APLICAREA CALCULUI DIFERENȚIAL LA PROBLEME DE MINIM ȘI MAXIM

Natalia NEAGU, lector
Sergiu PORT, dr., conf. univ.

Summary

The derivative of a function f of a variable x is a measure of the rate at which the value of the function changes with respect to the change of the variable. It is called the derivative of f with respect to x. If x and y are real numbers, and if the graph of f is plotted against x, the derivative is the slope of this graph at each point.

In this article are presented some problems of maximum and minimum with application the differential calculus - the first order of derivative determine the extremes of the functions and the second order of derivative the concavity and convexity.

În matematică, derivata unei funcții este una dintre conceptele fundamentale ale analizei matematice. Derivata unei funcții într-un punct semnifică rata cu care se modifică valoarea funcției atunci când se modifică argumentul. Cu alte cuvinte, derivata este o formulare matematică a noțiunii de rată de variație. Ea reprezintă un concept foarte versatil. De exemplu, referindu-ne la graficul bidimensional al funcției $f(x)$, derivata într-un punct x reprezintă panta tangentei în punctul dat. De asemenea, ea este folosită la determinarea proprietăților geometrice ale graficelor funcțiilor, cum ar fi:

- extremele funcției - derivatele de ordinul I;
- concavitatea și convexitatea funcției - derivatele de ordinul II etc.

Pentru a determina valoarea maximă/ minimă a unei mărimi este necesar să transpunem rezolvarea problemei într-un limbaj matematic cu ajutorul unei funcții de o singură variabilă, utilizînd următorul algoritm:

1. selectăm un parametru convenabil - x şi exprimăm toate mărimile din această problemă prin parametrul selectat;
2. pentru mărimea ce trebuie să atingă valoarea maximă/ minimă, alcătuim o funcție de variabila x;
3. găsim intervalul pe care funcția creată trebuie să atingă valoarea maximă/ minimă;
4. cu ajutorul derivatei determinăm punctele de maxim/ minim pe intervalul obținut;
5. aflăm mărimea necunoscută din problema şi dacă se cere şi valoarea maximă și/sau minimă.

În continuare vom prezenta cîteva probleme de maxim și minim, cu aplicarea calculului diferențial.

Problema 1.

Scrieți numărul 15 ca o sumă de doi termeni pozitivi, astfel încît produsul dintre pătratul unui termen și celălalt să fie maxim.

Rezolvare

Fie x și y două numere pozitive și diferite de zero (produsul trebuie să fie maxim), iar suma lor este egală cu 15

$$x + y = 15 \Longrightarrow y = 15 - x.$$

Deci vom cerceta termenii x și $15 - x$ ce au domeniul de valori admisibile intervalul deschis $(0; 15)$, adică

$$f: (0; 15) \to R.$$

Vom cerceta funcția $f(x)$ definită de produsul dintre pătratul unui termen și celălalt termen la maxim

$$f(x) = x^2 y = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3.$$

Calculăm derivata funcției $f(x)$

$$f^{'}(x) = 30x - 3x^2.$$

Egalăm derivata cu zero și determinăm soluțiile ei

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 30x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 10x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(10 - x) = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 10 \end{array}\right..$$

Soluția $x = 0$ nu aparține domeniului de valori admisibile, deci vom cerceta soluția $x = 10$. Determinăm semnul funcției $f'(x)$ la trecerea peste $x = 10$ (fig. 1)

$$f'(9) = 30 * 9 - 3 * 81 = 27 > 0$$

și

$$f'(11) = 30 * 11 - 3 * 121 = 330 - 363 < 0.$$

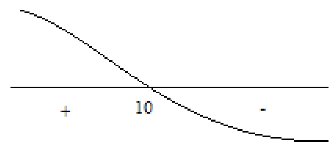

Fig. 1. Semnul funcției $f'(x)$

Funcția își schimbă semnul de la "+" la "-", deci $x = 10$ este punct de maxim. Determinăm valoarea celui de al doilea număr

$$y = 15 - x = 15 - 10 = 5.$$

R-s: 15=10+5.

Problema 2.

Volumul unei prisme triunghiulare regulate este egal cu V. Să se afle latura bazei prismei, astfel încît aria totală a prismei să fie minimă.

Rezolvare

Aria totală a prismei triunghiulare regulate este dată de formula

$$A_t = A_l + 2\, A_b = P_b h + 2l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 3lh + 2l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ultima expresie conține termenul *h*, însă conform condițiilor problemei, cunoaștem doar volumul prismei *V*. Din formula volumului prismei triunghiulare regulate îl exprimam pe *h*

$$V = A_b h \Longrightarrow h = \frac{V}{A_b} = \frac{V}{l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{4V}{\sqrt{3} l^2}.$$

Deci

$$A_t = 3l \frac{4V}{\sqrt{3}\, l^2} + 2l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}\, V}{l} + l^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{8\, V}{l} + l^2\right).$$

Calculăm derivata ariei totale după necunoscuta *l*

$$A'_t(l) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{8\, V}{l} + l^2\right)' = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{8\, V}{l^2} + 2l\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-8\, V + 2l^3}{l^2} = \sqrt{3}\, \frac{-4\, V + l^3}{l^2}.$$

Egalăm derivata cu zero și determinăm soluțiile ei

$$A'_t(l) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\, \frac{-4\, V + l^3}{l^2} = 0 \Leftrightarrow -4\, V + l^3 = 0 \Leftrightarrow l^3 = 4\, V \Rightarrow l = \sqrt[3]{4\, V}.$$

R-s: $l = \sqrt[3]{4\, V}$.

Problema 3.

Să se afle raza cercului în care poate fi înscris un dreptunghi de arie maximă cu perimetrul de $56\ cm$.

Rezolvare

Fie $ABCD$ un dreptunghi înscris într-un cerc de rază R, cu perimetrul $56\ cm$ (fig. 2)

$$P_{dr} = AB + BC + CD + AD = 2AB + 2BC = 56\ (cm) \Longrightarrow AB + BC = 28.$$

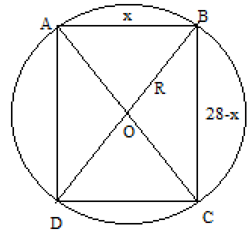

Fig. 2. Reprezentarea grafică a dreptunghiului ABCD înscris într-un cerc de rază R

Notăm $AB = x$, atunci $BC = 28 - x$.

Aria dreptunghiului este

$$A_{dr} = AB \cdot BC = x(28 - x) = 28x - x^2.$$

Determinăm derivata funcției definite de aria dreptunghiului în raport cu necunoscuta x

$$A'_{dr}(x) = 28 - 2x.$$

Egalăm derivata cu zero și determinăm soluțiile ei

$$A'_{dr}(x) = 0 \Leftrightarrow 28 - 2x = 0 \Leftrightarrow 14 - x = 0 \Longrightarrow x = 14.$$

Determinăm semnul funcției $A'_{dr}(x)$ la trecerea peste $x = 14$ (fig. 3)

$$A'_{dr}(10) = 8 > 0$$

$$A'_{dr}(15) = -2 < 0.$$

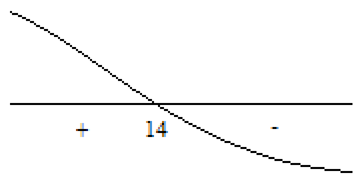

Fig. 3. Semnul funcției $f'(x)$

Funcția își schimbă semnul de la "+" la "-", deci $x = 14$ este punct de maxim și

$$BC = 28 - x = 28 - 14 = 14.$$

Analizăm triunghiul $ABC - dreptunghic$ cu

$$AB = BC = 14,$$

rezultă că

$$AC = 14\sqrt{2}$$

$$R = \frac{AC}{2} = \frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}.$$

R-s: $R = 7\sqrt{2}\ cm.$

Bibliografie

1. Iavorschi, V., Matematica, culegere de exerciții şi probleme, clasa X- XII, 2012
2. Păltineanu, G., Analiză matematică, AGIR, București, 2002.
3. Кудрявцев, Л.Д., Курс математического анализа, т. 1-2, Изд. Высшая Школа, Москва, 1981.