PROBLEME DE CONSTRUCȚIE ÎN MATEMATICA GIMNAZIALĂ

CONSTRUCTION PROBLEMS IN HIGH SCHOOL MATHEMATICS

Gabriela MARCHITAN, inspector școlar,
IȘJ Vrancea România
ORCID: 0000-0001-6665-7927
gabriela.marchitan@gmail.com

Gabriela MARCHITAN, school inspector,
ISJ Vrancea, Romania

CZU: 373.5.016:514
DOI: 10.46727/c.v4.21-22-03-2024.p136-142

Abstract. It is difficult to estimate the role of construction problems in the intellectual education of students. Construction problems can contribute to students' correct intuition of the way of the appearance and evolution of the given object, their ability to model themselves, which substantially contributes to the development of students' spatial thinking, develops logical thinking and geometric intuition. The plan for solving a construction problem is a chain of logical steps: analysis, construction, research, demonstration - nothing more than an algorithm. The mathematics teacher in the process of solving construction problems can quite effectively form elements of algorithmic culture by systematically asking students to strictly follow all the steps - all the basic constructions necessary for solving the given problem. Construction problems develop in students the skills of research and solving practical didactic tasks, attach them to independent research work according to their strengths and according to their knowledge in a continuously ascending hierarchy in accordance with the educational stage at the given time, which is very important in the work of forming a culture of intellectual work.
Keywords: construction problem, analysis, construction, research, proof, algorithmic mathematics education.

În literatura didactic-metodică, autorii menționează că elevii au competențe insuficiente de a rezolva probleme de construcție. Unul din motivele principale ale acestei carențe este că astfel de probleme se rezolvă separat de studiul teoriei și separat de efectuarea nemijlocită a desenului propriu-zis. Rezolvarea problemelor nu are loc în contextul temei, ci în afara studiului figurilor geometrice. Încep să fie soluționate după ce a avut loc studiul teoretic al temei respective, la finalul temei puse în discuție. În consecință, din geometria studiată „*dispare*” geometria construcțiilor figurilor studiate și rămâne doar un antrenament al memoriei.

Particularitățile compartimentului *geometria* necesită ca problemele de construcție să reprezinte partea organică a cursului dat. O astfel de atitudine se fundamentează și de teoria cunoașterii, care necesită studiul faptelor în evoluția lor firească: apariție, studiere, dezvoltare, confirmare.

Este greu de a estima rolul problemelor de construcție în educația intelectuală a elevilor. Ele, prin modul lor de formare a conceptelor și metodelor de soluționare a situației de problemă, nu numai contribuie la achiziționarea reprezentărilor geometrice, dar și dezvoltă capacitatea de a imagina clar o anumită figură sau corp geometric în cele mai variate ipostaze, de a opera competent cu elementele caracteristice ale figurii date. Problemele de construcție pot contribui la intuirea corectă de către elevi a căii de apariție și evoluție a obiectului dat, la posibilitatea lor de a se modela, ceea ce conduce substanțial la dezvoltarea cugetării spațiale a elevilor, dezvoltă gândirea logică și intuiția geometrică. Planul de soluționare a unei probleme de construcție este un lanț de pași logici – construcții de bază conducând corect pe calea soluționării problemei în cauză –, care nu sunt altceva decât un algoritm. Profesorul de matematică, în procesul de soluționare a problemelor de construcție, poate forma destul de eficient elemente de cultură algoritmică, cerând de la elevi să urmeze în mod strict toți pașii – toate construcțiile de bază necesare pentru soluționarea problemei date. Problemele de construcție dezvoltă la elevi competențele de cercetare și soluționare a sarcinilor didactice practice, îi deprind cu munca de cercetare independentă în funcție de cunoștințele lor și în conformitate cu etapa educațională a momentului, ceea ce este foarte important în opera de formare a unei culturi de muncă intelectuală. Prin intermediul problemelor de construcție, fie chiar și al celor mai simple, elevii înțeleg fundamentele teoretice cu referire la principalele figuri geometrice, deoarece, în procesul lor de soluționare, ei formează modelul intuitiv al proprietăților și relațiilor studiate și lucrează creativ cu ele. Problemele de construcție dezvoltă, totodată, astfel de calități ale personalității ca: atenția, insistența, perseverența, inițiativa, inventivitatea, disciplina de muncă.

În continuare, propunem în atenția rezolvitorului, prin sarcinile didactice practice, aproape toate problemele fundamentale de construcție care se studiază în cursul de geometrie gimnazială în diverse variante. Astfel, construind paralelogramul după unele anumite elemente, punem problema să construim un paralelogram, congruent cu cel dat, după alte elemente. Desenul efectuat poate servi pentru obținerea noilor cunoștințe și pentru rezolvarea problemelor. Este clar că problemele de construcție, fiind destul de accesibile și înțelese după modalitatea de creare a situației de problemă, începând cu clasa a V-a, când elevii se familiarizează cu definițiile figurilor/corpurilor și, totodată, fiind destul de bogate și variate după conținutul lor logic și matematic, devin un adevărat laborator de creație și cercetare în miniatură. În matematica gimnazială recomandăm de a păstra cu strictețe algoritmul logic de soluționare a unei probleme de construcție cu toate cele patru etape ale ei: analiza, construcția, demonstrația și cercetarea, deși în linii generale. Unui elev din clasele V-VII, care nu dispune încă de un arsenal bogat și variat de experiență de a demonstra, cu atât mai mult de a cerceta, îi vine destul de greu. Din aceste considerente, autorii insistă ca în procesul de soluționare a unei probleme de construcție să se păstreze logica strictă a primelor două etape, iar celelalte două – doar parțial și tangențial, în conformitate cu nivelul cunoștințelor elevului, capacitatea lui de cugetare, modalitatea lui de a analiza, transforma și modela situația după cerințele înaintate.

Inițial, trebuie să atragem atenția asupra faptului ca elevii să familiarizați cu modalitatea de realizare a celor mai simple construcții:

a) construirea unui segment congruent cu segmentul dat;

b) construirea unui unghi congruent cu unghiul dat;

c) împărțirea unui segment în două părți congruente (*construirea mediatoarei unui segment dat*); împărțirea unui segment în mai multe părți congruente; împărțirea unui segment în mai multe părți proporționale în raport cu mărimile date;

d) construirea unghiurilor de o măsură dată: 30°, 45°, 60°, 90°;

e) împărțirea unui unghi în două părți congruente (*construirea bisectoarei unui unghi dat*); împărțirea unui unghi drept în părți egale cu măsurile 30°, 45°, 60° (*împărțirea unui unghi drept în două și trei părți congruente*);

f) construirea unui cerc/disc congruent cu cel dat;

g) construirea unui cerc/disc după raza dată; construirea prin două puncte date a unui cerc de raza dată;

h) construirea perpendicularei la o dreaptă dată dintr-un punct dat pe ea;

i) construirea perpendicularei la o dreaptă dată dintr-un punct dat ce nu aparține dreptei date;

k) determinarea centrului unui cerc/disc dat sau a unui arc dat;

l) construirea unui cerc prin trei puncte necolineare (*construirea unui triunghi înscris în cerc*);

m) construirea tangentei la cerc/disc într-un punct dat ce aparține cercului:;

n) construirea unui pătrat după latura dată.

Problemele de construcție contribuie substanțial la rezolvarea multor obiective pedagogice:

a) elevii iau cunoștință de aplicarea practică a cunoștințelor teoretice studiate;

b) cunoștințele lor teoretice se extind, se aprofundează, se sistematizează și se fundamentează logic, în final, ele se fortifică prin afirmarea practică;

c) elevii asimilează profund una dintre ideile fundamentale ale didacticii matematicii și dialecticii gândirii: dependența funcțională și algoritmică dintre mărimile prezentate;

d) soluționarea problemelor de construcție ca un proces de creativitate la un nivel înalt ce contribuie la formarea competențelor de lucru independent;

e) soluționarea problemelor de construcție este un proces sigur și concret de verificare și evidență a cunoștințelor elevilor.

În practica de soluționare a problemelor de construcție se practică următoarele metode:

1. *Soluționarea problemei prin cele mai variate procedee*. Acest procedeu este unul destul de important în activizarea activității cognitive, a tăriei de caracter, insistenței și a altor caracteristici ale personalității elevilor. Profesorul trebuie doar să urmărească mersul lucrului independent al elevilor și să stimuleze pe cei ce descoperă căi non-standard de soluționare, anume aplicând toate etapele de soluționare a unei probleme de construcție: analiza, construcția, demonstrarea și cercetarea.

2. *Folosirea unei probleme ca algoritm pentru soluționarea altor probleme tipice.* Este o cale de a educa la elevi aplicarea algoritmilor în activitatea lor independentă, ceea ce oferă posibilitatea de a folosi o tratare diferențiată în instruirea elevilor. Astfel, de multe ori, în enunțul problemei trebuie efectuate unele corectări și adaosuri/substituții/schimbări neesențiale, prin intermediul cărora se poate obține o serie de probleme în lanț, care se rezolvă în mod analog după același algoritm de lucru, însă cu o ierarhie strictă de sporire a complicității. Rezolvând prima problemă în colectiv printr-o discuție constructivă euristică, elevii deja obțin un reper pentru lucru de mai departe. Soluționând cea de-a doua problemă, elevii pot să purceadă la soluționarea celei de-a treia etc. Elevilor mai dotați profesorul le poate oferi însărcinări mai dificile.

De exemplu:

Pr. nr. *1, 2, 3*:

1. Construiți triunghiul după două unghiuri: $\angle A = \alpha$ și $\angle B = \beta$ și înălțimea $|CD| = h$, coborâtă din vârful celui de-al treilea unghi.

2. Construiți triunghiul după două unghiuri: $\angle A = \alpha$ și $\angle B = \beta$ și înălțimea $|CD| = h_a/(h_b)$.

3. Construiți triunghiul după două unghiuri: $\angle A = \alpha$ și $\angle B = \beta$ și mediana m_c coborâtă din vârful celui de-al treilea unghi. Problemele au soluționări analogice.

Legende la sarcinile didactice din exemplul nr. 1:

1. a) Imaginați-vă un segment *AB = 12 cm*. Pe acest segment este fixat punctul *X*, care se află pe dreapta dată. În ce segmente de lungime naturală poate fi împărțit segmentul *AB* de punctul *X?* b) În câte segmente poate fi divizat segmentul *AB = 10 cm* de două puncte *X* și *Y* (distanța dintre ele, precum și cea dintre aceste puncte și capetele segmentului *AB* pot fi exprimată prin numere naturale), care se află pe dreapta dată în ordinea alfabetică*?* În ce segmente de lungime naturală poate fi împărțit segmentul *AB* de punctele *X* și *Y?*

2. a) Imaginați-vă dreapta *AB*. Pe ea sunt fixate două puncte *X* și *Y*. În ce figuri geometrice aceste două puncte vor diviza dreapta dată*?* b) Este dată semidreapta *OD*. Pe ea sunt notate două puncte *A* și *B*. În ce figuri geometrice aceste două puncte pot împărți semidreapta *OD?*

3. Construiți un segment cu lungimea de *AB = 17 cm*. Notați pe acest segment punctul *C* astfel, încât lungimea segmentului *AC* să fie cu 1 cm mai lungă (scurtă) decât cea a segmentului *BC*.

4. Construiți un segment *AB* de o lungime arbitrară. Construiți segmentul *CD*, lungimea căruia este cu *1 cm* mai lung decât segmentul *AB*, apoi segmentul *DE*, lungimea căruia este cu *1 cm* mai scurt decât segmentul *AB*. Dacă aduni lungimile acestor trei segmente, obții *24 cm*. Determină lungimea segmentului inițial. Scrie rezolvarea sub formă algebrică, adică printr-o ecuație.

5. *JD:* Profesorul construiește pe tablă semidreapta *OA*, apoi de la punctul *O* (originea semidreptei) depune 6 segmente câte *20 cm* (elevii construiesc segmente de lungimea *20 mm*). În continuare, partea stângă a desenului se șterge și rămâne doar direcția semidreptei (punctul *A*) și *4* diviziuni a câte *20 cm*. Fără a utiliza rigla cu gradații, trebuie restabilit desenul inițial construit.

6. a) Profesorul construiește pe tablă segmentul *AB = 70 cm*. Elevii trebuie să determine mijlocul acestui segment. După ce punctul care desemnează mijlocul segmentului – punctul *C* – a fost construit, profesorul șterge desenul executat din ambele părți ale punctului *C* și cere ca elevii să determine poziția punctelor inițiale *A* și *B*. Care trebuie să fie activitățile de construcție a desenului ale elevilor? b) Profesorul construiește pe tablă segmentul *CD = 60 cm*. Apoi pune în fața elevilor problema: Cum de construit pe acest segment două puncte *M* și *N* astfel, încât segmentul inițial *CD* să fie divizat exact în trei părți egale? După ce elevii au rezolvat corect problema și au determinat poziția acestor două puncte, profesorul șterge o parte din segmentul inițial *CD* din ambele capete ale lui. Se cere de a determina poziția inițială a punctelor *C* și *D*.

7. Este dat un segment. Se consideră că acest segment este diametrul unui cerc. Construiți cercul dat. Care trebuie să fie pașii logici în această activitate de construcție a cercului?

8. Construiți un cerc. În cerc construiți o rază. Pe această rază construiți un unghi de mărimea 120° cu vârful în centrul cercului, apoi pe cea de-a doua latură a unghiului format se

repetă aceeași operație de 2 ori. Notați punctele de pe cerc obținute prin literele *A, B, C*. Câte arce de cerc puteți citi? Dar câte sectoare?

9. Profesorul a construit pe tablă $\angle AOB$ cu mărimea de *120°*. Prin semidreptele *OC* și *OD* $\angle AOB$ a fost împărțit fix în 3 părți egale. În continuare, profesorul a șters de pe tablă semidreptele *OA* și *OB.* Se pune problema de a restabili unghiul inițial. Care sunt pașii logici necesari?

10 Profesorul construiește un dreptunghi pe tablă cu dimensiunile de $2a\times a$. Apoi șterge de pe tablă trei laturi, lăsând doar o lățime. El cere de a restabili construcția. Care pot fi pașii logici de restabilire a construcției inițiale?

11. Avem o bucată de sârmă. Doar cu ajutorul unui unghi drept trebuie construită imaginea unui pătrat. Care sunt pașii logici necesar?

12. Construim două pătrate identice cu dimensiunile: 2×2 (cm). Primul pătrat îl împărțim în 4 sferturi după axele simetrice ale laturilor. Al doilea pătrat îl împărțim în 4 sferturi după diagonalele pătratelor. Care sfert al pătratului are aria mai mare: cel obținut după axele de simetrie sau cel obținut după diagonale?

13. Construiți tabloul unei pisici folosind doar triunghiuri.

14. Din două tăieturi puteți descompune triunghiul echilateral în părți din care se poate mai apoi construi prin pliere un pătrat?

15. Elevii au primit însărcinarea de a împărți un teren de formă dreptunghiulară $a\times 2a$ doar cu două linii în patru părți astfel, încât să obțină două triunghiuri și două patrulatere. Elevii s-au descurcat. Dar tu?

16. Construiește un dreptunghi aria căruia este egală cu *1200 cm. p.*, iar suma lungimilor laturilor cu *260 cm* (variantă: *18 cm. p.* și *38 cm*).

17. Este dat unghiul *ABC* și în partea interioară a lui un punct *M*. Construiți prin acest punct două drepte astfel, încât segmentele care aparțin lor cu segmentele care aparțin laturilor unghiului dat să formeze un paralelogram.

18. Este dat triunghiul *ABC*. Construiți un paralelogram cu lungimea unei laturi egale cu *m*, astfel încât un unghi a lui să coincidă cu unghiul *A* a triunghiului dat, iar vârful unghiului opus unghiul *A* al triunghiului să se afle pe latura *BC*. (Cercetați cazurile când problema admite o soluție, două soluții, nu admite soluții)

19. Construiți un paralelogram după un unghi, o latură și înălțimea, coborâtă pe această latură.

20. Construiți un paralelogram după un unghi, înălțimea și o diagonala opusă acestui unghi, coborâtă pe această latură.

21. Construiți un paralelogram după un unghi, înălțimea și diagonala construită din acest unghi.

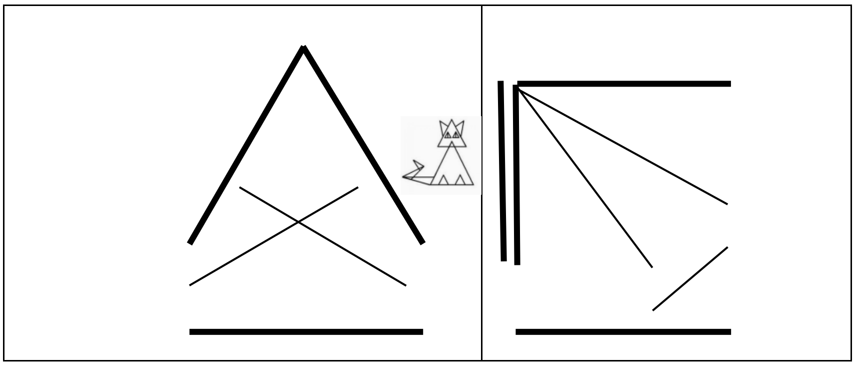
22. Construiți rombul astfel, încât două laturi ale lui să aparțină la două drepte paralele *AB* și *CD,* iar diagonala – pe dreapta *MN*, care intersectează dreptele *AB* și *CD.*

23. Cum de determinat măsura unui unghi dat, la care o parte a lui la un loc cu vârful lipsește?

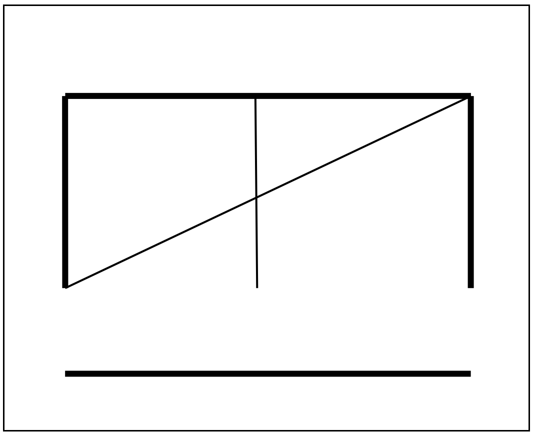
24. Dintr-o foaie de metal a fost tăiat un patrulater cu toate laturile de lungimi egale între ele. Cum se poate convinge, fără a măsura măsurile unghiurilor, că acest patrulater este pătrat?

Răspunsuri la sarcinile didactice din exemplul nr. 1:

1.a) $d \in \{(1,11);(2,10);(3,9);(4,8);(5,7);(6,6)\}$; b) $d \in \{(1,1,8);(1,2,7);(1,3,6);(1,4,5);(2,2,6);(2,3,5);(2,4,2);(2,4,2);(2,5,3)\}$. **2.** a) Un segment *AB* și 4 semidrepte: *XA* și *XB*, *YA* și *YB*; b) În trei segmente: OA, OB, AB și două semidrepte: *AD* și *BD*. **3**. *AB = 6 cm, BC = 5 cm* (*AB = 5 cm, BC = 6 cm*). **4**. *8 cm. a + (a + 1) + (a – 1) = 24* ⇔ *3a = 24* ⇔ *a = 24:3* ⇔ *a = 8*. **5.** Inițial, trebuie de prelungit în stânga dreapta de pe desen. De la prima diviziune din stânga (ultima diviziune din dreapta) trebuie depuse pe linia dreaptă încă 2 segmente egale cu cele din construcția dată. Ultimul punct din stânga obținut este punctul *O*. **6**. a) Inițial, elevii trebuie să construiască în ambele părți de la punctul *C* prelungiri ale părții de linie dreaptă rămasă. Apoi, de la punctul *C*, în ambele părți, trebuie depus câte un segment de o lungime egală cu 35 cm. Punctele obținute vor desemna pozițiile punctelor *A* și *B*. b) Inițial, elevii trebuie să construiască în ambele părți de la punctele *M* și *N* prelungiri ale părții de linie dreaptă rămasă. Apoi, de la punctele *M* și *N*, în ambele părți trebuie depus câte un segment de o lungime egală cu *20 cm*. Punctele obținute vor desemna pozițiile punctelor *C* și *D*. **7**. Inițial, cu ajutorul riglei și compasului, se construiește punctul care desemnează centrul cercului. În continuare, cu ajutorul compasului, se construiește cercul căutat. **8**. 6 arce și 6 sectoare. *Indicație:* Fiecare arc de cerc poate fi citit în două variante: unul mic subîntins de laturile unghiului de mărimea de 120° și altul mare subîntins de laturile unghiului de mărimea de 240°. Astfel de perechi de unghiuri sunt trei, prin urmare, sunt 6. La fel și sectoarele de cerc tot sunt 6. **9**. Se construiesc de o parte și de cealaltă parte unghiuri congruente cu cel rămas construit pe tablă $\angle COD$, fie cu ajutorul raportorului și riglei, fie cu ajutorul riglei și compasului. **10**. Cu ajutorul a unui echer sau a riglei și compasului trebuie construite în capetele segmentului de pe tablă, de aceeași parte a segmentului dat, unghiuri drepte. Pe laturile unghiurilor drepte ce depun, cu ajutorul compasului, câte două lungimi de ale segmentului de pe tablă. Unind punctele obținute, se capătă dreptunghiul căutat. **11**. Bucata de sârmă se îndoaie fix în două, apoi în patru părți. Din părțile (segmentele liniei frânte) de sârmă obținute se construiește imaginea pătratului căutat. **12**. Ariile lor sunt egale. **13**. Iată un astfel de exemplu**. 14**. Iată cum se poate decupa triunghiul echilateral în patru părți, din care apoi se poate construi un pătrat:



15. Iată cum au împărțit elevii terenul:



16. Dreptunghiul trebuie să aibă laturile *10×120* (*1×18).* **17**. Liniile drepte se construiesc paralel cu laturile unghiului dat. **18**. Problema admite o singură soluție în cazul când una dintre laturile triunghiului dat are o lungime mai mare decât *m*. Problema admite două soluții în cazul când ambele laturi ale triunghiului dat au o lungime mai mare decât *m*. Problema nu admite soluții când niciuna dintre laturile triunghiului dat nu are o lungime mai mare decât *m*. În cazul când admite soluții, se depune pe una/două laturi un segment de lungimea *m*, apoi se construiește o dreaptă paralelă cu latura triunghiului etc. **19**. Se construiește unghiul dat după mărimea dată; pe una dintre laturi se construiește latura dată și, la o distanță egală cu înălțimea dată, ce construiește o paralelă la latura construită etc. **20**. Se construiește unghiul dat după mărimea dată; la o distanță egală cu înălțimea dată ce construiește o paralelă la latura construită și din punctul de intersecție al dreptei paralele cu latura unghiului se construiește diagonala dată până la intersecția cu cealaltă latură a paralelogramului etc. **21**. Se construiește unghiul dat după mărimea dată; la o distanță egală cu înălțimea dată ce construiește o paralelă la latura construită și din vârful unghiului construit se construiește diagonala dată până la intersecția cu linia paralelă etc. **22**. Ce construiesc segmente egale de o lungime mai mare decât distanța dintre dreptele paralele de o parte și de alta a dreptei *MN*, apoi capetele segmentelor se unesc. **23**. Se prelungesc laturile unghiului până la intersecția lor într-un punct sau se selectează pe una dintre laturi un punct, prin care se construiește o dreaptă paralelă la cealaltă latură. **24**. Este suficient de a compara egalitatea lungimilor diagonalelor lui.

BIBLIOGRAFIE

1. Dăncilă Ioan. *Geometria de care ai nevoie la școală, la examene, la concursuri.* București: Teora, 1997, 312 p. ISBN: 973-601-574-2
2. Dăncilă Ioan. *Matematica gimnaziului între profesor și elev.* București: Corint, 1996, 289 p. ISBN: 973-97792-6-3
3. Guran Eugen. *Matematică recreativă*. Iași: Junimea, 1985, 213 p.
4. Martinov Armand. *Frumusețe matematică.* București: Sigma, 2011, 116 p.
5. Van der Varden B.L. *Știință în deșteptare. Matematica Egiptului, Babilonului și Greciei Antice*. Moscova: Fiz-mat,1959, 459 p. (în rusă)