11. SOLVING PHYSICS PROBLEMS BY THE METHOD OF MATHEMATICAL INDUCTION
REZOLVAREA PROBLEMELOR DE FIZICĂ PRIN METODA INDUCȚIEI MATEMATICE

Igor POSTOLACHI, Ph.D., associate professor,
„Ion Creangă" State Pedagogical University, Chișinău
ORCID ID: 0000-0002-1752-5386
postolachi.igor@upsc.md
Valentina POSTOLACHI, Ph.D., associate professor,
„Ion Creangă" State Pedagogical University, Chișinău
ORCID ID: 0000-0002-1977-647X

CZU: 37.016:53+51
DOI: 10.46727/c.15-11-2024.p76-83

Abstract: The method of mathematical induction proves to be useful in solving a certain type of problems in physics. Using inductive reasoning, a certain formula is established based on the generalization of the results of three or four particular cases. The paper describes solutions to problems in different areas of physics. The process of solving such problems develops the scientific thinking style in students, develops the ability to build logical reasoning, analyze and generalize the results obtained.

Keywords: physics problems, method of mathematical induction**.**

Rezumat: Metoda inducției matematice se dovedește a fi utilă în rezolvarea unui anumit tip de probleme de fizică. Folosind raționamentul inductiv se stabilește o anumită formulă pe baza generalizării rezultatelor a trei sau patru cazuri particulare. În lucrare sunt descrise rezolvări ale problemelor din diferite domenii ale fizicii. Procesul de rezolvare a unor astfel de probleme dezvoltă stilul de gândire științifică la elevi, dezvoltă capacitatea de a construi raționament logic, de a analiza și a generaliza rezultatele obținute.

Cuvinte cheie: probleme de fizică, metoda inducției matematice.

În cercetarea științifică, este utilizată pe scară largă, pentru soluționarea diferitor probleme, o metodă bazată pe raționamentul inductiv, care se numește metoda de inducție. Cuvântul „inducție" tradus în limba română semnifică îndrumare, iar inductive sunt concluziile făcute pe baza observațiilor și experimentelor, adică obținute prin luarea în considerare a unor cazuri particulare și apoi extinderea factorilor observați la cazul general.

Metoda de inducție este folosită cu succes în fizică, în special în fizica experimentală. Analizând o cantitate suficient de mare de date experimentale, experimentatorii trag concluzii și afirmații veridice științifice. Această etapă în știința matematică este numită baza inducției sau inducției incomplete. Atunci când se utilizează inducția incompletă, se afirmă o concluzie generalizată sau o presupunere inductivă, a cărei validitate trebuie încă dovedită. Astfel, utilizarea inducției incomplete în cercetarea fizică este necesară, dar nu suficientă. Pentru a demonstra validitatea afirmațiilor obținute pe baza inducției incomplete, acestea ar trebui examinate din poziția de inducție matematică.

Principiul inducției matematice este următorul:

1. Se verifică validitatea enunțului pentru ***n* = *1*, *2*** și ***3***.
2. Se presupune că această afirmație este valabilă pentru ***n* = *k*.**
3. Valabilitatea acestei afirmații este dovedită pentru ***n* = *k* + *1***, ținând cont de validitatea ei presupusă pentru ***n* = *k***.

După aceasta, se ajunge la concluzia că afirmația este adevărată pentru orice număr natural ***n***.

Metoda inducției matematice se dovedește a fi utilă în rezolvarea unui număr de probleme din fizică. Folosind raționamentul inductiv, se stabilește o anumită formulă pe baza generalizării rezultatelor a trei sau patru cazuri particulare. În continuare, această formulă este studiată din perspectiva metodei inducției matematice.

Următoarele exemple explică modul de utilizare a metodei de inducție pentru a rezolva unele probleme din diferite domenii din fizică.

Problema 1. Un pasager, care stătea la marginea din față a trenului electric, care a început să se miște a observat că primul vagon a trecut pe lângă el în timp de $t_1 = 2$ s. Cât timp va dura trecerea la vagonul al douăzecilea? Mișcarea trenului este considerată a fi mișcare rectilinie uniform accelerată.

Soluţie:

Lungimea primului vagon $L = \frac{at_1^2}{2}$, deoarece viteza inţială este nulă ($v_0 = 0$). Lungimea celui de-al doilea vagon $L = v_1 t_2 + \frac{at_2^2}{2}$, aici $v_1 = at_1$ este viteza părții anterioare („capului”) a celui de-al doilea vagon atunci când acesta trece pe lângă observator, iar t_2 este timpul în care al doilea vagon trece pe lângă pasager. Este evident că vagoanele au aceeași lungime, adică:

$$\frac{at_1^2}{2} = v_1 t_2 + \frac{at_2^2}{2}; \text{ sau } \frac{at_1^2}{2} = at_{1_1} t_2 + \frac{at_2^2}{2},$$

de unde $t_2^2 + 2t_1 t_2 - t_1^2$;

rezolvând ultima relație relativ de t_2 obținem:

$$t_2 = t_1\left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) \qquad (1.1)$$

Pentru al treilea vagon vom avea:

$$L = v_2 t_3 + \frac{at_3^2}{2}; \text{ unde } v_2 = v_1 + at_2 = at_1 + at_2 = a(t_1 + t_2);$$

Este evident că lungimea primului vagon este egală și cu lungimea celui de al treilea vagon:

$$\frac{at_1^2}{2} = v_2 t_3 + \frac{at_3^2}{2} = a(t_1 + t_2)t_3 + \frac{at_3^2}{2};$$

Din ultima relație obținem: $t_3^2 + 2(t_1 + t_2)t_3 - t_1^2 = 0$; sau

$$t_3 = t_1\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \qquad (1.2)$$

Expresiile pentru t_2 *și* t_3 ne pun în evidență următoarea legitate pentru intervalul de timp t_n:

$$t_n = t_1\left(\sqrt{n} - \sqrt{(n-1)}\right) \qquad (1.3)$$

Înlocuind valorile numerice obținem:

$$t_{20} = 2(\sqrt{20} - \sqrt{19}) = 2s(4{,}47 - 4{,}36) = 0{,}22\ s$$

Răspuns: $\boldsymbol{t_{20} = 0,22\ s}$.

Problema 2. O mașină de curse („bolid") se mișcă cu o accelerație uniformă din starea de repaus. La parcurgerea primilor zece metri, viteza bolidului a crescut cu ***10 m/s***. Determinați creșterea vitezei bolidului în intervalul de la ***990 m*** la ***1000m*** și comparați cu creșterea vitezei în primii zece metri. Explicați discrepanța (deosebirea) lor semnificativă.

Se dă:
t= 0; V_o=0;
S_1=10 m;
ΔV=10 m/s;
V_1=10 m/s;
S_{99}=990 m;
S_{100}=1000 m;
ΔV_{100} - ΔV_{99} -?

La rezolvarea acestei probleme, folosim relația dintre variația vitezei și distanța parcursă (relație în care lipsește timpul – relația lui Galilei):

$$V^2 - V_0^2 = 2aS \quad (2.1)$$

Viteza bolidului după parcurgerea primului sector de zece metri (S = 10m), folosind relația lui Galilei (2.1), putem scrie:

$$V_1^2 = V_0^2 + 2aS = 0 + 2aS = 2aS; \qquad (2.2)$$

După parcurgerea următorului sector de 10 metri vom avea:

$$V_2^2 = V_1^2 + 2aS = 2aS + 2aS = 4aS = 2V_1^2; \quad (2.3)$$

După parcurgerea sectorului al trei-lea de 10 metri vom avea:

$$V_3^2 = V_2^2 + 2aS = 4aS + 2aS = 6aS = 3V_1^2; \qquad (2.4)$$

Din relațiile (2.2) – (2.4), observăm următoarea legitate:

$$V_n^2 = n\,V_1^2, \qquad (2.5)$$

De unde obținem realația dintre viteza V_n și viteza V_1:

$$V_n = (n)^{1/2}\,V_1 \qquad (2.6)$$

La parcurgerea primului sector de zece metri, viteza a crescut cu 10 m/s, iar pe sectorul al 100-lea, cu doar 0,5 m/s.

Această discrepanță se datorează faptului că sectoarele sunt parcurse cu viteze diferite.

La parcurgerea celui de-al suta segment de 10 metri lungime, viteza mașinii este de aproximativ 100 m/s (360km/h), și bolidul parcurge acești zece metri într-un interval de timp foarte scurt (0,1s), deci și viteza va creste foarte puțin (nesemnificativ).

La mișcarea uniform accelerată variația vitezei:

$$\Delta V = a * \Delta t, \qquad (2.9)$$

Din 2.9 determinăm timpul pentru ca „bolidul” să parcurgă sectorul de zece metri între bornele 990m și 1000m

$$\Delta t = \Delta V_{(100-99)} / a. \qquad (2.10)$$

Accelerația poate fi determinată din relația (2.2):

$$a = V_1^2 / 2S = 10^2 / (2 \cdot 10) = 5 \text{ м/с}^2, \qquad (2.11)$$

înlocuim valoarea accelerației pentru Δt obținem:

$$\Delta t = (0{,}5 m/s) / (5 m/s^2) = 0{,}1 s. \qquad (2.12)$$

Răspuns: $\Delta V_{(100-99)} = 0{,}5$ m/s

Problema 3. O pompă de vid cu piston (Figura 3) cu o cameră de lucru de volum **ΔV** este utilizată pentru a evacua aerul dintr-un vas cu volum **V** de la presiunea $\mathbf{P_0}$ la presiunea $\mathbf{P_n}$ **($\mathbf{P_n < P_0}$).** Determinați numărul de curse **n** ale pistonului care ar trebui efectuate în acest caz, pentru a obține presiunea $\mathbf{P_n}$. Se consideră că procesul de evacuare a aerului este **izoterm**.

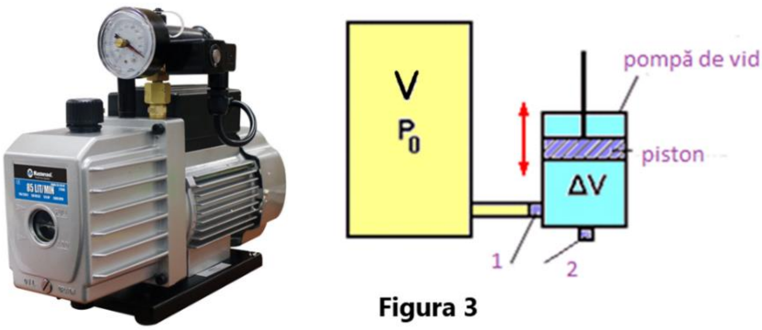


Figura 3

O pompă de vid reprezintă un dispozitiv care, în timpul funcționării, creează o presiune redusă în volumul camerei de lucru **ΔV** (de ordinul $\mathbf{10^{-3}}$ **-** $\mathbf{10^{-4}}$ **mm Hg**). Prin urmare, atunci când pompa este conectată la vasul din care se evacuează aerul, volumul total devine egal cu **V + ΔV**. Gazul se va dilata umplând ambele volume și deci presiunea scade. Apoi supapa **1** se închide, iar supapa **2** se va deschide pentru a evacua aerul cu volumul ΔV în atmosferă. Volumul „gol”, adică fără aer al camerei de lucru se reconectează din nou la volumul vasului. Are loc următoarea evacuare a gazului, care duce la următoarea scădere a presiunii etc.

Deoarece procesul este considerat izoterm, atunci, folosind legea Boyle - Mariotte, putem scrie relația pentru prima cursă:

$$P_0 V = P_1 (V + \Delta V), \qquad (3.1)$$

din care determinăm presiunea P_1 din vas după prima cursă a pistonului pompei

$$P_1 = P_0 V / (V + \Delta V). \qquad (3.2)$$

pentru cursa a doua a pistonului**:**

$$P_1 V = P_2 (V + \Delta V), \qquad (3.3)$$

din care determinăm presiunea P_2 din vas după cursă a doua a pistonului pompei:

$$P_2 = P_1 V / (V + \Delta V) = P_0 [V / (V + \Delta V)]^2 \qquad (3.4)$$

Procedăm analogic pentru cursa a treia a pistonului:

$$P_2 V = P_3 (V + \Delta V),$$

$$P_3 = P_2 V / (V + \Delta V) = P_0 [V / (V + \Delta V)]^3 \qquad (3.5)$$

Din analiza ecuațiilor (3.3), (3.4) și (3.5), se poate observa o dependență, care leagă presiunea din vas după cursa **n** a pistonului $\mathbf{P_n}$ cu presiunea inițială $\mathbf{P_0}$:

$$\mathbf{P_n = P_0 [V / (V + \Delta V)]^n} \qquad \mathbf{(3.6)}$$

Pentru a determina numărul de curse trebuie să logaritmăm relația (3.6):

$$\mathbf{lgP_n = lgP_0 + n\ lg\ [V / (V + \Delta V)],} \qquad \mathbf{(3.7)}$$

de unde: $$\mathbf{n = lg (P_n / P_0) / lg\ [V / (V + \Delta V)]} \qquad \mathbf{(3.8)}$$

Când presiunea din volumul pompat este egală cu presiunea din camera de lucru a pompei (10^{-3}-10^{-4} mm Hg), procesul de evacuare se oprește și pompa menține doar vidul atins.

Răspuns: $$n = \frac{lg\left[\frac{P_n}{P_0}\right]}{\lg\left(\frac{V}{V + \Delta V}\right)}$$

Problema 4. Determinați rezistența echivalentă a unui circuit infinit (Figura 4), care constă din rezistențe identice cu rezistența **R=5 Ω** fiecare.

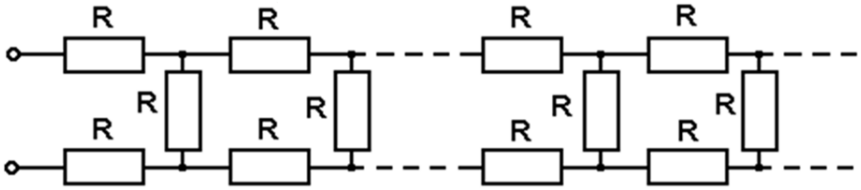
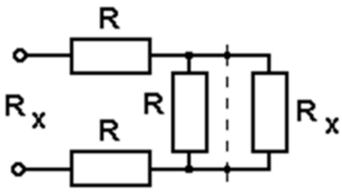


Figura 4

Pentru a determina rezistența echivalentă a circuitului, observăm că putem selecta un element comun din trei rezistențe, care se repetă la nesfârșit.



Evident, dacă îl separăm de circuit, atunci rezistența totală a circuitului practic nu se va modifica, deoarece numărul acestor elemente este infinit.

După ce am selectat elementul care se repetă în circuit și am înlocuit rezistența restului circuitului cu rezistența echivalentă R_X, obținem un circuit prezentat în figura de mai sus, a cărui rezistență este determinată de expresia:

$$\mathbf{R_X = 2R + RR_X / (R + R_X),} \qquad \mathbf{(4.1)}$$

sau $$\mathbf{R_X^2 - 2RR_X - 2R^2 = 0.} \qquad \mathbf{(4.2)}$$

Rezolvând această ecuație pătratică, obținem valoarea rezistenței echivalente:

$$\mathbf{R_{ecv} = R_X = R\,(1 + 3^{1/2}).} \qquad \mathbf{(4.3)}$$

Pentru **$R=5\Omega$**; **$R_X = 5\Omega(1+3^{1/2})=13,66\ \Omega$**

Răspuns: $R_{ecv} = R\,(1 + 3^{1/2})=$**13,66 Ω.**

Concluzii

Procesul de rezolvare a unor astfel de probleme prin metoda inducției matematice dezvoltă stilul de gândire științifică la elevi, iar problemele din fizică, special selectate prin metoda inducției, servesc ca mijloc de dezvoltare a capacității de a construi raționament logic, de a analiza și generaliza rezultatele obținute.

Lucrarea este elaborată în cadrul subprogramului de cercetare și inovare, cod 040103, finanțat de Ministerul Educației și Cercetării al Republicii Moldova.

Bibliografie

1. Anghel Sorin, ș.a. Metodica predării fizicii. București, 1995, 294 p., ISBN 973 96657-5-6
2. Butikov Evghenii. Fizica în exemple și probleme. Ed. a 3-a corectată și completată, Petrolife. 2008. – 516 p.
3. Igropulo V.S. Fizica: algoritmi, probleme, soluții: un manual pentru toți cei care studiază si predau fizica, 2005. – 592 p. ISBN 5-93078-026-9.