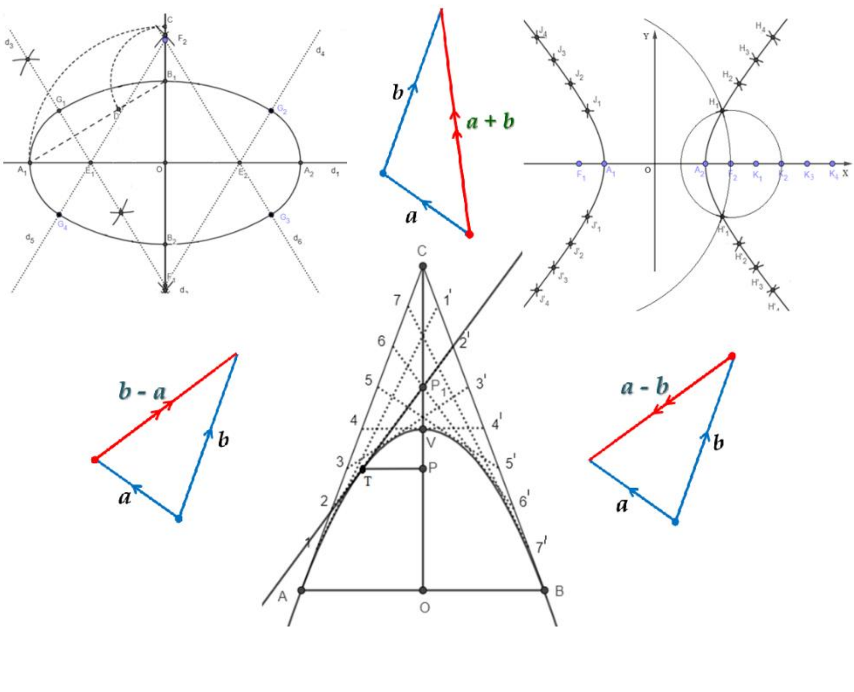
UNIVERSITATEA PEDAGOGICĂ DE STAT

„ION CREANGĂ” DIN CHIȘINĂU

Natalia NEAGU **Sergiu PORT**

ALGEBRA VECTORIALĂ ȘI METODE DE CONSTRUCȚIE A CURBELOR DE ORDINUL DOI



Chișinău, 2023

Aprobată de Senatul Universităţii Pedagogice de Stat
„Ion Creangă” din Chișinău

SUPORT DE CURS

ALGEBRA VECTORIALĂ ȘI METODE DE CONSTRUCȚIE A CURBELOR DE ORDINUL DOI

Recenzenți:

1. *Afanas Dorin*, doctor, conferențiar universitar, Universitatea Pedagogică de Stat “Ion Creangă”
2. *Pricop Victor*, doctor, conferențiar universitar, Universitatea Tehnică a Moldovei

Machetarea computerizată: Neagu Natalia, doctor, conferențiar universitar

Design copertă: Neagu Natalia, doctor, conferențiar universitar

DESCRIEREEA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII DIN REPUBLICA MOLDOVA
Neagu, Natalia.
Algebra vectorială și metode de construcție a curbelor de ordinul doi : suport de curs / Natalia Neagu, Sergiu Port ; Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă" din Chișinău. – Chișinău : [S. n.], 2023 (CEP UPSC). – 130 p. : fig.
Bibliogr.: p. 128-130 (30 tit.). – [100] ex.
ISBN 978-9975-46-846-6.
514.742(075.8)
N 31

Centrul Editorial-Poligrafic al Universității Pedagogice de Stat „Ion Creangă”

CUPRINS

INTRODUCERE

Geometria analitică, în special studiul algebrei vectoriale și a curbelor de ordinul doi, nu este simplu, dar este necesar, deoarece își are amprente esențiale în viața cotidiană.

Algebra vectorială studiază vectorii, operațiile cu vectori, spațiile vectoriale, transformările liniare și sistemele de ecuațiile liniare. La rândul lor, spațiile vectoriale reprezintă o temă centrală în matematica modernă, astfel, algebra vectorială este utilizată pe scară largă atât în algebra abstractă cât și în analiza funcțională. De asemenea, are o reprezentare concretă în geometria analitică și aplicații numeroase în științele naturale și științele sociale, întrucât sistemele și fenomenele neliniare pot fi adesea aproximate printr-un model liniar.

Curbele de ordinul doi, sunt liniile ce se definesc printr-o ecuație de gradul doi în raport cu două variabile, care au fost descoperite în sec. XVII-lea, sub impulsul cercetărilor lui Johannes Kepler în astronomie și ale lui Galileo Galilei în mecanică (elipsa în primul caz și parabola, în cel de al doilea). Aceste figuri geometrice nu mai prezentau doar un inters ca și curbe în sine, ci și ca traiectorii ale mișcării corpurilor, atât planete cât și ghiulele de tun.

Curbele de ordinul doi, în special elipsa, hiperbola și parabola, înregistreză o excepție în construcția reprezentării geometrice a ecuațiilor canonice, aceasta fiind imposibiă cu ajutorul instrumentelor clasice, însă, în baza proprietăților acestor curbe, sau inventat diverse metode eficiente de construție utilizând instrumente neclasice (fir de ață, pucte fixe – focarele curbei respective, compasul eliptic, rigă unilaterală, unghi drept, etc.), care vor fi descrise în capitolul doi.

De asemenea, curbele de ordinul doi, pot fi obținute ca secțiuni conice. În depenență de poziția planului ce secționează suprafața conică avem: circumerința – planul este perpendicular axei cilindrice, cu excepția vârfului conului care va reprezenta un punct; elipsa – planul taie axa cilindrică sub un unghi α; hiperbola – planul este paralel axei cilindrice și parabola – planul este paralel generatorei.

Prezenta lucrare este dedicată atât elevilor și studenților, cât și cadrelor didactice.

1. ALGEBRA VECTORIALĂ

1.1. Vectori. Operații cu vectori

Definiția 1.1.1 [1]. *Mărimea, caracterizată de măsura numerică (modul) și direcție, în care acționează se numește* ***vector*** *(fig. 1.1).*

În $\mathbb{R}^2$, un oarecare vector v, poate fi reprezentat în două moduri, în dependență de baza analizată: într-o bază ortogonală

$$v = xe_1 + ye_2,$$

iar într-o bază neortogonală

$$v = f_1 + f_2.$$

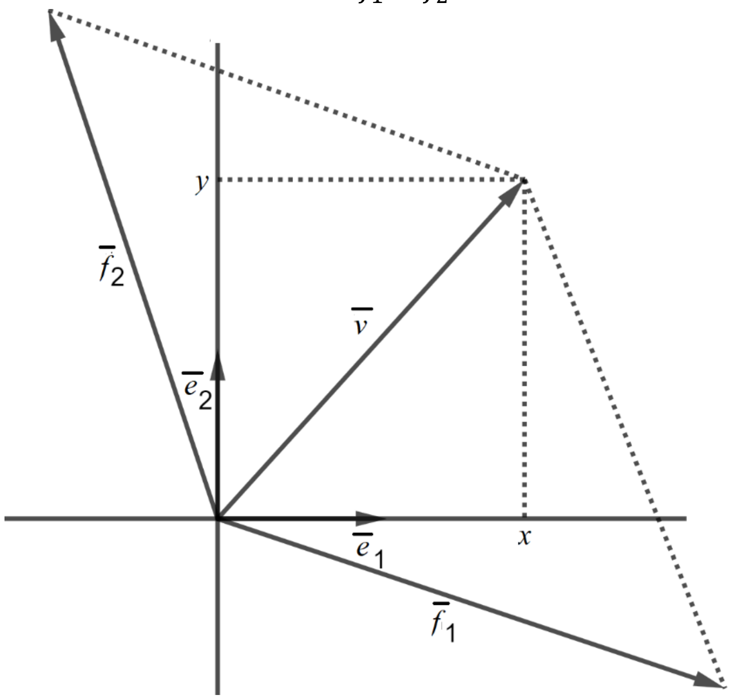


Fig. 1.1. Reprezentarea unui vector

Nota 1.1.1. În spațiunl tridimensional metric, vectorul se reprezintă printr-un segment orientat.

Adunarea vectorilor

Pentru a aduna doi vectori, mai întâi alegem câte un reprezentant al lor; atunci, practic, ne rezumăm la adunarea vectorilor legați.

Vom prezenta două cazuri: adunarea vectorilor coliniari și adunarea vectorilor necoliniari (oarecare).

Adunarea vectorilor coliniari

În primul rând să luăm vectorii $\vec{v}$ și $\vec{u}$, ce au acelaşi sens.

Atunci, vectorul sumă $\vec{v}+\vec{u}$ va avea aceeași direcție și acelaşi sens cu vectorii $\vec{v}$ și $\vec{u}$, iar modulul, sau lungimea lui, va fi suma modulelor celorlalți doi vectori (fig. 1.2)

$$|\vec{v}+\vec{u}| = |\vec{v}| + |\vec{u}|.$$

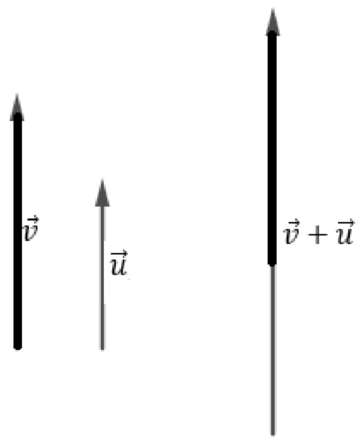


Fig. 1.2. Adunarea vectorilor coliniari cu aceeași direcție

În cazul când vectorii $\vec{v}$ și $\vec{u}$ au sensuri opuse, vectorul sumă va avea aceeași direcție cu cei doi vectori și sensul celui cu modulul mai mare, iar lungimea lui va fi egală cu diferența moldulelor celor doi vectori (fig. 1.3).

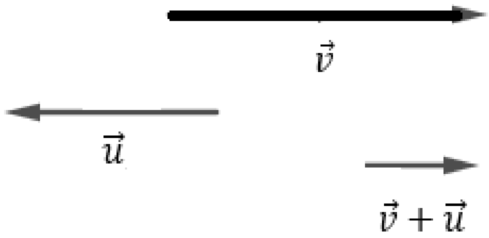


Fig. 1.3. Adunarea vectorilor coliniari cu direcții opuse

Fie vectorii $\vec{v}$ și $\vec{u}$, doi vectori de sensuri opuse, astfel încât vectorul $\vec{v}$ este mai mare decât vectorul $\vec{u}$. Conform celor spuse, direcția vectorului sumă $\vec{v} + \vec{u}$, va coincide cu cea a vectorului $\vec{v}$, deoarece el este mai lung (mai mare), iar lungimea vectorului sumă va fi difereța lungimilor celor doi vectori.

Adunarea vectorilor necoliniari

Adunare a doi sau mai mulți vectori se face după anumite reguli, astfel avem următoarele trei cazuri:

- Adunarea a doi vectori după regula triunghiului.
- Adunarea a doi vectori după regula paralelogramului.
- Adunarea mai multor vectori după regula patrulaterului.

Vom analiza fiecare caz separat.

1. *Adunarea a doi vectori după regula triunghiului*

Fie doi vectori consecutivi, $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$, adică vârful primului vector coincide cu originea celui de-al doilea vector (vezi fig. 1.4).

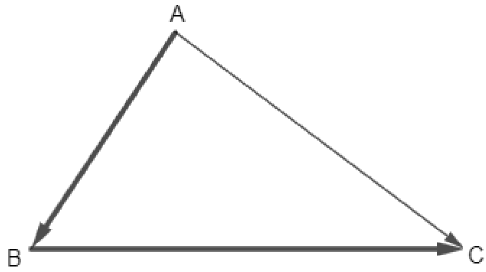


Fig. 1.4. Adunarea a doi vectori după regula triunghiului

După cum observăm și în figura 1.4, suma vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$ (vârful primului coincide cu originea celui de-al doilea, punctul *B*) este vectorul $\overrightarrow{AC}$, care își are originea primului vector (punctul A) și vârful celui de-al doilea vector (puncul C).

2. *Adunarea a doi vectori după regula paralelogramului*

Fie doi vectori a căror origine coincide. În baza acestora construim un paralelogram (fig. 1.5).

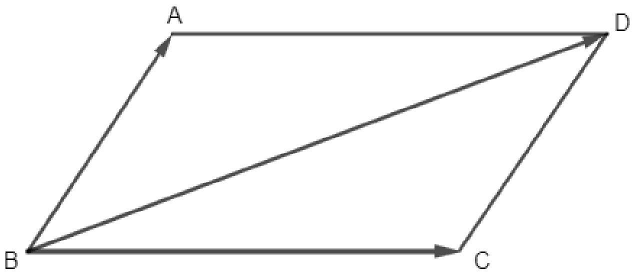


Fig. 1.5. Adunarea a doi vectori după regula paralelogramului

Dacă dorim să adunăm vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$, atunci, observăm că ei au aceeași origine și anume în punctul *B*.

Vectorul sumă va fi vectorul $\overrightarrow{BD}$, ce reprezintă diagonala paralelogramului $ABCD$, în care vectorii ce trebuie adunați, $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$, reprezintă două laturi consecutive.

Observația 1.1.1. Vectorul sumă va avea aceeași origine cu vectorii pe care îi avem de adunat.

3. *Adunarea mai multor vectori după regula patrulaterului*

Această regulă este o extindere a regulii triunghiului, cu menționarea faptului că avem mai mulți vectori consecutivi, adică vectori în care vârful unuia coincide cu originea celuilalt.

Atunci va trebui să închidem poligonul care este compus din vectorii respectivi, iar vectorul sumă va avea originea primului vector și vârful ultimului vector (fig. 1.6).

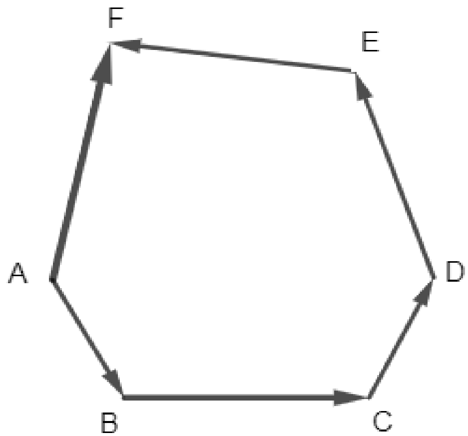


Fig. 1.6. Adunarea a doi vectori după regula patrulaterului

Fie vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}$ *și* $\overrightarrow{EF}$, din imaginea de mai sus (fig. 1.6). Dacă adunăm acești vectori, atunci, vectorul sumă, va fi vectorul $\overrightarrow{AF}$.

Deci, avem

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}.$$

Proprietățile adunării vectorilor.

Fie vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ și $\vec{w}$. Adunarea vectorilor este:

1) *Asociativă*

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}).$$

2) *Comutativă*

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}.$$

3) *Are element neutru, vectorul nul* $\vec{0}$

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}.$$

4) *Are element simetric (opus), vectorul* $-\vec{u}$

$$\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}.$$

Observația 1.1.2. Vectorul opus $-\vec{u}$ are aceeași lungime și aceeași direcție cu vectorul $\vec{u}$, însă sens contrar.

Diferența a doi vectori

Fie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

Definiția 1.1.2. *Diferența vectorilor* $\vec{u}$ *și* $\vec{v}$ *reprezintă suma vectorului* $\vec{u}$, *cu opusul vectorului* $\vec{v}$, *adică* $-\vec{v}$, *fiind dată de următoarea relație (fig. 1.7):*

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v}).$$

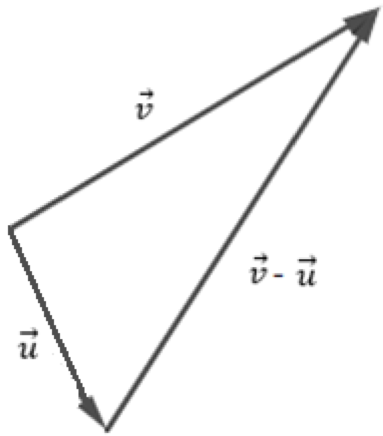


Fig. 1.7. Diferența a doi vectori

În imaginea de mai sus, putem observa modul de obținere a vectorului diferență.

Astfel, fie $\vec{u}$ și $\vec{v}$, doi vectori care au aceeași origine. Atunci, vectorul diferență va fi vectorul care are originea în vârful celui de-al doilea vector, iar vârful său, va coincide cu vârful primului vector.

Înmulțirea unui vector cu un scalar

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ un număr real și $\vec{u}$ un vector din plan.

Definiția 1.1.3. *Produsul vectorului $\vec{u}$ cu scalarul α este un vector, notat $\alpha\vec{u}$, care își schimbă sensul astfel*

$$\alpha\vec{u} = \begin{cases} \alpha\vec{u}, & \alpha > 0, \\ \vec{0}, & \alpha = 0, \\ -\alpha\vec{u}, & \alpha < 0. \end{cases}$$

În cazul cel mai simplu, când $\alpha = 0$, produsul este vectorul nul $\vec{0}$.

Atunci când α este un număr strict pozitiv, vectorul $\alpha\vec{u}$ va avea aceeași direcție și același sens cu vectorul $\vec{u}$, iar dacă α este un număr strict negativ, vectorul $\alpha\vec{u}$ va avea aceeași direcție, dar sens contrar față de vectorul $\vec{u}$.

Lungimea vectorului $\alpha\vec{u}$ va fi

$$|\alpha \cdot \vec{u}| = |\alpha| \cdot |\vec{u}|.$$

Exemplul 1. Se consideră un vector $\vec{u}$, să se construiască vectorii $3\vec{u}$ și $-2\vec{u}$.

Reprezentăm vecorul $\vec{u}$ (fig. 1.8)

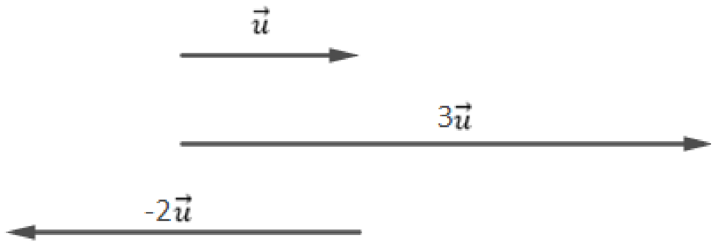


Fig. 1.8. Reprezentarea vectorilor $\vec{u}, 3\vec{u}$ *și* $-2\vec{u}$

Observăm, în figura de mai sus, vectorul $3\vec{u}$ are aceeași direcție cu vectorul $\vec{u}$, de asemenea, are același sens, deoarece numărul cu care am înmulțit vectorul $\vec{u}$, este strict pozitiv, iar lungimea lui este de trei ori mai mare decât lungimea primului vector.

De asemenea, am construit vectorul $-2\vec{u}$, care are aceeași direcție cu vectorul $\vec{u}$, dar are sens contrar vectorului $\vec{u}$, deoarece numărul cu care am înmulțit vectorul $\vec{u}$ este strict negativ, iar lungimea lui este de două ori mai mare decât lungimea primului vector.

Proprietățile înmulțirii unui vector cu un scalar.

Fie vectorii $\vec{u}$, respectiv $\vec{v}$ și scalarii $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1) *Distributivitatea înmulțirii față de adunare*
   a) a înmulți un scalar, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$, cu o sumă, înseamnă a înmulți acel scalar cu fiecare termen al sumei, apoi rezultatele se adună
   $$\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v};$$
   b) a înmulți suma a doi scalari, oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cu un vector oarecare $\vec{u}$, înseamnă a înmulți fiecare scalar cu vectorul $\vec{u}$, iar apoi rezultatele se adună
   $$(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}.$$
2) *Asociativitatea*

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}); \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ și } \forall \vec{u}.$$

3) *Elementul neutru al înmulțirii este vectorul unitate*

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}.$$

Coliniaritatea a doi vectori

Folosind operația de înmulțire cu scalari a vectorilor, avem posibilitatea de a defini *coliniaritatea a doi vectori*.

Definiția 1.1.4. *Doi vectori sunt* **coliniari**, *dacă îndeplineasc una dintre următoare condiții:*

1) doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$, sunt coliniari, dacă și numai dacă există un număr real nenul α, astfel încât să avem îndeplinite una dintre următoarele relații:

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} \quad sau \quad \vec{v} = \alpha\vec{u}.$$

2) doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari, dacă și numai dacă există două numere reale nenule α, respectiv β, astfel încât să avem îndeplinită relația

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}.$$

Din aceste două condiții putem să dăm și o condiție de necoliniaritate astfel:

Definiția 1.1.5. *Doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$, sunt* **necoliniari**, *dacă și numai dacă, din relația*

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0},$$

ne rezultă că $\alpha = \beta = 0$ (adică scalari sunt nuli).

Fie *A*, *B*, *C* trei puncte.

Definiția 1.1.6. *Vom spune că punctele A, B, C sunt* **coliniare**, *dacă există un număr real α, astfel încât să fie îndeplinită relația*

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{BC}.$$

1.2. Spații vectoriale. Dependența și independența liniară a vectorilor

Vom nota prin V, mulțimea tuturor vectorilor, în această mulțime considerăm definite operația de adunare a doi vectori și de înmulțire a unui vector cu un scalar (număr) [1-7, 29].

Definiția 1.2.1. *Vom numi V **spațiu vectorial**, dacă în această mulțime se îndeplinesc următoarele proprietăți [1]:*

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (legea comutativă), $\{a, b\} \subset V$;
2) $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ (legea asociativă),
$$\{a, b\} \subset V;$$
3) $\exists\ \bar{0}$: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$;
4) Pentru $\forall\ \bar{a}$, există elementul invers
$$-\bar{a}:\ \ \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0};$$
5) $\exists\ 1$: $\bar{a} \cdot 1 = \bar{a}$;
6) $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a} = \beta(\alpha\bar{a})$ (legea distributivă), $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
7) $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$;
8) $\bar{a}(\alpha + \beta) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$.

Definiția 1.2.2. *Dacă $W \in V$ și în W se îndeplinesc toate cele 8 condiții (din definiția 1.2.1), atunci W se numește **subspațiu vectorial al spațiului V**.*

Nota 1.2.1. Spațiul vectorial peste $\mathbb{R}$, se numește *spațiu vectorial real*, iar spațiul vectorial peste $\mathbb{C}$, se numește *spațiu vectorial complex*.

În literatura de specialitate [1-7], întâlnim următoarele teoreme:

Teorema 1.2.1. *Vectorul nul $\vec{0}$ este liniar dependent.*

Teorema 1.2.2. *Orice vector nenul este liniar independent.*

Teorema 1.2.3. *Orice supramulțime a unei mulțimi liniar dependente, este de asemenea o mulțime liniar dependentă.*

Teorema 1.2.4. *Orice submulțime a unei mulțimi liniar independente, este de asemenea o mulțime liniar independentă.*

Fie dat un sistem finit *S* de vectori $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots \bar{a}_n$.

Definiția 1.2.3. *Vom spune că vectorul $\bar{a}$ este **combinație liniară a vectorilor sistemului** S, dacă el poate fi scris astfel*

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{a}_n.$$

Definiția 1.2.4. *Sistemul S este **liniar dependent**, dacă are loc egalitatea*

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{a}_n = 0,$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nu sunt simultant egali cu zero

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 \neq 0.$$

Definiția 1.2.5. *Sistemul S este **liniar independent**, dacă are loc egalitatea*

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{a}_n = 0,$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sunt simultant egali cu zero

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 0.$$

Teorema 1.2.5. *Sistemul S este liniar dependent atunci, și numai atunci când cel puțin unul din vectorii acestui sistem, este o combinație liniară a celorlalți vectori ai sistemului.*

Demonstrație (suficiența). Fie $\alpha_1 \neq 0$, atunci

$$\bar{a}_1 = \beta_2 \bar{a}_2 + \cdots + \beta_n \bar{a}_n$$

unde

$$\beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dots, \beta_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_1},$$

trecând la notațiile

$$\bar{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \bar{a}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \bar{a}_n$$

obținem

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{a}_n = 0.$$

Deoarece nu toți $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sunt simultan egali cu zero, rezultă că sistemul este liniar dependent.

Demonstrație (necesitatea). Fie $\alpha_1 \neq 0$, atunci

$$\bar{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\bar{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\bar{a}_n.$$

Notăm

$$\beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dots, \beta_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_1},$$

substituind în ultima relație, obținem

$$\bar{a}_1 = \beta_2\bar{a}_2 + \dots + \beta_n\bar{a}_n.$$

Teorema 1.2.5 este demonstrată.

Definim pe dreapta d, un punct O și un vector $\bar{e}$, vom spune că punctul O și vectorul $\bar{e}$ urmează reperul

$$R = \{O, \bar{e}\},$$

altfel fiind spus, am definit în spațiul V, de dimensiunea 1, o axă de coordonate, considerând vectorul $\bar{e}$ – unitate după modul. Deci pe dreapta d, orice vector se exprimă prin vectorul $\bar{e}$.

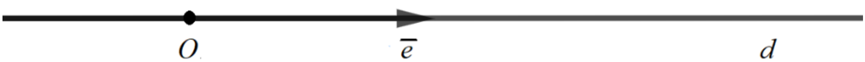


Fig. 1.9. Reprezentarea unui reper R={O, $\bar{e}$}

1.3. Sistemul de vectori coplanari. Spațiul V_2 și baza lui

Considerăm planul π și toți vectorii paraleli dreptelor din planul π.

Definiție 1.3.1. *Mulțimea vectorilor paraleli unui oarecare plan π, se numește* ***sistem de vectori coplanari****.*

Noțiunea de coplanar din plan este analog noțiunii de vectori coliniari pe dreaptă.

Teorema 1.3.1. *Orice trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, sunt coplanari, atunci și numai atunci când sunt liniari dependenți [2].*

Deoarecece în plan doi vectori necoliniari sunt liniari dependenți, atunci oricare al treilea vector este o combinație liniară a celorlalți doi.

Demonstrație (necesitatea). Considerăm trei vectori $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ nenuli și coplanari, deci putem construi un paralelogram laturile căruia să conțină vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$, iar diagonala să fie egală cu vectorul $\bar{c}$ (fig. 1.10), atunci

$$\bar{c} = \alpha_1 \bar{a} + \beta_1 \bar{b}$$

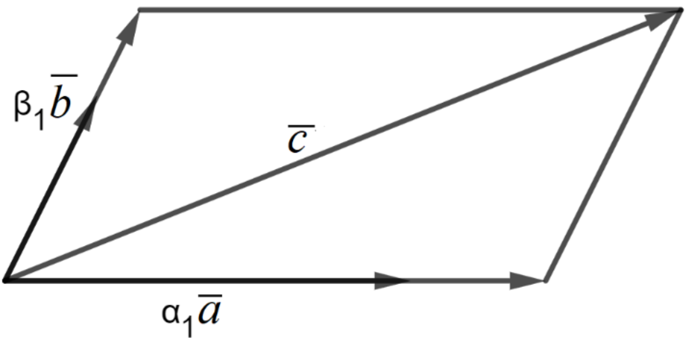


Fig. 1.10. Paralelogramul laturile căruia să conțină vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$, iar diagonala vectorul $\bar{c}$

Considerăm un scalar $\gamma \neq 0$ și notăm

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha}{\gamma}$$

și

$$\beta_1 = -\frac{\beta}{\gamma}.$$

Introducem aceste notații în expresia de mai sus, obținem

$$\bar{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\bar{a} - \frac{\beta}{\gamma}\bar{b},$$

sau

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = 0.$$

Demonstrație (suficiența). Fie $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ trei vectori liniari dependenți și cel puțin unul din scalarii α, β, γ, diferit de zero. Presupunem $\gamma \neq 0$, atunci

$$\bar{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\bar{a} - \frac{\beta}{\gamma}\bar{b}.$$

Revenim la notațiile de mai sus, obținem

$$\bar{c} = \alpha_1\bar{a} + \beta_1\bar{b}.$$

Din faptul că este o combinație liniară, rezultă că se poate construi un paralelogram pe laturile căruia să fie vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$, iar diagonala să fie vectorul $\bar{c}$, deci rezultă că vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt coplanari. Teorema 1.3.1 este demonstrată.

Consecința 1.3.1. Dacă vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ nu sunt coliniari, atunci pentru orice vector $\bar{c}$ coplanar cu ei, există așa scalar α *și* β, încât

$$\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}.$$

Definiția 1.3.2. *Orice pereche ordonată de vectori* $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ *se numește baza spațiului* V_2, *considerând vectorii* $\bar{a}$ *și* $\bar{b}$ *linieari independenți [1].*

Fie dat în plan un punct O numit origine și baza $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Vom numi *reper afin* ansamblul

$$R = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\},$$

care, geometric poate fi reprezentat în felul următor (fig. 1.11):

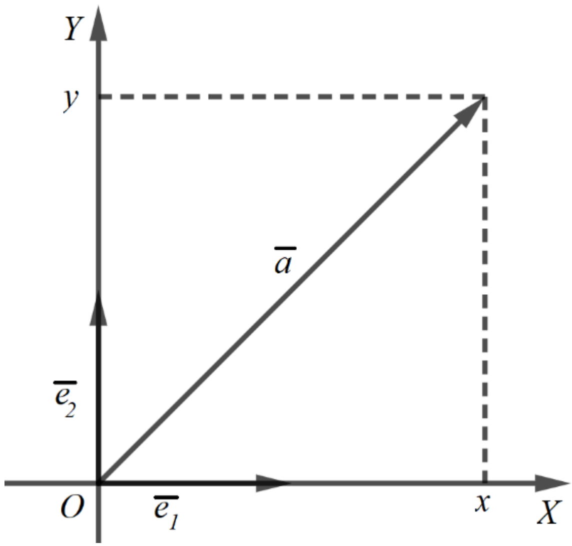


Fig. 1.11. Reprezentarea reperului afin $R = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$

Orice vector din planul definit de reperul $R = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, este o combinație liniară a vectorilor $\bar{e}_1$ și $\bar{e}_2$

$$\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2.$$

Considerând

$$|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$$

putem defini un *sistem afin de coordonate* XOY și deoarecece

$$|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2|$$

vom spune că sistemul XOY este *cartezian*.

Dacă $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$, atunci sistemul se numește *rectangular*. Pentru sistemul rectangular cartezian vom utiliza reperul $R = \{O, \bar{\imath}, \bar{\jmath}\}$.

Definiția 1.3.3. *Planul în care este introdus un sistem de coordonate se numește* ***plan de coordonate****.*

În plan, planul de coordonate se împarte în 4 cadrane și cunoaștem două orientări: de dreapta și de stânga.

Definiția 1.3.4. *Coordonatele x și y a vectorului $\bar{a}$ se mai numesc **proiecțiile algebrice** ale vectorului $\bar{a}$ pe axele de coordonate (fig. 1.11).*

Teorema 1.3.2. *Proiecția sumei a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$, este egală cu suma proiecțiilor, indiferent de tipul proiecției.*

Din definițiile de mai sus, rezultă proprietățile de bază ale vectorilor.

Considerăm $\bar{a} = \{x_1, y_1\}$ și $\bar{b} = \{x_2, y_2\}$

1) $\bar{a} = \bar{b} => x_1 = x_2,\ \ y_1 = y_2;$
2) $\bar{a} \pm \bar{b} = \bar{b} \pm \bar{a} = \{x_1 \pm x_2,\ \ y_1 \pm y_2\};$
3) $\alpha\bar{a} = \{\alpha x_1, \alpha y_1\};$
4) $\bar{a}||\bar{b} <=> \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0,$

sau

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0,$$

sau poate fi exprimat ca raport

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Fie dat un segment oarecare $[M_1 M_2] \neq 0$ (fig. 1.12).

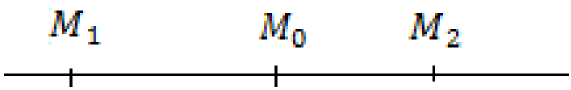


Fig. 1.12. Raportul dintre vectorii $\overline{M_1 M_0}$ și $\overline{M_2 M_0}$

Punctul $M_0(x_0;\ y_0)$ împarte acest segment, în raportul [1]

$$\frac{\overline{M_1 M_0}}{\overline{M_2 M_0}} = \lambda$$

dacă $\lambda \neq -1$

Pentru determinarea coordonatelor punctului M_0, se cunosc următoarele formule:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

și

$$y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Dacă punctul M_0 este mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, atunci coordonatele punctului M_0 se calculează după formulele

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (1.1)$$

În spațiul V_2 putem determina distanța dintre două puncte A$(x_1; y_1)$ și B$(x_2; y_2)$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1.2)$$

Exemplul 1. Să se determine distanța dintre punctele $A(-1; 0)$ *și* $B(5; 8)$ *și mijlocul segmentului format de aceste puncte.*

Rezolvare. Aplicăm formula de calcul a distanței dintre două puncte (1.2)

$$|AB| = \sqrt{\left(5 - (-1)\right)^2 + (8 - 0)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10,$$

iar în baza formulelor (1.1), determinăm coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$, punctul $M_0(x_0; y_0)$

$$x_0 = \frac{-1 + 5}{2} = 2,$$

și

$$y_0 = \frac{0 + 8}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Răspuns: $|AB| = 10$,

$M_0(2; 4)$ - mijlocul segmentului $[AB]$

1.4. Produsul scalar

Definiția 1.4.1 [1]. *Prin* ***produs scalar*** *a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$, vom înțelege numărul egal cu produsul modulelor acestor vectori la cosinusul unghiurilor dintre vectorii dați, adică*

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos(\widehat{a,b}). \qquad (1.3)$$

Dacă unghiul dintre vectori aparține cadranelor I și IV, atunci produsul scalar este pozitiv, iar dacă unghiul aparține cadranelor II și III, atunci produsul scalar este negativ.

Proprietățile produsului scalar

1. $(\bar{a}\bar{b})=(\bar{b}\bar{a})$;
2. $\bar{a}=\bar{0}$ sau $\bar{b}=\bar{0}$ => $(\bar{a}\cdot\bar{b})=\bar{0}$;
3. $\bar{a}\perp\bar{b}$ => $(\bar{a}\cdot\bar{b})=\bar{0}$;
4. $(\alpha\bar{a}\bar{b})=\alpha\,(\bar{a}\bar{b})=(\bar{a}\alpha\bar{b})$;
5. $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}=(\bar{a}\bar{c})+(\bar{b}\overline{bc})$.

În concluzie, două combinații liniare de vectori se înmulțesc scalar ca și două polinoame.

Fie

$$\bar{a}=\{x_1,y_1\},\ \bar{a}=\{x_1\bar{\imath}+y_1\bar{\jmath}\}$$

și

$$\bar{b}=\{x_2,y_2\},\ \bar{b}=\{x_2\bar{\imath}+y_2\bar{\jmath}\},$$

atunci

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})=x_1x_2+y_1y_2.$$

Din definiția produsului scalar și formula produsului scalar, rezultă

$$cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \qquad (1.4)$$

Ultima egalitate reprezintă formula de aflare a unghiului dintre doi vectori, unde α este unghiul dintre ei.

Cosinusul unui unghi α este pozitiv, dacă α este un unghi situat între -90^0 și 90^0, de asemenea este nul, dacă unghiul este drept și negativ dacă este un unghi obtuz.

Din cele spuse mai sus rezultă:

- cosinusul este pozitiv, dacă $|a| > 0, |b| > 0$, unghiul α este ascuțit;
- cosinusul este nul, dacă $|a| = 0, |b| = 0$, unghiul α este drept;
- cosinusul este negativ, dacă $|a| > 0, |b| > 0$, unghiul α este obtuz.

Produsul scalar poate fi determinat și utilizând interpretarea geometrică. În acest caz se aplică următoarele proprietăți [19]:

- Dacă unghiul $\alpha = 0$, atunci vectorii sunt paraleli și
$$(a \cdot b) = |a| \cdot |b|.$$
- Dacă unghiul $\alpha = \frac{\pi}{2}$, atunci vectorii sunt perpendiculari și
$$(a \cdot b) = 0.$$
- Dacă unghiul $\alpha = \pi$, atunci vectorii sunt paraleli, dar orientați în direcția opusă și
$$(a \cdot b) = -|a| \cdot |b|.$$

Exemplul 1. Să se determine cosinusul ungiului format de vectorii $v(4;3)$ *și* $w(6;8)$.

Rezolvare. Utilizând formula (1.4), obținem
$$cos\alpha = \frac{4 \cdot 6 + 3 \cdot 8}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{48}{5 \cdot 10} = \frac{24}{25}.$$

Răspuns: $cos\alpha = \frac{24}{25}$

Produsul scalar este utilizat în fizică, în cazul când se cere să se calculeze proicția unui vector de-a lungul unei componente date. De exemplu, munca L realizată de o forță constantă F pe un corp care se mișcă în direcția *u* este (fig. 1.13) [1, 2]

$$L = F \cdot u.$$

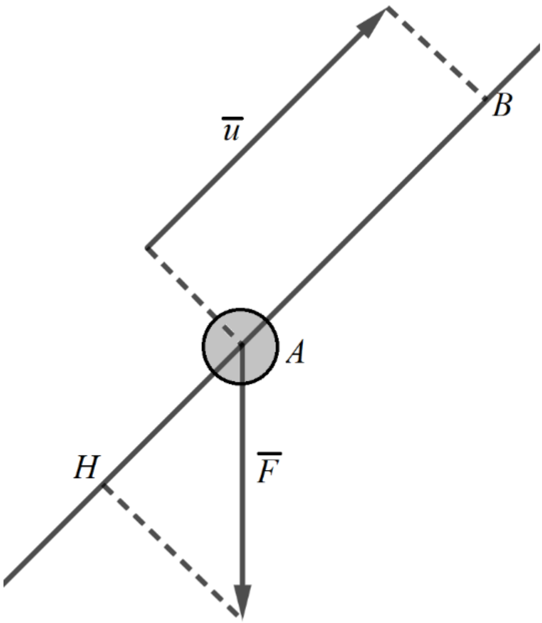


Fig. 1.13. Reprezentarea produsului scalar din punct de vedere a fizicii

Exemplul 2. Fie vectorii $|a| = 12$ și $|b| = 10$ și măsura dintre acesti vectori 60^0. Să se determine produsul vectorial dintre acești vectori.

Rezolvare. Aplicăm formula (1.3) și obținem

$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) = 12 \cdot 10 \cdot \cos(60^0) = 120 \cdot \frac{1}{2} = 60$$

Răspuns: 60

1.5. Sistemul de vectori în spațiu

Vom considera mulțimea vectorilor din spațiul tridimensional, deoarece în spațiul V_2 orice trei vectori necoplanari sunt liniari independenți, pe când în spațiul V_3 sunt liniari dependenți, deoarece baza spațiului V_3 este formată din doi vectori necoliniari [2].

Teorema 1.5.1. *Orice patru vectori în spațiul V_3 sunt liniari dependenți.*

Definiția 1.5.1. *Orice trei vectori necoplanari din V_3, formează* ***baza spațiului V_3.***

Fie în spațiul tridimensional este introdus reperul

$$R=\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\},$$

unde $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ sunt vectorii din baza spațiului V_3, cu alte cuvinte am introdus un sistem afin de coordonate în spațiul V_3.

Dacă vectorii $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ sunt reciproc perpendicular

$$\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2 \perp \bar{e}_3$$

și după modul egali cu 1

$$|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1,$$

atunci vom primi un sistem rectangular cartezian de coordonate cu reperul $R=\{O, \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$ (fig. 1.14).

Cu alte cuvinte avem

$$\bar{\imath} \perp \bar{\jmath} \perp \bar{k}$$

sau

$$|\bar{\imath}| = |\bar{\jmath}| = |\bar{k}|.$$

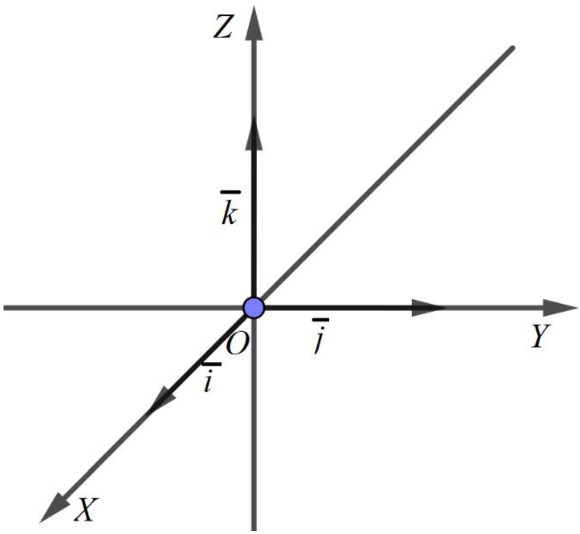


Fig. 1.14. Reperul de coordonate în spațiu

În spațiul tridimensional V_3, asemenea ca și în V_2, putem determina distanța dintre două puncte oarecare A$(x_1; y_1;\ z_1)$ și B$(x_2; y_2;\ z_2)$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1.5)$$

Fie vectorul $\bar{a} = \{x; y; z\}$, atunci modulul acestui vector este

$$|\bar{a}|=\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ca și în plan, în spațiu avem: dacă punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ împarte segmentul $[AB]$ în raportul $\lambda \neq -1$, atunci într-un sistem afin de coordonate sunt adevărate următoarele formule:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Însă, dacă punctul M_0 este mijlocul segmentului $[AB]$, atunci coordonatele punctului M_0 sunt

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$
$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad (1.6)$$
$$z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

În spațiul mai sunt și coordonate sferice, analog coordonatelor polare în plan.

Coordonatele sferice ale unui punct $A(r; \alpha; \beta)$, sunt caracterizate de unghiurile α *și* β și raza *r* care reprezintă distanța de la origine (punctul O) și până la punctul A (fig. 1.15).

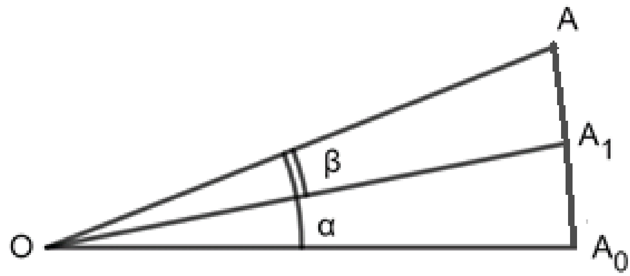


Fig. 1.15. Reprezentarea unui punct în coordonate sferice

În acest caz avem relația

$$AA_1O \perp OA_1A_0.$$

Exemplul 1. Să se determine distanța dintre punctele $A(-3; -2; 6)$ *și* $B(0; 2; 6)$.

Rezolvare. Cu ajutorul formulei de calcul a distanței dintre două puncte avem

$$|AB| = \sqrt{(0+3)^2 + (2+2)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Răspuns: $|AB| = 5$

1.6. Produsul scalar în spațiu

Definiția produsului scalar în spațiu este aceeași ca și în plan, cu excepția că în formula produsului scalar se adăugă doar coordonata *z*.

Fie dați doi vectori în spațiu

$$\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$$

și

$$\bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\},$$

atunci produsul scalar este

$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \tag{1.7}$$

iar cosinusul unghiului dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este

$$cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{1.8}$$

Fie dat vectorul $\bar{c} = \{x, y, z\}$, care formează cu axele de coordonate OX, OY și OZ, unghiurile α, β *și* γ.

Deci

$$cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ridicăm la pătrat ultimile trei egalități $cos^2\alpha$, $cos^2\beta$ și $cos^2\gamma$, parte cu parte, adunându-le obținem

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1.$$

Deci

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

Această egalitate se numește *proprietatea cosinusurilor directori*, iar unghiurile α, β *și* γ se numesc *unghiuri directoare*.

Exemplul 2. Să se determine produsul scalar a doi vectori în spațiu, dacă

$$\bar{a} = \{1; 5; -1\} \text{ și } \bar{b} = \{4; 3; 9\}.$$

Rezolvare. Aplicăm formula de calcul a produsului scalar (1.7) și obținem

$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) = 1 \cdot 4 + 5 \cdot 3 - 1 \cdot 9 = 10.$$

Răspuns: $(\bar{a} \cdot \bar{b}) = 10$

1.7. Produsul vectorial

Definiția 1.7.1 [5]. *Se numește* ***produs vectorial*** *a doi vectori* $\bar{a}$ *și* $\bar{b}$ *în spațiul tridimensional, vectorul*

$$\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}],$$

dacă se îndeplinesc următoarele condiții:

1. $|\bar{c}|=|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{a,b})$;
2. $\bar{c} \perp \bar{a}$ și $\bar{c} \perp \bar{b}$;

3. *tripletul* $\bar{a}, \bar{b}$ *și* $\bar{c}$, *are aceeași orientare ca și reperul din bază* $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$ *(de dreapta).*

Din definiția 1.7.1, rezultă sensul geometric al produsului vectorial: modulul produsului vectorial a doi vectori este egal cu aria paralelogramului construit pe acești doi vectori (fig. 1.16).

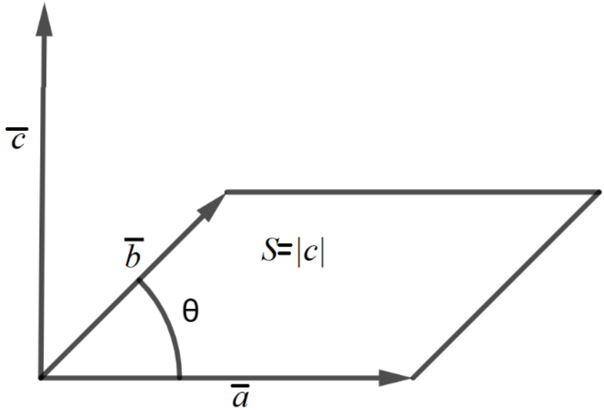


Fig. 1.16. Sensul geometric al produsului vectorial

Pentru produsul vectorial se cunosc următoarele proprietăți [20]:

1. $\bar{a}||\bar{b}$=>$[\bar{a}, \bar{b}]$= $\bar{0}$,

   $\bar{a} = \bar{0}$ sau $\bar{b} = \bar{0}$ =>$[\bar{a}, \bar{b}]$= $\bar{0}$,
2. $[\bar{a}, \bar{b}]$=$-[\bar{b}, \bar{a}]$,
3. $[\alpha\bar{a}, \bar{b}]$=$[\bar{a}, \alpha\bar{b}]$= $\alpha\ [\bar{a}, \bar{b}]$,
4. $[(\bar{a}, \bar{b}), \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]$.

Din proprietățile de mai sus, rezultă: combinațiile liniare în produsul vectorial se comportă ca și polinoamele.

Dacă sunt dați doi vectori prin coordonatele sale

$$\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\},$$
$$\bar{a} = x_1\,\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath} + z_1\bar{k}$$

și

$$\bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\},$$
$$\bar{b} = x_2\,\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath} + z_2\bar{k},$$

atunci

$$\bar{c}=[\bar{a},\bar{b}]=\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}=$$
$$= \{y_1z_2 - z_1y_2;\;\; z_1x_2 - z_2x_1;\;\; x_1y_2 - y_1x_2\}. \quad (1.9)$$

Din sensul geometric al produsului vectorial rezultă formula de aflare a ariei triunghiului dat de trei vectori.

Fie ABC un triunghi oarecare, vom exprima aria triunghiului utilizând produsul vectorial.

Se consideră paralelogramul $ABCD$ pentru care [21]

$$S_{ABCD} = |\overline{AB} \times \overline{AC}|.$$

Deoarece

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

obținem

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2}|\overline{CA} \times \overline{CB}| = \frac{1}{2}|\overline{BA} \times \overline{BC}|.$$

Nota 1.7.1. Aria triunghiului din plan cu vârfurile $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ și $C(x_3; y_3)$ este

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{1}{2} abs \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

Nota 1.7.2. Aria triunghiului, din spațiu, cu vârfurile $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ și $C(x_3; y_3; z_3)$ este

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}, \quad (1.11)$$

unde

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}$$

și

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Exemplul 1. Să se determine aria triunghiului cu vârfurile $A(1; 8; -1)$, $B(0; 5; 4)$ *și* $C(1; -4; 7)$.

Rezolvare. Aplicăm formula de calcul a ariei triunghiului dat de trei puncte A, B și C (1.11), obținem

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -12 & 8 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -12 \end{vmatrix}\right)^2} = 2\sqrt{94}.$$

Răspuns: $S_{ABC} = 2\sqrt{94}$ (u.p)

1.8. Produsul mixt a trei vectori

Produs mixt este o expresie în care produsele scalare și vectoriale, ale vectorilor spațiului tridimensional, apar simultan.

Definiția 1.8.1. *Fie tripletul ordonat de vectori* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$. ***Produsul mixt*** *al celor trei vectori se notează cu* $(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c})$ *și se definește prin formula*

$$(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}) = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}).$$

Dacă vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sunt

$$\bar{a} = x_1\,\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath} + z_1\bar{k},$$
$$\bar{b} = x_2\,\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath} + z_2\bar{k}$$

și

$$\bar{c} = x_3\,\bar{\imath} + y_3\bar{\jmath} + z_3\bar{k},$$

atunci produsul mixt a trei vectori se scriesub forma

$$(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.12)$$

Se cunosc următoarele proprietăți ale produsului mixt a trei vectori [5, 10]:

- $(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}) = 0,$ dacă și numai dacă vctorii sunt coplanari, adică vctorii sunt liniari independenți;
- $(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}) = (\bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{a}) = (\bar{c} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b});$
- $(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}) = -(\bar{b} \cdot \bar{a} \cdot \bar{c});$
- $V_p = |(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c})|$ – volumul paralelepipedului construit pe cei trei vectori $(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c})$ (fig. 1.17).

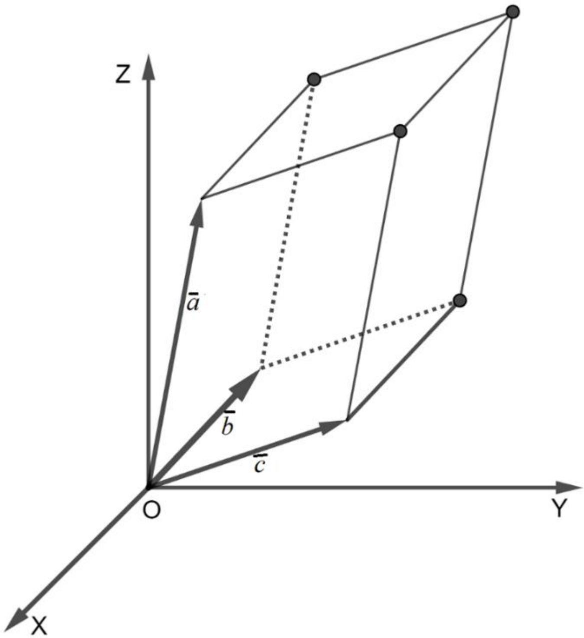


Fig. 1.17. Paralelepipedul construit pe vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

Rezultatul produsului mixt a trei vectori este un scalar a cărui valoare absolută nu depinde nici de ordinea celor trei vectori și nici de ordinea celor două operații.

Nota 1.8.1. Valoarea absolută a produsului mixt, este egală cu volumul paralelepipedului (vezi proprietatea 4 a produsului mixt) construit pe cei trei vectori (sau egal cu 6 ori volumul tertraedului construit pe cei trei vectori).

Nota 1.8.2. Volumul tetraedrului cu vârfurile $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2, ; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ și $D(x_4; y_4; z_4)$ este

$$V = \frac{1}{6} abs|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}|,$$

sau

$$V = \frac{1}{6} abs \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (1.13)$$

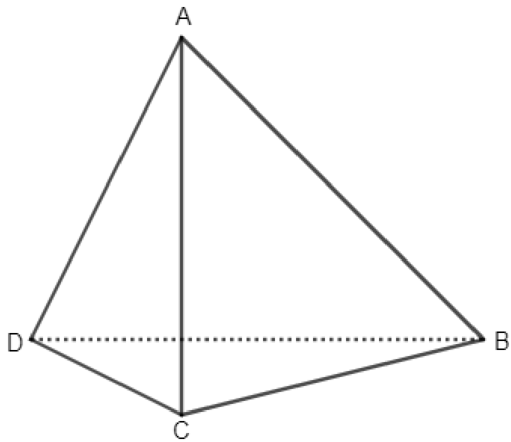


Fig. 1.18. Tetraedrul $ABCD$

Exemplul 1. Să se afle volumul tetraedrului construit pe vectorii $\bar{a} = (3; 2; 2), \bar{b} = (1; -2; -2)$ *și* $\bar{c} = (0; 1; 3)$.

Rezolvare. Pentru a calcula volumul tetraedului, vom aplica produsul mixt a 3 vectori (1.12) și nota 1.8.2, adică formula

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\bar{a} \cdot \ \bar{b} \cdot \bar{c}\right)\right|.$$

Deci, volumul tetraedului este

$$V = \frac{1}{6} mod \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|-18 + 2 - 6 + 6| = \frac{1}{6}|-16| = \frac{8}{3}.$$

Răspuns: $V = \frac{8}{3}$ (u.c)

Exemplul 2. Să se calculeze aria triunghiului BCD și volumul tetraedului format de punctele $A(1; 2; 1)$, $B(2; 1; 3)$, $C(-2; 1; 3)$ *și* $D(0; 2; 0)$.

Reprezntați grafic acest tetraedru.

Rezolvare. Calculăm volumul tetraedului, în conformitate cu formula (1.13)

$$V = \frac{1}{6} abs \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}(u.c.)$$

Aplicând formula de calcul a ariei triunghiului *BCD* (1.11), obținem

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right)^2} = 2\sqrt{10}.$$

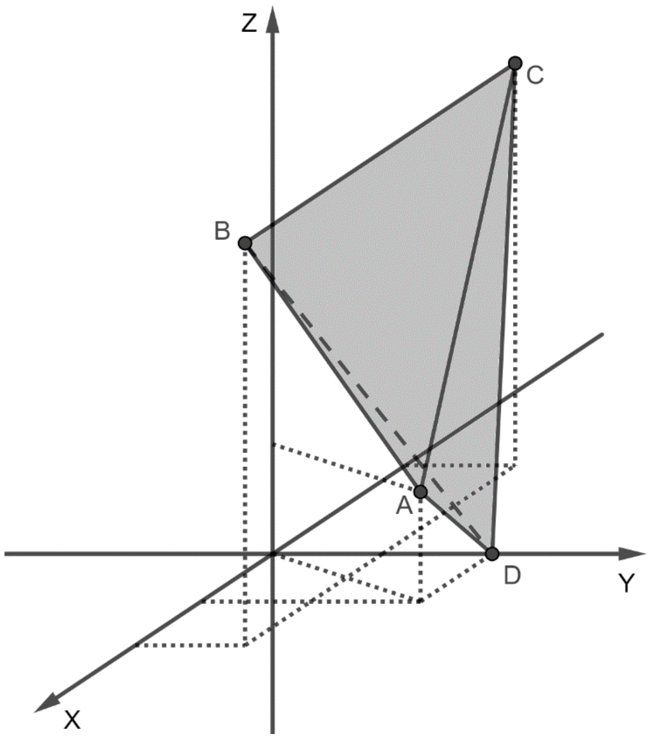


Fig. 1.19. Tetraedul ABCD

Răspuns: $V = \frac{2}{3}\,(u.c)$

$S_{BCD} = 2\sqrt{10}\ (u.p)$

Exerciții și probleme

1. Se consideră punctele $A(-6;-3), B(6;9)$ și $C(0;-2)$. Să se determine coordonatele vectorului
$$\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}.$$
2. Să se determine $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}\right|$, dacă $A(-4;5)$, $B(4;2)$, $C(-0;2)$, $D(0;6)$.
3. Să se determine parametrum $m \in R$, pentru care punctele $A(2;5), B(1;5)$ și $C(m;3)$ să fie coliniare.
4. Fie dat un oarecare punct $A(a,b)$. Să se determine:
   a) coordonatele punctelor simetrice lui A, față de axe de coordonate și față de origine;
   b) coordonatele punctelor simetrice lui A, față de cele două bisectoare ale axelor de coordonate.
5. Să se determine distanțele dintre perechile de puncte: $A(3;2)$, $B(6;6)$, $C(-1;0)$, $D(-5;4)$ și $E(-1;-4)$.
6. Să se calculeze lungimile segmentelor $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$, unde $A(3;6)$, $B(8;2)$, $C(3;2)$ și $D(8;6)$. Să se explice geometric rezultatul.
7. Să se arate că triunghiul format de punctele $A(2;3), B(-1;-1)$ și $C(6;0)$, este isoscel, cu baza BC.
8. Să se arate că triunghiul format de punctele $A(2+\sqrt{3};1), B(\sqrt{3};-1)$ și $C(-1;-\sqrt{3})$, este isoscel.
9. Să se arate că triunghiul format de punctele $A\left(1+\sqrt{3};\frac{3}{2}\right), B\left(\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ și $C\left(1;\frac{1}{2}\right)$, este dreptunghic. Să se determine unghiul drept.
10. Fie punctele $A(-1;-3)$ și $B(2;-1)$. Să se determine simetricul lui A față de B.

11. Fie $A(1;1), B(2;-3)$ și $C(6;0)$. Să se determine coordonatele punctului D, al patrulea vârf al paralelogramului $ABCD$, dacă AC este diagonală.
12. Să se determine aria pătratului a cărui două vârfuri sunt punctele $A(3;-7)$ și $B(-1;4)$.
13. Fie triunghiul format de punctele $A(4;5), B(0;3)$ și $C(2;-3)$. Să se calculeze lungimile tuturor medianelor triunghiului.
14. Să se determine unghiurile interioare ale unui triunghi, dacă vârfurile au coordonatele
    a) $A(5;0), B(0;1)$ și $C(3;3)$;
    b) $A(3;7), B(2;-3)$ și $C(-1;4)$.
15. Fie triunghiul cu vârfurile $A(7;0), B(4;4)$ și $C(-1;-8)$. Să se determine coordonatele pciorului bisectoarei BB' a triunghiului.
16. Fie triunghiul cu vârfurile $A(1;-3), B(3;-5)$ și $C(-5;7)$. Să se determine mijlocurile laturilor triunghiului.
17. Fie triunghiul cu vârfurile $A(3;7), B(2;-3)$ și $C(-1;4)$. Să se determine lungimea înălțimii dusă din vîrful A.
18. Să se determine aria triunghiului cu vârfurile $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ și $C(5;2;6)$.
19. Să se determine proiecțiile vectorului $\bar{a}$ pe vectorul $\bar{b}$, dacă $\bar{a}$ =$\{5;2;5\}$ și $\bar{b} = \{2;-1;2\}$.
20. Să se determine produsul scalar $(\bar{a} \cdot \bar{b})$, dacă
    $$|\bar{a}| = 8, |\bar{b}| = 15$$
    și $|\bar{a} \times \bar{b}| = 72$.
21. Să se determine aria paralelogramului construit pe vectorii $\bar{a}$ =$\bar{u} + 2\bar{v}$ și $\bar{b} = 2\bar{u} + \bar{v}$, dacă $\bar{u}$ și $\bar{v}$ sunt vectori unitari care formează un unghi de $\frac{\pi}{6}$.

22. Să se determine produsul vectorial al vectorilor $\bar{u}$ și $\bar{v}$, unde prin $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$ s-a notat baza ortonormată pozitivă în V.

a) $\bar{u} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$ și $\bar{v} = 6\bar{k}$;

b) $\bar{u} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 5\bar{k}$ și $\bar{v} = \bar{\jmath} - 6\bar{k}$;

c) $\bar{u} = 2\bar{\jmath} + 4\bar{k}$ și $\bar{v} = \bar{\imath} + 6\bar{k}$;

d) $\bar{u} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - 5\bar{k}$ și $\bar{v} = \bar{\imath} - 3\bar{\jmath} + 2\bar{k}$.

23. Determinați scalarul $\alpha \in R$, astfel încât vectorii

$$\bar{u} = \alpha\bar{a} + 3\bar{b}, \bar{v} = 3\bar{a} - \bar{b}$$

să fie coliniari, unde $\bar{a}, \bar{b} \in V$, sunt doi vectori necoliniari.

24. Să se calculeze

a) $(2\bar{u} - 3\bar{v} + 5\bar{w}) \times (3\bar{u} + \bar{v} - 7\bar{w})$;

b) $\left[\left(2\bar{a} + \bar{b}\right) \cdot \bar{b}\right]$, dacă $\bar{a} = \{3; -1; -2\}$ și $\bar{b} = \{1; 2; -1\}$.

25. Să se determine volumul paralelepipedului construit pe vectorii $\bar{a} = \{3; -2; 1\}$, $\bar{b} = \{2; 1; 2\}$ și $\bar{c} = \{3; -1; -2\}$.

26. Fie vectorii $\bar{a} = \{2; -3; 1\}$, $\bar{b} = \{-3; 1; 2\}$ și $\bar{c} = \{1; 2; 3\}$. Să se determine

a) $\left[\left(\bar{a}, \bar{b}\right) \cdot \bar{c}\right]$;

b) $\left[\bar{a} \cdot \left(\bar{b}, \bar{c}\right)\right]$.

27. Să se determine dacă vectorii $\bar{a} = \{2; 3; -1\}$, $\bar{b} = \{1; -1; 3\}$ și $\bar{c} = \{1; 9; -11\}$ sunt coplanari.

28. Fie tetraedrul ABCD cu vârfurile $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(3; 3; 7)$ și $D(-5; -4; 8)$. Să se determine lungimea înălțimii duse din vârful D.

2. CURBELE DE ORDINUL DOI

Ecuația generală a curbelor de ordinul doi, este

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}xy + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0 \qquad (2.1)$$

unde coeficienții A, B și C nu sunt concomitent egali cu zero, adică

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 \neq 0.$$

Remarca 2.1. *Dacă în ecuația* (2.1), *avem* $C = 0$

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0,$$

atunci curba de ordinul doi se numește centrală.

2.1. Cercul

2.1.1. Ecuațiile caracteristice ale cercului. Proprietățile cercului

Definiția 2.1.1. *Locul geometric al punctelor unui plan, egal depărtate de la un punct, numit centru* $C(a; b)$*, se numește* ***cerc*** [7].

Din definiția cercului, rezultă că distanța de la centru și până la oricare punct $M(x; y)$, al acestei curbe, este aceeași și se notează cu r (fig. 2.1). În literatura de specialitatea această distanță este numită *rază*, și este reprezentată de segmentul CM, cu alte cuvinte

$$|CM| = r.$$

Din punct de vedere geometric, distanța dintre punctele $C(a; b)$ și $M(x; y)$ este

$$|CM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Prin urmare, avem

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

ridicând la pătrat ambele părți, ale ultimei egalități, obținem

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{2.2}$$

Ecuația (2.2), se numește *ecuația normală a cercului* [7].

Dacă centrul cercului se află în originea de coordonate, adică $a = b = 0$, atunci ecuația (2.2) ia forma

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{2.3}$$

această relație reprezintă *ecuația canonică a cercului*.

Deschidem parantezele, în ecuația (2.2), și obținem

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0. \tag{2.4}$$

Ecuația obținută (2.4), este de gradul doi, prin urmare, cercul este o curbă de ordinul doi.

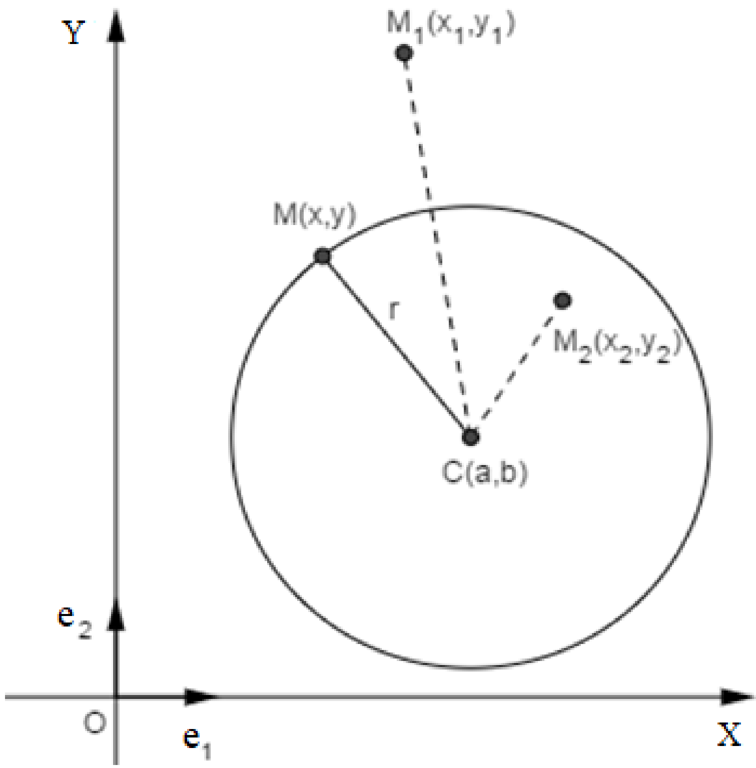


Fig. 2.1. Cercul

În continuare vom analiza două puncte, unul din exteriorul cercului, iar altul din interiorul lui. Fie punctul $M_1(x_1; y_1)$ (fig. 2.1) un punct exterior cercului, atunci

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2,$$

deoarece $(CM)^2 = r^2 < (CM_1)^2$.

Dacă punctul $M_2(x_2; y_2)$ (fig. 2.1), este un punct interior cercului, atunci

$$(x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 < r^2,$$

deoarece $(CM)^2 = r^2 > (CM_2)^2$.

Se cunosc următoarele particularitățile caracteristice ale ecuației canonice ale cercului (2.3):

- coeficienții de pe lângă x^2 și y^2 sunt egali între ei.
- lipsește termenul, care conține produsul xy.

Respectând aceste 2 particularități, ecuația (2.1), ia forma

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0, \qquad (2.5)$$

unde $\mathrm{A} \neq 0$.

Împărțind ambele părți, ale ecuației (2.5) la A, obținem o ecuație echivalentă cu relația (2.5)

$$x^2 + y^2 + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}x + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{A}}y + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}} = 0.$$

Transformăm ultima relație sub formă de pătrate

$$\left(x^2 + 2\frac{\mathrm{D}}{2\mathrm{A}}x + \frac{\mathrm{D}^2}{4\mathrm{A}^2}\right) + \left(y^2 + 2\frac{\mathrm{E}}{2\mathrm{A}}y + \frac{\mathrm{E}^2}{4\mathrm{A}^2}\right) +$$

$$+\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}} - \frac{\mathrm{D}^2}{4\mathrm{A}^2} - \frac{\mathrm{E}^2}{4\mathrm{A}^2} = 0,$$

sau

$$\left(x + \frac{\mathrm{D}}{2\mathrm{A}}\right)^2 + \left(y + \frac{\mathrm{E}}{2\mathrm{A}}\right)^2 = \frac{\mathrm{D}^2 + \mathrm{E}^2 - 4\mathrm{AF}}{4\mathrm{A}^2}. \qquad (2.6)$$

Notăm

$$\frac{\mathrm{D}}{2\mathrm{A}} = -a$$

și

$$\frac{\mathrm{E}}{2\mathrm{A}} = -b.$$

În dependență de valoarea expresiei din partea dreaptă a expresiei (2.6), adică

$$\frac{\mathrm{D}^2 + \mathrm{E}^2 - 4\mathrm{AF}}{4\mathrm{A}^2},$$

avem următoarele trei cazuri posibile [8]:

1) Dacă

$$\frac{\mathrm{D}^2 + \mathrm{E}^2 - 4\mathrm{AF}}{4\mathrm{A}^2} = r^2 > 0,$$

atunci ecuația (2.6) ia forma

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

În acest caz, ecuația (2.5) va reprezenta un cerc cu centrul în punctul $(a; b)$ de rază r.

2) Dacă

$$\frac{\mathrm{D}^2 + \mathrm{E}^2 - 4\mathrm{AF}}{4\mathrm{A}^2} = 0,$$

atunci ecuația (2.6) ia forma

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0.$$

În acest caz, ecuația (2.5) va reprezenta un punct cu coordonatele $(a; b)$.

3) Dacă

$$\frac{\mathrm{D}^2 + \mathrm{E}^2 - 4\mathrm{AF}}{4\mathrm{A}^2} = -r^2 < 0,$$

atunci ecuația (2.6) ia forma

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = -r^2.$$

În acest caz, planul nu conține nici un punct cu coordonate reale, care să satisfacă această ecuație, deci este ecuația unui cerc imaginar.

Fie sistemul de coordonate ortonormat al planului afin, iar punctul $(x_0; y_0)$ centrul cercului. O parametrizare a ecuațiilor cercului de rază r, este

$$\begin{cases} x = x_0 + r\,cos\,t, \\ y = y_0 + r \sin t, \end{cases} \quad t \in [0,2\pi).$$

Observăm, că această parametrizare este periodică și anume de perioda 2π. În cazul ecuației (2.3), când cercul are centrul în originea de coordonate, avem ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = r\,cos\,t, \\ y = r \sin t, \end{cases} \quad t \in [0,2\pi).$$

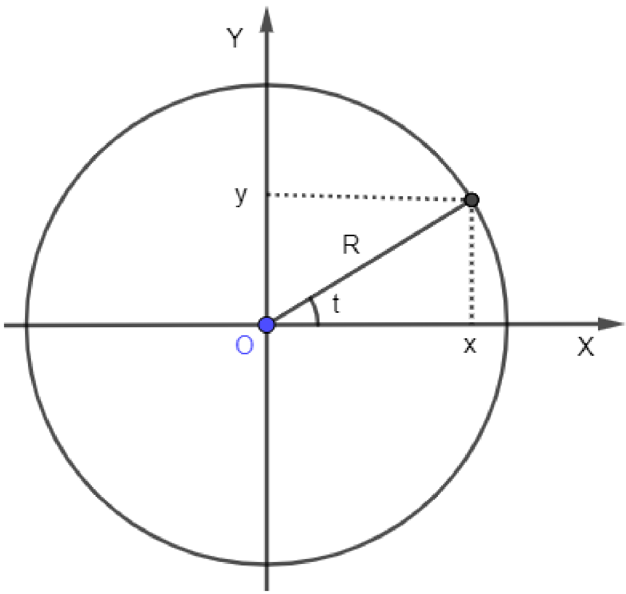


Fig. 2.2. Reprezentarea cercului după ecuațiile parametrice

2.1.2. Construcția cercului cu un compas

Tradițional, o circumferință se construiește un ajutorul compasului clasic cu un ac și un creion. Se fixează mărimea deschiderii compasului de valoarea rezei cercului ce urmează a fi construit.

Apoi, marcăm pe hârtie punctul $C(a;b)$, care ulterior va servi drept centrul circumferinței.

Fizând acul compasului în punctul $C(a;b)$ și realizînd o rotație completă, vârful creionului compasului va realiza cu cerc (fig. 2.3).

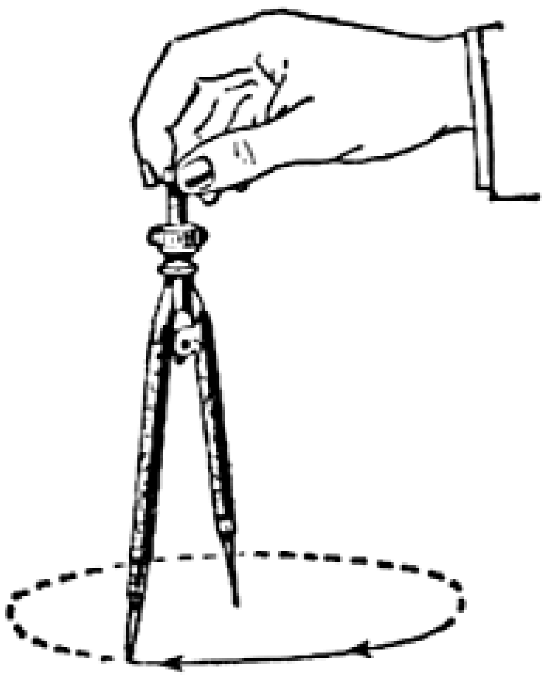


Fig. 2.3. Construcția cercului cu un compas

2.1.3. Construcția cercului cu un ac și un fir rigid

Construirea cercului cu ajutorul instrumentelor neclasice, poate fi realizată cu ajutorul unui ac și a unui fir rigid, prin două metode.

Metoda 1. Se fixează acul în punctul care urmează a fi centrul cercului $C(a;b)$, apoi, din firul disponibil realizăm un inel, astfel încât lungimea inelului format să fie egală cu $2r$. Aplicăm acest inel acului și cu ajutorul unui creion întindem inelul bine, în urma rotației de 360^0 (păstrând inelul întins bine), vârful creionului va descrie un cerc (fig. 2.4.a).

Metoda 2. Pe firul disponibil se formează două inele de dimensiuni mici, astfel încât distanța dintre inelele formate să fie egală cu raza cercului r. Fixăm acul într-un inel, în punctul care urmează a fi centrul cercului $C(a;b)$, apoi, vârful unui creion se fixează în celălalt inel al firului. Întindem firul cât de bine posibil, și în urma rotației de 360^0 (păstrând firul întins bine), vârful creionului va descrie un cerc (fig. 2.4.b).

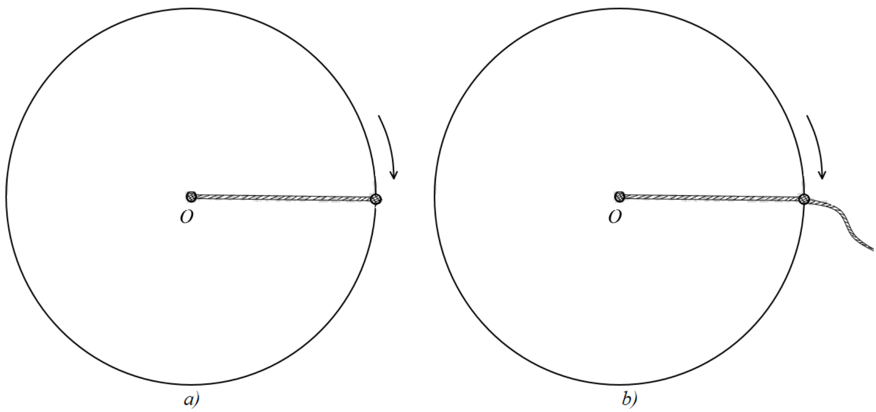


Fig. 2.4. Construcția cercului cu un ac și un fir rigid

2.2. Elipsa

2.2.1. Ecuațiile caracteristice. Proprietățile elipsei

Definiția 2.2.1. *Locul geometric al punctelor unui plan, astfel încât suma distanțelor la două puncte fixe* (F_1 *și* F_2) *în același plan, numite focare, este o mărime constantă, și mai mare decât distanța dintre focare* ($2a > |F_1F_2|$), *se numește* ***elipsă*** [7].

Distanța dintre focare se numește *distanță focală* și se notează cu $2c$

$$|F_1F_2| = 2c.$$

Compunem ecuația elipsei, care trebuie satisfăcută de coordonatele oricărui punct al elipsei. Luăm drept axa OX - dreapta ce trece prin focare (F_1, F_2), iar în calitate de axa OY – perpendiculara la OX ce trece prin mijlocul segmentului $[F_1F_2]$ (fig. 2.5).

Focarele elipsei au coordonatele $F_1(-c; 0)$ și $F_2(c; 0)$.

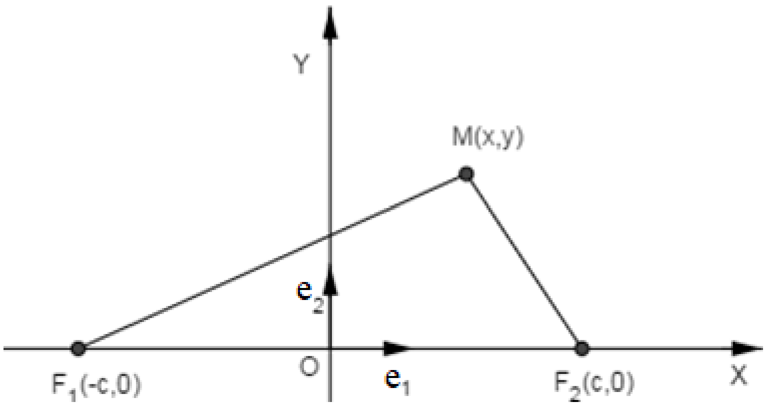


Fig. 2.5. Proprieteatea de compunere a ecuației elipsei

Fie $M(x; y)$ un punct al elipsei, în baza definiției 2.2.1, avem

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a > 2c. \qquad (2.7)$$

Aplicând formula distanței dintre două puncte, obținem

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

și

$$|F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Substituim aceste relații în egalitatea (2.7)

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \qquad (2.8)$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Ridicăm ambele părți, ale ultimei egalități (2.8), la pătrat

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = (x-c)^2 + y^2 - 4a^2 -$$

$$-(x+c)^2 - y^2 \Leftrightarrow - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} =$$

$$= x^2 - 2xc + c^2 - 4a^2 - x^2 - 2xc - c^2 \Leftrightarrow$$

$$- 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -4xc - 4a^2 \Leftrightarrow$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = xc + a^2.$$

Pentru a elimina radicalul din partea stângă a ultimei egalități, aplicăm încă o dată, ridicarea ambelor părți la pătrat

$$a^2((x+c)^2 + y^2) = x^2c^2 + 2xca^2 + a^4 \Leftrightarrow$$

$$a^2x^2 + 2xca^2 + c^2a^2 + y^2a^2 = x^2c^2 + 2xca^2 + a^4 \Leftrightarrow$$

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Deoarece $a > c$, rezultă

$$a^2 - c^2 > 0.$$

Notăm acest termen prin pătratul unei alte variabile

$$a^2 - c^2 = b^2, \qquad (2.9)$$

obținem

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2,$$

sau, împărțind la termenul a^2b^2, obținem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2.10}$$

Ultima egalitate reprezintă *ecuația canonică a elipsei*, unde a este semiaxa mare, iar b – semiaxa mică.

Din ecuația (2.10), putem stabili următoarele proprietăți [9]: ecuația (2.10) conține variabilele x și y numai la pătrat. Dacă această ecuație este satisfăcută de coordonatele x și y ale punctului $M(x; y)$, ea este satisfăcută și de coordonatele punctelor simetrice $M_1(x; -y)$, $M_2(-x; y)$ și $M_3(-x; -y)$. Prin urmare, elipsa este simetrică față de axe și originea de coordonate (fig. 2.6).

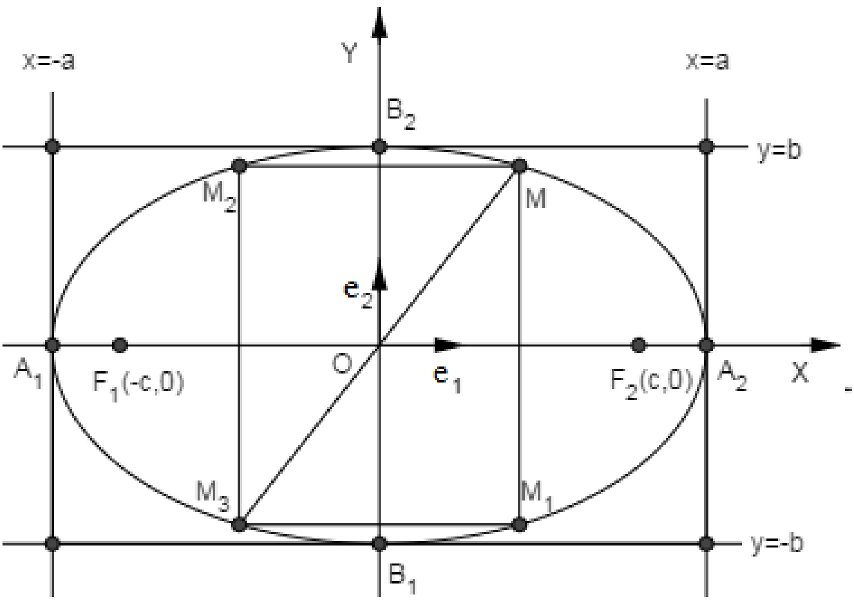


Fig. 2.6. Simetria elipsei față de axe și de originea de coordonate

Determinăm punctele de intersecție ale elipsei cu axele de coordonate.

Pentru $y = 0$, avem $\frac{x^2}{a^2} = 1$, de unde

$$x = \pm a.$$

Prin urmare, elipsa intersectează axa OX în două puncte $A_1(-a, 0)$ și $A_2(a, 0)$.

Pentru $x = 0$, avem $\frac{y^2}{b^2} = 1$, de unde

$$y = \pm b.$$

Prin urmare, elipsa intersectează axa OY în două puncte $B_1(0, -b)$ și $B_2(0, b)$.

Definiția 2.2.2. *Punctele de intersecție a elipsei (2.10), cu axale de coordonate, se numesc* ***vârfurile elipsei*** [7].

Din relația (2.9) rezultă că $a > b$, deci segmentul $[A_1A_2]$ se numește *axă mare* a elipsei, iar segmentul $[B_1B_2]$ se numește *axa mică* a elipsei și lungimile lor sunt egale respectiv cu $2a$ și $2b$.

Din ecuația (2.10), rezultă

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1 \quad \text{și} \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$$

prin urmare,

$$|x| \leq a \quad \text{și} \quad |y| \leq b,$$

sau

$$-a \leq x \leq a \quad \text{și} \quad -b \leq y \leq b.$$

Segmentele $[F_1M]$ și $[F_2M]$ se numesc *razele focale* ale punctului M, iar lungimea lor se notează respectiv

$$[F_1M] = r_1 \text{ și } [F_2M] = r_2,$$

unde

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x$$

și

$$r_2 = a - \frac{c}{a}x.$$

Definiția 2.2.3. *Vom numi* ***excentricitate*** *(ε), numărul egal cu raportul dintre distanța focală a elipsei și lungimea axei* mari [8]

$$0 \leq \varepsilon = \frac{c}{a} < 1.$$

În baza definiției 2.2.3, putem exprima lungimile razelor focale prin excentricitate

$$r_1 = a + \varepsilon x$$

și

$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

Dacă $a = b$, sau dacă $c = 0$, atunci ecuația elipsei (2.10), ia forma

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

iar această ecuație reprezintă ecuația circumferinței. Deci circumferința este un caz particular al elipsei.

Fie sistemul de coordonate ortonormat al planului afin, al cărui vectori de direcție sunt paraleli axelor elipsei, iar punctul $(x_0; y_0)$ centrul elipsei.

O parametrizare a ecuațiilor elipsei este

$$\begin{cases} x = x_0 + a\, cost\, \varphi, \\ y = y_0 + b \sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0,2\pi).$$

Observația 2.2.1. Această parametrizare este periodică și anume de perioda 2π.

În cazul ecuației (2.10), când elipsa are centrul în originea de coordonate, avem ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = a\, cost\, \varphi, \\ y = b \sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0,2\pi).$$

2.2.2. Construirea elipsei cu ajutorul riglei unilaterale și a unui unghi drept

Fie dat un sistem rectangular de coordonate XOY. Fixăm pe axa OX un punct arbitrar N și respectiv pe axa OY un punct M, astfel încât lungimea segmentului $[MN]$ să fie elagă cu suma semiaxei reale (a) și cu cea imaginară (b)

$$[MN] = a + b.$$

Pe acest segment ($[MN]$), se selectează un punctul L, încât

$$[ML] = a$$

și

$$[NL] = b.$$

În procesul mișcării punctului N pe axa OX și a punctului M pe axa OY (fig. 2.7), fără a modifica lungimea segmentului dat, punctul L va descrie o elipsă.

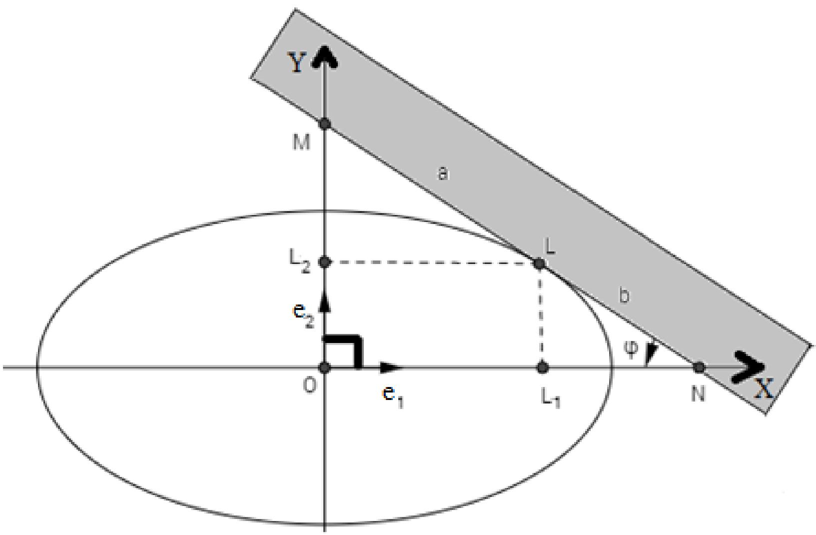


Fig. 2.7. Construirea elipsei cu ajutorul riglei unilaterale și a unui unghi drept

Demonstrație. Pentru a demonstra că linia primită este elipsă, se notează unghiul pozitiv de la vectorul $\overline{OE_1}$ la vectorul $\overline{MN}$ prin $\pi - \varphi$, deci $m(\widehat{MNO}) = \varphi$ (fig. 2.7). Coborând perpendiculare din punctul L pe axa OX și OY, obținem din triunghiul LML_2

$$x = a\cos\varphi$$

și din triunghiul LNL_1

$$y = b\sin\varphi.$$

În procesul mișcării segmentului $[MN]$ pe axele de coordonate, astfel încât φ să varieze de la 0 la 2π, punctul L va descrie o curbă, cu ecuațiile parametrice (vezi paragraful precedent)

$$\begin{cases} x = a\,cost\,\varphi, \\ y = b\sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0,2\pi).$$

Din aceste ecuații, examinăm parametrul φ, pentru aceasta rezolvăm ecuațiile date în raport cu $\cos\varphi$ și $\sin\varphi$. Ridicând la pătrat ultimile egalități, obținem

$$x^2 = a^2\cos^2\varphi \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \cos^2\varphi,$$

$$y^2 = b^2\sin^2\varphi \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\varphi,$$

și adunând-ule parte cu parte, obținem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi,$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ultima egalitate reprezintă ecuația canonică a elipsei.

Remarca 2.2.1. *Dacă punctul L este luat pe prelungirea segmentului* $[MN]$*, atunci curba, descrisă de el, de asemenea va fi o elipsă.*

2.2.3. Construirea elipsei cu un fir rigid și două puncte fixe

Pentru construirea elipsei cu ajutorul unui fir rigid și a două puncte fixe, vom utiliza definiția 2.2.1, și anume inegalitatea $2a > 2c$, unde $2c$ reprezintă distanța focală, iar $2a$ – lungimea axei mari.

Cu două ace fixăm punctele F_1 și F_2, care vor reprezenta focarele elipsei. Luăm un fir rigid și legăm capetele ei, astfel încât lungimea inelului obținut să fie egală cu $2a + 2c$. Apoi, din acest inel, formăm un triunghi cu două vârfuri fixe (punctele F_1 și F_2) și un punct M, ce se obține la întinderea inelului cu vârful unui creion.

Deci formăm un triunghi F_1MF_2 cu două vârfuri fixe (F_1 și F_2) și un punct variabil - M, astfel încât perimetrul lui sa fie o mărime constantă

$$P = 2a + 2c.$$

În procesul mișcării vârfului creionului pe hârtie (punctul *M*), vom obține o curbă închisă (fig. 2.8). Acestă curbă reprezintă o elipsă, deoarece toate punctele ei satisfac egalitatea [9]

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a.$$

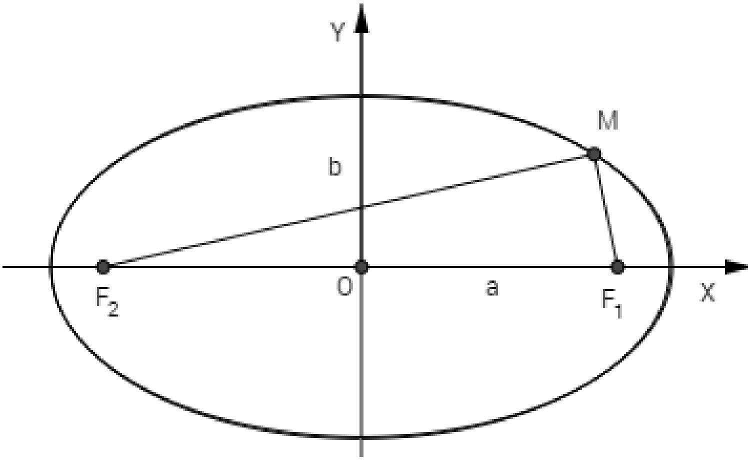
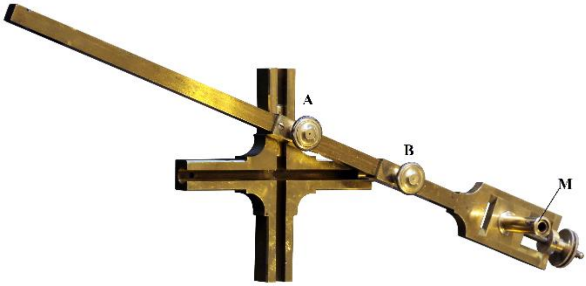


Fig. 2.8. *Construirea elipsei cu un fir rigid și două puncte fixe*

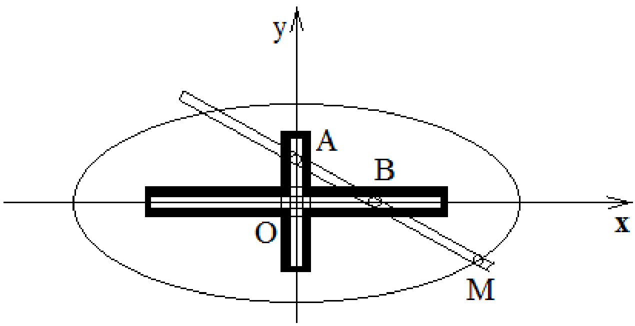
2.2.4. Construirea elipsei cu ajutorul compasului eliptic

Principiul construirii elipsei cu ajutorul riglei unilaterale și a unui unghi drept, descris mai sus (paragraful 2.2.2), stă la baza construcției compasului eliptic. Acest compas oferă posibilitatea de a trasa graficul elipselor de diverse lungimi a semiaxelor. De asemenea, pe același principiu se bazează și diferitele aplicații tehnice ale elipsei.

Compasul eliptic (fig. 2.9.a) conține două canale perpendiculare, care servesc drept axele OX și OY ale sistemului rectangular cartezian de coordonate XOY (fig. 2.9.b).



a



b

Fig. 2.9. Compasul eliptic

Pe aceste două canale, alunecă două cursoare (A și B), de care este unită flexibil o riglă prin articulațiile A pe axa OY și respectiv B pe axa OX.

Într-un capăt al riglei se fixează un manșou M, astfel încât

$$[AM] = a \text{ și } [BM] = b,$$

unde a este lungimea semiaxei mari, iar b este lungimea semiaxei mici.

În procesul mișcării punctului A pe axa OY și a punctului B pe axa OX, punctul M va descrie o elipsă [7].

Remarca 2.2.2. *Dacă punctul* B *este mijlocul segmentului* $[AM]$, *atunci curba descrisă de el, va fi o circumferință.*

Pe acțiunea reversibilă a compasului eliptic este bazată construcția mandrinei Leonardo da Vinci, folosită pentru strungirea așchiilor cu secțiunea transversală în formă de elipsă (fig. 2.10) [9].

Fig. 2.10. Strung pentru prelucrarea lemnului

2.2.5. Construirea elipsei prin pucte

Metoda 1. Elipsa se poate construi cu suficientă precizie, când se cunosc lungimile axelor.

Se construiește un dreptunghi $EFGH$, unde

$$[EF] = 2a, \text{ iar } [FG] = 2b$$

și se urmărește trasarea unei elipse care se va încadra în dpentunghiul dat [10].

Acest dreptunghi se secționează în patru dreptunghiuri identice

$$EAOC, AFDO, CHBO, BODG,$$

încât

$$[AE] = [AF] = [BG] = [BH]$$

și

$$[CE] = [DF] = [DG] = [CH].$$

Cu alte cuvinte construim axele elipsei și anume AB (semiaxa mică) și CD (semiaxa mare).

Se analizează fiecare din cele patru dreptunghiuri secționate. Fie dreptunghiul $EAOC$, laturile $[EC]$ și $[OC]$ se împart în același număr de părți egale, în funcție de precizia cerută la construcția elipsei.

Notăm punctele de divizare de pe segmentul $[OC]$ prin P_i (i=$1..n$), iar de pe segmentul $[EC]$ prin R_i ($i = \overline{1,n}$), respectând ordinea notării: începem de la punctul E spre punctul C și respectiv de la punctul O spre punctul C.

Pe segmentul $[EC]$ se duc semidrepte din punctul A prin toate punctele R_i ($i = \overline{1,n}$).

Respectiv, din punctul B se duc semidrepte prin toate punctele P_i ($i = \overline{1,n}$) de pe segmentul $[OC]$.

Punctele de intersecție formate de aceste semidrepte

$$Q_i = AR_i \cap BP_i \quad (i = \overline{1,n}),$$

sunt puncte ale elipsei (fig. 2.11).

Astfel, obținem o secțiune de elipsă, însă pentru a trasa întreg contur al elipsei, se procedează în mod similar și cu celelalte dreptunghiuri sau se determină punctele simetrice față de AB și CD.

În rezultat, vom obține o elipsă de suficientă precizie.

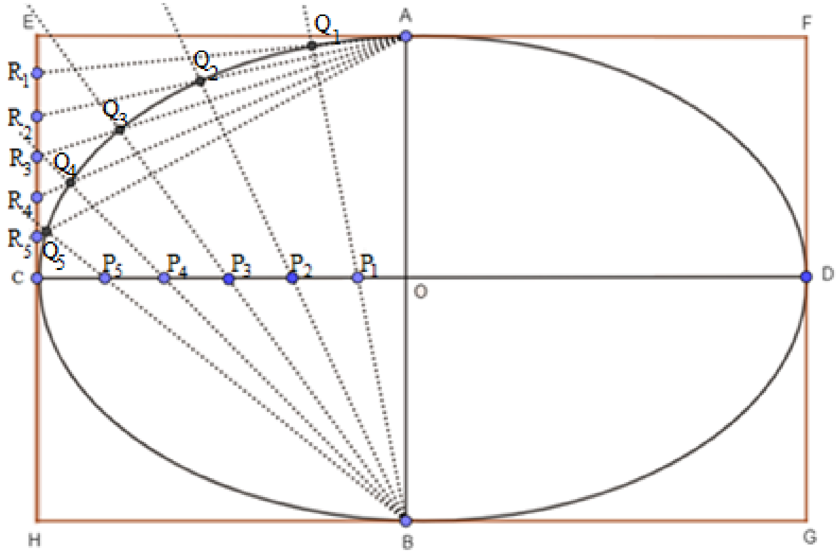


Fig. 2.11. Construirea elipsei prin puncte - metoda 1

Remarc 2.2.3. *Evident, cu cât numărul de diviziuni este mai mare, cu atât construcția va fi mai reușită și mai exactă [10].*

Metoda 2. Elipsa se poate construi cu suficientă precizie, când se cunoaște poziția focarelor F_1 și F_2 și lungimea axei mari $2a$ sau combinații de date, din care rezultă acestea.

Fixăm un segment $[MN] = [A_1A_2] = 2a$ (fig. 2.12), iar pe acest segment fixăm un număr suficient de puncte R_i $(i = \overline{1, n})$.

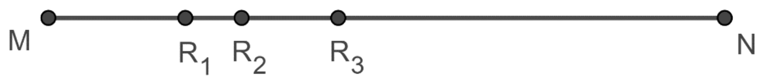


Fig. 2.12. Semiaxa mare

Pe axa mare $[A_1A_2]$, fixăm focarele F_1 și F_2. Cu ajutorul compasului trasăm un arc cu centrul în F_1 de rază $[MR_1]$ și un arc cu centrul în F_2 de rază $[NR_1]$. La intersecția acestor arcuri vom obține două puncte P_1 și P_1' (fig. 2.13).

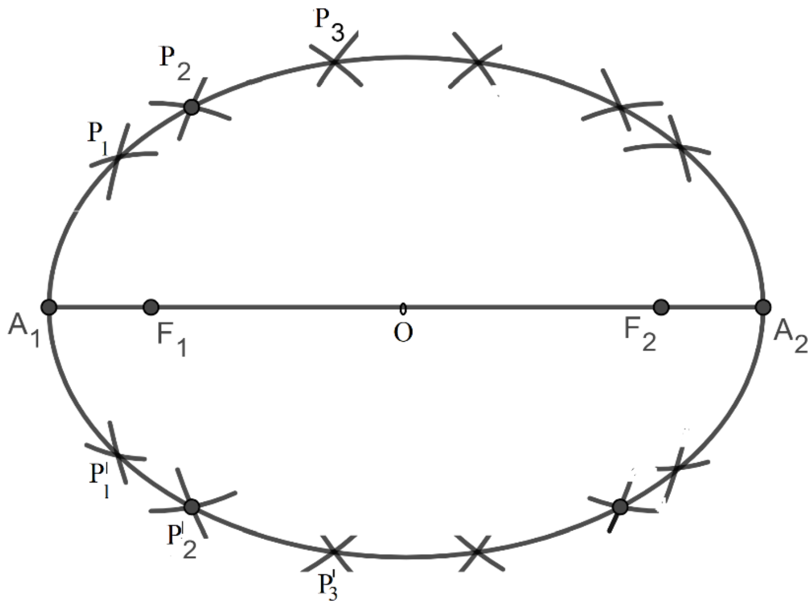


Fig. 2.13. Construirea elipsei prin puncte - metoda 2

La fel procedăm și cu celelalte puncte R_i $(i = \overline{2,n})$ și obținem punctele P_i și P_i' $(i = \overline{2,n})$, apoi determinăm și simetricile acestor puncte. În rezultatul unirii consecutive a punctelor obținute, vom primi o elipsă (fig. 2.13).

2.2.6. Elipsa obținută prin metoda cercurilor cencentrice

Metoda cercurilor concentrice este o metodă aproximativă de constuire a elipsei și se aplică în cazul când se cunosc lungimile semiaxei mari *a* și semiaxei mici *b* [25].

Se fixează un punct *O*, care va reprezenta cercul cercurilor concentrice de rază *a* (lungimea semiaxei mari) și de rază *b* (lungimea semiaxei mici), dar și punctul de intersecție a semiaxelor elipsei.

Se construiesc cercurile concentrice și două diametre perpendiculare

$$(A_1A_2) \perp (C_1C_2),$$

astfel încât A_1, A_2, C_1, C_2 să aparțină cercului mare, iar B_1 și B_2 să aparțină cercului mic ($B_1, B_2 \in (C_1C_2)$) (fig. 2.14).

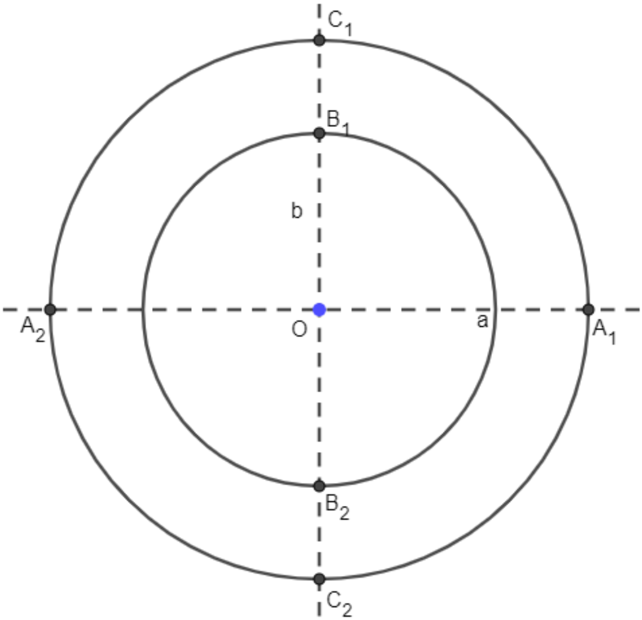


Fig. 2.14. Realizarea a două cercuri concentrice de rază a și b

Fie

$$[A_1A_2] = 2a$$

axa mare și

$$[B_1B_2] = 2b$$

axa mica a elipsei.

În continuare, ducem un număr suficient de diametre aleatoare cercului mare și notăm punctele respective, de pe cercul mare prin P_i $(i = \overline{1,n})$, iar punctele de intersecție cu cercul mic respectiv prin R_i $(i = \overline{1,n})$.

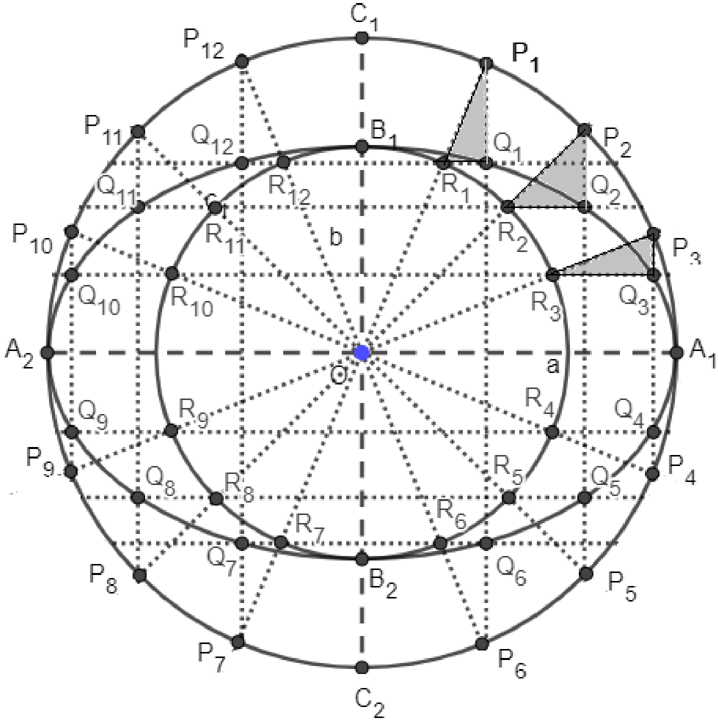


Fig. 2.15. Construirea elipsei din două cercuri concentrice

Prin punctele P_i $(i = \overline{1,n})$ ducem paralele la (C_1C_2) și respectiv, prin punctele R_i $(i = \overline{1,n})$ ducem paralele la (A_1A_2). În rezultat, pentru fiecare pereche de puncte P_i și R_i $(i = \overline{1,n})$, obținem câte un punct Q_i $(i = \overline{1,n})$, ce se obțin la intersecția dreptelor duse prin punctele respective, paralele la A_1A_2 și C_1C_2, astfel încât triunghiurile $P_iQ_iR_i$ $(i = \overline{1,n})$ sunt dreptunghice.

Unind punctele Q_i $(i = \overline{1,n})$, consecutiv, inclusiv și cu vârfurile A_1, B_2A_2, B_1, vom obține o elipsă (fig. 2.15).

2.2.7. Elipsa obținută prin comprimarea circumferinței spre diametrul ei

Fie $P(X; Y)$ un punct oarecare din plan. Îl transformăm într-un punct nou $P'(x; y)$ al aceluiași plan, astfel încât

$$X = x,$$
$$Y = ky. \tag{2.11}$$

Transformare (2.11), pentru $k > 1$, se numește *comprimarea planului spre axa OX*, iar pentru $k < 1$ se numește *întinderea planului de la axa OX*.

Considerăm o circumferință cu centrul în originea de coordonate, definită de ecuația canonică

$$X^2 + Y^2 = a^2$$

și punctul $P(X; Y)$ un punct al acestei circumferințe.

Aplicăm tansformarea (2.11), pentru $k = \frac{a}{b}$, adică

$$X = x$$

și

$$Y = \frac{a}{b}y.$$

Substituind valorile lui X și Y în ecuația canonică a elipsei, obținem

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2,$$

sau, împărțind la a^2, obținem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Deci, în urma comprimării, circumferința de rază a, se transformă într-o elipsă cu semiaxele a și b, iar punctul $P(X; Y)$ trece în punctul $P'(x; y)$ ce aparține elipsei respective (fig. 2.16).

Observăm că proiecția pe axa *Ox*, a punctului $P(X; Y)$ ce aparține circumferinței și a punctului $P'(x; y)$ ce aparține elipsei, este unul și același punct $Q(x; 0)$.

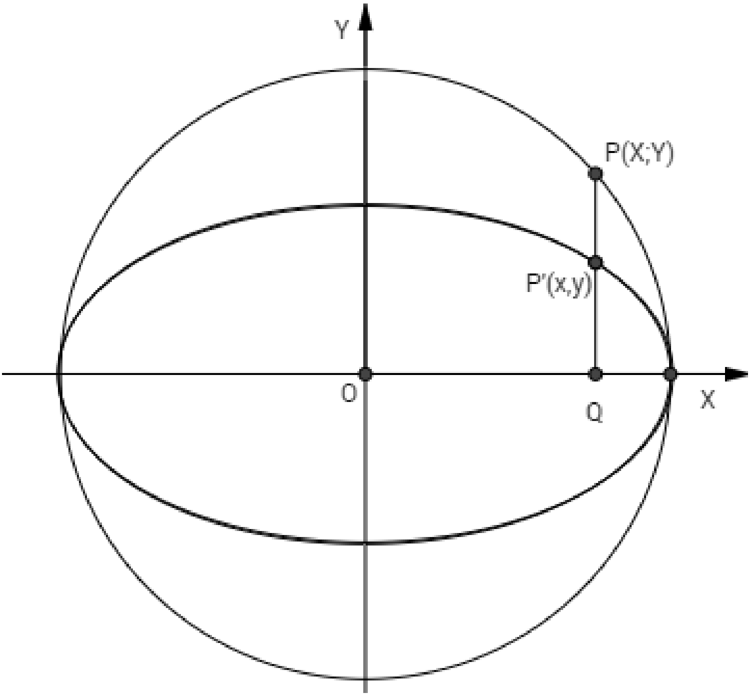


Fig. 2.16. Elipsa obținută la comprimarea circumferinței

2.2.8. Elipsa obținută prin metoda celor 4 centre

Metoda celor 4 centre se aplică în cazul când se cunosc lungimile semiaxei mari *a* și semiaxei mici *b*.

Se constuiește o dreaptă d_1, pe care se fixează punctele A_1 și A_2, astfel încât

$$[A_1A_2] = 2a.$$

Deci segmentul $[A_1A_2]$ va reprezenta axa mare a elipsei cercetate.

Cu ajutorul unui compas, se determină mijlocul segmentului $[A_1A_2]$.

Reamintim, pentru a determina mijlocul unui segment se construiesc două arcuri de rază mai mare ca jumătate din lungimea segmentului $[A_1A_2]$, unul cu originea în punctul A_1, iar celălalt cu originea în punctul A_2. Prin punctele de intersecție a acestor două arcuri se construiește dreapta d_2.

Fie punctul O, punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2

$$O = d_1 \cap d_2.$$

Pe dreapta d_2, fixăm punctele B_1 și B_2, astfel încât

$$[B_1O] = b$$

și

$$[B_2O] = b.$$

Deci segmentul $[B_1B_2]$ va reprezenta axa mică a elipsei cercetate.

Unim punctele A_1 și B_1, iar din origine, punctul O, construim un arc de rază a, ce unește dreptele d_1 și d_2, deci cadranul II și fixăm punctul de intersecție a acestui arc cu dreapta d_2, fie punctul C$\in [OB_1)$.

Cu originea în punctul B_1, construim, împotriva acelor ceasornicului, un arc de rază $[CB_1]$, începând cu punctul C până la intersecția cu segmentul $[AC]$ și acest punct de intersecție îl notăm prin D. Fie dreapta d_3 perpendiculara ce trece prin mijlocul segmentului $[AD]$.

Fixăm punctele E_1 și F_1, astfel încât

$$E_1 = d_3 \cap (A_1A_2)$$

si

$$F_1 = d_3 \cap (B_1B_2).$$

Determinăm opusul punctului E_1 și a punctului F_1 față de punctul O

$$E_2 \in (A_1A_2): [OE_1] = [OE_2], E_1 \neq E_2$$

și

$$F_2 \in (B_1B_2): [OF_1] = [OF_2], F_1 \neq F_2.$$

Fixăm dreptele

$$d_4 = (F_1E_2),$$
$$d_5 = (E_1F_2)$$

și

$$d_6 = (F_2E_2).$$

În continuare construim elipsa în baza a patru arcuri:

1) un arc de rază $[F_1B_1]$, cu originea în punctul F_1 de la dreapta d_4 la dreapta d_3 (împotriva acelor ceasornicului), la intersecție cu dreptele respective, obținem punctele

$$G_1 = d_3 \cap C(F_1, [F_1B_1])$$

si

$$G_2 = d_4 \cap C(F_1, [F_1B_1]);$$

2) un arc de rază $[F_1B_1]$ cu originea în punctul F_2 de la dreapta d_5 la dreapta d_6 (împotriva acelor ceasornicului), la intersecție cu dreptele respective, obținem punctele

$$G_3 = d_6 \cap C(F_2, [F_2B_2])$$

si

$$G_4 = d_5 \cap C(F_2, [F_2B_2]);$$

3) un arc de rază $[A_1E_1]$, cu originea în punctul E_1 de la punctul G_1 până la punctul G_4 (împotriva acelor ceasornicului);

4) un arc de rază $[A_1E_1]$, cu originea în punctul E_2 de la punctul G_3 până la punctul G_2 (împotriva acelor ceasornicului).

În rezultat, aceste patru arcuri (din punctele 1-4) formează o elipsă (fig. 2.17) [26].

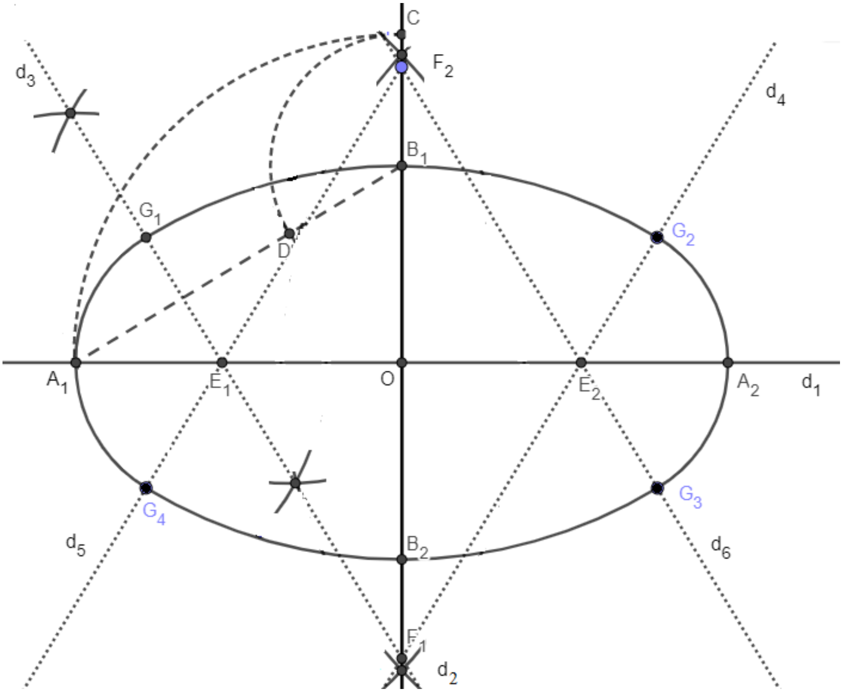


Fig. 2.17. Construirea elipsei prin metoda celor 4 centre

2.3. Hiperbola

2.3.1. Ecuațiile caracteristice a hiperbolei. Proprietăți

Definiția 2.3.1. *Locul geometric al punctelor dintr-un plan, astfel încât valoarea absolută a diferenței distanțelor la două puncte date în același plan, numite focare, este o mărime constantă* $(2a)$*, mai mică decât distanța dintre focare, se numește* ***hiperbolă*** [7].

Dacă punctele F_1 și F_2 reprezintă focarele hiperbolei, atunci distanța dintre ele se notează prin $2c$, iar diferența distanțelor oricărui punct al hiperbolei la cele două focare, prin $\pm 2a$.

Fie dat un sistem rectangular de coordonate XOY, focarele F_1 și F_2 și un punct $P(x;y)$ ce aparține hiperbolei.

Conform definiției avem

$$|PF_1 - PF_2| = 2a.$$

Aplicând formula distanței dintre două puncte, obținem

$$|F_1P| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

și

$$|F_2P| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Deci

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

sau

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - 2a.$$

Observăm că expresia obținută conține două radicale, iar pentru a elimina un radical, ridicăm ambele părți la pătrat și obținem

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xc + c^2 + y^2 =$$

$$= x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4xc = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = xc + a^2.$$

Ridicăm, încă o dată, ambele părți la pătrat și obținem

$$a^2((x+c)^2 + y^2) = x^2c^2 + 2xca^2 + a^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = x^2c^2 + 2xca^2 + a^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 + 2xca^2 + a^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 + a^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Deoarece $c > a$, avem $c^2 - a^2 > 0$. Notăm acest termen prin

$$b^2 = c^2 - a^2, \tag{2.13}$$

deci obținem

$$x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2,$$

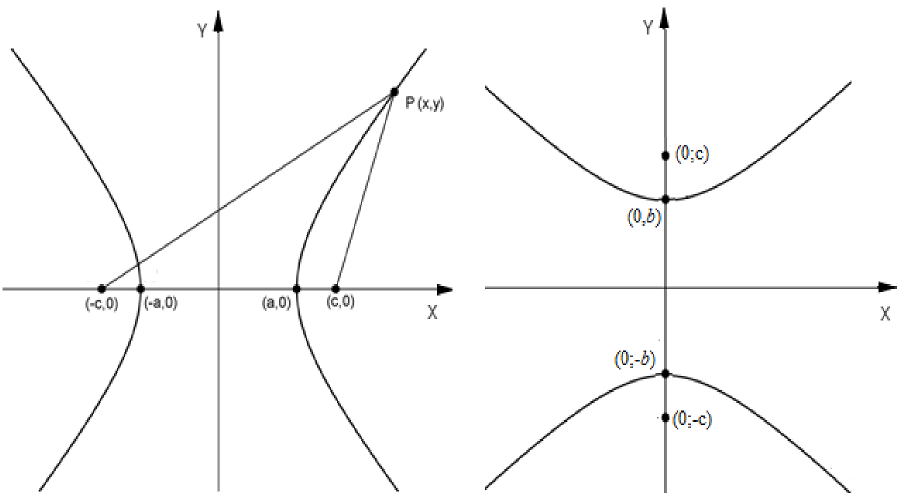
sau

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.14}$$

Ultima egalitate reprezintă ecuația hiperbolei, unde

a – semiaxa reală,

b – semiaxa imaginară (fig. 2.18.a) [7].



a *b*

Fig. 2.18. Hiperbola

Dacă obținem ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \tag{2.15}$$

atunci ecuația (2.15), deasemenea este o hiperbolă, unde b este semiaxa reală, iar a – semiaxa imaginară (fig. 18.b).

Segmentele $[F_1P]$ și $[F_2P]$ se numesc *raze vectoare (focale)* ale punctului P, lungimea lor se notează respectiv

$$[F_1P] = r_1 \quad \text{și} \quad [F_2P] = r_2.$$

Pentru punctele ce aparțin ramurii din dreapta ($x \geq a$), avem razele

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x$$

și

$$r_2 = -a + \frac{c}{a}x,$$

iar pentru punctele ramurii din stânga ($x \leq a$), avem

$$r_1 = -a - \frac{c}{a}x$$

și

$$r_2 = a - \frac{c}{a}x.$$

Definiția 2.3.2. *Vom numi* ***excentricitate*** *(ε), numărul egal cu raportul dintre distanța focală a hiperbolei și lungimea axei reale*

$$0 \leq \varepsilon = \frac{c}{a} > 1 \qquad \textit{pentru ecuația } (2.14),$$

$$0 \leq \varepsilon = \frac{c}{b} > 1 \qquad \textit{pentru ecuația } (2.15).$$

Observăm că graficul hiperbolei conține două asimptote oblice (fig. 2.19), cu ecuațiile

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

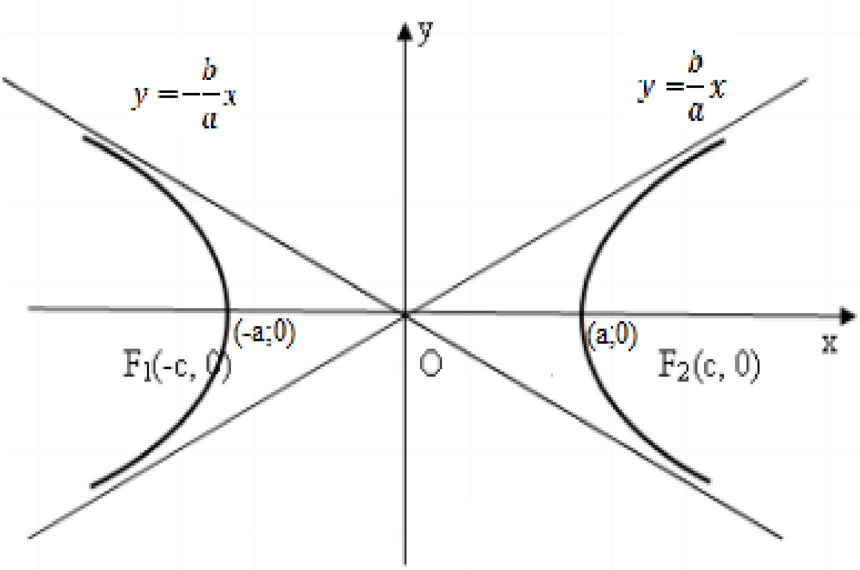


Fig. 2.19. Asimptotele hiperbolei

Dacă $a = b$, atunci obținem

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

această egalitate reprezintă ecuația *hiperbolei echilaterale*, asimptotele acestei hiperbole sunt [27]

$$y = \pm x.$$

Un exemplu de hiperbolă echilaterală este

$$x^2 - y^2 = 1$$

și are graficul dat în următoarea figură:

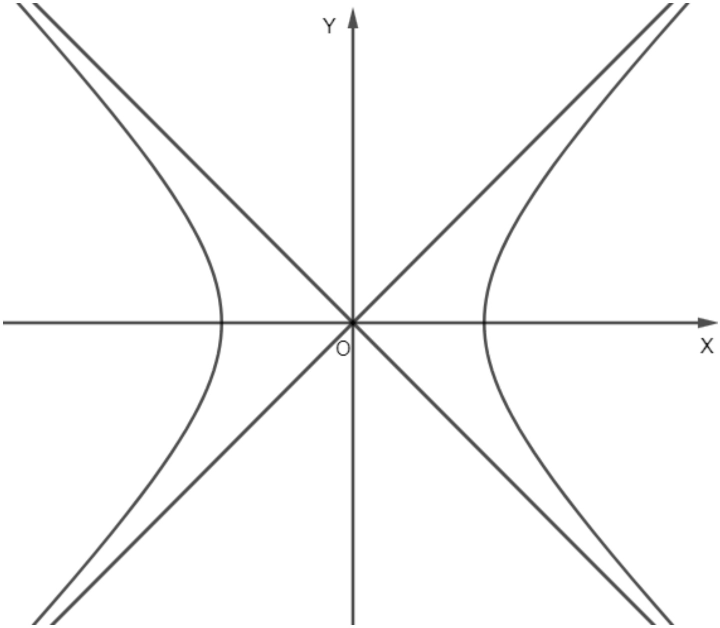


Fig. 2.20. Hiperbolă echilaterală

De asemenea, hiperbolă echilaterală este dată și de ecuația
$$xy = \pm a^2.$$
În acest caz, asimptotele hiperbolei sunt axele de coordonate. Un alt exemplu de hiperbole echilaterale sunt hiperbolele date de ecuația
$$xy = 2^2$$
și respectiv
$$xy = -2^2.$$
Geometric, aceste familii de curbe sunt reprezentate în figura 2.21.

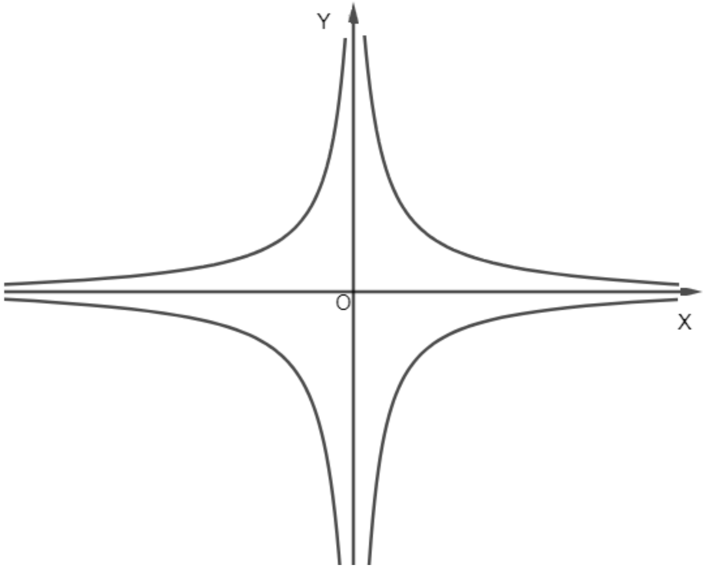


Fig. 2.21. Hiperbola echilaterală $xy = \pm 2^2$

Pentru a defini hiperbola, prin ecuațiile parametrice, este necesar să reamintim funcțiile trigonometrice sinus hiperbolic $sh\,\varphi$ și cosinul hiperbolic $ch\,\varphi$

$$sh\,\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, sh\,\varphi = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

și

$$ch\,\varphi : \mathbb{R} \to [1, \infty), ch\,\varphi = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Cunoaștem

$$ch^2\,\varphi - sh^2\,\varphi = 1, \forall \varphi \in \mathbb{R}.$$

Parametrizarea hiperbolei se efectuează pentru fiecare ramură în parte.

Pentru ramura $x \leq -a$, avem

$$\begin{cases} x = -a\,ch\,\varphi, \\ y = b\,sh\,\varphi, \end{cases} \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

iar pentru ramura $x \geq a,$ avem

$$\begin{cases} x = a\, ch\, \varphi, \\ y = b\, sh\, \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

2.3.2. Construcția hiperbolei cu un fir rigid și două puncte fixe

Conform definiției hiperbolei, putem afirma că hiperbola poate fi construită parțial cu ajutorul instrumentelor neclasice: de exemplu cu un fir rigid și două puncte fixe – focarele hiperbolei. Pentru aceasta, luăm un fir rigid și efectuăm un nod pe lungimea lui, astfel încât acest nod/punct să împartă lungimea firului în două segmente a căror diferență este [7]

$$2a < 2c.$$

Capetele firului se fixează cu ajutorul a două ace în poziția focarelor. Efectuăm o răsucire a firului de ață pentru a primi un lanț, și introducem în el vârful unui creion.

Pentru construirea curbei, vom ține creionul în poziția verticală, iar cu mâina stângă vom trage firul de nodul creat, în direcția focarelor (fig. 2.22).

În procesul tragerii, vârful creionului se va mișca, trasând o porțiune din ramura hiperbolei (fig. 2.22).

Pentru construirea celelaltei ramuri este necesar să modificăm cu locul capetele firului de ață și să repetăm procedeul.

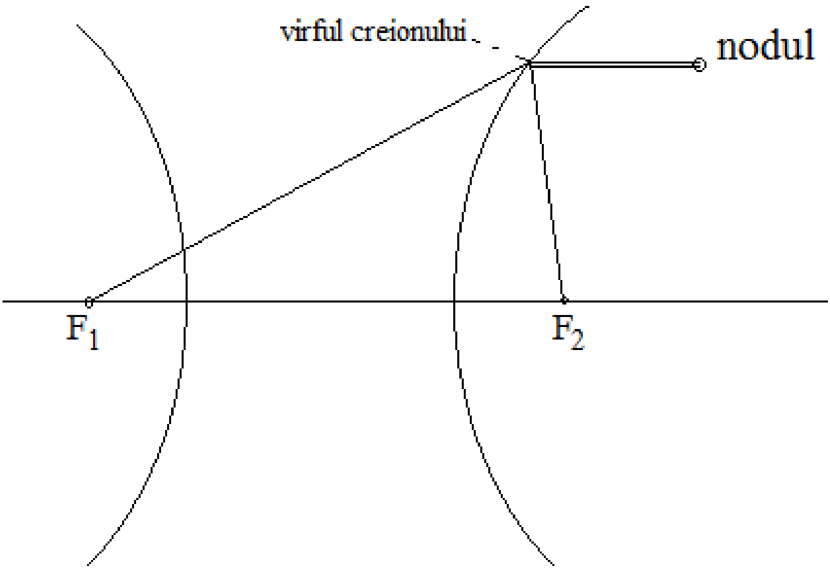


Fig. 2.22. Construirea hiperbolei cu ajutorul unei ațe și a două puncte fixe

2.3.3. Metoda generală de construcție a hiperbolei

Metoda generală de construcție a hiperbolei se aplică în cazul când se cunoaște distanța dintre focar și directoare, și excentricitatea $(\varepsilon = \frac{c}{a})$. În rezultat se construiește o porțiune dintr-o ramură a hiperbolei.

Se contruiesc două drepte perpendiculare d_1 și d_2

$$C = d_1 \cap d_2.$$

Pe dreapta d_1 se fixează focarul F_1 ($[CF_1]$ – distanța dintre focar și diretoare), iar segmentul $[CF_1]$ se împarte în raportul $\frac{c}{a}$ și fixăm vârful hiperbolei A_1, astfel încât

$$\frac{[A_1F_1]}{[CA_1]} = \frac{c}{a} = \varepsilon.$$

Prin punctul A_1 se duce o paralelă la dreapta d_2 (fig. 2.23)

$$d_2||d_3: A_1 \in d_3,$$

iar pe dreapta d_3 se fixează punctul

$$G \in d_3: [A_1F_1] = [A_1G].$$

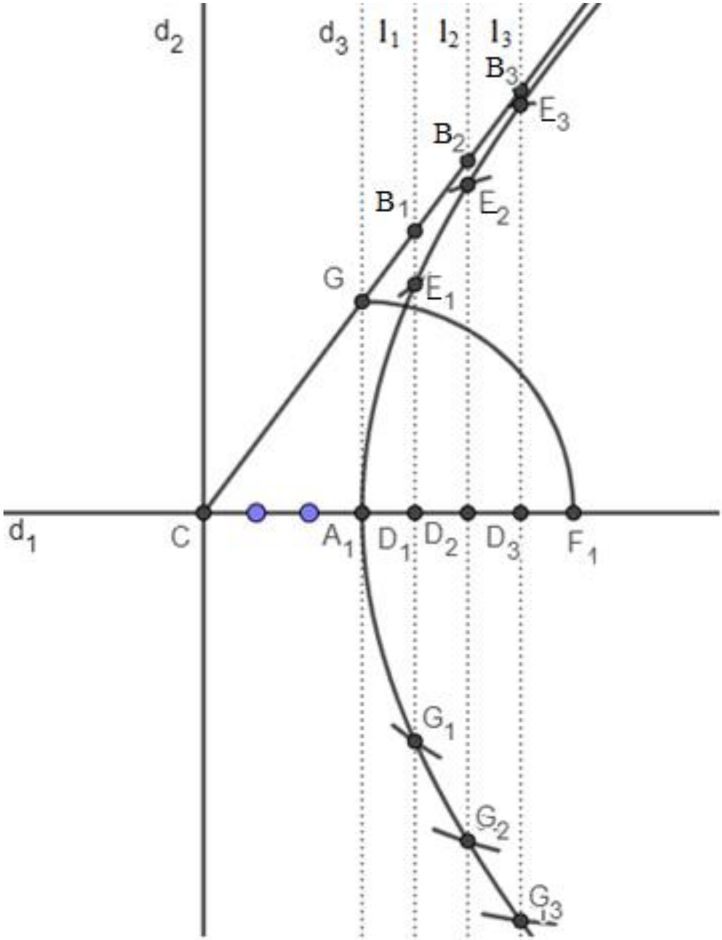


Fig. 2.23. Metoda generală de construcție a hiperbolei

Construim semidreapta $[CG)$, iar pe segmentul $[A_1F_1]$ fixăm un număr suficient de puncte D_i și ducem paralele l_i, la dreapta d_2, prin fiecare punct D_i, iar la intersecție cu semidreapta $[CG)$ obținem punctele B_i (fig. 2.23).

Fixăm lungimea segmentului $[D_1B_1] = R_1$, cu centrul în F_1 construim un arc de raza R_1, la intersecție cu dreapta l_1 obținem punctele E_1 și G_1.

Analog procedăm cu celelalte puncte D_i și obținem punctele E_i și G_i (i=2,3,...) (fig. 2.23).

Unind punctele E_i, A_1 și G_i obținem o porțiune dintr-o ramură a hiperbolei, pentru a obține cealaltă ramură, repetăm precedeul de mai sus, sau determinăm punctele simetrice, față de dreapta d_2.

1.3.4. Construcția hiperbolei prin puncte

Metoda 1. Pentru a aplica această metodă este necesar să cunoaștem distanța dintre vârfurile hiperbolei A_1 și A_2 (2a) și poziția focarelor F_1 și F_2 [10].

Pe axa trasversală se ia un șir de puncte K_i ($i = \overline{1,n}$), în exteriorul segmentului format de focare (fig. 2.24).

Cu centrul în F_1 se trasează un arc de cerc cu raza

$$R_1 = [A_1K_1],$$

iar cu centrul în F_2 un arc de cerc cu raza

$$R_2 = [A_2K_1].$$

La intersecția arcelor de cerc primim punctele H_1 și H'_1 care sunt puncte ale hiperbolei.

Se construiesc, asemnea, un număr suficient i ($i = \overline{1,n}$) de puncte

$$H_i = C_{1i}(F_1, A_1K_i) \cap C_{2i}(F_2, A_2K_i)$$

și

$$H'_i = C_{1i}(F_1, A_1K_i) \cap C_{2i}(F_2, A_2K_i).$$

Unind punctele obținute H_i și H'_i, obținem o ramură a hiperbolei.

Determinăm punctele simetrice J_i și J'_i față de axa imaginară și construim a doua ramură a hiperbolei (fig. 2.22),

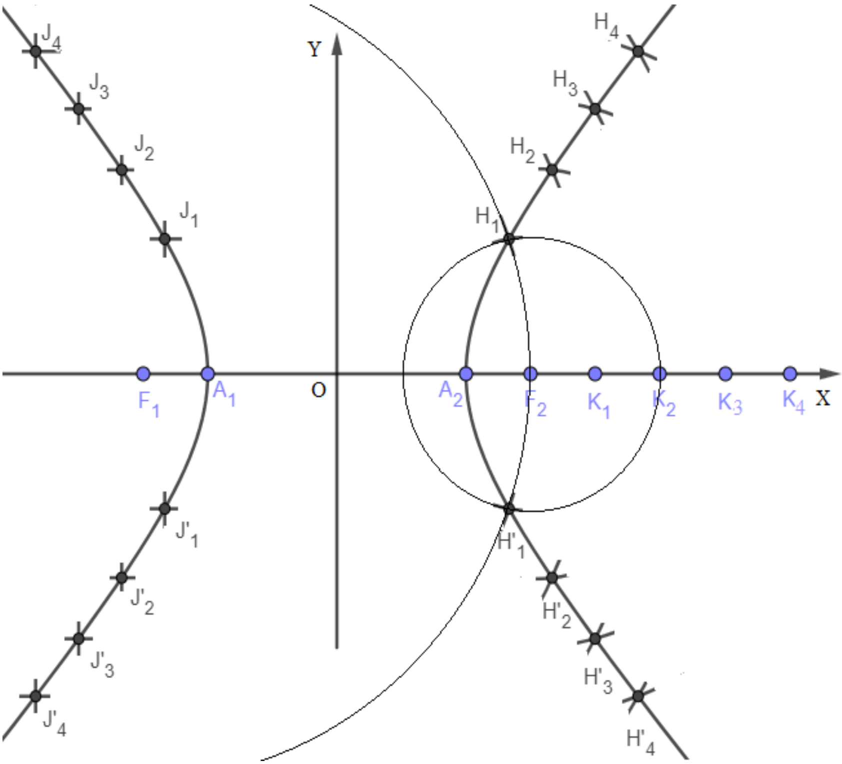


Fig. 2.24. Construirea hiperbolei prin puncte. Metoda 1

sau parcurgem același algoritm pentru ramura a doua, construind punctele [10]

$$J_i = C_{1i}(F_2, A_1K_i) \cap C_{2i}(F_1, A_2K_i)$$

și

$$J'_i = C_{1i}(F_2, A_1K_i) \cap C_{2i}(F_1, A_2K_i).$$

Metoda 2. Construcția hiperbolei prin puncte, poate fi realizată cu ajutorul unui pătrat/dreptunghi, a cărui două laturi alăturate să reprezinte asimptotele hiperbolei.

Fie pătratul/dreptunghiul $A_1B_1CD_1$, dreptele (CD_1) și (B_1C) vor servi în calitate de asimptote ale hiperbolei, punctul A_1 un vârf al hiperbolei, iar punctul C punctul de intersecție a asimptotelor - originea.

Construim semidreptele $[CD_1)$, $[CB_1)$, $[D_1A_1)$ și $[B_1A_1)$.

Pe simidreapta $[D_1A_1)$ se fixează un număr suficient de puncte i, fie punctele E_i $(i = \overline{1,n})$.

Unind punctele E_i cu originea C, obținem punctele

$$F_i = (E_iC) \cap (B_1A_1), (i = \overline{1,n})$$

(în figura 2.25, nu sunt indicate toate punctele F_i, deoarece aglomerează construcția).

În baza punctelor E_i, A_1 și F_i, construim dreptunghiuri și obținem punctele G_i $(i = \overline{1,n})$

$$G_i = (E_iG_i) \cap (F_iG_i)\text{: } (E_iG_i) || (A_1B_1) \text{ și } (F_iG_i) || (A_1D_1).$$

Analog, pe simidreapta $[B_1A_1)$ se fixează un număr suficient de puncte (i), fie punctele H_i $(i = \overline{1,n})$ și se repetă algoritmul de mai sus.

În rezultat se obțin punctele I_i $(i = \overline{1,n})$. Unind punctele I_i, A_1 și G_i, obținem o ramură a hiperbolei.

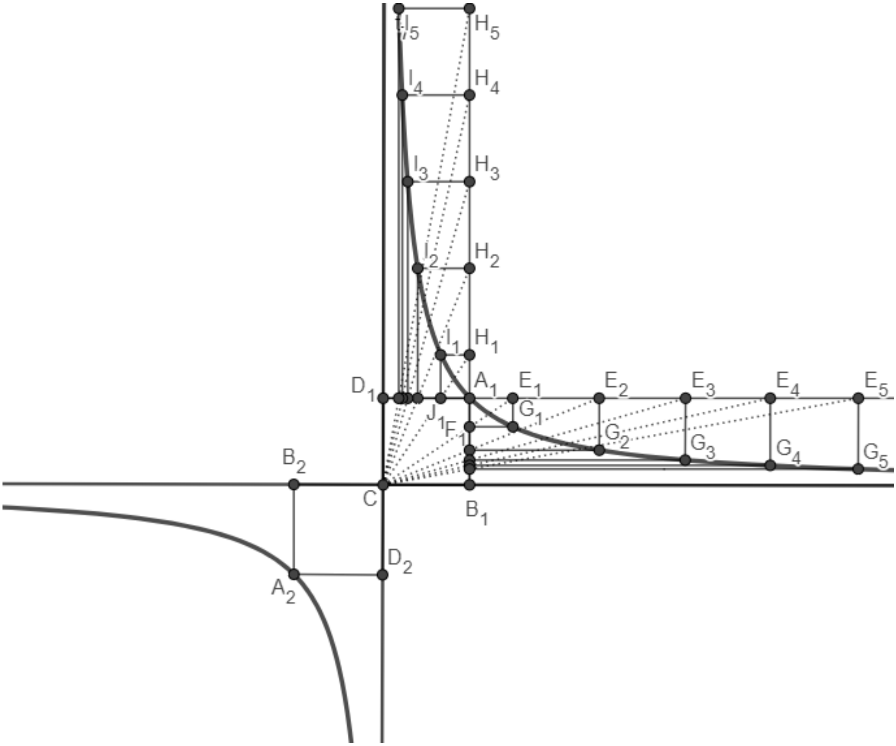


Fig. 2.25. Construirea hiperbolei prin puncte. Metoda 2

Pentru a construi cea de a doua ramură este necesar să construim un pătrat (dreptunghi) $A_2B_2CD_2$, identic pătratului (dreptunghiului) $A_1B_1CD_1$, încât punctul D_2 să fie simetricul punctului D_1 față de punctul C, iar punctul B_2 să fie simetricul punctului B_1 față de același punct.

Repetând procedeul descris pentru prima ramură, obținem ramura a doua a hiperbolei.

2.4. Parabola

2.4.1. Ecuația canonică a parabolei. Proprietăți

Definiția 2.4.1. *Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de la un punct dat F, numit focar și o dreaptă dată l, numită directoare, se numește* ***parabolă*** [7].

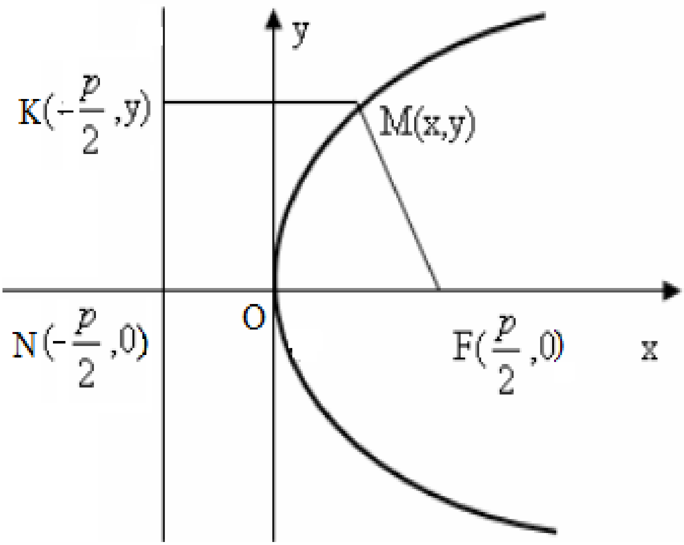


Fig. 2.26. Parabola

Luăm în calitate de axa OX, perpendiculara dusă la directoarea l, cu ecuația

$$x = -\frac{p}{2},$$

prin focarul F, originea de coordonate – punctul O (mijlocul segmentului $[NF]$, vezi figura 2.26), iar în calitate de axa OY luăm dreapta, care trece prin punctul O și este paralelă la directoarea l.

Notăm distanța dintre focarul parabolei și directoarea ecesteia, prin p

$$[NF] = p,$$

atunci coordonatele focarului F vor fi $F(\frac{p}{2};\ 0)$.

Dacă $M(x; y)$ este un punct arbitrar al parabolei, atunci în baza definiției parabolei acest punct este egal depărtat de focar și dreapta directoare *l*

$$[FM] = [KM].$$

Exprimăm lungimile segmentelor $[FM]$ și $[KM]$ prin coordonatele punctelor

$$\mathrm{KM} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$$

și

$$\mathrm{FM} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Deci

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

ridicăm ambele părți la pătrat

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2,$$

sau

$$y^2 = 2px. \qquad (2.16)$$

Ultima relație reprezintă ecuația canonică a parabolei.

Deoarece ecuația (2.16) conține variabila y numai la puterea a doua, odată cu coordonatele fiecărui punct $M(x; y)$, ea va fi satisfăcută și de coordonatele punctului simetric, față de axa OX $M_1(x; -y)$.

Prin urmare, parabola (2.16) este simetrică față de axa OX. Axa de simetrie se numește *axa parabolei* (fig. 2.27.a).

Această parabolă trece prin originea de coordonate, deoarece ecuația ei, este satisfăcută de coordonatele originii $O(0; 0)$.

Punctul O de intersecție al parabolei cu axa de simetrie se numește *vârful parabolei.*

Dacă alegem sistemul de coordonate în așa fel, încât focarul să aibă coordonatele $F(-\frac{p}{2};\ 0)$, ecuația parabolei va avea forma (fig. 2.27.b)

$$y^2 = -2px. \tag{2.17}$$

Dacă focarul se află pe axa OY, în punctul $F(0; \frac{p}{2})$, atunci ecuația parabolei va avea forma (fig. 2.27, c)

$$x^2 = 2py. \tag{2.18}$$

Dacă focarul se află pe axa OY, în punctul $F(0; -\frac{p}{2})$, atunci ecuația parabolei va avea forma (fig. 2.27, d)

$$x^2 = -2py. \tag{2.19}$$

Luând pe y ca parametru în $y^2 = 2px$, obținem ecuațiile parametrice ale parabolei

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p}, \\ y = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

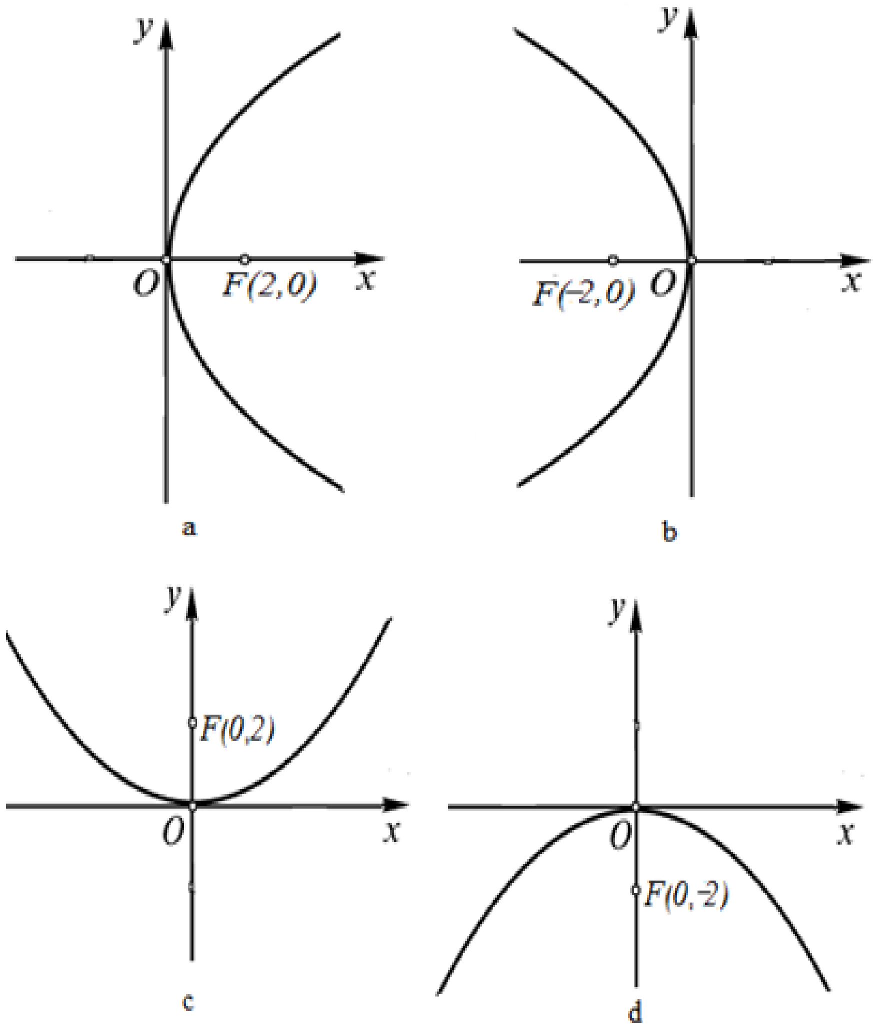


Fig. 2.27. Reprezentarea geometrică a diverselor tipuri de ecuații a parabolei

2.4.2. Construcția parabolei cu un echer, o riglă unilaterală, un fir rigid și un punct fix

Din definiția parabolei rezultă și condițiile de desenare a unui arc de parabolă cu ajutorul instrumentelor neclasice: un echer, o riglă unilaterală, un fir rigid și un punct fix [7].

Fie dată o dreaptă – care va reprezenta directoarea parabolei și un punct arbitrar F_1 - focarul ei. Fixăm rigla astfel încât muchia ei, să coincidă cu directoarea, apoi un echer a cărui cea mai mică catetă să fie pe directoare (rigla unilaterală) și în final luăm un fir de axă rigid capetele căruia să fie fixate: unul în focar, iar alt capăt în vârful echerului, vârful dintre cateta mare și ipotenuză. Cu ajutorul vârfului creionului, întindem firul de ață.

În procesul mișcării echerului, și a lunecării vârfului creionului pe catetă, vom obține un arc de parabolă (fig. 2.28).

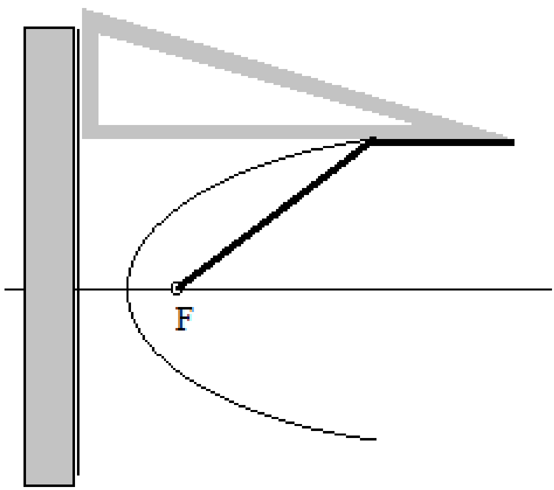


Fig. 2.28. Construirea parabolei cu ajutorul unui echer, a unei rigle unilaterale, a unui fir rigid de ață și a unui punct fix

2.4.3. Metoda tangentelor

Metoda tangentelor constă în constuirea unui arc de parabolă când se cunoaște lungimea bazei $[AB]$ și înălțimea $[VO]$ (fig. 2.29) [28].

Construim un segment $[AB]$, iar prin mijlocul lui O, ducem o perpendiculară. Pe pendiculara dată fixăm punctul V, încât $[VO]$ să reprezinte înălțimea parabolei (dată inițial) și punctul C, încât

$$[CO] = 2[VO].$$

Construim triunghiul isoscel ABC. Împărțim laturile *AC* și *BC*, într-un număr suficient n, de segmente egale și le notăm consecutiv de la A la C prin $1,2,\ldots,n-1$ și respectiv de la C la B prin 1', 2', ..., $n-1$'.

Unim punctele i cu i' ($i = \overline{1, n-1}$), apoi construim parabola ce trece prin punctele AVB și este tangentă la segmentele $[ii']$ ($i = \overline{1, n-1}$) (fig. 2.29).

Fixăm un oarecare punct P pe segmentul $[VO]$ și simetricul lui P' față de punctul O, iar pe parabola construită fixăm punctul T, astfel încât

$$PT || AB.$$

Observăm că dreapta TP' este tangentă la parabola dată.

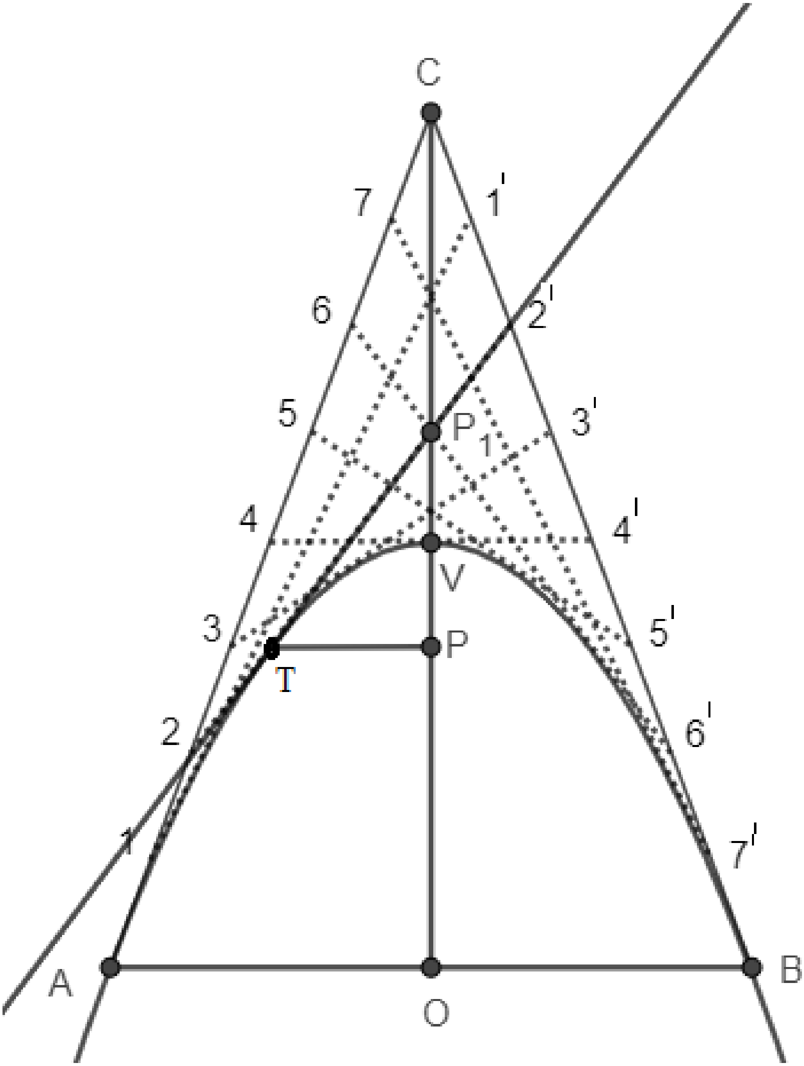


Fig. 2.29. Metoda tangentelor

2.4.4. Metoda dreptunghiului

Metoda dreptunghiului constă în constuirea unui dreptunghi, $ABCD$, astfel încât, punctele A și B să fie puncte ale parabolei, iar vârful V, să fie mijlocul laturii CD (fig. 2.30).

Latura AD se împarte într-un număr suficient de segmente egale, fie punctele E_i ($i = \overline{1,4}$), astfel încât

$$[AE_4] = [E_4E_3] = [E_3E_2] = [E_2E_1] = [E_1D].$$

Construim segmentele $[VE_i]$ ($i = \overline{1,4}$).

Fixăm punctul O, mijlocul laturii $[AB]$

$$[AO] = [OB].$$

Împărțim segmentul $[AO]$ în același număr de segmente egale ca și segementul $[AD]$ și fixăm punctele F_i ($i = \overline{1,4}$), astfel încât

$$[AF_4] = [F_4F_3] = [F_3F_2] = [F_2F_1] = [F_1O].$$

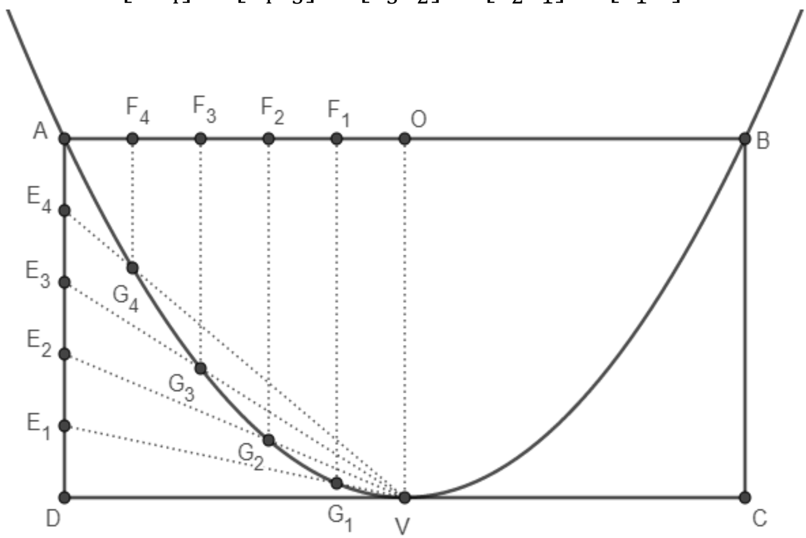


Fig. 2.30. Metoda dreptunghilui

Ducem paralele la (VO) prin punctele F_i $(i = \overline{1,4})$, astfel încât

$$G_i = (F_iG_i) \cap (E_iV): (F_iG_i)||(OV) \quad (i = \overline{1,4}).$$

Analog, determinăm și câteva puncte în dreptunghiul $BCVO$, sau determinăm simetricile punctelor G_i, față de (VO).

În rezultat, unind aceste puncte, vom obține o parabolă.

2.4.5. Construcția parabolei prin puncte

Pentru a aplica această metodă este necesar să cunoaștem focarul parabolei F și directoarea ei d, cu alte cuvinte este necesar să cunoaștem distanța dintre focar și directoare [10].

Prin focarul F se duce o perpendiculară la directoarea d, astfel încât

$$O = d \cap (FO),$$

dreapta (FO) reprezentând axa parabolei.

Se împarte segmentul $[FO]$ în jumătate și se fixează vârful parabolei – punctul A

$$A \in [FO]: [FA] = [AO].$$

Pe semidreapta $[AF)$ se i-au un număr suficient de puncte D_i $(i = \overline{1,n})$, fie $n = 4$. Prin punctele D_i se duc paralele la didectoarea d, fie dreptele l_i $(i = \overline{1,4})$, inclusiv prin focarul F se duce o perpendiculară l_0.

Cu centrul în focarul F, se duce un arc de rază

$$R_0 = [OF],$$

la intersecție cu dreapta l_0 obținem punctele E_0 și E_0'.

Apoi, cu centrul în focarul F, se duce un arc de rază

$$R_1 = [OD_1],$$

la intersecție cu dreapta l_1 obținem punctele E_1 și E_1'. Analog se procedează și cu celelalte puncte (fig. 2.31) [11].

Unind punctele E_i, A, E_i' $(i = \overline{0,4})$, printr-o curbă continuă, vom obține o parabolă.

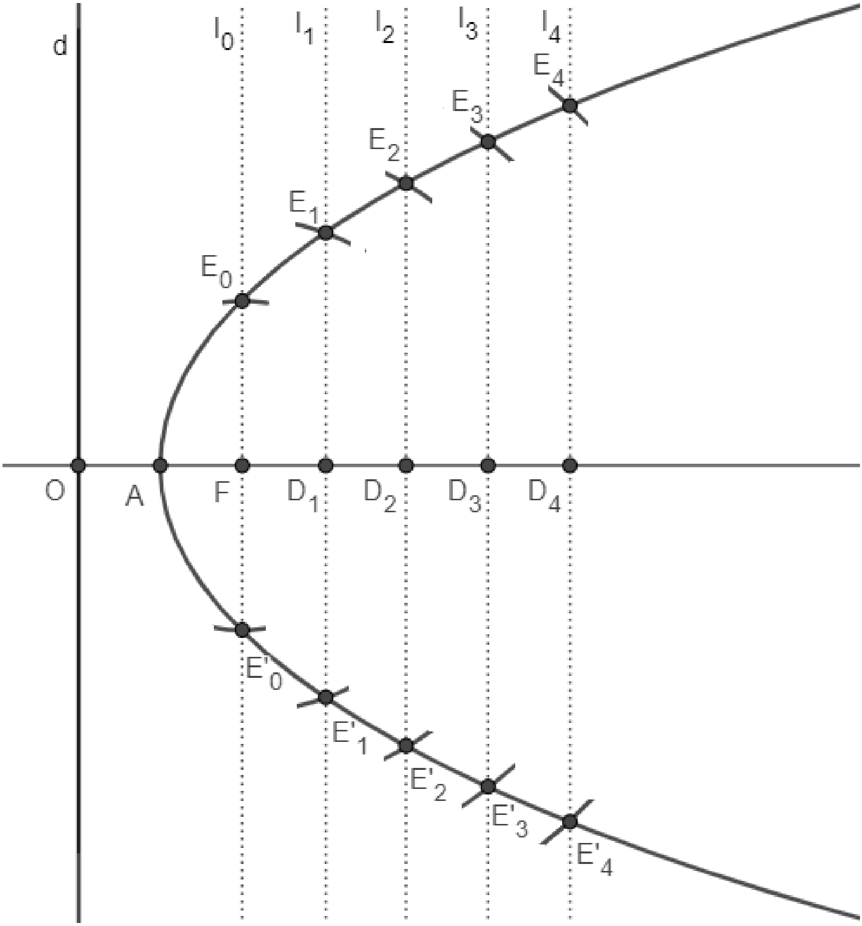


Fig. 2.31. Construirea parabolei prin puncte

2.5. Diamentrele curbelor de ordinul doi

Curbele de ordinul doi (elipse, hiperbola și parabola), analizate în paragrafele precedente, pot fi generalizate printr-o ecuație de ordinul doi

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + 2\mathrm{C}x + \mathrm{D} = 0. \qquad (2.20)$$

Pentru curbele menționate avem

1) cerc: $A = 1, B = 1, C = 0$ și $D = -1$;
2) elipsă: $A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2}, C = 0$ și $D = -1$;
3) hiperbolă: $A = \frac{1}{a^2}, B = -\frac{1}{b^2}, C = 0$ și $D = -1$;
4) parabolă: $A = 0, B = 1, C = -p$ și $D = 0$.

Definiția 2.5.1. *Se numește* ***diametrul curbei de ordinul doi****, locul geometric al mijlocurilor coardelor paralele ale curbei.*

Fie dată o curbă de ordinul doi și o familie de coarde paralele ale acestei curbe. O coardă are extremitățile $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$, vom precăuta ecuația diametrului în forma

$$y = kx + b \qquad (2.21)$$

Mijlocul coardei M_1M_2 este punctul $M(x, y)$, atunci conform formulei de calcul a mijlocului unui segment, avem:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad și \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Deoarece punctele M_1 și M_2 aparțin curbei de ordinul doi, ele satisfac ecuația generalizată (2.20), atunci

$$M_1: \quad Ax_1^2 + By_1^2 + 2Cx_1 + D = 0, \qquad (2.22)$$

$$M_2: \quad Ax_2^2 + By_2^2 + 2Cx_2 + D = 0. \qquad (2.23)$$

Calculăm diferența (2.23-2.22), obținem

$$A(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + B(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) + 2C(x_2 - x_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x_2 + x_1) + B\frac{(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)}{(x_2 - x_1)} + 2C = 0.$$

Fie

$$k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

atunci

$$A(x_2 + x_1) + Bk_1(y_2 + y_1) + 2C = 0.$$

Introducem notațiile

$$X = x_2 + x_1,\ Y = y_2 + y_1, 2C = C,$$

obținem

$$AX + Bk_1Y + C = 0. \qquad (2.24)$$

Ultima egalitate reprezintă ecuația diametrului curbei date de ecuația (2.20), unde k_1 este panta (coeficientul unghiular). Observăm că forma precăutată a ecuației diametrului este (2.21), considerând că k_1 există, adică dreapta ce conține diametrul nu-i paralelă cu axa Ox.

Exprimăm din (2.24) variabila y

$$y = -\frac{A}{Bk_1}x - \frac{C}{Bk_1},$$

Comparând ultima egalitate cu (2.21), obținem

$$k = -\frac{A}{Bk_1}.$$

În particular, vom analiza diametrele curbelor studiate, date de ecuația (2.24).

1) Cercul. Înlocuim $A = 1, B = 1, C = 0$, în ecuația (2.24) și obținem

$$x + k_1y = 0,$$

din care

$$y = -\frac{x}{k_1}$$

și o dreaptă perpendiculară $y = kx$, atunci

$$k = -\frac{1}{k_1}. \qquad (2.25)$$

Diametrul cercului este perpendicular coardelor paralele ale curbei care-l definesc.

Dacă două diametre ale cercului dat au coeficienții unghiulari k și k_1, care satisfac egalitatea (2.25), atunci ei se numesc ***diametri conjugați.***

1) *Elipsa*. Înlocuim $A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2}, C = 0$, în ecuația (2.24) și obținem

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} k_1 = 0,$$

din care îl exprimăm pe

$$y = -\frac{b^2}{a^2 k_1} x.$$

Comparând cu (2.21) obținem

$$k = -\frac{b^2}{a^2 k_1}. \tag{2.26}$$

Ultima egalitate reprezintă coeficientul unghiular al diametrului elipsei.

Două diametre ale unei și aceleiași elipse se numesc ***conjugate,*** dacă coeficientul lor unghiular k și k_1 satisfac relația (2.26).

Observăm că în cazul elipsei ca și în cazul cercului dat în forma canonică, diametrele lor trec prin centru (originea de coordonate). Diametrul conjugat altui diametru este paralel coardelor paralele, cel definesc pe celălalt diametru, unde O este originea de coordonate (fig. 2.32)

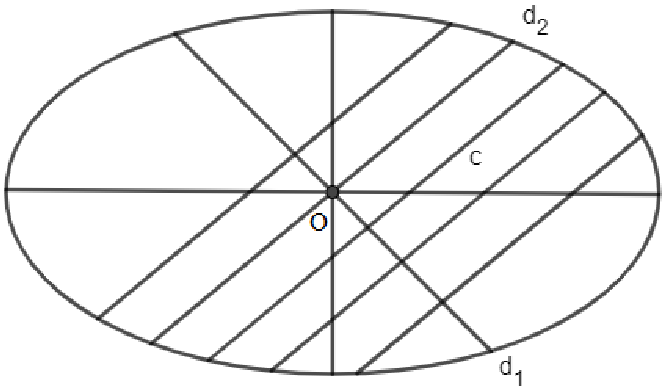


Fig. 2.32. Diamentele conjugate ale elipsei

Nota 2.5.1. Axa mare și axa mică a elipsei se numesc *diametrele conjugate principale* ale elipsei.

2) *Hiperbola.* Înlocuim $A = \frac{1}{a^2}$, $B = -\frac{1}{b^2}$, $C = 0$, în ecuația (2.24) și obținem

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2}k_1 = 0$$

din care îl exprimăm pe

$$y = \frac{b^2}{a^2k_1}x.$$

Comparând cu (2.21) obținem

$$k = \frac{b^2}{a^2k_1}. \tag{2.27}$$

Ultima egalitate reprezintă coeficientul unghiular al diametrului hiperbolei.

Două diametre ale unei și aceleiași hiperbole se numesc conjugate cu coeficienții unghiulari k și k_1, dacă satisfac relația (2.27).

Diametrele hiperbolei trec prin originea de coordonate, considerând hiperbola dată în forma canonică (fig. 2.33).

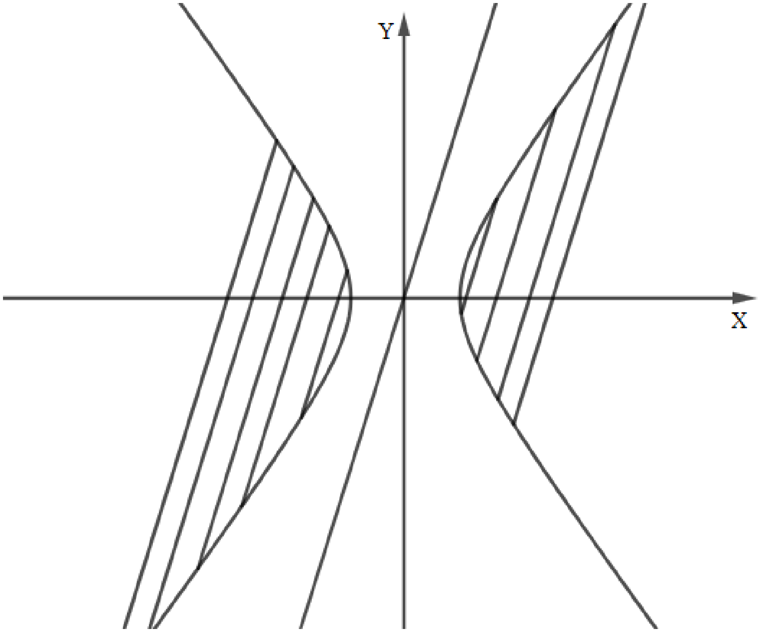


Fig. 2.33. Diamentele conjugate ale hiperbolei

Nota 2.5.2. Axa reală și imaginară a hiperbolei se numesc ***diametrele conjugate principale*** ale ei.

3) Parabola. Înlocuim $A = 0, B = 1, C = -p$, în ecuația (2.24), obținem

$$k_1 y - p = 0$$

din care îl exprimăm pe

$$y = \frac{p}{k_1}.$$

Comparând cu (2.21), obținem

$$k = 0 \quad și\ b = \frac{p}{k_1}.$$

Din ecuația diametrului rezultă că coeficientul unghiular al ei este zero, deci diametrul parabolei este paralel la axa Ox (fig. 2.34).

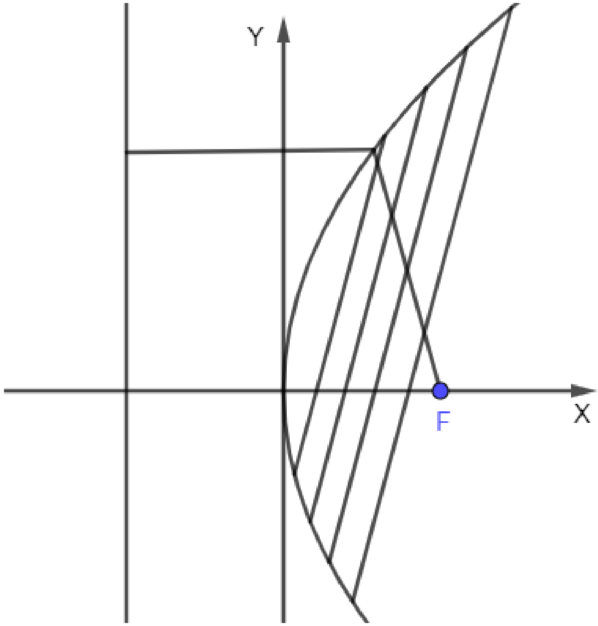


Fig. 2.34. Diamentele conjugate ale parabolei

Dacă coordonatele paralele sunt perpendiculare pe axa Ox, atunci diametrul parabolei (forma canonică) este însăși axa Ox.

2.6. Tangentele duse la curbele de ordinul doi

Definiția 2.6.1. *Se numește **tangentă** la o curbă în punctul dat $M_0(x_0; y_0)$, poziția limită a secantei M_0M care unește punctul M_0 cu punctul M al curbei, încât acest punct M se apropie nemărginit de M_0.*

Fie dată linia de ordinul doi (2.20)

$$l\text{: } \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + 2\mathrm{C}x + \mathrm{D} = 0.$$

Conform definiției 2.6.1, punctul $M_0(x_0; y_0)$ aparține liniei l și de asemenea punctul $M(x; y)$ aparține liniei l, atunci

$$Ax_0^2 + By_0^2 + 2Cx_0 + D \ = 0$$

și

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + 2\mathrm{C}x + \mathrm{D} = 0.$$

Realizăm diferența acestor relații și obținem

$$A(x^2 - x_0^2) + B(y^2 - y_0^2) + 2C(x - x_0) = 0,$$

sau

$$A(x - x_0)(x + x_0) + B(y - y_0)(y + y_0) + 2C(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x + x_0) + B\frac{(y - y_0)(y + y_0)}{(x - x_0)} + 2C = 0.$$

Deoarece

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

obținem

$$A(x + x_0) + Bk(y + y_0) + 2C = 0.$$

Din ultima relație în exprimăm pe k

$$k = \frac{-A(x + x_0) - 2C}{B(y + y_0)}.$$

În conformitate cu definiția 2.6.1, avem

$$k_0 = \lim_{M \to M_0} k = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{-A(x + x_0) - 2C}{B(y + y_0)} = \frac{-2Ax_0 - 2C}{2By_0} =$$

$$= \frac{-Ax_0 - C}{By_0},$$

unde k_0 este coeficientul unghiular al tangentei dusă prin punctul M_0, sau

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{-Ax_0 - C}{By_0}.$$

Din ultima relație deducem ecuația tangentei

$$y - y_0 = \frac{-Ax_0 - C}{By_0}(x - x_0).$$

În particular vom analiza tangentele (formele lor), pentru curbele de ordinul doi prezentate în paragrafele precedente.

1. Cercul

$$y - y_0 = \frac{-x_0}{y_0}(x - x_0).$$

2. Elipsa

$$y - y_0 = \frac{-\frac{1}{a^2}x_0}{\frac{y_0}{b^2}}(x - x_0) \Leftrightarrow \frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0},$$

sau

$$\frac{Xx_0}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} = 1$$

3. Hiperbola

$$y - y_0 = \frac{-\frac{1}{a^2}x_0}{-\frac{y_0}{b^2}}(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0),$$

sau

$$\frac{Xx_0}{a^2} - \frac{Yy_0}{b^2} = 1.$$

4. Parabola

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0),$$

sau

$$Yy_0 = p(X + x_0).$$

Punctele de intersecție ale diametrului cu curba de ordinul doi sunt punctele de tangență a tangentelor paralele cu coardele conjugate, cu diametrul dat. Aceasta înseamnă că unghiurile formate cu tangenta razei și razele focale trebuie să fie egale.

Fie $M_1(x; 0)$ punctul de intersecție a tangentei cu axa Ox. Analizăm ΔMM_1F (fig. 2.35), pentru care avem

$$FM_0 = \frac{p}{2} + x_0$$

și

$$M_1F = |x_1| + \frac{p}{2} = x_0 + \frac{p}{2}.$$

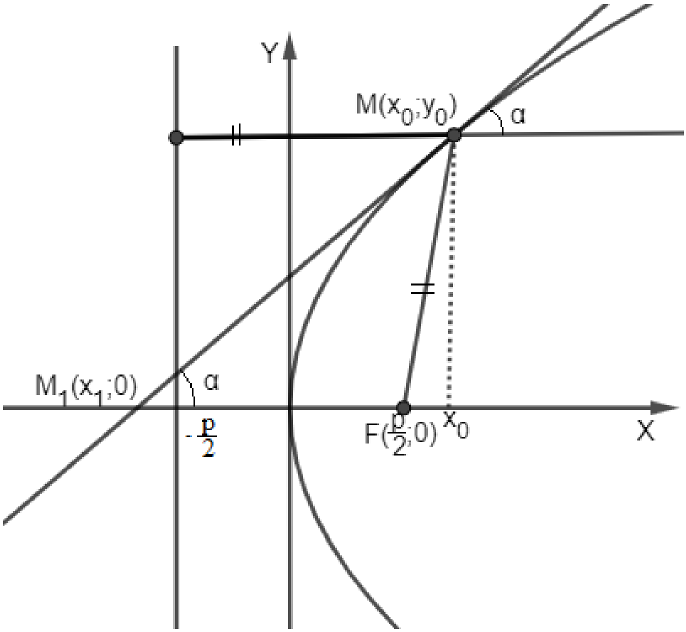


Fig. 2.35. Tangenta la parabolă

Din ecuația tangentei rezultă că punctul M_1 aparține tangentei, deci

$$|x_1| = x_0,$$

sau

$$-x_1 = x_0.$$

În rezultat obținem $M_1F = FM_0$, de unde rezultă că ΔMM_1F este isoscel, mai mult ca atât, unghiurile de la bază sun egale.

2.7. Dreptele directoare ale curbelor de ordinul doi

Fie dată o elipsă cu ecuația în forma canonică

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

și o dreaptă $l_1: x=m>0$ (fig. 2.36).

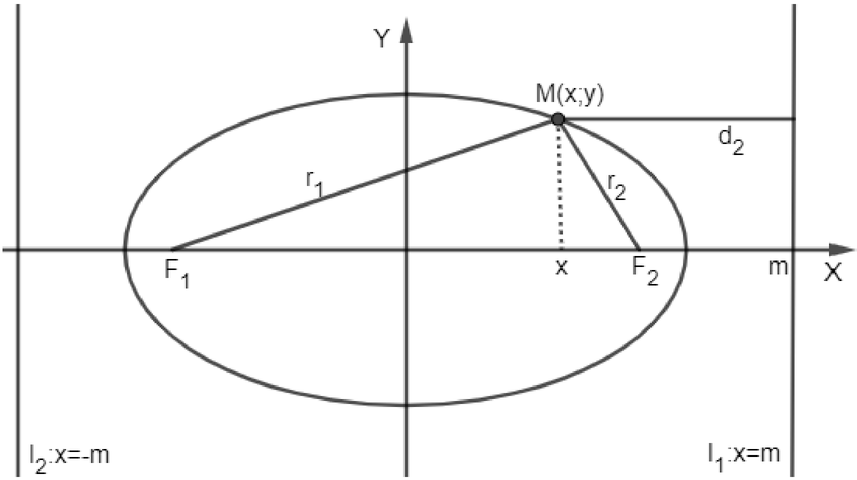


Fig. 2.36. Dreptele directoare ale elipsei

Cunoaștem formulele pentru razele focale

$$r_1=a+\ \varepsilon x \quad \text{și} \quad r_2=a-\ \varepsilon x$$

(vezi paragrafele precedente). Fixăm distanța de la punctul M până la dreapta l_1, o notăm prin d_2.

Vom cerceta raportul

$$\frac{r_2}{d_2}=\frac{a-\ \varepsilon x}{m-x}.$$

Dacă în locul lui m, vom scrie raportul

$$\frac{a}{\varepsilon}=m,$$

atunci obținem

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{\varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right)}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon.$$

Analog judecând pentru raportul $\frac{r_1}{d_1}$, obținem

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a + \varepsilon x}{m + x} = \frac{\varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} + x\right)}{\frac{a}{\varepsilon} + x} = \varepsilon.$$

În acest caz primi două drepte

$$x = \frac{a}{\varepsilon}$$

și

$$x = -\frac{a}{\varepsilon},$$

pe care le vom numi **drepte directoare**.

Definiția 2.7.1. *Se numesc **drepte directoare** ale elipsei, dreptele paralele cu axa mică a ei și depărtate de la ea, la o distanță*

$$m = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Deoarece $\frac{a}{\varepsilon}$ este strict mai mare decât a, rezultă că directoarele elipsei nu intersectează elipsa.

Reeșind din raportul analizat, adică $\frac{r}{d}$ și noțiunea de directoare, putem spune că excentricitatea ε a elipsei este egală cu raportul dintre distanța focală a unui punct și distanța de la acest punct până la directoarea respectivă.

Analog pentru hiperbolă, primim raportul $\frac{r}{d} = \varepsilon$, reeșind din faptul că excentricitatea hiperbolei este mai mare ca 1, $\varepsilon > 1$ și deci având ecuațiile dreptelor

$$x = \frac{a}{\varepsilon}$$

și

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

Din $\frac{a}{\varepsilon} < a$ rezultă că directoarele hiperbolei nu intersectează hiperbola.

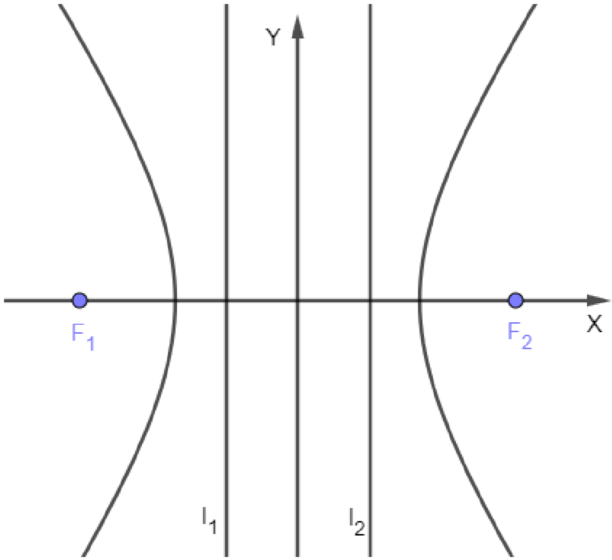


Fig. 2.37. Dreptele directoare ale hiperbolei

Directoarele hiperbolei se defines astfel:

Definiția 2.7.2. *Directoarele hiperbolei se numesc dreptele paralele la axa imaginară și care se află la distanța* $m = \frac{a}{\varepsilon}$ *de ea.*

Excentricitatea hiperbolei poate fi definită, de asemenea, prin raportul $\frac{r}{d}$, pentru orice punct al hiperbolei.

Din definiția parabolei rezultă însăși noțiunea de directoare a acestei curbe de ordinul doi.

Raportul dintre raza focală și distanța pînă la directoare este o mărime constantă egală cu 1

$$\frac{r}{d} = 1.$$

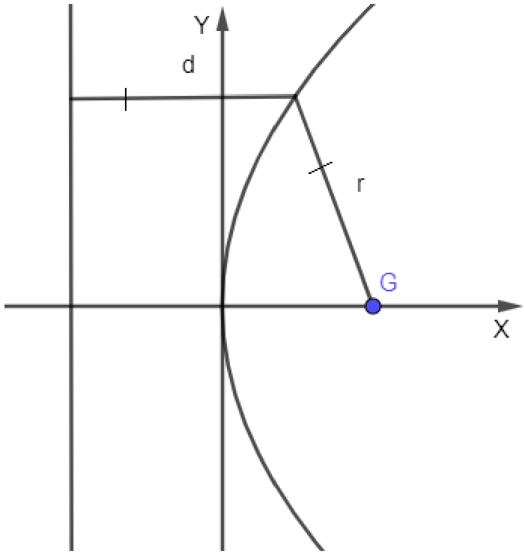


Fig. 2.38. Dreptele directoare ale paraboei

Analog, excentricitatea parabolei se definește ca raportul $\frac{r}{d}$ și deci ε =1.

Reeșind din cele spuse mai sus rezultă clasificarea curbelor de ordinul doi în dependență de ε:

1) dacă $\varepsilon = 0$, atunci curba cercetată reprezintă un cerc;
2) dacă $0 < \varepsilon < 1$, atunci curba cercetată reprezintă o elipsă;
3) dacă $\varepsilon > 1$, atunci curba cercetată reprezintă o hiperbolă;
4) dacă $\varepsilon = 1$, atunci curba cercetată reprezintă o parabolă.

2.8. Liniile de ordinul doi ca secțiuni ale suprafețelor conice

Fie a și b două drepte perpendiculare, ce se intersectează în punctul S.

Rotim dreapta a în jurul dreptei b cu un unghi $\varphi = 360^0$. Fiecare punct al dreptei a va descrie o circumferință într-un plan, perpendicular pe dreapta b, centrul circumferinței fiind situat pe această dreaptă (fig. 2.39).

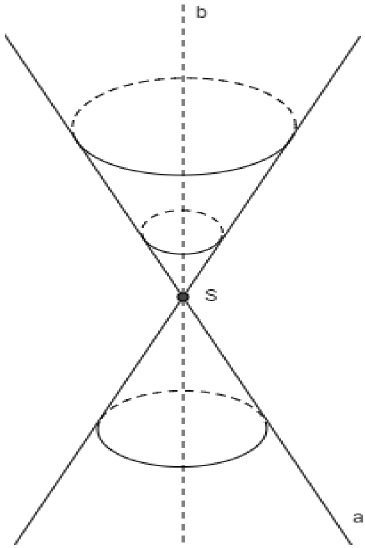


Fig. 2.39. Cercul ca secțiune plană a suprafeței conice

Suprafața obținută se numește *suprafață conică de rotație.* Ea conține două pânzi, pe care le numim pânze ale suprafeței conice. Punctul S se numește *vârf,* dreapta b – *axa suprafeței conicei,* iar dreptele, care aparțin suprafeței se numesc *generatoare*. Toate generatoarele trec prin punctul S.

Dacă tăiem suprafața conică cu un plan π, care nu trece prin vârf, atunci vom considera câteva cazuri posibile.

Presupunem că planul secant π taie toată suprafața conică perpendicular dreptei b, atunci în secțiunea lui cu suprafața conică primim un cerc excepțiile fiind cazul când planul trece prin punctul S, în acest caz obținem, în secțiune, un punct – punctul S.

Presupunem că planul secant π taie toate generatoarele sub un unghi mai mare de 0 și mai mic decât unghiul cel formează generatoarea cu planul perpendicular dreptei b, și trece prin punctul S. Linia curbă obținută în secțiune este o elipsă (fig. 2.40)

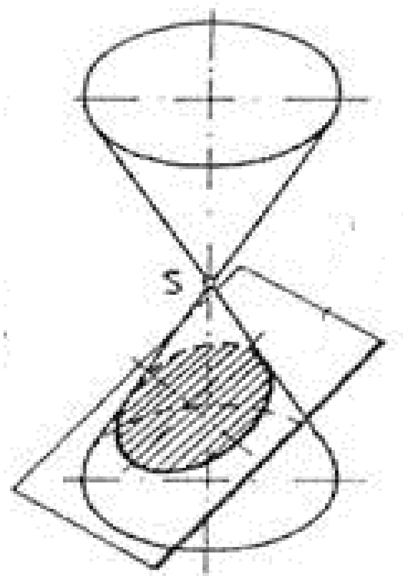


Fig. 2.40. Elipsa ca secțiune plană a suprafeței conice

Presupunem că planul secant π este paralel la axa conului – dreapta b. Linia curbă obținută în secțiune este o hiperbolă (fig. 2.41).

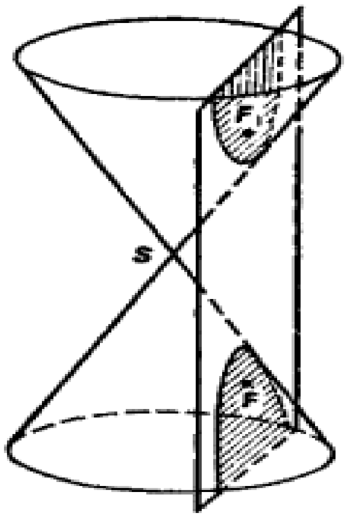


Fig. 2.41. Hiperbola ca secțiune plană a suprafeței conice

Dacă planul formează un unghi cu planul XOY mai mare decât unghiul cel formează generatoarea cu planul XOY și mai mic decât 90, atunci în secțiune primim parabola (fig. 2.42).

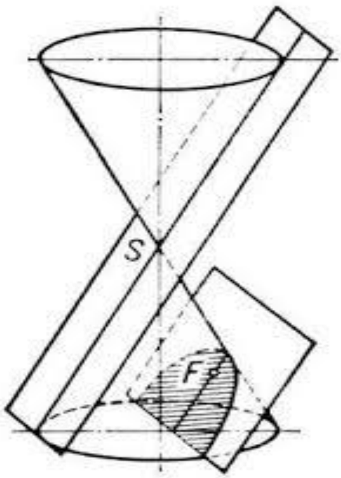


Fig. 2.42. Parabola ca secțiune plană a suprafeței conice

Exerciții și probleme

1. Să se determine ecuația cercului cu centrul în originea de coordonate și cu raza $r = 4$, apoi a cercului cu aceeași rază, dar cu centrul în punctul $(-3; -5)$.
2. Să se scrie ecuaţia cercului, ce trece prin punctele $M(2; 1)$ şi $N(3; 4)$, dacă centrul lui se află pe dreapta
$$2x - y + 1 = 0.$$
3. Să se determine centrul și raza cercului dat de ecuația
$$x^2 + y^2 - 2x + 2\sqrt{5}y - 10 = 0.$$
4. Să se determine ecuația cercului ce trece prin punctele $A(1; 1), B(2; 0)$ și $C(3; 2)$. Să se afle centrul și raza acestui cerc.
5. Fie punctele $A(-1; 4)$ și $B(3; -2)$. Să se determine ecuația cercului care are diametrul AB.
6. Să se găsească ecuația elipsei având axele de coordonate în calitate de axe de simetrie și care trece prin punctele $M(3; 4)$ și $N(6; 2)$.
7. Să se determine ecuația canonică a elipsei, dacă excentricitatea ei este $\varepsilon = 3/5$ și axa mare este de 20.
8. Elipsa este tangentă la axa ordonatelor în originea coordonatelor, iar centrul ei se află în punctul $C(5; 0)$. Să se scrie ecuaţia elipsei, ştiind că excentricitatea ei este $\varepsilon = 0{,}8$.
9. Să se determine ecuația canonică a elipsei, dacă excentricitatea ei este $\varepsilon = 1/2$ și distanța dintre directoare este 32.
10. Să se scrie ecuația elipsei $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ în coordonate polare.

11. Să se scrie ecuaţia elipsei, focarele căreia au coordonatele $F_1(0; 1)$, $F_2(1; 0)$ şi axa mare este egală cu 2.
12. Să se scrie ecuaţia hiperbolei, ce trece prin punctul $(1; 2)$, asimptotele căreia sunt $y = \pm \frac{1}{2}x$.
13. Să se scrie ecuaţia canonică a hiperbolei, dacă:
    a) semiaxa reală $a = 10$ şi cea imaginară $b = 3$;
    b) distanţa dintre focare este egală cu 10 şi axa reală este egală cu 8 .
14. Să se scrie ecuaţia unei linii de ordinul al doilea, cunoscând focarul ei $F(2; 0)$, directoarea $x = 5$ corespunzătoare acestui focar şi un punct $A(10; 6)$ de pe această linie.
15. Să se afle aria unui paralelogram, unul din vârfurile căruia este un punct al hiperbolei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, iar două laturi ale paralelogramului sunt situate pe asimptote.
16. Să se determine ecuația hiperbolei, dacă se cunosc asimptotele ei $y = \pm\frac{4}{3}x$ și distanța focală 20.
17. Să se determine ecuația hiperbolei a cărei focare coincid cu focarele elipsei $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ și are excentricitatea $\varepsilon = 2$.
18. Să se determine ecuația hiperbolei a cărei vârfuri coincid cu focarele elipsei $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, iar focarele hiperboeli coincide cu vârfurile respectivei elipse.
19. O parabolă este simetrică în raport cu axa Oy, vârful ei se află în punctul $(0; -3)$, şi pe axa absciselor ea taie o coardă, lungimea căreia este $l = 16$. Să se scrie ecuaţia acestei parabole.

20. Să se scrie ecuaţia unei parabole, cunoscând focarul ei $F\ (-1; -2)$ şi directoarea $x - y + 8 = 0$.
21. Să se scrie ecuaţia unei parabole, dacă se ştie, că:
a) focarul are coordonatele $(5; 0)$, iar axa ordonatelor este directoare a parabolei;
b) parabola este simetrică în raport cu axa Ox, trece prin originea coordonatelor şi prin punctul $M(6; -2)$;
c) focarul parabolei se află în punctul $(0; 2)$ şi vârful coincide cu originea coordonatelor;
d) parabola este simetrică în raport cu axa Oy, trece prin originea coordonatelor şi prin punctul $M(1; -4)$.
Să se determine focarul parabolei $y = x^2 - 4x + 5$.
22. Fie parabola $y^2 = 8x$. Să se afle punctul, a cărui rază focală este egală cu 20.
23. Secțiunea oglinzii unui far are forma unei parabole, diametrul căruia este de 20 cm și adâncimea de 10 cm. Să se determine poziția focarului.
24. Să se determine ecuația parabolei, vârful căreia se află în originea de coordonate, este simetrică față de axa OX și trece prin punctul $A(9; 6)$.
25. Să se determine ecuația diametrelor conjugate ale elipsei $x^2 + 4y^2 = 1$, dacă unul din aceste diametre formează cu axa Ox, un unghi de 45^0.
26. Să se determine ecuațiile diametrelr conjugate ale hiperbolei $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$, dacă unghiul dintre diameter este de 45^0.
27. Să se determine diametrele conjugate ale parabolei, dacă parabola are ecuația $y^2 = 20x$ și vârful $A(2; 5)$.

3. REDUCEREA ECUAȚIEI GENERALE A LINIEI DE ORDINUL DOI, LA O ECUAȚIE CANONICĂ A CURBELOR DE ORDINUL DOI

3.1. Transformări ale sistemului rectangular cartezian de coordonate

În acest paragraf vom analiza

- translația paralelă;
- rotația;
- compoziția dintre translația paralelă și rotația.

Translația paralelă. Fie dat sistemul cartezian rectangular de coordonate XOY și un punct $M(x;y)$, vom transla paralel sistemul dat, încât să primim un nou sistem rectangular cartezian de coordonate X_1OY_1 (fig. 3.1).

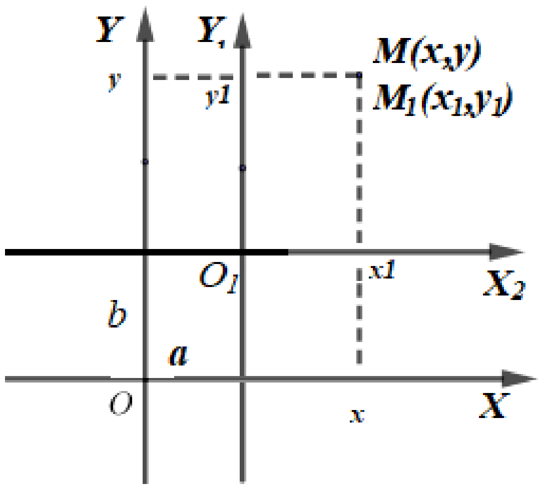


Fig. 3.1. Translația paralelă

Axele noului sistem taie axa OX, marcând segmentul a, iar pe axa OY segmentul b. Punctul M în noul sistem de coordonate va avea coordonatele $M(x_1; y_1)$. Acesta poate fi obținut conform formulelor de translației paralele

$$\begin{cases} x_1 = x - a, \\ y_1 = y - b. \end{cases} \tag{3.1}$$

Invers, la trecerea de la sistemul cel nou la cel inițial, utilizăm formulele

$$\begin{cases} x = x_1 + a, \\ y = y_1 + b. \end{cases} \tag{3.2}$$

Rotația. Vom roti sistemul rectangular cartezian de coordonate XOY în jurul originii de coordonate O, sub un unghi pozitiv α (împotriva acelor ceasornicului) (fig. 3.2).

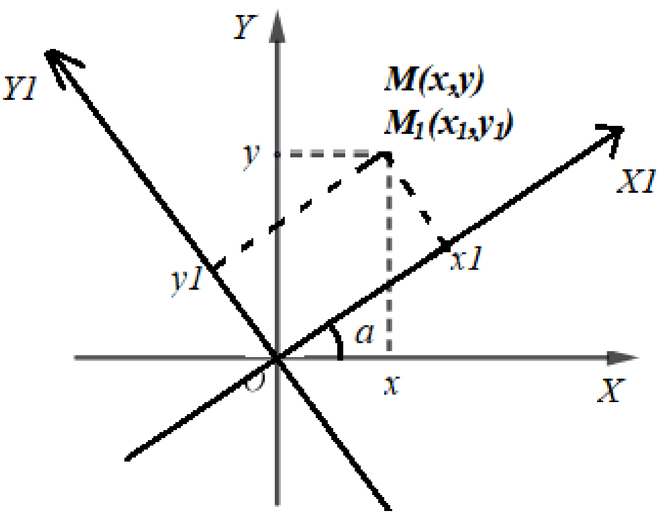


Fig. 3.2. Rotația

Astfel primim noul sistem de coordonate X_1OY_1. Fie dat punctul $M(x; y)$ în sistemul inițial XOY și respectiv în sistemul X_1OY_1 – punctul $M(x_1; y_1)$, încât

$$\begin{cases} x = x_1 cos\alpha - y_1 sin\alpha, \\ y = x_1 sin\alpha + y_1 cos\alpha. \end{cases} \tag{3.3}$$

Acestea sunt formulele de trecere de la un sistem de coordonate la altul prin rotație, sub unghiul α.

Compoziția translației paralele și a rotației. Reeșind din formulele (3.2) și (3.3), se determină și formula pentru compoziția translației paralele și a rotației

$$\begin{cases} x = x_1 cos\alpha - y_1 sin\alpha + a, \\ y = x_1 sin\alpha + y_1 cos\alpha + b. \end{cases} \qquad (3.4)$$

Geometric, această compoziție, poate fi ilustrată în figura 3.3 și pot fi utilizate următoarele notații:

- translația paralelă – T;
- rotația – R;
- compoziția - ^{o} sau $T_{(a,b)}\,^{o}R$.

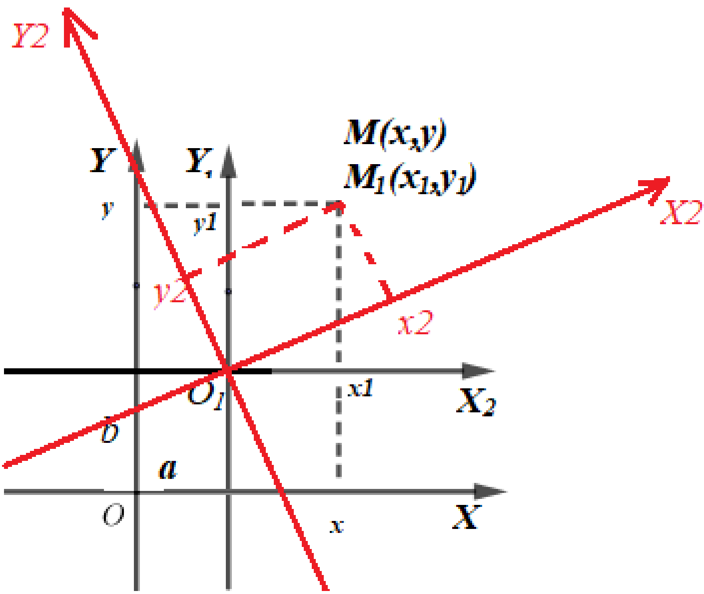


Fig. 3.3. Compoziția dintre translația paralelă și rotația

3.2. Prima etapă: determinarea sistemului de coordonate, la rotirea sub un unghi α

Cunoaștem că una și aceiași linie de ordinul doi are diferite ecuații în dependență de poziția ei față de sistemul de coordonate.

Fie dată ecuația generală a liniei de ordinul doi [7]

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (3.5)$$

Apare problema determinării unui astfel de sistem de coordonate O_1XY, în raport cu care ecuația liniei (3.5) să fie reprezentată mai simplu, dar și să determinăm ce linie definește această relație.

Determinăm ecuația liniei (3.5) în raport cu sistemul de coordonate $O_1X_1Y_1$, care se obține din sistemul OXY prin rotirea lui în jurul originii de coordonate O sub un unghi α, utilizând formulele de rotație (3.3).

Substituim valorile lui x și y din (3.3) în ecuația generală (3.5). După reducerea termenilor asemenea din partea stângă a acestei ecuații, obținem ecuația liniei (3.5) în raport cu sistemul de coordonate $O_1X_1Y_1$ sub forma

$$a'_{11}{x_1}^2 + 2a'_{12}x_1y_1 + a'_{22}{y_1}^2 + 2a'_{13}x_1 + 2a'_{23}y_1 + a'_{33} = 0 \quad (3.6)$$

unde

$$\begin{gathered} a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, \\ a'_{12} = -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + \\ +a_{22}\sin\alpha\cos\alpha, \\ a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha, \quad (3.7) \\ a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha, \\ a'_{23} = -a_{13}\sin\alpha + a_{22}\cos\alpha, \\ a'_{33} = a_{33}. \end{gathered}$$

Teorem 3.2.1 [7]. *Există un astfel de sistem de coordonate $O_1X_1Y_1$, în raport cu care ecuația liniei (3.5) nu conține termenul cu produsul variabilelor x și y.*

Demonstrație. Admitem că există un astfel de unghi α, pentru care

$$a'_{12} = 0,$$

sau

$$-\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\sin 2\alpha + a_{12}\cos 2\alpha = 0,$$

de unde

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2}. \qquad (3.8)$$

Deoarece $\operatorname{ctg} 2\alpha$ poate lua orice valori reale, rezultă din formulele (3.8), că unghiul căutat α există pentru orice valori ale coeficienților a_{11}, a_{12}, a_{22} ai ecuației (3.5). În particular, dacă $a_{11} = a_{22}$, obținem

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Cunoscând $\operatorname{ctg} 2\alpha$, determinăm $\sin\alpha$ și $\cos\alpha$, apoi din formulele (3.7) determinăm coeficienții a'_{ij}, ai ecuației transformate (3.6).

Calculul ecuațiilor (3.6) se simplifică, dacă direcțiile căutate ale axele de coordonate OX_1 și OY_1 se determină din ecuația

$$a'_{12} = 0,$$

cu alte cuvinte

$$a'_{12} = -(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha)\sin\alpha +$$
$$+(a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha)\cos\alpha = 0,$$

sau

$$\frac{a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha}{\sin\alpha} = S. \qquad (3.9)$$

Ecuația (3.9) poate fi scrisă în felul următor:

$$(a_{11} - S)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0,$$
$$a_{12}\cos\alpha + (a_{22} - S)\sin\alpha = 0. \qquad (3.10)$$

Ultimile relații sunt compatibile pentru valorile lui S care satisfac condiția

$$\begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - S \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$S^2 - (a_{11} + a_{22})S + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0. \qquad (3.11)$$

Ecuația (3.11) se numește *ecuație caracteristică*. Soluțiile ecuației date sunt

$$S_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^4 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}{2}.$$

Există două cazuri posibile:

1) Dacă rădăcinile S_1, S_2 sunt diferite, atunci există două direcții principale

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{S_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{S_1 - a_{22}}$$
$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{S_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{S_2 - a_{22}}. \qquad (3.12)$$

De asemenea obținem

$$a'_{11} = S_1,\ a'_{22} = S_2.$$

2) Dacă rădăcinile S_1, S_2 sunt egale, atunci

$$S_{1,2} = a_{11} = a_{22}.$$

Cunoscând $\operatorname{tg}\alpha_1$, calculăm $\sin\alpha_1$ și $\cos\alpha_1$ conform formulelor

$$\begin{aligned} \sin\alpha_1 &= \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}}, \\ \cos\alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

sau

$$\begin{aligned} \sin\alpha_1 &= -\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}}, \\ \cos\alpha_1 &= -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Înlocuind valorile $\sin\alpha_1$ și $\cos\alpha_1$ din (3.13), (3.14) în (3.7) obținem valorile pentru a'_{13}, a'_{23}.

În aceste condiții putem reformula condițiile (3.7) în următoarele

$$\begin{gathered} a'_{11} = S_1, \\ a'_{22} = S_2, \\ a'_{12} = 0, \\ a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha, \\ a'_{23} = -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha, \\ a'_{33} = a_{33}, \end{gathered} \tag{3.15}$$

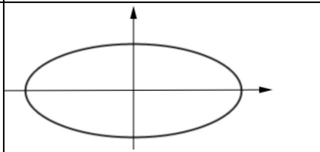
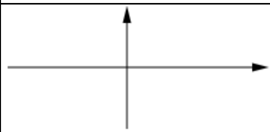
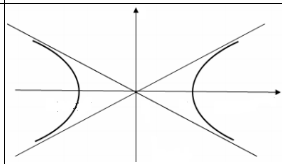
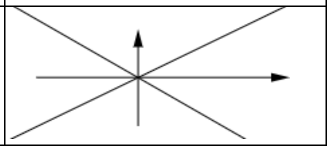
deci ecuația (3.6) ia forma

$$S_1{x_1}^2 + S_2{y_1}^2 + 2a'_{13}x_1 + 2a'_{23}y_1 + a'_{33} = 0. \tag{3.16}$$

3.3. Etapa a doua: determinarea sistemului de coordonate la translația paralelă

Pentru ecuația (3.16) sunt posibile mai multe cazuri, în dependență de semnele coeficienților de pe lângă ${x_1}^2$ și ${y_1}^2$ (tabelul 3.1).

Tabelul 3.1. Semnul valorilor lui S_1, S_2, a''_{33} și cazurile posibile de curbe

Nr.	S_1	S_2	a''_{33}	**Ecuația canonică**	**Denumirea curbei**	**Forma curbei**
1	$\pm$	$\pm$	$\mp$	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$	Elipsă	
2	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$	Elipsă imaginară	
3	$\pm$	$\pm$		$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$	Punct sau două drepte concurente imaginare	
4	$\pm$	$\mp$	$\neq 0$	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=\pm 1$	Hiperbolă	
5	$\pm$	$\mp$		$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$	Două puncte concurente	

1) Dacă $S_1 \neq 0, S_2 \neq 0,$ atunci există un punct $O_1(x_{10}; y_{10})$, încât după translația sistemului de coordonate $O_1X_1Y_1$, efectuată cu ajutorul formulelor

$$x_1 = x_0 + X, \quad y_1 = y_0 + Y,$$

ecuația liniei (3.16), în raport cu sistemul O_1XY nu va conține termini la puterea întâi.

Transformăm ecuația (3.16)

$$S_1\left(x_1{}^2 + 2\frac{a'_{13}}{S_1} + \left(\frac{a'_{13}}{S_1}\right)^2\right) + S_2\left(y_1{}^2 + 2\frac{a'_{23}}{S_2} + \left(\frac{a'_{23}}{S_2}\right)^2\right) +$$

$$+a'_{33} - \frac{(a'_{13})^2}{S_1} - \frac{(a'_{23})^2}{S_2} = 0,$$

sau

$$S_1\left(x_1 + \frac{a'_{13}}{S_1}\right)^2 + S_2\left(y_1 + \frac{a'_{23}}{S_2}\right)^2 + a'_{33} - \frac{(a'_{13})^2}{S_1} - \frac{(a'_{23})^2}{S_2} = 0.$$

Introducem notațiile

$$x_1 + \frac{a'_{13}}{S_1} = X, \qquad y_1 + \frac{a'_{23}}{S_2} = Y,$$

$$a'_{33} - \frac{(a'_{13})^2}{S_1} - \frac{(a'_{23})^2}{S_2} = a''_{33},$$

de unde

$$x_1 = X - \frac{a'_{13}}{S_1}, \qquad y_1 = Y - \frac{a'_{23}}{S_2}.$$

Ultima egalitate reprezintă formulele de translație a sistemului de coordonate OX_1Y_1. Noul sistem de coordonate își are originea în punctul

$$O_1\left(-\frac{a'_{13}}{S_1}; -\frac{a'_{23}}{S_2}\right).$$

Deci sistemul (3.16) ia forma

$$S_1X^2 + S_2Y^2 + a''_{33} = 0. \tag{3.17}$$

Dacă în ecuația (3.17) $a''_{33} \neq 0$, atunci ea poate fi scrisă sub forma

$$\frac{X^2}{-\frac{a''_{33}}{S_1}} + \frac{Y^2}{-\frac{a''_{33}}{S_2}} = 1,$$

iar dacă $a''_{33} = 0$, atunci ea poate fi scrisă sub forma

$$\frac{X^2}{\frac{1}{S_1}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{S_2}} = 0.$$

2) Dacă $S_1 = S_2$, atunci obținem ecuația unei circumferințe.

3) Coeficientul variabilei la puterea a doua este nul, iar coeficientul aceleiași variabile la puterea întâi este diferită de zero. De exemplu $S_1 = 0$ și $a'_{13} \neq 0$, deci $S_2 \neq 0$, iar ecuația (3.16) ia forma

$$S_2 {y_1}^2 + 2a'_{13}x_1 + 2a'_{23}y_1 + a'_{33} = 0.$$

Eliminăm termenul y_1 formând pătratul sumei

$$S_2\left({y_1}^2 + 2\frac{a'_{23}}{S_2} + \left(\frac{a'_{23}}{S_2}\right)^2\right) + 2a'_{13}\left(x_1 + \frac{a'_{33} - \frac{(a'_{23})^2}{S_2}}{2a'_{13}}\right) = 0,$$

sau

$$S_2\left(y_1 + \frac{a'_{23}}{S_2}\right)^2 + 2a'_{13}\left(x_1 + \frac{a'_{33} - \frac{(a'_{23})^2}{S_2}}{2a'_{13}}\right) = 0.$$

Introducem notațiile

$$x_1 + \frac{a'_{33} - \frac{(a'_{23})^2}{S_2}}{2a'_{13}} = X, \qquad y_1 + \frac{a'_{23}}{S_2} = Y,$$

de unde

$$x_1 = X - \frac{a'_{33} - \frac{(a'_{23})^2}{S_2}}{2a'_{13}}, \qquad y_1 = Y - \frac{a'_{23}}{S_2}.$$

Noul sistem de coordonate își are originea în punctul

$$O_1\left(-\frac{a'_{33}-\frac{(a'_{23})^2}{S_2}}{2a'_{13}};\ -\frac{a'_{23}}{S_2}\right).$$

Deci sistemul (3.5) ia forma

$$S_2Y^2+2a'_{13}X=0. \tag{3.18}$$

Această ecuație reprezintă ecuația canonică a unei parabole

$$Y^2=-2\frac{a'_{13}}{S_2}X,\ \ sau\ \ Y^2=2\frac{a'_{13}}{S_2}X.$$

4) Coeficientul variabilei la puterea a doua este nul, iar coeficientul aceleași variabile la puterea întâi este de asemenea nul. De exemplu $S_1=0$ și $a'_{13}=0$, iar ecuația (3.16) ia forma

$$S_2{y_1}^2+2a'_{23}y_1+a'_{33}=0.$$

Această ecuație poate fi scrisă în forma

$$S_2\left(y_1+\frac{a'_{23}}{S_2}\right)^2+a'_{33}-\frac{(a'_{23})^2}{S_2}=0.$$

Introducem notațiile

$$a'_{33}-\frac{(a'_{23})^2}{S_2}=a''_{33},$$

de unde

$$x_1=X-\frac{a'_{33}-\frac{(a'_{23})^2}{S_2}}{2a'_{13}},\qquad y_1=Y-\frac{a'_{23}}{S_2}.$$

Noul sistem de coordonate își are originea în punctul

$$O_1\left(0;\ -\frac{a'_{23}}{S_2}\right).$$

Deci sistemul (3.5) ia forma

$$S_2Y^2+a''_{33}=0. \tag{2.38}$$

Această ecuație o reprezentăm sub forma

$$Y^2 + \frac{a''_{33}}{S_2} = 0.$$

Pentru această ecuație sunt posibile următoarele cazuri:

Dacă $\frac{a''_{33}}{S_2} < 0$, notăm $\frac{a''_{33}}{S_2} = -a^2$, obținem

$$Y^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{aligned} Y - a = 0, \\ Y + a = 0, \end{aligned}\right.$$

ceea ce reprezintă ecuația unei perechi de drepte paralele.

Dacă $\frac{a''_{33}}{S_2} > 0$, notăm $\frac{a''_{33}}{S_2} = a^2$, obținem forma

$$Y^2 + a^2 = 0.$$

Această ecuație reprezintă o pereche de drepte paralele imaginare

$$\left[\begin{aligned} Y - ai = 0, \\ Y + ai = 0. \end{aligned}\right.$$

Dacă $a''_{33} = 0$, atunci obținem forma

$$Y^2 = 0 \Rightarrow Y = 0,$$

ceea ce reprezintă ecuația a două drepte coincidente.

Nota 3.3.1 [7]. Orice ecuație a liniei de ordinul doi, poate fi redusă numai la una din următoarele forme:

1) *ecuația elipsei*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

2) *ecuația elipsei imaginare*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1;$$

3) *ecuația unui punct sau a unei perechi de drepte congruente imaginare*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0;$$

4) *ecuația hiperbolei*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1;$$

5) *ecuația unei perechi de drepte congruente*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0;$$

6) *ecuația parabolei*

$$y^2 = 2px;$$

7) *ecuația unei perechi de drepte paralele*

$$y^2 - a^2 = 0;$$

8) *ecuația unei perechi de drepte paralele imaginare*

$$y^2 + a^2 = 0;$$

9) *ecuația unei perechi de drepte coincidente*

$$y^2 = 0.$$

Exemplul 1. Să se construiască graficul curbei de ordinul II dată de ecuația $7x^2 - 8xy + y^2 - 16x - 2y - 51 = 0$.

Rezolvare. Din condițiile examplului, rezultă (3.5)

$$a_{11} = 7, a_{12} = -4, a_{22} = 1, a_{13} = -8, a_{23} = -1, a_{33} = -51.$$

Formăm ecuația caracteristică (3.11)

$$S^2 - 8S - 9 = 0.$$

Determinăm soluțiile acestei ecuații

$$S_1 = 9, S_2 = -1.$$

Rădăcinile S_1, S_2 sunt diferite, în baza relației (3.12) avem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S_1 - a_{11}}{a_{12}} = -\frac{1}{2}.$$

Calculăm $\sin \alpha$ și $\cos \alpha$ conform formulelor (3.13) și (3.14)

$$\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

și

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Înlocuim valorile $\sin\alpha$ și $\cos\alpha$ în (3.15)

$$a'_{11} = 9, \qquad a'_{22} = -1, \qquad a'_{12} = 0,$$

$$a'_{13} = -3\sqrt{5}, \qquad a'_{23} = -2\sqrt{5}, \qquad a'_{33} = -51,$$

deci ecuația (3.6), ia forma

$$9{x_1}^2 - {y_1}^2 - 2\left(3\sqrt{5}\right)x_1 - 2\left(2\sqrt{5}\right)y_1 - 51 = 0.$$

Coeficienții de pe lângă ${x_1}^2$ și ${y_1}^2$ sunt nenuli, $S_1 \neq 0$, $S_2 \neq 0$. Formăm pătrate perfecte

$$9\left({x_1}^2 - 2\frac{\sqrt{5}}{3}x_1 + \frac{5}{9}\right) - \left({y_1}^2 + 2\cdot 2\sqrt{5}y_1 + 20\right) - 51 - 5 + 20 = 0,$$

sau

$$9\left(x_1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(y_1 + 2\sqrt{5}\right)^2 - 36 = 0.$$

Introducem notațiile

$$x_1 - \frac{\sqrt{5}}{3} = X, \qquad y_1 + 2\sqrt{5} = Y.$$

În baza ultimei egalități, rezultă că noul sistem de coordonate își are originea în punctul

$$O_1\left(\frac{\sqrt{5}}{3};\ -2\sqrt{5}\right).$$

Deci ecuația curbei de ordinu doi, ia forma

$$9X^2 - Y^2 - 36 = 0,$$

sau

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{36} = 1.$$

În rezutatul rotirii și translației paralele, am obținut că ecuația din condițiile prezentului exemplu, reprezintă o hiperbolă (fig. 3.4).

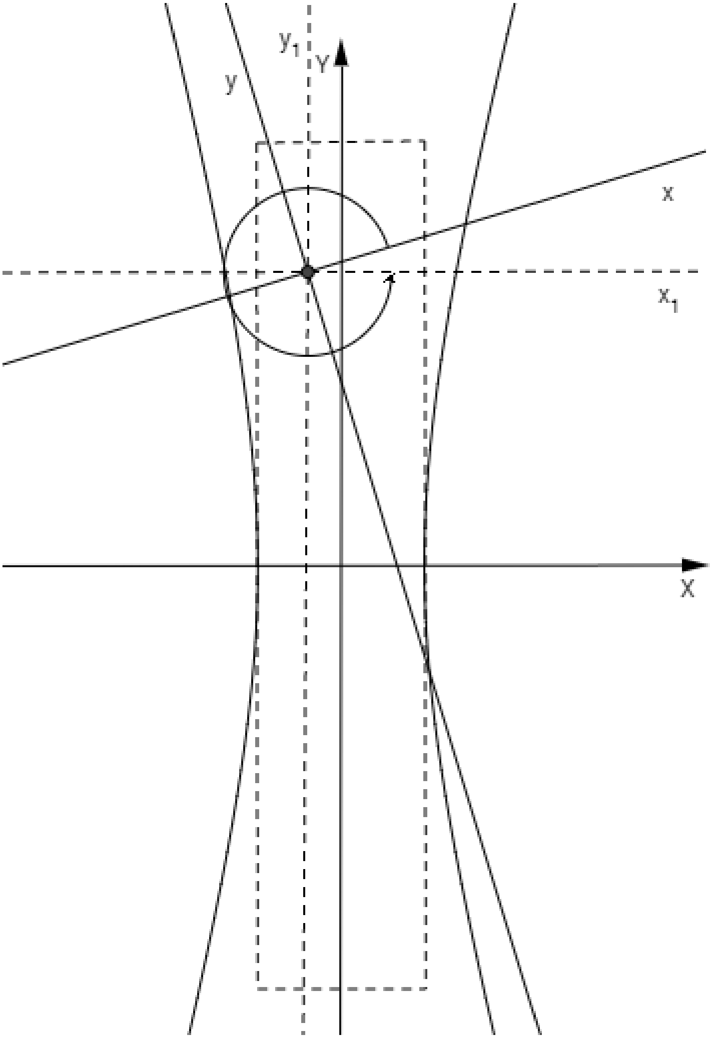


Fig. 3.4. Construcția curbei de ordinul doi

Exerciții și probleme

1. Fie dat un triunghi cu vârfurile $A(2;1), B(-1;3)$ și $C(-2;5)$. Să se afle coordonatele vârfurilor acestui triunghi, în noul sistem de coordonate, dacă originea de coordonate a fost translată paralel în punctul A.
2. Fie date punctele $A(3;1), B(-1;5)$ și $C(-3;-1)$. Să se afle coordonatele acestor puncte, în noul sistem de coordonate, dacă axele de coordonate au fost rotite sub un unghi de 45^0.
3. Să se determine formele canonice ale ecuațiilor curbelor de ordinul doi:

a) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;
b) $3x^2 + 3xy + 7y^2 - 5x + 2y - 1 = 0$;
c) $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x + 6y - 2 = 0$;
d) $4xy - 3y^2 + 6x + 6y + 1 = 0$;
e) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;
f) $4xy + 3y^2 - 16x + 12y - 36 = 0$;
g) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;
h) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x - 6y + 29 = 0$;
i) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$;
j) $x^2 - 8xy + 7y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$;
k) $7x^2 - 8xy + y^2 - 16x - 2y - 51 = 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. Fetcu D. *Elemente de geometrie analitică și diferențială*. Iași: Casa Editorială Demiurg, 2009, 340 p.
2. Cruceanu V. *Elemente de algebră liniară și geometrie*. București: Editura Didactică și Pedagogică, 1973.
3. Papaghiuc N. și Călin C. *Algebră liniară și geometrie*. Iași: Editura Performantica, 2003.
4. Pop I., Neagu Gh. *Algebră liniară și geometrie analitică în plan și în spațiu*. Bacău: Editura Plumb, 1996.
5. Popovici C. *Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială*. Utilizare MATLAB. Iași: Editura Politehnium, 2008.
6. Teodoru G. și Fetcu D. *Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială*. Culegere de probleme. Iași: Rotaprint Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", 2004.
7. Bahvalov S.V., Babuşkin L.I., Ivaniţcaia V.P.. *Geometria analitică.* Chişinău, Lumina, 1967.
8. Miron R. *Geometrie elementară*, București, Editura Didactică și Pedagogică, 1968, 253 p.
9. Vinogradov S.P. *Curs de matematici superioare*. Partea II, București, Litografia învățămîntului, 1956, 210 p.
10. *Desen tehnic de construcții*. Matrix Rom, București, 166 p.
11. Iancău V, ș.a. *Reprezentări gemetrice de desen tehnic*. Editura didactică și pedagogică, București, 1982.
12. Efros P., Garit V., *Linii și suprafețe de ordinul II*. Chișinău, Universitatea de Stat din Moldova, 2004, 103 p.
13. Udrişte C., Tomuleanu V., *Geometrie analitică*. Manual clasa a XI-a, Bucureşti, EDP, 1981.

14. Moise E., Downs F., *Geometrie*. Bucureşti, EDP, 1983.
15. Моденов П.С. *Аналитическая геометрия*. Москва, Изд-во МГУ, 1969.
16. Bălan V. *Algebră liniară, geometrie analitică*. Editura Fair Partners, 1999.
17. Costinescu C. *Algebră liniară şi aplicații în geometrie*. Editura Matrix Rom, 2005.
18. Pavel M. *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferențială*. Vol. 1, Editura Agir, Bucureşti, 2002.
19. *Produsul scalar (accesat 4 martie 2023). Disponibil pe internet: https://koaha.org/wiki/Prodotto_scalare*
20. *Produsul vectorial (accesat 13 mai 2023). Disponibil pe internet: https://koaha.org/wiki/Prodotto_vettoriale*
21. *Aria triunghilui (accesat 5 aprilie 2023). Disponibil pe internet: http://www.meditatiionline.ro/44100-15-44-0-0-Formule_Matematica_Determinanti_Produsul_vectorial_a_doi_vectori_Aria_triunghiului.html*
22. *Vectori (accesat 3 martie 2023). Disponibil pe internet: http://math.etti.tuiasi.ro/lpopa/vectori.pdf*
23. *Probleme de geometrie analitică (accesat 1 mai 2023). Disponibil pe internet:*
24. https://www.utcluj.ro/media/documents/2020/Probleme_Geometrie_Analitica-parteaI_III.pdf
25. Nistor A. *Geometria analitică şi diferențială. 22 p (accesat 2 martie 2023). Disponibil pe internet:* https://profs.info.uaic.ro/~fliacob/An1/2018-2019/Concursuri%202018-2019/TL_UT_Cluj-Napoca_9-11%20mai%202019/Elemente%20de%20geometrie%20

vectoriala%20si%20analitica/Ana%20Nistor_Geometrie%20analitica.pdf
26. *KIRÁLY ANDREI, Geometrie discriptivă și desen tehnic, Mega, Cluj-Napoca, 2016, 270 p. (accesat 10 februarie 2023). Disponibil pe internet:* https://desen.utcluj.ro/2016-GD+DT-KIRALY.pdf
27. How to draw an Ellipse by Four-Center Method, 2010. *(accesat 25 martie 2023). Disponibil pe internet:* http://mosthot.blogspot.com/2010/07/how-to-draw-ellipse-by-four-center.html
28. Conice pe ecuații reduse *(accesat 5 mai 2023). Disponibil pe internet:* http://math.etc.tuiasi.ro/apletea/cursuri/ALGA_cap9.pdf
29. How to draw parabola by tangent method in engineering drawing problem *(accesat 15 mai 2023). Disponibil pe internet:* https://www.youtube.com/watch?v=FfBsfcICDxs
30. Operații cu vectori *(accesat 10 iunie 2023). Disponibil pe internet:* https://liceunet.ro/ghid-geometrie/vectori-in-plan/operatii-cu-vectori