CZU: 514.7 DOI: 10.46727/c.steam-2023.p161-173

DESPRE UNELE APLICAȚII ALE FORMULEI LUI PICK

Marcel TELEUCA, dr., conf. univ.
https://orcid.org/0000-0003-1730-5284
Larisa SALI, dr., conf. univ.
https://orcid.org/0000-0003-1172-3055
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”, Republica Moldova

Rezumat. În articol sunt propuse modalități de transpunere didactică a conținuturilor care vizează teorema lui Pick și unele aplicații ale ei.
Cuvinte cheie: arie, poligon, poligon simplu, transpunere didactică a conținuturilor.

Abstract. In the article, ways of didactical transposition of contents aimed at Pick's theorem and some of its applications are proposed.
Key words: area, polygon, simple polygon, didactical transposition of contents.

Introducere

Simplă, dar nu foarte intuitivă, formula lui Pick leagă împreună cantități de natură complet diferită. Aria unui obiect, cum ar fi un pătrat sau un triunghi dreptunghic, este proporțională cu produsul lungimii a două dintre laturile sale. În schimb, formula lui Pick oferă o modalitate de a măsura suprafața care nu utilizează nicio înmulțire. Teorema a fost popularizată de Hugo Steinhaus.

Matematicianul Georg Alexander Pick a publicat în anul 1899 un articol în care a demonstrat formula care îi poartă numele [4]. Începea Pick acel articol cu fraza: „De la Gauss, rețelele din plan în formă de paralelogram... au fost folosite adesea ... ca metodă euristică în teoria numerelor. Rândurile următoare urmăresc un scop mult mai modest: se va încerca să se pună bazele teoriei numerelor într-un mod nou și, mai întâi, pe fundamente geometrice. În acest scop, este nevoie de o formulă pentru a calcula aria poligoanelor construite pe o rețea, care a rămas neobservată până acum, în ciuda simplității sale”.

În didactică se constată un interes din ce în ce mai mare pentru problemele de geometrie pe rețele [1, 2, 3, 6]. Această sensibilitate deosebită sugerează oportunitatea reexaminării modelelor legate de planul Pick (planul euclidian asociat cu toate liniile drepte care, referindu-se la un sistem cartezian, sunt date de ecuațiile $x = m$ și $y = n$, unde $m, n \in Z$).

1. Pick introduce noțiunea de rețea ca două sisteme de drepte paralele echidistante în plan, numite linii principale ale rețelei. Intersecțiile acestor drepte se numesc noduri. Toate liniile care trec prin mai mult de un nod al rețelei se numesc linii ale rețelei. El sugerează să se folosească ca unitate de măsură a ariei suprafeței „jumătatea unui paralelogram ale rețelei de suprafață minimă” (Figura 1).

Un poligon la care toate vârfurile coincid cu nodurile rețelei se numește poligon reticular. Toate laturile unui poligon reticular aparțin liniilor reticulare.

Pick sugerează descompunerea unui poligon reticular în două poligoane folosind o linie a rețelei care trece prin două noduri ale rețelei aparținând conturului.

Dacă notăm cu i numărul de noduri din interiorul poligonului considerat inițial, cu u - numărul de noduri aparținând conturului său, i_1, u_1, i_2, u_2 vor indica câte noduri vor avea corespunzător cele două poligoane noi obținute, iar δ – numărul de noduri care aparțin segmentului liniei reticulare care împarte poligonul original în cele două părți, atunci: $i = i_1 + i_2 + \delta$ și $u = u_1 + u_2 - 2\delta - 2$.

De unde rezultă: $2i + u - 2 = (2i_1 + u_1 - 2) + (2\, i_2 + u_2 - 2)$.

Pick indică expresia $2i + u - 2$ ca numărul de puncte ale poligonului considerat.

Din cele expuse, reiese că numărul de noduri ale unui poligon format din două părți este egal cu suma numerelor nodurilor părților individuale. Aplicarea repetată a acestui rezultat arată că el este acceptabil chiar și pentru orice număr de părți. Pentru a demonstra acest lucru, Pick observă mai întâi că rezultatul în cauză este valabil în cazul unui poligon format dintr-o singură celulă, pentru care $i = 0$ și $u = 4$:

$$2i + u - 2 = 2.$$

Pentru un poligon cu laturile situate pe liniile rețelei principale, rezultatul anterior este valabil pe baza proprietății de compoziție menționată mai sus.

În plus, dacă împărțim un paralelogram având laturile care aparțin în întregime liniilor principale ale rețelei în două triunghiuri congruente având o latură comună (congruența unor astfel de triunghiuri implică și egalitatea numărului de noduri respective care le aparțin), numărul de noduri ale fiecăruia dintre ele va fi jumătate din cel al paralelogramului; prin urmare, și în acest caz numărul de noduri are valoarea ariei (Figura 2).

În sfârșit, Pick observă că orice poligon reticular poate fi descompus în paralelograme cu perimetrul aparținând în întregime liniilor reticulare principale și în triunghiuri obținute prin înjumătățirea unui paralelogram de acest fel folosind o diagonală. De aici rezultă că pentru fiecare poligon reticular aria este egală cu numărul de puncte (Figura 3).

În acest context, Pick accentuează că în teoria numerelor întregi este importantă afirmația conform căreia două numere întregi a, b au întotdeauna o parte comună m care poate fi reprezentată sub forma $m = a\beta - b\alpha$, unde α și β sunt de asemenea numere întregi.

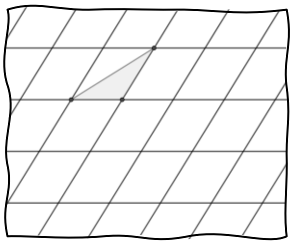


Figura 1. Unitatea de măsură a ariei

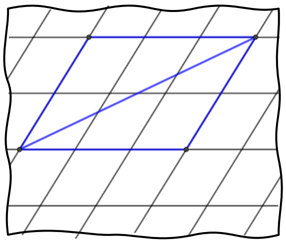


Figura 2. Aria triunghiului – jumătate din aria paralelogram

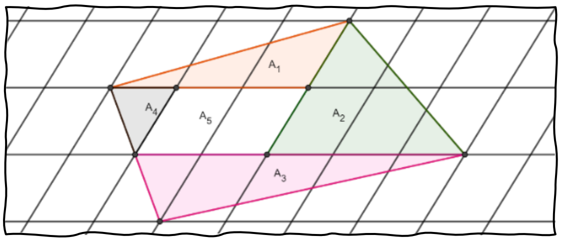


Figura 3. Aria poligonului $\boldsymbol{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 =}$ $\boldsymbol{= 3 + 6 + 5 + 1 + 4 = 19}$

Demonstrarea rezultatului menționat îi oferă lui Pick posibilitatea de a introduce un sistem de coordonate în plan astfel încât punctele cu coordonate întregi să fie noduri ale rețelei fixate în planul propriu-zis, iar liniile rețelei să fie paralele cu axele. Pick menționa că este cu totul de prisos să se noteze pe ambele axe aceeași unitate de măsură. Fiind considerat segmentul având drept extremități originea O(0;0) și punctul $(a; b)$, dacă acestui segment îi aparțin $(m-1)$ noduri (m – număr întreg pozitiv), atunci acest segment este împărțit de aceste puncte în m părți congruente. Numărul întreg m este divizor al ambelor numere a și b. Pentru a dovedi acest lucru este suficient să notăm (m−1) noduri și din punctul $(a; b)$ să fie trasate liniile paralele cu axele, care intersectează axele în noduri.

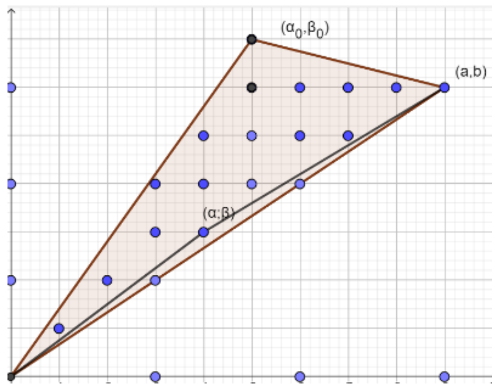


Figura 4.

Alegem un punct al rețelei $(\alpha_0; \beta_0)$, astfel încât triunghiul cu vârfurile $(0; 0)$, $(a; b)$, $(\alpha_0; \beta_0)$ are un sens pozitiv de rotație (Figura 4.). Aplicând formula demonstrată anterior, putem afirma că acest triunghi are aria: $A = a\beta_0 - b\alpha_0$ (unitate de măsură este un triunghi simplu – care nu conține alte noduri decât vârfurile). Cel puțin $(m + 2)$ noduri aparțin conturului acestui triunghi: vârfurile $(\alpha_0; \beta_0)$ și $(m + 1)$ noduri care aparțin segmentului cu extremitățile $(0; 0)$ și $(a;\ b)$.

Construcția triunghiului poate fi repetată alegând ca vârf un punct $(\alpha_1; \beta_1)$ exterior segmentului de extremități $(0; 0)$ și $(a; b)$ – punct de rețea care se află pe contur sau în interiorul triunghiului considerat inițial. Procedând astfel, se obține un triunghi care este mai mic decât cel anterior și poate fi în mod clar făcut și mai mic, până când conține doar (m+2) puncte de rețea [???, p. 315]. Numărul punctelor reticulare aparținând unei părți limitate a planului este finit, după un număr finit de pași ajungem la un triunghi cu vârful $(\alpha;\ \beta)$, care are pe contur doar cele $(m\ +2)$ noduri și niciun nod în interiorul acestuia, a cărui suprafață este egală cu m. Folosind expresia pentru arie, rezultă:

$$m = a\beta - b\alpha.$$

2. Vom examina o altă modalitate de transpunere didactică a conținuturilor ce țin de formula lui Pick, examinând figurile pe un reper ortogonal. În calitate de unitate de măsură a ariei va servi aria unui pătrat cu latura egală cu 1. Astfel, teorema lui Pick oferă o formulă pentru aria unui poligon simplu cu coordonate întregi ale vârfurilor, în dependență de numărul de puncte întregi în interiorul acestuia și pe laturile sale.

Se consideră rețeaua $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ a punctelor (x, y) din planul real ale căror coordonate (x, y) sunt numere întregi.

Definiția 1. Spunem că un poligon este simplu dacă toate laturile sale conectează puncte ale rețelei $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

De exemplu, în Figura 5, poligoanele *A* și *B* sunt simple, în timp ce poligonul *C* nu este simplu.

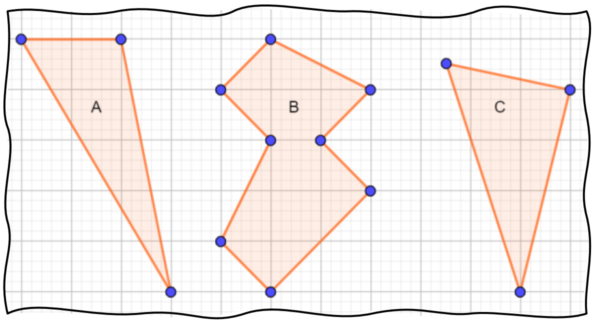


Figura 5.

Teorema lui Pick. Să considerăm un poligon simplu P. Fie i – numărul de puncte din $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ din interiorul poligonului și b numărul de puncte din $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de pe laturile poligonului. Atunci, aria A_P a poligonului poate fi calculată astfel: $A_P = i + \frac{b}{2} - 1$.

Formula poate fi generalizată la formule pentru anumite tipuri de poligoane non-simple. Însă această formulă nu poate fi generalizată pentru spațiul tridimensional [5].

Deși formula lui Pick este a-priori neobișnuită, poate fi dată o primă explicație informală. Se consideră mai întâi dreptunghiul P – poligon simplu. Fiecare punct interior al poligonului P nu este pe frontieră, atunci în jurul fiecărui punct interior poate fi evidențiat un pătrat cu aria egală cu 1, complet închis în poligon. Practic, fiecare punct interior va contribui cu o unitate de suprafață la suprafața totală a poligonului.

Pe de altă parte, dacă un punct se află pe frontiera poligonului (nu în vârf) și această latură este o linie orizontală sau verticală, atunci această linie va tăia pătratul mic, centrat în acest punct, în două părți egale. Prin urmare, doar jumătate din pătratul din interiorul poligonului va putea contribui la aria totală a poligonului: de aici motivul pentru factorul $b/2$ în formula lui Pick (Figura 6a, 6b). Acest lucru explică parțial contribuția lui i și a lui $b/2$ la aria unui poligon simplu, dar nu reprezintă o explicație completă pentru toate poligoanele simple. În baza imaginilor din Fig. 6a și 6b (unde $i = 6$ și $b = 14$) se poate arăta ușor că aria dreptunghiului din imagine este:

$$A_P = 6\,u.p. + 10 \cdot \frac{1}{2} u.p. + 4 \cdot \frac{1}{4} u.p. = 6 + \frac{14}{2} - 1.$$

Poligoanele Figurile 6c și 6e permit verificarea validității formulei lui Pick pentru poligoanele din Figurile 6d și 6f, care pot fi descompuse în figuri mai simple.

La fel ca în multe probleme din geometrie, este foarte dificil să dovedești ceva prin studierea obiectelor complexe. Foarte des, un matematician încearcă să simplifice problema demonstrând că aceasta este echivalentă cu o problemă mult mai simplă. Vom aplica acest procedeu demonstrând că, dacă formula lui Pick este adevărată pentru un triunghi simplu, atunci formula trebuie să fie adevărată și pentru un poligon simplu. Primul pas în acest raționament este de a observa că este posibil să tăiem orice poligon P simplu într-o familie de triunghiuri simple. Din această descompunere constatăm că putem reconstrui poligonul simplu P pornind de la un triunghi simplu și atașând la el treptat câte un triunghi simplu care are cu P doar frontieră comună. Conceptual, fiecare pas al acestei reconstrucții va fi conexiunea unui triunghi simplu T la un poligon simplu P.

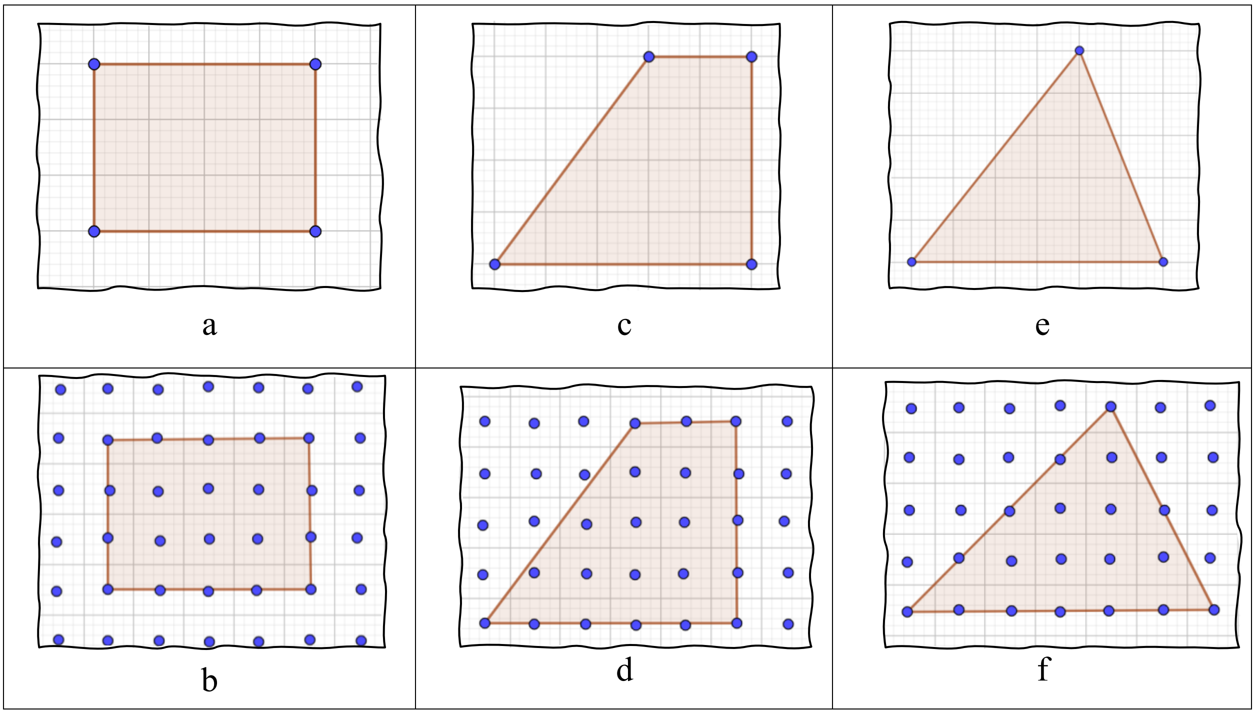


Figura 6. Aria poligoanelor simple

Prin urmare, formula lui Pick poate fi verificată în următorul mod:

1. Se demonstrează că formula lui Pick este validă pentru triunghiurile simple.

2. Se demonstrează că, dacă formula lui Pick este validă pentru un poligon simplu P, atunci ea este validă și pentru poligoanele simple $P' = P \cup T$ obținute prin atașarea la P a unui triunghi simplu T (Figura 7).

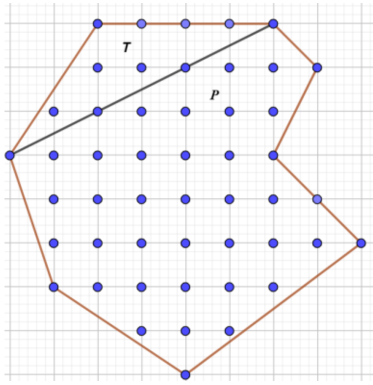


Figura 7. Poligonul $P' = P \cup T$

Se presupune că prima afirmație este demonstrată și se demonstrează afirmația a doua.

Segmentul de dreaptă comun pentru P și T conectează două puncte de pe rețea și trece prin alte k puncte. Aceste puncte se vor găsi în interiorul poligonului simplu P', iar mulțimea punctelor interioare ale lui P' se constituie din punctele interioare ale poligoanelor P și T, la care adăugăm punctele graniței comune, adică:

$$i_{P'} = i_P + i_T + k,$$

unde i_P este numărul de puncte interioare ale poligonului P, i_T – numărul de puncte interioare ale triunghiului T, iar $i_{P'}$ este numărul de puncte interioare ale poligonului P'.

Se determinăm numărul de puncte $b_{P'}$ de pe frontiera poligonului simplu P'. Mai întâi se adăugă punctele de pe frontierele poligoanelor P și T: $b_P + b_T$. Făcând acest lucru, au fost numărate de două ori punctele de la capetele segmentului comun pentru P și T, așa că ele se vor scădea:

$$b_P + b_T - 2.$$

În plus, celelalte k puncte ale segmentului comun pentru P și T sunt acum numărate ca puncte interioare și apar de două ori în $b_P + b_T - 2$, deoarece se află atât la frontiera poligonului P, cât și a triunghiului T. Prin urmare, se scade dublul acestui număr.

Atunci numărul de puncte de pe frontiera lui P' este:

$$b_{P'} = b_P + b_T - 2 - 2k.$$

Se constată că formula lui Pick este validă și pentru poligonul P':

$$A_{P'} = A_P + A_T = \left(i_P + \frac{b_p}{2} - 1\right) + \left(i_T + \frac{b_T}{2} - 1\right) =$$

$$= (i_P + i_T + k) + \frac{1}{2}(b_P + b_T - 2 - 2k) - 1 = i_{P'} + \frac{b_{P'}}{2} - 1\ .$$

Pentru a demonstra afirmația că formula lui Pick este aplicabilă la calcularea ariei triunghiurilor simple, aceste triunghiuri se obțin din figuri mai simple. Triunghiurile simple pot fi obținute din dreptunghiuri simple și triunghiuri dreptunghice simple.

Figurile 8 și 9 ilustrează clar modul în care poate avea loc această reprezentare. Având în vedere orice triunghi simplu T, atunci, deoarece vârfurile lui T trebuie să fie pe rețea, putem trasa două linii orizontale care conțin partea superioară și partea inferioară a triunghiului, respectiv, precum și două linii verticale care conțin partea extremă din stânga și cea din dreapta. Cele patru linii definesc astfel un dreptunghi simplu R care se circumscrie triunghiul simplu T, iar diferența $R\backslash T$ este formată din 2 sau 3 triunghiuri dreptunghice simple.

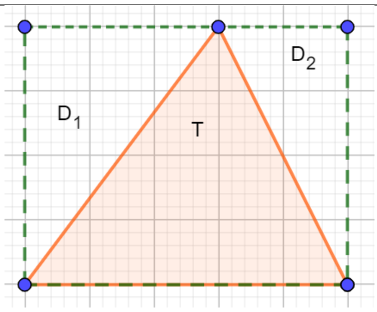


Figura 8.

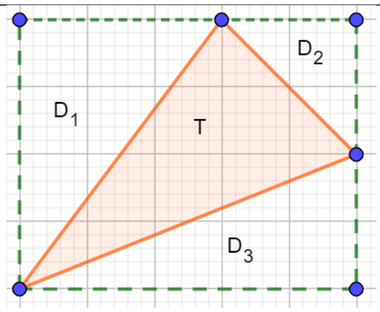


Figura 9.

Această reprezentare ne permite să demonstrăm formula lui Pick pentru triunghiuri simple, procedând după cum urmează:

3. Demonstrăm că formula lui Pick este validă pentru toate dreptunghiurile simple.
4. Demonstrăm că formula lui Pick este validă pentru toate triunghiurile dreptunghice simple.
5. Demonstrăm că 3 și 4 implică faptul că formula lui Pick este validă pentru toate triunghiurile simple.

Considerând valide afirmațiile 3 și 4, se poate demonstra afirmația 5 în cazul particular în care triunghiul simplu T este înscris într-un dreptunghi simplu R și $R\backslash T$ este formată din trei triunghiuri dreptunghice simple D_1, D_3, D_3.

Fie $i_1, i_2\, i_3$ numărul punctelor din interiorul fiecărui dreptunghi D_1, D_3, D_3 corespunzător, iar $b_1, b_2\, b_3$ numărul punctelor de pe frontiera fiecărui dreptunghi D_1, D_3, D_3.

Similar: numărul punctelor din interiorul dreptunghiului R îl notăm cu i_R , numărul punctelor din interiorul triunghiului T îl notăm cu i_T , numărul punctelor de la frontiera lui R îl notăm cu b_R, numărul punctelor de pe frontiera triunghiului T îl notăm cu b_T.

Observația 1. Fiecare vârf al lui T este un vârf comun pentru două triunghiuri dreptunghice și este situat pe frontiera dreptunghiului R.

Observația 2. Cele k noduri de pe frontiera triunghiului T care nu sunt vârfuri, fiecare dintre ele se află pe frontiera exact a unui triunghi dreptunghic, în timp ce sunt noduri interioare ale lui R.

Aceste două observații implică identitățile:

$$b_R + b_T = b_1 + b_2 + b_3;$$
$$i_R = i_T + i_1 + i_2 + i_3 + k;$$
$$b_T = k + 3.$$

De unde rezultă formula lui Pick pentru un triunghi simplu:

$$A_T = A_R - \left(A_{D_1} + A_{D_2} + A_{D_3}\right) =$$
$$= \left(i_R + \frac{b_R}{2} - 1\right) - \left[\left(i_1 + \frac{b_1}{2} - 1\right) + \left(i_2 + \frac{b_2}{2} - 1\right) + \left(i_3 + \frac{b_3}{2} - 1\right)\right] =$$
$$= (i_R - i_1 - i_2 - i_3) + \frac{1}{2}(b_R - b_1 - b_2 - b_3 - 6) - 1 = i_T + k - \frac{b_T - 6}{2} - 1 =$$
$$= i_T + \frac{2(k+3) - b_T}{2} - 1 = i_T + \frac{b_T}{2} - 1 .$$

Prin urmare, formula lui Pick este validă pentru un triunghi simplu obținut prin scăderea a trei triunghiuri dreptunghice dintr-un dreptunghi. Dovada este similară pentru triunghiuri simplu de tipul celui reprezentat în Figura 8.

6. Este posibilă transpunerea didactică pentru elucidarea eleganței formulei lui Pick, dacă definiția pentru noțiunea de triunghi simplu este particularizată după cum urmează:

Definiția 2. Un triunghi cu vârfurile în noduri se numește simplu, dacă *interiorul și laturile sale* nu conțin noduri.

În Figura 10 sunt reprezentate triunghiuri simple în sensul acestei definiții. Constatăm că aria fiecărui asemenea triunghi poate fi calculată completând fiecare triunghi până la un triunghi dreptunghic sau până la un dreptunghi, folosind apoi proprietatea de aditivitate a măsurii mărimilor.

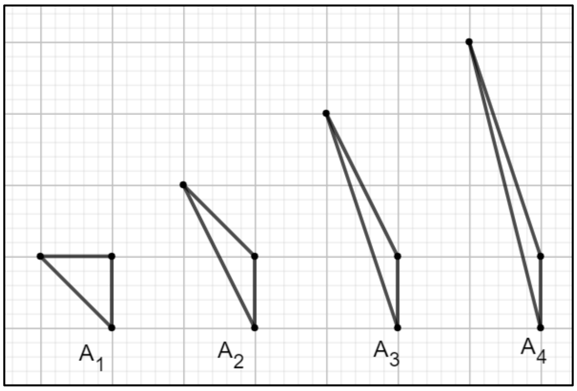


Figura 10.

$A_1 = \frac{1}{2};\ A_2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};\ A_3 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{2};\ A_4 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3 = \frac{1}{2}$ ș.a.m.d.

Considerăm triunghiul ABC cu vârfurile poziționate în vârfurile unui pătrat al rețelei. Vom realiza consecutiv transformări după cum urmează.

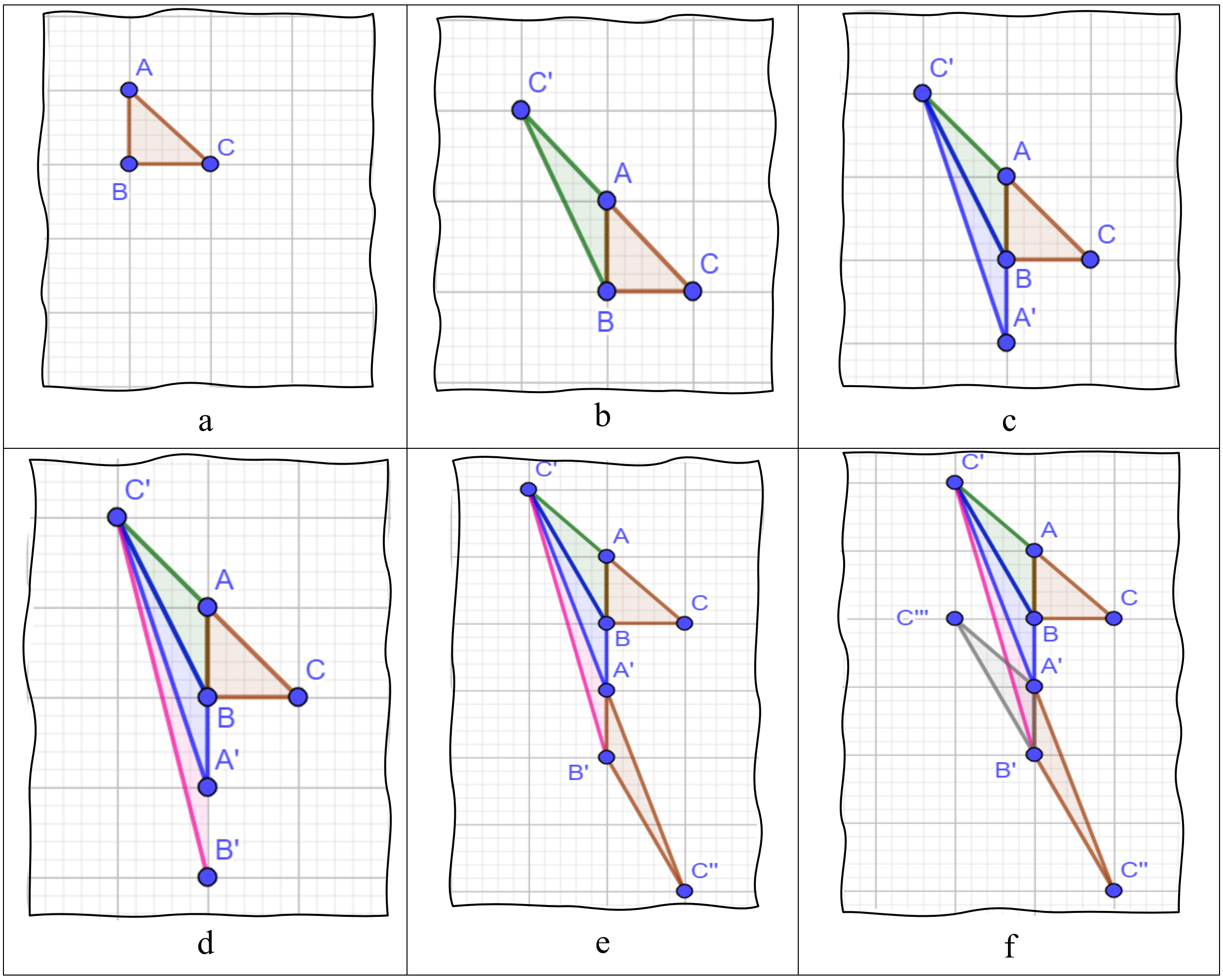
Pasul 1. Vom identifica puncte simetrice cu careva dintre vârfurile triunghiului, considerând drept centru de simetrie unul din celelalte două vârfuri. De exemplu, $S_A(C) = C'$. Constituim un nou triunghi ABC'.

Pasul 2. Pentru acest triunghi, alegând drept centru de simetrie, de exemplu, vârful B, repetăm operația, identificând simetricul vârfului A: $S_B(A) = A'$.

Putem realiza aceste transformări succesiv de orice număr de ori. Figura 5 (a, b, c, d, e, f, ...).

În rezultatul acestor transformări se constată următoarele:

1. Aria triunghiurilor obținute este invariantă.
2. Aria fiecărui triunghi obținut în rezultatul unei transformări este egală cu ½.
3. Dacă un triunghi simplu este completat până la un paralelogram, atunci acest paralelogram nu va conține noduri nici în interior, nici pe laturi.
4. La transformarea în manierea descrisă mai sus a unui triunghi simplu, se va obține de asemenea un triunghi simplu.
5. Triunghiurile simple sunt dreptunghice sau obtuzunghice (*Triunghiurile simple cu laturile* $1, 1, \sqrt{2}$ *care sunt dreptunghice se numesc minimale.*)
6. Din orice triunghi (*non minimal*) printr-o singură transformare poate fi obținut un triunghi simplu la care latura cea mai mare este mai mică decât latura mai mare a triunghiului inițial.
7. Orice triunghi poate fi transformat într-un triunghi minimal printr-un număr finit de transformări.
8. Aria oricărui triunghi simplu este egală cu ½.
9. Orice triunghi poate fi divizat în triunghiuri simple.
10. Dacă aria unui triunghi este $A = \frac{m}{2}$, atunci la orice divizare în triunghiuri simple a acestui triunghi se obțin m triunghiuri simple.
11. Orice triunghi cu aria $A = \frac{1}{2}$ este simplu.
12. Oricare ar fi două noduri A și B ale rețelei, dacă pe segmentul determinat de ele nu sunt alte noduri, atunci există un nod C, astfel încât ABC este triunghi simplu.
13. Unghiul ACB din problema 12 poate fi obtuz sau drept.
14. Pe o rețea din pătrate un paralelogram poate genera o rețea care acoperă planul, dacă fiecare dintre diagonalele sale îl divide în triunghiuri simple.
15. Triunghiul ABC este simplu atunci și numai atunci, când nu se suprapun triunghiurile care se pot obține prin translarea paralelă a triunghiului ABC, astfel încât imaginea vârfului A să coincidă cu un nod.



Definiția 3. Un triunghi se numește realizabil, dacă el este simplu și vârfurile lui se obțin în rezultatul reflectării succesive prin simetrie centrală a vârfurilor unui triunghi la care vârfurile sunt vârfuri ale unui pătrat al rețelei.

Se poate demonstra următoarea teoremă.

Teoremă. Următoarele trei proprietăți ale triunghiurilor cu vârfurile în nodurile rețelei sunt echivalente:

1) Triunghiul are aria egală cu ½.
2) Triunghiul este simplu.
3) Triunghiul este realizabil.

În continuare vor fi expuse câteva tipuri de situații care pot fi soluționate utilizând formula lui Pick fără a recurge la formulele pentru calcularea ariilor, dacă aceasta nu este o cerință în enunț. Prin astfel de situații se urmăresc şi se analizează fenomene pe care le considerăm date, cunoscute din afara matematicii, numerele şi operaţiile descriind astfel de relaţii. Educaţia matematică reclamă dezvoltarea spiritului de observaţie, a atenţiei şi a imaginaţiei, precum şi a intuiţiei. Prin ultima se realizează menţinerea relaţiei permanente cu universul real [6].

Situația 1. Calculați aria figurii reprezentate în Figura 11 în două moduri: folosind formula lui Pick și folosind formule adecvate din geometria plană.

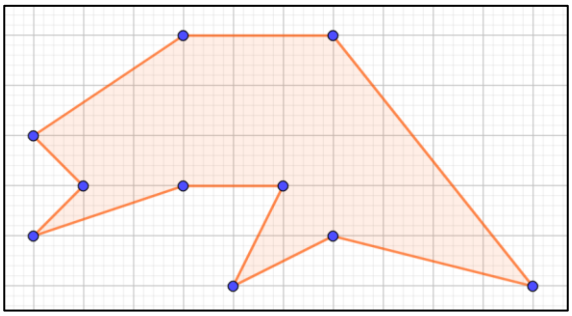
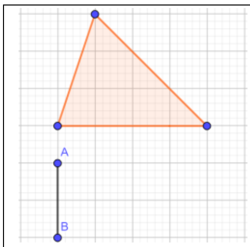
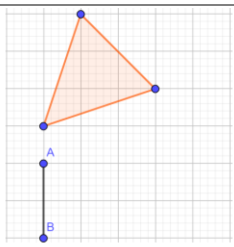
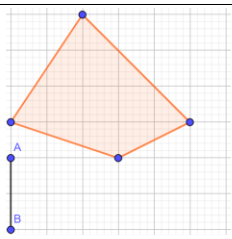


Figura 11.

Situația 2. Să presupunem că un artist este angajat să picteze un mozaic uriaș care constă din numeroase plăci pătrate. Mai mult, să presupunem că artistul este un admirator al cubismului, iar forma care urmează să fie pictată este un poligon cu aspect complex (eventual concav) cu vârfuri care se află la intersecțiile plăcilor. Deoarece mozaicul este destul de mare, în mod ideal, artistul ar dori să știe în avans de câtă vopsea ar avea nevoie. Aceasta înseamnă calcularea cu precizie a ariei poligonului. Cu toate acestea, forma sa este destul de complicată și chiar și o simplă triangulare ar necesita o mulțime de pași intermediari pentru a obține răspunsul final. Dacă artistul ar ști totuși formula lui Pick, ar rezolva această problemă aparent laborioasă foarte repede. Formula implică o simplă numărare a punctelor de rețea. Realizați un asemenea mozaic și calculați cantitatea de vopsea necesară pentru a-l colora, dacă pentru a colora o placă sunt necesari 0,5ml de vopsea.

Situația 3. Trei greieri (trei puncte) la momentul inițial se află în trei vârfuri ale unui pătrat. Fiecare greier are posibilitatea să sară pe rețeaua de pătrate peste unul dintre ceilalți doi greieri, astfel încât noua sa poziție să fie punctul simetric cu cel pe care s-a aflat anterior la simetria centrală în raport cu punctul în care se află greierul peste care a survolat. Este evident că de fiecare dată greierii vor cădea în noduri ale rețelei. Ce poziții pot ocupa greierii după câteva sărituri?

Situația 4. În spațiul dat (pe pătratul cu latura egală cu 6) construiți un dreptunghi care are aria egală cu aria figurii date folosind formula lui Pick:

 a) Construiți dreptunghiul ABCD cu latura dată AB echivalent cu triunghiul dat.	 b) Construiți dreptunghiul ABCD cu latura dată AB echivalent cu triunghiul dat.	 c) Construiți dreptunghiul ABCD cu latura dată AB echivalent cu patrulaterul dat.

Situația 5. Examinați steaua care are un singur punct interior, obținută cu ajutorul șirului lui John Farey (Figura 12.). Stabiliți aria figurii cu ajutorul teoremei lui Pick.

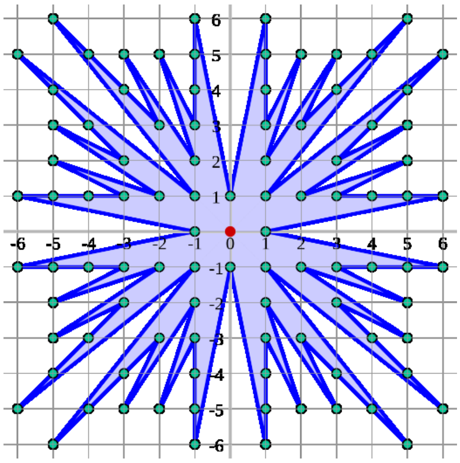


Figura 12.

Situația 6. Moș Macarie, după ce a muncit o viață întreagă, se decide la bătrânețe să se retragă pe o insulă pentru a-și găsi liniștea interioară și a se dedica naturii. Astfel, el cumpără o insula pe care cultivă pomi fructiferi. Insula poate fi reprezentată ca un poligon (nu neapărat convex) într-un sistem de axe de coordonate pozitive. Pomii sunt plantați doar la coordonate naturale. Moș Macarie este interesat ce număr de copaci poate planta strict în interiorul insulei. In acest scop el vă furnizează copacii care determina conturul insulei (vârfurile poligonului). Restricții și precizări: $3 \leq N \leq 100.000$ – numărul de copaci pe linie; coordonatele copacilor au valori întregi din intervalul [0, 2.000.000]; pot fi plantați mai mult de 2 copaci pe o latură a "poligonului" insulei.

Situația poate fi soluționată, elaborând un algoritm sau un program.

Concluzii

Conținuturile care vizează formula lui Pick permit transpunerea didactică pentru diverse categorii de elevi. Tema se recomandă a fi examinată clasele gimnaziale, dar poate fi adaptată pentru clasele primare și extinsă pentru clasele de liceu. La expunerea conținuturilor un rol important îl are metoda concret inductivă de determinare a unor relații între mărimi, ce permite lejer formularea unor ipoteze care se generalizează. Formula lui Pick se utilizează pe larg în combinatorică, informatică, fiind utilă atât la rezolvarea problemelor simple, cât și a problemelor de concurs.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)”, inclus în „Program de stat” (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. BAGNI, G.T. Il piano di Pick e i numeri primi. In: „*Periodico di Matematiche”*, serie VI, 65, n.3, Roma: Luciani, 1990.
2. JALLIFFIER-VERNE, I.; LAFOREST, M. La formule de Pick. In: *Accromath,* Vol. 5, 2010. Ecole Polytechnique, Montreal. Pick.pdf (mathom.fr)
3. KIRADJIEV, K. Connecting the dots with Pick's theorem. Mathematics Today. October 2018. Pp. 212-214. https://www.maths.ox.ac.uk/system/files/attachments/ECMPick.pdf
4. PICK, G. Geometrisches zur Zahlenlehre Sitzungsberichte des deutschen naturwissenschaftlich-medicinischen Vereines für Böhmen "Lotos" in Prag. (Neue Folge) pp. 311–319. https://www.biodiversitylibrary.org/item/50207#page/327/mode/1up (vizitat la 15.10.2023)
5. REEVE, J. On the volume of lattice polyhedra. In: *Proc. London Math. Soc*., 1957. vol. 7, pp. 378–395.
6. TELEUCĂ, M.; LUPU, I.; SALI, L. Transpunerea didactică a conţinuturilor pentru dezvoltarea gândirii matematice. *Revista Acta et commentationes. Ştiinţe ale Educaţiei*. Nr. 1. 2012.
7. ВАСИЛЬЕВ, Н. Вокруг формулы Пика. *Научно-популярный физико-математический журнал "Квант"*. Nr. 12, 1974. c. 39-43.
8. https://infoarena.ro/probleme-cu-puncte-laticiale
9. https://nrich.maths.org/pickstheorem