LIMITELE ȘIRURILOR

Sergiu PORT, conf. univ., dr.
Anatolie COVALSCHI, lector univ.

Summary

String is the fundamental concept of mathematical analysis and calculation of the limit of a series, when it exists, requires most cases, knowledge of the properties of a consistent set of formulas and criteria remarkable mastery of special skills to eliminate exempt operations.

În cele mai multe cazuri, șirurile sunt specificate prin formula termenului general – unde $n \in N$. Problema de bază a șirului este de a stabili convergența șirului și pentru a-i calcula limita. De multe ori formula termenului general ne conduce la calculul unei sume, unui produs sau la calcularea unei combinații algebrice dintre sumă și produs. De asemenea utilizarea formulelor cunoscute ușurează soluționarea .

Exemplu 1. Calculați:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$$

$$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{k+2}{k!\big(1+k+1+(k+1)(k+2)\big)}=\frac{1}{k!\,(k+2)}$$

Amplificăm fracția cu $(k+1)$

$$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{k+1}{k!\,(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{k+2-1}{(k+2)!}=\frac{k+2}{(k+2)!}-\frac{1}{(k+2)!}$$
$$=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}\right)$$
$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)!}=0$ în final obținem

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{1}{2}$$

Exemplu 2. Calculați:

$$\lim_{n\to\infty}(nsin2\pi en!)$$

conform formulei Teylor de dezvoltare a funcției în serii de puteri, vom avea

$$\sin 2\pi en!=sin\left\{2\pi n!\left[\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+\frac{e^{\theta}}{(n+2)!}\right]\right\}=sin\left\{2\pi n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{2\pi}{n+1}+\varphi(n)\right\}=sin\left\{\frac{2\pi}{n+1}+\varphi(n)\right\}$$

$$\varphi(n)=\frac{2\pi e^{\theta}}{(n+1)(n+2)}\ ,0<\theta<1$$

obținem

$$\lim_{n\to\infty} n\, sin 2\pi e n! = \lim_{n\to\infty} n\, sin\left\{\frac{2\pi}{n+1} + \varphi(n)\right\} = \lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{2\pi}{n+1} + \varphi(n)\right\}\frac{sin\left\{\frac{2\pi}{n+1} + \varphi(n)\right\}}{\frac{2\pi}{n+1} + \varphi(n)} = 2\pi$$

Exemplu 3. Calculați:

$$\lim_{n\to\infty} sin^2\pi\sqrt{n^2+n}$$

Apelând la rezultatele exemplelor anterioare obținem:

$$\lim_{n\to\infty} sin^2\pi\sqrt{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} sin^2\left\{(n+1/2)\pi + \left[\pi\sqrt{n^2+n} - (n+1/2)\pi\right]\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} cos^2\left\{\pi\left[\sqrt{n^2+n} - (n+1/2)\right]\right\} = cos^2 0 = 1$$

Bibliografie

1. Bivol, Leon, Lecții la analiza matematică, Evrica, Chișinău, 2002.
2. Nicolescu, M., Analiză matematică, Vol. I–III, Editura Tehnica, Bucureşti, 1957.
3. Фихтенголц, Г. М., Базеле анализеи математиче, Editura Lumina, Chișinău, 1968.
4. Рожков, В. И., Сборник задач математических олимпиад, Москва, 1987.