_1$ → □$_2$ doua grupuri discrete abeliene. Atunci (□$_1$ × □$_2$)$^{\boxplus}$ = □$_1^{\boxplus}$ × □$_2^{\boxplus}$.

Demonstrație. Afirmăm, ca aplicația □□: (□$_1$ × □$_2$)$^{\boxplus}$ → □$_1^{\boxplus}$ × □$_2^{\boxplus}$, □□(□, □) = (□, □) , □ ∈ □$_1$, □ ∈∈ □$_2$ este un isomorfism topologic .

Considerăm proiecțiile naturale.: $\square\square_{\square}: \square_{1} \times \square_{2} \rightarrow \square_{\square}, \square = 1,2$. După propoziția 2 proiecțiile $\square\square_{\square}: (\square_{1} \times\times \square_{2})^{\boxplus} \rightarrow \square_{\square}^{\boxplus}, \square = 1,2$ sunt continue. Atunci produsul diagonal $\square\square = (\square\square_{1}, \square\square_{2})$: $(\square_{1} \times \square_{2})^{\boxplus} \rightarrow \square_{1}^{\boxplus} \times\times \square_{2}^{\boxplus}$ este continuu.

Fie acum □ un grup divizibil discret abelian cu $|\square| \leq \square$. Să arătăm, că orice morfism f: $(\square_{1} \times \times \square_{2})^{\boxplus} \rightarrow \square$ este continuu. Considerăm $\square_{\square}: \square_{\square} \rightarrow \square_{1} \times \square_{2}$ scufundările canonice $\square = 1,2$. Notăm $\square_{\square} = f \circ \square_{\square}$, $\square = 1,2$. Atunci $\square_{\square}: \square_{\square}^{\boxplus} \rightarrow \square$ sunt continue. Aplicația $\square: (\square_{1} \times \square_{2})^{\boxplus} \rightarrow \square$, definită cu $\square(\square) = \square_{1}(\square_{1}) + \square_{2}(\square_{2})$ pentru orice $(\square, \square) \in \square_{1} \times \square_{2}$ este continue. Observăm ,că □ coincide cu □, deoarece $\square_{1}, \square_{2}$ sunt grupuri abeliene. ■

Bibliografia

1. Țarălungă, B., Grupuri topologice real compacte. Probleme ale științelor socio-umane şi modernizării învățămîntului, Ministerul Educației al Republicii Moldova, UPS „Ion Creangă”, Conferința de totalizare a muncii științifice şi științifico –didactice a corpului profesoral pentru anul 2012, Vol.I, p.387-389, Chişinau, 2012.
2. Țarălungă, B., About Some Properties of the Group $\square^{\square}$**.** The 22nd Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2014,18-21 september 2014 Book of Abstracts, p.59, Bacău, Romania.
3. Bourbachi, N., Obscaia topologhia. Osnvnie structuri, Nauca, M., 1969.
4. Lorenzo de Leo, Weak and strong topologies in topological Abelian groups. Memoria para optar al grado de doctor, Madrid, 2009.
5. Morris, S., Dvoistvennosti Pontreghina i stroenie localino compactnih abelevih grup, Mir, M., 1980.
6. Tkachenko, M., Introduction to topological groups, Topol. Appl. no.3 (1998),179-231.