

## ISTORIA DIDACTICII MATEMATICII ÎN CONTEXTUL CIVILIZAȚIEI MESOPOTAMIENE

Svetlana RAHIMOV, director

<https://orcid.org/0000-0002-1941-0929>

Gimnaziul Volovița „Alexandru Lupașcu”, Soroca RM

**Rezumat.** Ce circumstanțe au stat la baza apariției didacticii matematice? Inițial, în mod rudimentar, unele idei sporadice atribuite acestui domeniu au rezultat din utilizarea matematicii în practica cotidiană sub forma unor prescripții sau îndrumări fără clarificări. Rezolvarea problemelor matematice a început să fie o preocupare semnificativă în educarea tinerei generații încă din mileniul II î.Hr. Peste un milion de tablete de argilă conțin diverse informații, inclusiv calcule contabile și operații aritmetice bazate pe sistemul de calcul hexazecimal.

**Cuvinte cheie:** Istoria Didacticii Matematice, civilizația mesopotamiană, lucrări de pământ, negocieri, înregistrări contabile, apariția regulilor de calcul, sistem numeric hexazecimal, realizări matematice, nouă caracteristici care definesc o civilizație, tăblițe de lut.

**Abstract.** What circumstances were the basis for the emergence of mathematics didactics? Initially, rudimentarily, some sporadic ideas attributable to this field resulted from the use of mathematics in everyday practice in the form of certain prescriptions or guidelines without clarification. Solving mathematical problems began to be a significant concern in educating the young generation as early as the second millennium BC. Over one million clay tablets contain various pieces of information, including accounting calculations and arithmetic operations based on the hexadecimal numeracy system.

**Keywords:** History of Didactics of Mathematics, Mesopotamian civilization, earthworking, bargaining, accounting records, emergence of calculation rules, hexadecimal numeral system, mathematical achievements, nine characteristics defining a civilization, clay tablets.

Civilizația mesopotamiană, ca noțiune mai generală, include o stocare de informații referitoare la civilizațiile care s-au perindat de-a lungul istoriei în cuprinsul văilor Tigrului și Eufratului. Mesopotamia este numită regiunea cuprinsă între Tigru și Eufrat, precum și teritoriile adiacente. În elina veche *Mesopotamia* (*meso* – mijloc, *potamos* – râu) însemna *țara cuprinsă între fluvii* sau mijlocul dintre fluvii. Această câmpie vastă, fertilă și ademenitoare este atestată documentar ca prima regiune istorică care a fost leagănul uneia dintre cele mai vechi civilizații cunoscute omenirii. Ea însumează civilizațiile antice Sumerul, Akkadul, Babilonul Antic, Elamul, Asiria – vechi civilizații care se afirmă și se statornicesc în această regiune prin mileniul al IV-lea î.e.n. și mai încoace. Ea s-a constituit și afirmat odată ce s-au creat premisele necesare pentru apariția și statornicirea unei civilizații anume. Civilizația mesopotamiană a putut să apară doar când s-au cristalizat cele 9 caracteristici (după V. Childe Gordon). Civilizația mesopotamiană însumează aceste caracteristici. În prezenta lucrare la civilizația menționată vom atașa și civilizațiile care au utilizat același scris cuneiform și totodată au folosit multe dintre produsele, atât materiale,

cât și culturale, ale civilizației mesopotamiene. Este vorba de elamiții, care populau dinspre est o parte muntoasă a munților Zagros, hittitiții, care populau Anatolia de astăzi (în Turcia), de triburile ce populau Canaanul (Palestina și Siria de azi) și de alte popoare, ca amoriții, mezii, perșii ș.a., care, pe lângă faptul că erau vecine, au împrumutat multe din descoperirile mesopotamienilor, inclusiv scrisul și, odată cu el, una dintre cele mai valoroase realizări ale acestei civilizații – cunoștințele matematice. Surprinzătoare sunt progresele înregistrate de știința mesopotamiană în domeniul matematicii pure, precum și al didacticii matematicii într-o formă empirică. Ne vom referi doar la didactica matematicii și la circumstanțele ce au stat la baza apariției ei. Inițial, în mod rudimentar, unele idei sporadice ce pot fi atribuite acestui domeniu au rezultat din utilizarea matematicii în practica cotidiană sub formă de anumite prescripții sau îndrumări fără lămurire. Rezolvarea problemelor matematice a început să constituie o preocupare însemnată în educarea tinerei generații încă din mileniul al II-lea înainte de era noastră. Peste un milion de tăblițe de lut cuprind diverse informații, inclusiv calcule contabile și operații aritmetice în baza sistemului hexazecimal de numerație. De la sfârșitul ultimei dinastii din Ur s-a păstrat o lucrare, destul de populară în acele timpuri, din care au rămas peste 21 tăblițe de lut și multe fragmente din alte tăblițe cu diverse texte nefinisate, care denotă cu certitudine organizarea unei astfel de preocupări. În această lucrare se descrie viața unor elevi din *casa tăblițelor de lut* – școala scribilor a acelor timpuri antice. Principala preocupare în această școală era însușirea lucrului cu tabelele matematice de calcul, care erau pregătite de-a gata cu numere în sistemul de numerație în baza 60 (tabele de adunare și înmulțire, tabele pentru numerele inverse ce înlocuiau împărțirea, tabele pentru ridicarea la pătrat și la cub, care serveau și pentru operațiile inverse, tabele cu modele de probleme rezolvate, în care era suficient doar de a înlocui datele și de a utiliza tabelele necesare de calcul), socotitul și evidența calculelor generate de unele probleme practice, în special evidența contabilă simplă și compusă cu determinarea unei anumite dobânzi. Elevii din această școală scriau pe tăblițe de lut cu un stilet special calcule însușind zi de zi arta calculului, după care aceste tăblițe erau depozitate sau aruncate într-un loc special pentru a putea fi utilizate ca materie primă pentru confecționarea altor tăblițe de lut. În această școală era organizat un anumit proces didactic de studiere a matematicii elementare, în special a evidenței contabile. În cadrul procesului de învățământ se pare că elevii rezolvau și unele ecuații cu 2 necunoscute și chiar ecuații cu necunoscuta la pătrat.

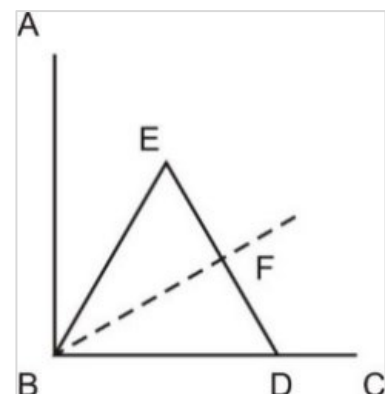
S-au păstrat foarte puține din problemele care preocupau mințile oamenilor din acele timpuri, însă și acestea denotă un nivel înalt al unei culturi matematice de calcul și evidență contabilă. Este clar că această cultură matematică nu s-a ivit spontan pe un loc gol, adică din nimic. Ea, desigur, are la baza sa unele tangențe cu alte culturi ale unor civilizații mult mai vechi. Probabil că este vorba de civilizațiile vechi de păstori și agricultori sau vânători-culegători care au trăit în neolitic. Fiind tot timpul în mișcare, ei nu au putut lăsa urme care

să poată rămâne în istorie și de aceea au rămas necunoscuți pentru o bună parte a omenirii. În ultimul timp însă, datorită metodelor de cercetare mai performantă, se aud tot mai multe voci în favoarea lor. Este clar că aceste civilizații nu cunoșteau un anumit mod de scriere a cifrelor și, desigur, utilizau o matematică orală cu unele elemente de simbolism matematic, poate prin desene, hieroglife sau sub formă de anumite semne, care cu timpul s-a modificat, perfecționat și mai apoi s-a transformat într-un anumit scris matematic caracteristic, care peste ani a devenit scrisul matematic cu limbajul său simbolic cunoscut actualmente.

Prin matematica mesopotamiană ni s-au transmis multe informații din cuceririle acelor timpuri: apariția calendarului și a constelațiilor zodiacale, împărțirea anului în anotimpuri, luni, zile, împărțirea diurnei în ore, minute, secunde, terțe, cvarte, divizarea cercului în 360 grade, apoi minute, secunde, alcătuirea tabelelor de calcul (pătratele și cuburile numerelor, rădăcini pătrate și cubice, tabela înmulțirii numerelor, tabela numerelor inverse ș.a.), începuturile metrologiei ca știință, sistemul de numerație zecimal și sexagesimal etc.

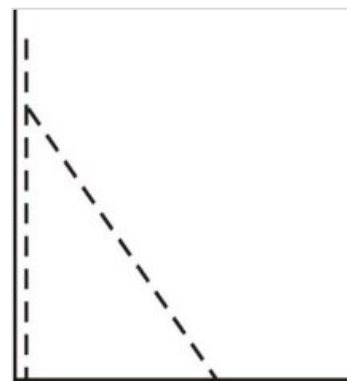
Matematica mesopotamiană a fost o matematică mai mult practică – imitativă, fără demonstrații teoretice, de tipul *Uită-te și execută întocmai!*. Cel care rezolva o problemă oarecare trebuia să parcurgă un algoritm prescris special fără a cunoaște motivarea logică a rezolvării. Această matematică a apărut și s-a dezvoltat ca urmare a nevoilor și cerințelor stringente ale practicii cotidiene, deoarece la fiecare pas viața îl obliga pe om să recurgă la calcule matematice de tot felul, inclusiv la evidențe contabile. Asemenea calcule nu erau simplu de efectuat în condițiile unei perioade istorice când scrisul abia începea a se înfiripa. Matematica era considerată o artă pe care nu o putea însuși oricine. Această artă se studia în locuri speciale, numite școli de scribi, pe parcursul a mai mulți ani de muncă asiduă. Tot din această cauză cărțile de matematică ocupau un loc aparte și destul de impunător în biblioteca din Ninive a regelui Așșurbanipal – o bibliotecă cu cea mai performantă bibliografie.

Din mulțimea tăblițelor de lut ce s-au păstrat cu texte matematice pot fi selectate probleme cu texte geometrice: calcule numerice, aproximări ale lui  $\pi \approx 3,125$ . *Împărțirea unghiului drept în trei părți congruente*: Se construiește un triunghi echilateral  $BED$  într-un unghi drept  $ABC$ , astfel încât vârful  $B$  al triunghiului echilateral  $BED$  să coincidă cu vârful unghiului drept, iar latura  $BD$  să fie inclusă în latura  $BC$  a unghiului.  $m(\angle CBE) = \frac{1}{3}m(\angle ABC)$ . Construind bisectoarea unghiului  $EBD$ , obținem împărțirea unghiului drept  $ABC$  în trei părți congruente



**Problema pătratului** (cca 1950 î.e.n.)

Aria  $A$ , care constă din sumele ariilor a două pătrate, alcătuieste 1000. Latura unuia dintre aceste pătrate alcătuieste, micșorată cu 10, două treimi din latura celuilalt pătrat. Care sunt laturile pătratelor? **Aria patrulaterului.**



Pentru determinarea ariei patrulaterului sumerienii calculau produsele semisumelor laturilor opuse. Clarificați pentru care patrulare această formulă determină exact aria. **Aria**

**triunghiului.** Pentru determinarea ariei triunghiului isoscel, sumerienii uneori calculau produsul dintre lungimea laturii laterale și jumătății bazei. Verificați pentru care caz formula pentru calcularea ariei triunghiului isoscel este un caz particular al formulei patrulaterului din problema 6. **Problema barei.** Determinați lungimea barei (bârnei), inițial atașată vertical la perete, apoi deplasată astfel, încât capătul ei de sus s-a coborât

cu trei coți, iar capătul de jos s-a depărtat de la perete cu nouă coți. **Raza cercului circumscris.** Calculați raza unui cerc circumscris unui triunghi isoscel, care are baza egală cu 60 și latura laterală 50. Răspunsul indicat de matematicianul antic este  $31 + \frac{15}{60}$ .

Care este eroarea? **Raza cercului înscris.** Determinați raza unui cerc înscris într-un hexagon regulat.

Problemele de algebră au următoarea tematică: **Rădăcina pătrată**

Calculați  $\sqrt{1700}$  sau  $\sqrt{160}$ . Să se compare gradul de aproximație al rezultatului calculului matematicianului babilonian cu cel obținut prin metoda de calcul modernă. Babilonienii

utilizau pentru calcularea rădăcinii pătrate a umereilor întregi următoarea formulă  $\sqrt{c} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$ , atunci  $\sqrt{1700} = \sqrt{1600 + 100} = 40 + \frac{100}{2 \cdot 40} = 41 \frac{1}{4} = 41,25$ . În

conformitate cu calculele moderne,  $\sqrt{1700} = 41,231056...$ , ceea ce denotă o eroare de 0,02, adică de 2%. Este un calcul uimitor pentru matematica elementară a acelor timpuri.

Utilizând rezolvarea din problema 7, avem:  $\sqrt{160} = \sqrt{12^2 + 16} \approx 12 + \frac{16}{2 \cdot 12} = 12 \frac{2}{3}$ . Este un răspuns cu o marjă de eroare destul de exactă pentru matematica acelor timpuri, de **12,666...** în loc de **12,649...**

Mesopotamienii cunoșteau progresiile și operațiile cu ele. De exemplu problema **10 frați:**

**10 frați.  $1\frac{2}{3}$  mine de argint. Frate de asupra fratelui se ridică nu știu cu cât. Partea celui de-al optulea este 6 șecheli. Cu cât se ridică frate de asupra fratelui?** Din expunerea de pe

o tablă cuneiformă a rezolvării acestei probleme se poate constata că babilonienii cunoșteau proprietatea progresiei aritmetice cu referire la termenii egal depărtați de capetele dezvoltării progresiei, adică că suma lor este egală cu dublul termenului de la mijlocul dezvoltării progresiei sau cu dublul mediei aritmetice a tuturor termenilor progresiei. În cazul dat, media este  $100:10 = 10$  șecheli, deoarece  $1\frac{2}{3}$  mine fac 100 șecheli. Prin urmare,

cel de-al optulea cu cel de-al treilea frate au primit împreună 20 de șecheli, adică al treilea a primit 14 (20 - 6). Deoarece al optulea frate „se ridică de asupra” celui de al treilea cu 5 trepte, rația va fi  $\frac{14-6}{5} = 1\frac{3}{5}$ .

Mesopotamienii: rezolvau ecuații liniare și pătrate și sisteme de ecuații cu ele.

Rezolvați ecuația  $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{xy}{7} = 2$  sau ecuația  $x^2 + y^2 = 100$ ; cunoșteau operațiile cu procentele. În Babilonul Antic, cămătarul lua 20% în plus pe deasupra pe an. Dacă datornicul falit nu putea returna datoria în anul următor la termenul convenit, atunci cât va trebui el să întoarcă în al doilea an? Operau cu noțiuni din teoria numerelor: Cel mai mare număr atestat în tăblițele cuneiforme sumeriene este  $1959552 \cdot 10^8$ . Să se scrie în sistemul zecimal acest număr și să se citească în întregime în conformitate cu ordinele de scriere.

Din problemele populare se pot evidenția: În câte zile va putea fi executată o bucată de țesătură de o lungime de 100 de coți, dacă se știe că zilnic țesătoarea poată să țese câte 2 coți și jumătate? **Evreul bucătar:** Pe timpul capturii evreilor în Mesopotamia (586-530 î.e.n.), un evreu era bucătar la un satrap. Evreul era atât de iscusit în prepararea bucatelor, încât satrapul își lingea degetele la fiecare masă. Regele Cyrus II în anul 530 î.e.n. îngăduie tuturor evreilor a se întoarce în Israel – la baștina de unde au fost capturați. Satrapul, nedorind să se despartă de iscusitul bucătar, se gândea cum să facă ca să-l rețină. O dată, gustând mâncarea, satrapul, luând o lingură din mâncarea preparată, s-a adresat bucătarului: „- Dacă vei răspunde corect la întrebarea mea – te eliberez. Dacă nu – rămâi la mine pe vecie”. Evreul spune: „- Și care este întrebarea?” Satrapul îl întreabă: „- Să-mi spui ce nu-i ajunge acestei mâncări pentru a fi pe deplin întreagă?” Evreul a chibzuit ceva timp și i-a răspuns. Și satrapul uimit de răspunsul ce l-a dat evreul bucătar, i-a dat evreului libertatea așteptată. Ce i-a răspuns evreul satrapului?

## Bibliografie

1. AVDIEV, V.I. *Istoria Orientului Antic*. București: Editura de Stat, 1951. 424 p.
2. CONSTANTIN, D. *Civilizația Asiro-Babiloniană*. București: Editura Sport și Turism, 1981. 404 p.
3. LIPIN, L.; BELOV, A. *Cărțile de lut*. București: Editura Științifică, 1960. 386 p.
4. ВАЙМАН, А.А. *Шумеро-вавилонская математика*. (III-I тыс. д.н.э.). Москва: Издательство восточной литературы, 1961. 275 с.