CZU: 511.528 DOI: 10.46727/c.steam-2023.p138-140

DESPRE CONJECTURA $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a}{b}$

Boris ȚARĂLUNGĂ, dr. conf. univ.
https://orcid.org/0000-0002-2477-9376
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău

Rezumat. În această lucrare se studiază conjectura $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a}{b}$.

Cuvinte cheie: ecuație diofantină; Soluții naturale.

Abstract . In this paper is studies the congecture $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a}{b}$.

Keywords: diophantine equation; natural solutions.

În teoria numerelor se studiază intens ecuațiile diofantiene [1-7],ecuații ce admit doar soluții întregi. În literatura de specialitate este bine cunoscută conjectura: pentru care numere naturale a, b există numerele naturale $x, y, z,$ încât să se verifice egalitatea $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a}{b}$. Dacă $a=4$, atunci avem conjectura Erdos- Strauss. Dacă $a=5$, atunci avem conjectura Sierpinski. Dacă a =6, 7, atunci avem conjectura Aigner. În lucrarea [3] se arată că pentru $a=8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18$ există ecuaţii care nu au soluţii naturale. În lucrarea [7] se demonstrează, că pentru $a=19$ există ecuaţii ce nu au soluţii naturale.

În lucrare dată se studiază conjectura $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a}{b}$ și se demonstrează că pentru valorile $a=10m, m\in\mathbb{N}$ ea este falsă.

Teorema 1. Ecuația

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{10m}{10m+1}$$

nu are soluții în mulțimea numerelor naturale.

Demonstrație. Vom considera, că $x\geq y\geq z$. Deoarece $\frac{1}{z}<\frac{10m}{10m+1}$, rezultă că $z\geq 2$. Analog, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{3}{z}$. Atunci $\frac{10m}{10m+1}\leq\frac{3}{z}$, de unde $z\leq 3$. Deci $z\in\{2,3\}$.

1. Fie $z=2$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{10m-1}{2(10m+1)}.$$

Din această ecuație rezultă relația

$$y=2+\frac{4x+40m+4}{(10m-1)x-(20m+2)}.$$

Pentru

$$(10m-1)x-(40m+2)>4x+20m+4$$

sau

$$x > 6 - \frac{14}{10m - 5}$$

ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x < 6$. Atunci $x \in \{2,3,4,5\}$.

Dacă $x = 2$, obţinem

$$y = \frac{40m + 4}{-4} = -(10m + 1)$$

şi nu avem soluţii naturale.

Dacă $x = 3$, primim

$$y = \frac{60m + 6}{10m - 5} = 6 + \frac{36}{10m - 5}$$

şi nu avem soluţii naturale.

Dacă $x = 4$, rezultă

$$y = \frac{40m + 4}{10m - 3} = 4 + \frac{16}{10m - 3}$$

şi nu avem soluţii naturale.

Dacă $x = 5$, obţinem

$$y = \frac{30m + 3}{10m - 2} = 3 + \frac{9}{10m - 2}$$

si nu avem soluţii naturale.

2. Fie $z = 3$. Substituim și obținem ecuaţia

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{20m-1}{3(10m+1)}.$$

Din această ecuație rezultă relaţia

$y = 1 + \frac{(10m+4)+30m+3}{(20m-1)x-(30m+3)}$.

Pentru

$$(20m - 1)x - (30m + 3) > (10m + 4)x + 30m + 3$$

sau

$$x > 6 + \frac{36}{10m - 5}$$

ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x < 7$. Atunci $x \in \{2,3,4,5,6\}$.

Dacă $x = 2$, primim

$$y = \frac{60m + 6}{10m - 5} = 6 + \frac{36}{10m - 5}$$

şi nu avem soluţii naturale.

Dacă $x = 3$, obţinem

$$y = \frac{90m + 9}{30m - 9} = 3 + \frac{12}{10m - 3}$$

şi nu avem soluţii naturale.

Dacă $x = 4$, obţinem

$$y = \frac{120m + 12}{50m - 7} = 2 + \frac{20m + 26}{50m - 7}$$

şi nu avem soluţii naturale.

Dacă $x = 5$, obţinem

$$y = \frac{40m + 4}{10m - 3} = 4 + \frac{16}{10m - 3}$$

şi nu avem soluţii naturale.
Dacă $x = 5$, primim

$$y = \frac{150m + 15}{70m - 8} = 2 + \frac{10m + 31}{70m - 8}$$

şi nu avem soluţii naturale.
Dacă $x = 6$, obţinem

$$y = \frac{180m + 18}{90m - 9} = 2 + \frac{36}{90m - 9}$$

şi nu avem soluţii naturale. Teorema este demonstrată.

Concluzie. Cu toate că conjectura anunţată este falsă, pentru unele valori naturale ale lui a şi b ecuaţia dată are soluţii naturale. De exemplu, ecuaţiile: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{20}{31}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{30}{59}$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{40}{53}$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{50}{77}$ au soluţiile în mulţimea numerelor naturale, respectiv:

$\{ (2,7,434) \}$; $\{(2,177,354), (2,836,236), (3,6,118), (4,4,118)\}$; $\{(2,4,212)\}$; $\{(2,7,154)\}$.

Bibliografie

1. AIGNER, A. Brucheh als Summs von Stammbruchen. In: *J. reine angew. Math.* 1964, nr. 214/215, pp. 174-179.
2. BERNSTEIN, L. Zur Losung der diophantinschen Gleichung m/n= 1/x=1/y+1/z, insbesondere im Falle m=4. In: *J. reine angew. Math.* 1962, nr. 211, pp. 1-10.
3. BROWN, S. On a rational fractions not expressible as a sum of three unit fractions. Notes on Number Theory and discret mathematics ISSN1310-5132, Vol.29, 2014. No 2, 61-64.
4. ERDOS, P. On a diophantine equation. In: *Mat. Lapok*, 1950, nr. 1, pp. 192-210.
5. PALAMA, G. Su di una congettura di Sierpinski relativa alla possibilita in numere natuarli dela 5/n=1/x+1/y+1/z. In: *Boll. Un. Mat . Ital.* 1958, nr. 13, pp. 65-72.
6. SIERPNSCKI, W. Sur les decomposition de nombres rationnels en fractions primaires. In: *Mathesis*. 1956, nr. 65, pp. 16-32.
7. ŢARĂLUNGĂ, B. Despre soluţiile ecuaţiei diofantiene .$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{19}{n}$. În: *Materialele Conferinței Ştiinţifice Internaţionale „Abordări inter/transdisciplinare în predarea științelor reale (concept Steam),* ediţia a doua, 28-29 octombrie 2022, Chişinău, Republica Moldova, pp.160-162. ISBN 978-9975-81-074-6.