NUMERE RAȚIONALE CE NU SE REPREZINTĂ CA SUMĂ DE FRACȚII RAȚIONALE UNITARE

RATIONAL NUMBERS THAT ARE NOT REPRESENTED AS THE SUM OF UNIT RATIONAL FRACTIONS

Boris ȚARĂLUNGĂ, dr., conf. univ.,
UPS „Ion Creangă” din Chișinău
ORCID: 000-0002-2477-9736
taralunga.boris@upsc.md

Boris ȚARĂLUNGĂ, Associate Professor,
„Ion Creangă” SPU of Chisinau

CZU: 511.11
DOI: 10.46727/c.v4.21-22-03-2024.p68-72

Abstract. In this paper is studies rational numbers that are not reprezented as the sum of unit rational fractions.
Keywords: rational numbers; unit rational fractions,natural solutions.

Problema reprezentării numerelor raționale ca sumă de fracții raționale unitare este abordată în lucrările [1-8]. În literatura de specialitate este bine cunoscută conjectura: pentru care numere naturale m, n există numerele naturale $x,\ y, z,$ încât să se verifice egalitatea $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{m}{n}$. Dacă $m=4$, atunci avem conjectura Erdos- - Strauss. Dacă $m=5$, atunci avem conjectura Sierpinski. Pentru m =6, 7, atunci se obține conjectura Aigner. În lucrarea [3] pentru $m \in \{8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$ se arată că există ecuaţii care nu au soluții naturale. În [7] se demonstrează că pentru $m=19$ există ecuaţii care nu au soluţii naturale.

În lucrarea dată se studiază soluţiile naturale ale ecuaţiei

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{m}{n}$, pentru $m=22{,}23{,}24$.

Teorema 1. Ecuația

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{22}{23}$$

nu are soluții în mulțimea numerelor naturale.

Demonstrație. Vom considera, că $x \geq y \geq z$. Cum $\frac{1}{z}<\frac{22}{23}$, rezultă că $z \geq 2$. Analog, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq \frac{3}{z}$. Atunci $\frac{22}{23} \leq \frac{3}{z}$, de unde $z \leq 3$. Deci $z \in \{2,3\}$.

1. Fie $z=2$. Substituim și obținem ecuația

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{21}{46}$.

Din această ecuație rezultă ecuaţia

$y=2+\frac{4x+92}{21x-46}$.

Pentru $21x - 64 > 4x + 92$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x < 10$. Atunci $x \in \{3,4,5,6,7,8,9\}$. Prin verificări directe se arată că ecuaţia dată nu are soluţii naturale.

2. Fie $z = 3$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{43}{69}.$$

Din această ecuație rezultă ecuaţia

$$y = 1 + \frac{26x+69}{43x-69}.$$

Pentru $43x - 69 > 26x + 69$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x < 9$. Atunci $x \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$. Prin verificări directe se arată că ecuaţia dată nu are soluţii naturale. Teorema este demonstrată.

Teorema 2. Ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{22}{29}$$

are soluția $(x, y, z) \in \{(2,4,116)\}$.

Demonstraţie. Vom considera că $x \geq y \geq z$. Deoarece $\frac{1}{z} < \frac{22}{29}$, rezultă că $z \geq 2$. Analog, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{z}$. Atunci $\frac{22}{29} \leq \frac{3}{z}$, de unde $z \leq 3$. Deci $z \in \{2,3\}$.

1. Fie $z = 2$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{58}.$$

Din această ecuație rezultă ecuaţia

$$y = 3 + \frac{13x+174}{15x-58}.$$

Pentru $15x - 58 > 13x + 174$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x > 116$. Atunci $x \in \{4,5,\dots,115,116\}$. Dacă $x = 4$, atunci $y = 116$. Dacă $x = 116$, atunci $y = 4$. Pentru celelalte valori ale x nu avem soluţii naturale.

2. Fie $z = 3$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{37}{87}.$$

Din această ecuație rezultă ecuaţia

$$y = 2 + \frac{13x+174}{37x-87}.$$

Pentru $37x - 87 > 13x + 174$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x > 10$. Atunci $x \in \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Prin verificări directe se arată că ecuaţia dată nu are soluţii naturale. Teorema este demonstrată.

Teorema 3. Ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{23}{25}$$

nu are soluții în mulțimea numerelor naturale.

Demonstrație. Considerăm că $x \geq y \geq z$. Deoarece $\frac{1}{z} < \frac{23}{25}$, rezultă că $z \geq 2$. Analog, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{z}$. Atunci $\frac{23}{25} \leq \frac{3}{z}$, de unde $z \leq 3$. Deci $z \in \{2,3\}$.

Avem următoarele cazuri:

1. Fie $= 2$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{21}{50}.$$

Din această ecuație rezultă ecuaţia

$y = 2 + \frac{8x+100}{21x-50}$.

Pentru $21x - 50 > 8x + 100$, ecuația dată nu are soluții naturale. Deci obținem $x > 11$. Atunci $x \in \{3,4, \dots ,11\}$. Prin verificări directe se arată că ecuaţia dată nu are soluţii naturale.

2. Fie $z = 3$. Substituim și obținem ecuația

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{44}{75}$.

Din această ecuație, rezultă ecuaţia

$$y = 1 + \frac{31x + 75}{44x - 75}$$

Pentru $44x - 75 > 31x + 75$, ecuația dată nu are soluții naturale. Deci obținem $x > 11$. Atunci $x \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. Prin verificări directe, se arată că ecuaţia dată nu are soluţii naturale. Teorema este demonstrată.

Teorema 4. Ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{23}{24}$$

are soluția $(x, y, z) \in \{(2,3,8)\}$.

Demonstrație. Vom considera că $x \geq y \geq z$. Cum $\frac{1}{z} < \frac{23}{24}$, rezultă că $z \geq 2$. Analog, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{z}$. Atunci $\frac{23}{24} \leq \frac{3}{z}$, de unde $z \leq 3$. Deci $z \in \{2,3\}$.

1. Fie $z = 2$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{11}{24}.$$

Din această ecuație rezultă ecuaţia

$$y = 3 + \frac{2x+48}{11x-24}.$$

Pentru $11x - 24 > 2x + 48$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x > 8$. Atunci $x \in \{3,4,5,6,7,8\}$. Dacă $x = 3$, atunci $y = 8$. Dacă $x = 8$, atunci $y = 3$. Pentru celelalte valori ale x nu avem soluţii naturale.

2. Fie $z = 3$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{8}.$$

Din această ecuație rezultă ecuaţia

$$y = 1 + \frac{3x+8}{5x-8}.$$

Pentru $5x - 8 > 3x + 8$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x > 8$. Atunci $x \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$. Dacă $x = 3$, atunci $y = 8$. Dacă $x = 8$, atunci $y = 3$. Pentru celelalte valori ale x nu avem soluţii naturale. Teorema este demonstrată.

Teorema 5. Ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{24}{25}$$

nu are soluții în mulțimea numerelor naturale.

Demonstrație. Considerăm că $x \geq y \geq z$. Deoarece $\frac{1}{z} < \frac{24}{25}$, rezultă că $z \geq 2$. Analog, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{z}$. Atunci $\frac{24}{25} \leq \frac{3}{z}$, de unde $z \leq 3$. Deci $z \in \{2,3\}$.

Avem următoarele cazuri:

1.Fie $z = 2$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{23}{50}.$$

Din această ecuație rezultă ecuaţia

$$y=2+\frac{4x+100}{23x-50}.$$

Pentru $23x-50>4x+100$, ecuația dată nu are soluții naturale. Deci obținem $x>7$. Atunci $x\in\{3,4,5,6,7\}$. Prin verificări directe se arată că ecuaţia dată nu are soluţii naturale.

2. Fie $z=3$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{47}{75}.$$

Din această ecuație, rezultă ecuaţia

$$y=1+\frac{28x+75}{47x-75}$$

Pentru $47x-75>28x+75$, ecuația dată nu are soluții naturale. Deci obținem $x>7$. Atunci $x\in\{2,3,4,5,6,7\}$. Prin verificări directă se arată că ecuaţia dată nu are soluţii naturale. Teorema este demonstrată.

Teorema 6. Ecuația

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{24}{41}$$

are soluția $(x,y,z)\in\{(2,12,492),(4,3,492)\}$.

Demonstrație. Vom considera, că $x\ \geq\ y\geq z$. Deoarece $\frac{1}{z}<\frac{24}{41}$, rezultă că $z\geq 2$. Analog, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{3}{z}$. Atunci $\frac{24}{41}\leq\frac{3}{z}$, de unde $z\leq 5$. Deci $z\in\{2,3,4,5\}$.

1. Fie $z=2$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{82}.$$

Din această ecuație rezultă ecuaţia

$$y=11+\frac{5x+902}{7x-82}.$$

Pentru $7x-24>5x+902$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x>492$. Atunci $x\in\{12,13,\dots,491,492\}$. Dacă $x=12$, atunci $y=492$. Dacă $x=492$, atunci $y=12$. Pentru celelalte valori ale x nu avem soluţii naturale.

2. Fie $z=3$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{31}{123}.$$

Din această ecuație rezultă ecuaţia

$$y=3+\frac{30x+369}{31x-123}.$$

Pentru $31x-123>30x+369$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x>492$. Atunci $x\in\{4,5,\dots,491,492\}$. Dacă $x=4$, atunci $y=492$. Dacă $x=492$, atunci $y=4$. Pentru celelalte valori ale x nu avem soluţii naturale.

3. Fie $z=4$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{55}{164}.$$

Din această ecuație rezultă ecuaţia

$$y=2+\frac{54x+328}{55x-164}.$$

Pentru $55x - 164 > 54x + 328$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x > 492$. Atunci $x \in \{3,4,5, \ldots ,491,492\}$. Dacă $x = 3$, atunci $y = 492$. Dacă $x = 492$, atunci $y = 3$. Pentru celelalte valori ale x nu avem soluţii naturale.

4. Fie $z = 5$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{79}{205}.$$

Din această ecuație rezultă ecuaţia

$$y = 2 + \frac{47x+410}{79x-205}.$$

Pentru $79x - 205 > 47x + 410$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x > 19$. Atunci $x \in \{3,4,5, \ldots ,18,192\}$. Prin verificări directe se arată că ecuaţia dată nu are soluţii naturale. Teorema este demonstrată.

Concluzie. Din rezultatele enunțate mai sus rezultă că conjectura formulată este falsă pentru $m = 22,23,24$. Cu toate acestea, pentru unele valori ale numitorului conjectura este adevărată. Apare în mod natural întrebarea: Pentru care valori naturale ale numitorului n ecuațiile cu numărătorii 22, 23, 24 au soluții și pentru care valori naturale ale lui n ecuațiile date nu au soluții în mulțimea numerelor naturale?

BIBLIOGRAFIE

1. AIGNER A. Brucheh als Summs von Stammbruchen, J. reine angew. Math. 214/215, 174-179 (1964).
2. BERNSTEIN L. Zur Losung der diophantinschen Gleichung $\frac{m}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ insbesondere, im Falle $m = 44$, J.reine angew. Math. 211,1-10(1962)
3. BROWN S. On a rational fractions not expressible as asum of three unit fractions. Notes on Number Theory and discret mathematics. ISSN 1310-5132, Vol.29,2014, No ,2,61-64
4. ERDOS P, On a diophantine equation , Mat. Lapok,1,192-210(1950).
5. PALAMA G. Su di una congettura di Sierpinski relativa alla possibilita in numere naturali de la $\frac{5}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, Boll. Un. Mat . Ital., 13,65-72 (1958).
6. SIERPNSCKI W. Sur les decomposition de nombres rationnels en fractions primaires, Mathesis 65,16-32 (1956).
7. ŢARĂLUNGĂ B. Despre soluţiile ecuaţiei diofantiene $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{19}{n}$. Materialele Conferinței Ştiinţifice Internaţionale “Abordări inter/transdisciplinare în predarea ştiinţelor reale concept (Steam), ediţia a doua, 28-29 octombrie 2022, Chişinău, Republica Moldova, p.160-162. ISBN 978-9975-81-074-6.
8. ŢARĂLUNGĂ B. Despre conjectura $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{b}$. Materialele Conferinței Ştiinţifice Internaţionale “Abordări inter/transdisciplinare în predarea ştiinţelor reale (concept Steam), ediţia a 3-a, 27-28 octombrie 2023, Chişinău, Republica Moldova, p.138--140. ISBN 978-9975-46-813-8.