SOLUȚIONAREA INEGALITĂȚILOR PRIN DIFERENȚIERE

Zinaida GHILAN, dr., conf. univ.

Summary

In this paper includes the study of inequalities with one variable. On the basis of differential calculus theorems are demonstrated a number of inequalities.

Rezolvarea multor probleme practice se reduce deseori la determinarea inegalităților. În studiul variației unei funcții este important să cunoaştem în ce condiții este constantă sau monotonă pe un interval dat. În multe cazuri este comod să aplicăm proprietatea funcțiilor derivabile: fie $f: I \to R \quad (I \subseteq R)$, o funcție derivabilă pe intervalul I şi $x_0 \in I$ (x_0 - punct interior a lui I), atunci creşterea $\Delta f(x_0)$ unei funcției *f* derivabile, într-un punct x_0 se exprimă ca suma a doi termeni: termenul $f'(x_0) \cdot \Delta x$ care este direct proporțional cu creşterea argumentului şi termenul $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, unde $\alpha(\Delta x)$ este un infinit mic. Astfel diferențiala funcției în punctul x_0 este definită ca $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$ pentru orice *x* de pe acet interval *I*. Pe baza unor teoreme de calcul diferențial se bazează studiul inegalităților cu o singură variabilă, şi vor prezentate în lucrare, fără a fi demonstrate.

Teorema lui Ferma. Dacă funcția *f(x)* definită într-o vecinătate a punctului x_0 are în acest punct valori nepozitive (nenegative) şi în acest punct există derivata funcției, atunci $f'(x) = 0$.

Teorema lui Rolle. Dacă funcția *f(x)* este continuă pe [a,b], derivabilă în toate punctele interioare ale segmentului şi se anulează în extremitățile acestui segment *f(a)=f(b)*, atunci există cel puțin un punct intermediar *x=c, a<c<b,* în care derivata $f'(c) = 0$.

Teorema lui Lagrange. Admitem că funcția f(x) este continuă pe segmentul *[a,b]*, şi derivabilă în toate punctele interioare ale acestui segment. Atunci între orice două puncte *a* şi *b* ale acestui interval există un punct *c* pentru care: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Teorema de monotonie: *a)* dacă funcția *f(x)* are derivată pozitivă în fiecare punct al intervalului *I*, atunci ea creşte pe acest interval;

b) dacă funcția *f(x)* are derivată negativă în fiecare punct al intervalului *I*, atunci ea descreşte pe acest interval.

Admitem că luăm două puncte arbitrare x_1 şi x_2 pe intervalul *I* şi că $x_2>x_1$. atunci conform teoremei lui Lagrange, între aceste puncte se va găsi un punct *c* astfel încît $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2$, unde $c \in (x_1, x_2)$.

Întrucât $f'(c) > 0$ şi $x_2>x_1$, obținem că $f(x_2) > f(x_1)$, cea ce înseamnă că funcția creşte pe intervalul I.

Însă, dacă $f'(c) < 0$ şi $x_2>x_1$ obținem că $f(x_2) < f(x_1)$, înseamnă că funcția descreşte pe intervalul I;

c) dacă funcția *f(x)* este derivabilă pe segmentul *[a,b]* crescătoare (descrescătoare), atunci derivata ei pe segmentul *[a,b]* este nenegativă (nepozitivă) adică $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Teorema. Fie funcțiile y=f(x) şi y=g(x) continue pe segmentul *[a,b]* şi în fiecare punct de pe acest interval există derivata funcțiilor $f'(x)$ şi $g'(x)$, unde $f'(x) < g'(x)$ pentru orice $x \in (a;b)$, iar $f(a) \leq g(a)$, atuci pentru fiecare punct de pe acest $x \in (a;b)$ are loc inegalitatea $f(x) < g(x)$.

Remarcă: în baza acestei teoreme, pentru a demonstra inegalitatea $f(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$ este necesar să dovedim că $f(0) \geq 0$ şi $f'(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$, iar pentru inecuația $f'(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$ vom utiliza derivata a doua a funcției $f''(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$ etc.

În demonstrațiile următoare vom aplica unele consecințe ale teoremei lui Lagrange, şi anume: Fie $f:(a,+\infty) \to R$ cu $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = 0$. Dacă $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crescătoare şi cum x>a, aplicând definiția funcțiilor monoton crescătoare, obținem $f(x) > f(a) = 0,$ deci f(x)>0.

Dacă $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ descrescătoare şi cum x>a, aplicând definiția funcțiilor monoton descrescătoare, obținem $f(x) < f(a) = 0,$ deci f(x)<0. Analog se demonstrează şi pentru $f:(-\infty,a) \to R$.

Evident, se poate face o generalizare a acestei proprietăți pentru o funcție derivabilă de n-ori, cu derivate continue. Fie $f:(a,+\infty) \to R$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f^{(n-1)}(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f^{(n-2)}(x) = ... = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(a) = 0.$ Deci $f^{(n)}(x) > 0$, atunci conform teoremei lui Lagrange, $f^{(n-1)}(x)$ este o funcție crescătoare şi cum x>a, aplicând definiția funcțiilor monoton crescătoare, obținem $f^{(n-1)}(x) > f^{(n-1)}(a) = 0 \Rightarrow f^{(n-1)}(x) > 0 \Rightarrow f^{(n-2)}(x)$ este crescătoare. Continuând procedeul, obținem că $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crescătoare şi cum $x > a \Rightarrow f(x) > f(a) = 0 \Rightarrow f(x) > 0.$ Analog pentru cazul $f^{(n)}(x) < 0$ şi pentru $f:(-\infty,a) \to R$ cu $f^{(n)}(x) > 0$ şi respectiv $f^{(n)}(x) < 0$.

Pentru rezolvarea inegalităților $f' > 0\ (f' \geq 0)$ şi $f' < 0\ (f' \leq 0)$ este comod să ne folosim şi de următoarea metodă: punctele în care derivata este egală cu zero sau nu există, î domeniul de definiție al funcție se împarte în intervale şi în fiecare din aceste intervale derivata $f'(x)$ își păstrează semnul constant. El poate fi determinat, calculând valoarea derivatei funcției într-un punct oarecare a intervalului. În continuarie vom prezenta unele exemple de demonstrare a inegalităților.

1. **Demonstrați** inegalitatea $\ln(1+x) \leq x$, pentru $x \geq 0$.

Rezolvare

Scriem funcția $f = x - \ln(1+x)$ pe $[0;+\infty)$. Fie funcția f(x) este continuă pe domeniul de definiție D_f pentru orice $x \in [0;+\infty)$. Derivata funcției $f'(x) = \dfrac{x}{1+x}$. Dacă derivata funcției $f'(x) > 0$ pe intervalul $x \in (0;+\infty)$, funcția este crescătoare pe acest interval şi $f(x) \geq f(0)$. Cea ce confirmă că inegalitatea este adevărată.

2. **Demonstrați** inegalitatea $\dfrac{tgx}{tgy} < \dfrac{x}{y}, 0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$.

Rezolvare

Pentru a demonstra inegalitatea că $\dfrac{tgx}{x} < \dfrac{tgy}{y}, x \in (0;\dfrac{\pi}{2})$. Fie funcția $f(x) = \dfrac{tgx}{x}$ pe intervalul $(0;\dfrac{\pi}{2})$. Să demonstram că aceasta funcție este crescătoare. Aflăm derivata:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{x}{\cos^2 x} - tgx}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}.$$

Funcția $x^2\cos^2 x > 0$ - crescătoare. Vom demonstra că și funcția g(x)=x-sinxcosx este de ase menea crescătoare pe intervalul $(0;\frac{\pi}{2})$. Derivăm aceasta funcție și obținem $g'(x)=1-\cos 2x$, unde $g'(x)>0$, pentru $x\in(0;\frac{\pi}{2})$ și deci g(0)=0, însemnă că și g(x)>0, rezultă că $f'(x)>0$ și f(x) este o funcție crescătoare pe acest interval. Inegalitatea este adevărată.

3.**Demonstrați** inegalitatea $\arcsin x > x+\frac{x^2}{6}$ pentru $x\in(0;1)$.

Rezolvare

Fie funcția $f:(0;1)\to R,\ f(x)=\arcsin x - x-\frac{x^2}{6}$, f(0)=0. Calculăm derivata funcției $f'(x)=\left(\arcsin x - x-\frac{x^2}{6}\right)'$ de unde $f'(x)=\frac{2-(2+x^2)\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}$. Notăm $g(x):(0;1)\to R$, $g(x)=2-(2+x^2)\sqrt{1-x^2}$, cu g(0)=0. aflăm derivata funcției $g'(x)=\left(2-(2+x^2)\sqrt{1-x^2}\right)'$ și $g'(x)=\frac{4x^3}{\sqrt{1-x^2}}$, cum $g'(x)>0 \Rightarrow g$ este o funcție strict crescătoare și cum $x>0$, aplicând definiția funcțiilor monoton strict crescătoare, obținem $g(x)>g(0)=0 \Rightarrow g(x)>0$. Derivata funcției $f'(x)=\frac{g(x)}{2\sqrt{1-x^2}}>0 \Rightarrow f$ este o funcție strict crescătoare și cum $x>0$, aplicând definiția funcțiilor monoton strict crescătoare obținem $f(x)>f(0)=0, f(x)>0$ adică $\arcsin x > x+\frac{x^2}{6}$.

4.Demonstrați inegalitatea $e^x \geq 1+x$ pentru orice *x*.

Rezolvare

Considerăm funcția *f*(*x*) = $e^x \geq 1+x$. Funcția *f* este derivabilă și $f'(x)=e^x-1$.

Deoarece $f'(x)>0$ pentru *x* > 0 rezultă că *f*(*x*) > *f*(0) = 0 pentru *x* > 0.

Deoarece $f'(x)<0$ pentru *x* < 0 rezultă că *f*(*x*) > *f*(0) = 0 pentru *x* < 0.

În final se obține că $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in R$ adică $e^x \geq 1+x$.

5. **Demonstrați** care din numerele $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ sau $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ este cel mai mare.

Rezolvare

Presupunem că $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} > (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$, logaritmăm și obținem $\ln(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} > \ln(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$, de unde $\frac{\ln(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} > \frac{\ln(\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$. Pentru a demonstra că este adevărat sau fals cercetăm funcția $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Derivăm funcția $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, cum $f'(x)>0$ pentru $x\in(0;e)$, iar $\sqrt{2}\in(0;e)$, funcția f(x)<0, descrește, cum $f'(x)<0$ pentru $x\in(e;+\infty)$ f(x)>0 funcția crește și $\sqrt{3}\in(e;+\infty)$ și deci $\frac{\ln(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} < \frac{\ln(\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$.

În încheiere, putem concluziona că demonstrarea inegalităților cu o singură variabilă este bazată pe teoremele de bază a calculului diferențial.

Bibliografie

1. Bivol, L., Bulat, M., Lecții de analiza matematică, Evrica, Chișinău, 2002.
2. Nicolescu, M., Nicolescu, C., Analiza matematică. Exerciții şi probleme pentru elevii claselor XI-XII. Concursul de admitere în învățământul superior, Bucureşti, 2000.
3. Смирнов, В. И., Курс высшей математики, том 1, 1958.
4. Осипенко, К. Ю., Неравенства для производных аналитических в полосе функций. // Матем. заметки, 56,4 (1994), 114–122.
5. Харди, Г. Г., Литтлвуд, Дж. Е., Полиа, Г., Неравенства, ИЛ, М., 1948.