CZU: 37.016:514 DOI: 10.46727/c.steam-2023.p191-195

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Татьяна КОЖУХАРОВА, учитель математики высшей квалификации
https://orcid.org/0009-0000-4553-2594
МОУ «Бендерский теоретический лицей им. Л. С. Берга», г. Бендеры
Анастасия ФЕДОТОВА, студент 2 курса Физико- технического факультета
https://orcid.org/0009-0001-2400-8731
ПГУ им. Т.Г. Шевченко, Тирасполь

Rezumat. Articolul prezintă exemple de rezolvare a problemelor matematice folosind funcții trigonometrice inverse, necesitatea studierii funcțiilor trigonometrice. Articolul este util atât pentru profesorii de matematică, cât și pentru studenți.
Cuvinte cheie: învățare, trigonometrie, sarcini cognitive, funcții trigonometrice inverse.

Abstract. The article shows examples of solving mathematical problems using inverse trigonometric functions and the need to study trigonometric functions. The article is useful for both mathematics teachers and students.
Keywords: training, trigonometry, cognitive tasks, inverse trigonometric functions.

Аннотация. В статье показаны примеры решения математических задач с помощью обратных тригонометрических функций, необходимость изучения тригонометрических функций. Статья полезна, как учителям математики, так и учащимся.
Ключевые слова: обучение, тригонометрия, познавательные задания, обратные тригонометрические функции.

Введение

В школьной программе по изучению математики существует интересная тема – тригонометрия. Данное слово составилось из двух греческих слов: trigonon – «треугольник» и metreo – «измеряю», что в буквальном переводе означает измерение треугольников. Именно эта задача – измерение треугольников или, как принято теперь говорить, решение треугольников с древнейших времен составляла основу практических приложений тригонометрии. Да, данный раздел математики довольно-таки сложен и ему стоит уделять большее количество часов в программе по освоению курса алгебры и начала анализа, поэтому в данной статье рассмотрела решение математических задач с помощью обратных тригонометрических функций.

Известно, что в шестидесятые годы прошлого века из перечня предметов школьного образования была изъята «Тригонометрия» один из предметов математического цикла школьного образования. С тех пор тригонометрический материал включен в программы алгебры и геометрии. В ходе изучения программ по математике для общеобразовательных учреждений, обнаружила, что тема

«Обратные тригонометрические функции» вообще не значится, за исключением классов и школ с углубленным изучением математики, где на изучение этой темы выделяется 2-4 часа. Но в заданиях единого государственного и вступительных экзаменов встречаются примеры, содержащие обратные тригонометрические функции, а итоговое тестирование сдают выпускники всех школ и классов.

Поэтому изучение обратных тригонометрических функций является необходимым. В данной статье показано решение уравнения и неравенства, левая и правая части которых представляют собой одноименные обратные тригонометрические функции различных аргументов. Для рассмотрения данных примеров потребуется теоретическая часть и некоторые доказательства основных соотношений.

Основные соотношения

Существует несколько групп формул, которые значительно облегчают решение задач, содержащих основные тригонометрические функции.

1) $arcsin(-x) = -arcsin\, x,\ -1 \le x \le 1;$

$arccos(-x) = \pi - arccos\, x, -1 \le x \le 1;$

$arctg(-x) = -arctg\, x;\ arcctg(-x) = \pi - arcctg\, x.$

2) $arcsin\, x + arccos\, x = \frac{\pi}{2}\ , -1 \le x \le 1;\ arctg\, x + arcctg\, x = \frac{\pi}{2}\ .$

3) $arcsin\, x = arccos\sqrt{1-\mathrm{x}^2} = arctg\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = arcctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ 0 < x < 1;$

$arccos\, x = arcsin\sqrt{1-\mathrm{x}^2} = \mathrm{arctg}\ \frac{\sqrt{1-\mathrm{x}^2}}{\mathrm{x}} = arcctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ 0 < x < 1;$

$arctg\, x = arcctg\,\frac{1}{x} = arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{arccos}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ x > 0;$

$arcctg\, x = arctg\,\frac{1}{x} = \mathrm{arcsin}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{arccos}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ \ x > 0.$

Доказательства основных соотношений

1.1. Докажем, что $arcsin(-x) = -arcsin\, x, -1 \le x \le 1.$

Доказательство. Так как для любого $x \in [-1;1]$, $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ монотонно возрастает, то из равенства $\sin(\arcsin(-x)) = -x = \sin(-\arcsin x) \Rightarrow arcsin(-x) = -arcsin\, x, -1 \le x \le 1$**.**

Утверждение доказано.

1.2. Докажем, что $arcsin\, x + arccos\, x = \frac{\pi}{2}, -1 \le x \le 1.$

Доказательство. Значение суммы для $arcsin\, x + arccos\, x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}].$ Вычислим: $sin\,(arcsin\, x + arccos\, x).$

$sin\,(arcsin\, x + arccos\, x) = \qquad = \sin(arcsin\, x)\cos(arccos\, x) + \cos(arcsin\, x)\sin(arccos\, x) =$

$$= x^2 + 1 - x^2 = 1.$$

Так как на промежутке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ существует лишь единственное число, синус которого равен 1, и это число $\frac{\pi}{2}$, то $arcsin\, x + arccos\, x = \frac{\pi}{2}, -1 \leq x \leq 1$.

Утверждение доказано.

1.3. Докажем, что $\arccos x = arcsin\sqrt{1-x^2} = tg\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = arctg\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (0; 1)$

Доказательство. Условие $0 < x < 1$ необходимо для возможности равенства значений различных функций. Если $0 < x < 1$, то $arccos\, x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Тогда : $sin(\arccos x) = \sqrt{1 - cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$.

$tg\,(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ ctg\,(arccos\, x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Ч.т.д.

Пример 1. Решите уравнение:

$$arccos\,\frac{1-x^2}{1+x^2} + arcsin\,\frac{2x}{1+x^2} + arctg\,\frac{2x}{1-x^2} = \frac{3\pi}{2}.$$

Решение. Используя формулы группы 3, получим, что

$$arcsin\,\frac{2x}{1+x^2} = arccos\,\frac{1-x^2}{1+x^2} = arctg\,\frac{2x}{1-x^2}.$$

$$arccos\,\frac{1-x^2}{1+x^2} + arcsin\,\frac{2x}{1+x^2} + arctg\,\frac{2x}{1-x^2} = \frac{3\pi}{2} = 3\,arcsin\,\frac{2x}{1+x^2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$arcsin\,\frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2};\quad \frac{2x}{1+x^2} = 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0;\ x = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует пара чисел (x; y), удовлетворяющая системе:

$$\begin{cases} \max(4 + y; 3 - 3y) \leq 6, \\ \sqrt{a^2 + \frac{10}{\pi}\arcsin\sqrt{1-x^2} - 4 - \frac{4}{\pi^2}\arccos(\arccos + \frac{\pi}{2})} \geq y^2 + 2ay + 3 \end{cases}$$

Решение. 1) Рассмотрим первое неравенство: $max(4 + y; 3 - 3y) \leq 6$

$max\,(a;\ b) = \frac{a+b+|a-b|}{2} \leftrightarrow max(4 + y; 3 - 3y) = \frac{4+y+3-3y+|4+y-3+3y|}{2} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \frac{4+y+3-3y+|4+y-3+3y|}{2} \leq 6 \leftrightarrow$$

$\frac{7-2y + |4y+1|}{2} \leq 6\ /\cdot 2 \leftrightarrow 7 - 2 + |4y + 1| \leq 12 \leftrightarrow |4y + 1| \leq 2y + 5$

Так как $4y + 1$ по модулю: $-(2y + 5) \leq 4y + 1 \leq 2y + 5$

Составим систему неравенств:

$$\begin{cases} 4y + 1 \leq 2y + 1 \\ 4y + 1 \geq -2y - 5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2y \leq 4\ /: 2 \\ 6y \geq -6\ /:\ 6 \end{cases} \leftrightarrow -1 \leq y \leq 2$$

2) Рассмотрим подкоренное выражение второго неравенства:

Представим $arcsin\sqrt{1-x^2}$, как $arccos\,x$:

$$А^2 + \frac{10}{π}\,arccos\,x - 4 - \frac{4}{π^2} - (\arccos x)^2 - \frac{2}{π}\,\text{arcos}\,x = a^2 - (\frac{2}{π}\arccos x - 2)^2$$

Введем новую переменную: $t = 2 - \frac{2}{\pi}\arccos x,\ 0 \le arccos\,x \le \pi, 0 \le t \le 2.$

3) Представим вторую часть второго неравенства как:

$$y^2 + 2ay + 3 = (y+a)^2 - a^2 + 3$$

4) Составим систему неравенств: $\begin{cases} -1 \le y \le 2 \\ 0 \le t \le 2 \\ \sqrt{a^2 - t^2} \ge (y+a)^2 - a^2 + 3 \end{cases}$

5) Рассмотрим функции последнего неравенства:

z_1(y) = $(y+a)^2 + 3 - a^2$, где $-1 \le y \le 2.$

z_2(t) = $\sqrt{a^2 - t^2}$, $0 \le t \le 2.$

Найдем значения параметра:

$max\ z_2(t) \ge\ min\ z_1(y) \leftrightarrow max\sqrt{a^2 - t^2} = |a|$

$[0;2]$ $[-1;2]$ $[0;2]$

6) min функции $[-1;2]$ равен вершине параболы :

1) Если $a > 1$, то min $z_2(t) = z_2(-1) = 4 - 2a$

2) Если $-2 \le a \le 1$, то $min\ z_2(t) = z_2(-a) = 3 - a^2$

3) Если $a < -2$, то $min\ z_2(t) = z_2(2) = 7 + 4a$

Таким образом, искомые значения параметра задаются совокупностью систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ |a| \ge 4 - 2a \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \le a \le 1 \\ |a| \ge 3 - a^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a < -2 \\ |a| \ge 7 + 4a \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ a \ge \frac{4}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \le a \le 1 \\ a^2 + |a| - 3 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < -2 \\ 5a \le -7 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge \frac{4}{3} \\ \begin{cases} -2 \le a \le 1 \\ |a| \ge \frac{\sqrt{13}-1}{2} \end{cases} \\ a < -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge \frac{4}{3} \\ -2 \le a \le \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ a < -2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge \frac{4}{3} \\ a \le \frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; \frac{1-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{4}{3}; +\infty)$

Выводы и рекомендации

Тригонометрия сложна и ей стоит уделять большее количество часов в программе по освоению курса алгебры и начала анализа. Изучение обратных тригонометрических функций значительно углубляет и обогащает процесс развития у математического мышления учащихся, более легкому восприятию математического анализа на начальном этапе обучения в высших учебных заведениях.

Литература

1. АЗАРОВ, А.И.; БУЛАТОВ, В.И.; ФЕДОСЕНКО, В.С.; ШИБУТ, А.С. *Тригонометрия. Тождества, уравнения, неравенства, системы*. Минск, 1999. 490 с.
2. ЗИВ, Б.Г.; АЛТЫНОВ, П.И. *Алгебра и начала анализа. Геометрия.10-11 кл*. Москва: Дрофа, 1999. 223с.
3. МОРДКОВИЧ, А.Г.; ДЕНИЩЕВА, Л.О. *Алгебра и начала анализа. 10-11 классы.* Москва: Мнемозина, 2012.
4. МИРОШИН, В.В. *Обратные тригонометрические функции*. Москва: Чистые пруды, 2007. 32 с.