CZU: 37.016:51 DOI: 10.46727/c.steam-2023.p87-93

DEZVOLTAREA GÂNDIRII CRITICE A ELEVILOR/STUDENȚILOR PRIN UTILIZAREA CONTRAEXEMPLELOR ÎN STUDIEREA MATEMATICII

Dumitru COZMA, dr. hab., profesor universitar
https://orcid.org/0000-0003-4794-1935
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă" din Chișinău

Rezumat. În lucrare sunt examinate unele aspecte ale dezvoltării gândirii critice, în particular, este dezvoltat rolul contraexemplelor din matematică în formarea acestor abilități la elevi și studenți.
Cuvinte-cheie: exemplu, contraexemplu, gândire critică.

Abstract. In this paper, some aspects of the development of critical thinking are examined. In particular, the role of counterexamples in mathematics is developed for the formation of these skills in pupils and students.
Keywords: example, counterexamples, critical thinking.

1. Introducere

Gândirea critică reprezintă abilitatea de a imagina, analiza și evalua informațiile, pentru a determina integritatea și validitatea acestora. Ea ajută elevii/studenții să formuleze probleme, să înainteze ipoteze, să analizeze idei și să adopte un mod critic de raționament, pentru a stabili diverse cauze posibile, a identifica soluții plauzibile, a evalua corectitudinea acestora folosind un raționament logic. De asemenea, gândirea critică reprezintă capacitatea de a face conexiuni creative între idei cu caracter interdisciplinar [4], [5].

Adesea, învățarea este pasivă, elevii/studenții învață mai mult cum să memoreze informații, decât să gândească, învață prin repetare, fie ce spune profesorul, fie ce este scris în manuale. Așadar, elevii învață să urmeze anumiți pași, despre care cred că sunt cei corecți, într-o anumită ordine, astfel încât să obțină răspunsul „cel bun" și, implicit, o notă sau un calificativ pe măsură.

Gândirea critică se referă la curiozitate, flexibilitate și menținerea unei minți deschise. Rezolvarea creativă a problemelor depinde de capacitatea de gândire critică și, cu cât această abilitate este mai bine dezvoltată, cu atât elevii vor identifica cele mai bune soluții, vor putea comunica mai bine, vor înțelege mai bine cum funcționează lucrurile în lumea reală, vor veni cu idei creative [4].

Abilitatea de a găsi exemple care să ilustreze concepte sau să confirme afirmații, sau contraexemple care să respingă afirmaţii presupuse corecte, este o calitate importantă a gândirii critice. A-i învăța pe elevi să creeze exemple și contraexemple necesare înseamnă a-i învăța să aibă o abordare creativă în studiului matematicii. Exemplele prezentate în cadrul orelor de matematică au rolul de a ilustra definiţiile, precum şi funcţionarea teoremelor. Totodată, atunci când se prezintă o definiţie, se dau exemple de obiecte matematice care se rezumă sub concept (care arată că definiţia este corectă), dar şi exemple de obiecte care nu o satisfac.

In procesul evaluării critice a unor afirmaţii (teoreme sau enunţuri de probleme), dacă planează vreun dubiu asupra corectitudinii lor, există o cale de clarificare a acestora, deseori mai scurtă decât încercarea de a parcurge o demonstraţie, care poate fi complexă. Aceasta se realizează prin construirea rapidă unui contraexemplu, dacă este posibil, care va arata că afirmaţia este falsă. Un contraexemplu infirmă o afirmaţie presupus a fi aplicabilă tuturor obiectelor dintr-o o anumită categorie: contraexemplul este un obiect din categoria vizată, la care afirmaţia pretins-generală nu se aplică [5].

Contraexemplele vin să pună în evidenţă anumite „delimitări” teoretice, în principal, în următoarele moduri [5]:

- arată cum, uneori, o legitate aparent plauzibilă nu se validează;
- arată cum, atunci când nu sunt îndeplinite toate cerinţele din ipoteza unei teoreme, concluzia poate să nu mai fie valabilă, adică teorema să nu mai funcţioneze (pe scurt, arată cum omiterea unor cerinţe din ipoteza unei teoreme poate s-o infirme);
- arată că unele cerinţe din ipotezele teoremelor reprezintă doar condiţii suficiente (nu şi necesare);
- argumentează, pentru cazuri individuale de teoreme, situația generală că reciprocele unor teoreme nu sunt adevărate.

Un exemplu este o dovadă că o afirmație generală ar putea fi adevărată, în timp ce un contraexemplu demonstrează că o afirmație generală este falsă. În cele ce urmează, vom analiza contraexemple ce țin de proprietățile funcțiilor, limite de șiruri, funcţii continue, funcţii derivabile, funcţii care admit primitive, funcţii integrabile etc.

2. Contraexemple la studierea reciprocității unor teoreme

Contraexemplele sunt foarte utile pentru a evidenția că cerinţe din ipotezele teoremelor reprezintă doar condiţii suficiente (nu şi necesare) sau invers [3], [5].

Teorema 2.1. Dacă șirul $(x_n)_n$ are limită, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, atunci acest șir este mărginit.

Exemplul 2.1. Șirul $(x_n)_n$, unde $x_n = \frac{1}{n}$ are limita $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ și acest șir este mărginit

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Afirmația reciprocă nu este adevărată și eroarea este uşor vizibilă prin construirea următorului contraexemplu.

Contraexemplul 2.1. Șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n$ este mărginit $x_n \in [-1; 1]$, $|x_n| = 1$, însă acest șir nu are limită

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1, & \text{pentru } n \text{ par} \\ -1, & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$$

fiindcă are două limite diferite.

Imediat după introducerea noţiunii de derivată, se demonstrează

Teorema 2.2. Orice funcţie derivabilă într-un punct este şi continuă în acel punct.

Reciproca afirmaţiei nu este adevărată: este posibil ca o funcţie să fie continuă într-un punct x_0, fără să fie derivabilă în acel punct.

Contraexemplul 2.2. Funcţia cu modul, $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$ este continuă în $x_0 = 0$, dar nu este derivabilă în acest punct. Folosind definiţia derivatei, ne convingem că derivata la stânga $f_s'(0) = -1$ și derivata la dreapta $f_d'(0) = 1$ nu sunt egale, ceea ce implică că nu este derivabilă în acest punct.

Teorema 2.3. Dacă funcția $f(x)$ este integrabilă pe intervalul $[a, b]$, atunci ea este mărginită pe acest interval.

Teorema reciprocă nu e valabilă: este posibil ca o funcţie să fie mărginită pe un interval $[a, b]$, dar să nu fie integrabilă pe acest interval.

Contraexemplul 2.3. Fie funcția lui Dirichlet pe intervalul $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este număr rațional.} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este număr irațional} \end{cases}$$

Funcția este mărginită pe intervalul $[0, 1]$. Să considerăm o diviziune arbitrară a intervalului $[0, 1]$ într-un număr finit de intervale $[x_{k-1}, x_k]$ cu puncte $\{x_k\}_{k=1}^{n}$. Notăm cu $\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1,2, \cdots, n$ lungimea intervalului $[x_{k-1}, x_k]$ și cu $\lambda = \max\{\Delta x_k\}$ norma acestei diviziuni. Pe fiecare interval elementar $[x_{k-1}, x_k]$ alegem în mod arbitrar câte un punct ξ_k. Dacă punctele ξ_k sunt raționale, atunci sumă integrală asociată funcției $f(x)$ este

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 1,$$

iar dacă punctele ξ_k sunt iraționale, atunci

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0.$$

Deci suma integrală σ asociată funcției $f(x)$ nu are limită pentru $\lambda \to 0$.

3. Contraexemple la studierea corectitudinii unor enunţuri

Contraexemplele sunt cel mai des folosite atunci când este necesar să convingem elevii că greșesc. Pentru a ne convinge de falsitatea unei anumite afirmații generale, este suficient să formulăm un contraexemplu. Astfel, contraexemplul apare ca instrument în analiza corectitudinii unor enunţuri, cât şi a evitării unor posibile erori [1], [2], [3].

Afirmația 3.1. Dacă funcțiile $\boldsymbol{f(x)}$ și $\boldsymbol{g(x)}$ sunt continue și monotone pe $\mathbb{R}$, atunci suma lor $\boldsymbol{f(x) + g(x)}$ la fel este o funcție monotonă pe $\mathbb{R}$.

Contraexemplul 3.1. Funcțiile $f(x) = x + sin\,x$ și $g(x) = -x$ sunt continue și monotone pe $\mathbb{R}$, dar suma lor $f(x) + g(x) = sin\,x$ nu este o funcție monotonă pe $\mathbb{R}$.

Adăugarea unei condiții suplimentare transformă acest enunț incorect într-un enunț corect: suma a două funcții $f(x)$ și $g(x)$ continue și crescătoare (descrescătoare) este o funcție crescătoare (descrescătoare).

Afirmația 3.2. Dacă valoarea absolută $|\boldsymbol{f(x)}|$ a funcției $\boldsymbol{f(x)}$ este continuă pe $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, atunci și însăși funcția $\boldsymbol{f(x)}$ este continuă pe $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Contraexemplul 3.2. Fie funcția

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \leq 0, \\ 1, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Valoarea absolută a ei este $|f(x)| = 1$. Funcția $|f(x)|$ este continuă pentru toate valorile $x \in \mathbb{R}$, dar însăși funcția $f(x)$ este discontinuă ($f(x)$ este discontinuă în punctul $x = 0$).

Afirmația 3.3. Dacă limita unui şir $(x_n)_n$ este $+\infty$, atunci, începând de la un rang N, șirul este strict crescător.

Eroarea este uşor detectabilă şi se evidenţiază prin construirea următorului contraexemplu.

Contraexemplul 3.3. Șirul cu termenul general

$$x_n = [2 + (-1)^n]n = \begin{cases} 3n, & \text{pentru } n \text{ par} \\ n, & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$$

are limita $+\infty$, dar șirul nu este strict crescător cu începere de la nici un rang.

Afirmația 3.4. Dacă un şir $(x_n)_n$, cu toți termenii pozitivi este nemărginit, atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Greşeala este uşor vizibilă şi se semnalează cu ajutorul unui contraexemplu.

Contraexemplul 3.4. Șirul cu termenul general

$$x_n = \begin{cases} n, & \text{pentru } n \text{ par} \\ 1, & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$$

este nemărginit, dar nu are limita $+\infty$. Adăugarea unei condiții suplimentare transformă acest enunț incorect într-un enunț corect: Dacă un șir $(x_n)_n$ este nemărginit și crescător, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Afirmația 3.5. Dacă funcțiile $\boldsymbol{f(x)}$ și $\boldsymbol{g(x)}$ nu sunt diferențiabile în punctul $\boldsymbol{x = x_0}$, atunci și suma lor $\boldsymbol{f(x) + g(x)}$ la fel nu este o funcție diferențiabilă în punctul $\boldsymbol{x = x_0}$.

Contraexemplul 3.5. Funcțiile $f(x) = |x|$ și $g(x) = -|x| + 1$ nu sunt diferențiabile în punctul $x_0 = 0$ (vezi Contraexemplul 2.2), însă suma lor $f(x) + g(x) = 1$ este o funcție diferențiabilă în punctul $x_0 = 0$.

Afirmația 3.6. Dacă funcția $F(x)$ este o primitivă a funcției $f(x)$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Contraexemplul 3.6. Funcția $F(x) = \ln|x|$ este o primitivă a funcției $f(x) = 1/x$, însă nu există integrala (funcția $f(x)$ este discontinuă în punctul $x = 0$)

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx.$$

Adăugarea unei condiții suplimentare transformă acest enunț incorect [3] într-un enunț corect: Dacă funcția $f(x)$ este continuă pe intervalul $[a, b]$, iar $F(x)$ este o primitivă a funcției $f(x)$ pe acest interval, atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Afirmația 3.7. Pentru orice matrice pătratice A și B are loc egalitatea $AB = BA$.

Contraexemplul 3.7. Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $AB \neq BA$. Prin urmare, înmulțirea matricelor nu este comutativă.

4. Contraexemple la studierea extremelor locale ale funcției

Fie funcţia $f(x)$ definită în intervalul deschis $I \subset \mathbb{R}$ şi $x_0 \in I$.

Definiţia 4.1. Se spune că $f(x)$ are maxim (sau minim) local în punctul x_0, dacă există aşa interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$, încât $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ are loc inegalitatea

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{(sau } f(x) \geq f(x_0)\text{)}.$$

Teorema 4.1 Dacă funcția $f(x)$ admite în punctul $x_0 \in I$ un extrem local și este diferenţiabilă în acest punct, atunci $f'(x_0) = 0$.

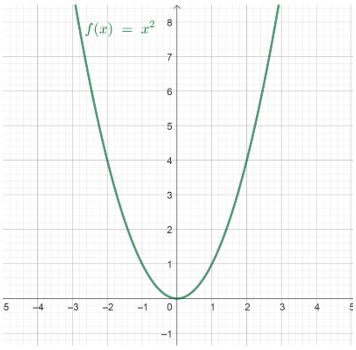

Figura 1.

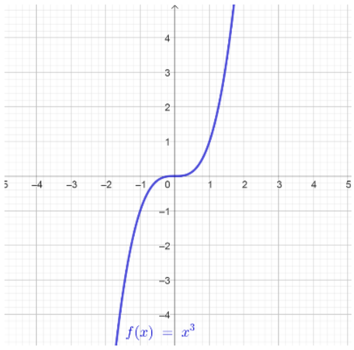

Figura 2.

Exemplul 4.1. Funcția $f(x) = x^2$ (fig. 1) are *minim local* în punctul $x_0 = 0$. Derivata funcției este $f'(x) = 2x$ și $f'(0) = 0$.

Afirmaţia reciprocă nu este adevărată, adică condiția Teoremei 4.1 este necesară, dar nu și suficientă.

Dacă $f'(x_0) = 0$, atunci în punctul x_0 funcția poate să nu aibă extrem local, ceea ce este confirmat de următorul contraexemplu.

Contraexemplul 4.1. Funcția $f(x) = x^3$ (fig. 2) are derivata $f'(x) = 3x^2 > 0$, $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Prin urmare, $f(x)$ este strict crescătoare pe intervale $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Cu toate că $f'(0) = 0$, în punctul $x_0 = 0$ funcția $f(x)$ nu are extrem local.

Punctele x_0 în care derivata funcţiei este egală cu zero se numesc *staţionare*. Deci condiţia $f'(x_0) = 0$ este numai necesară dar nu şi suficientă pentru existenţa extremului local. Funcţia $f(x)$ poate avea extreme locale şi în punctele, în care derivata $f'(x)$ este infinită sau nu există [6].

Exemplul 4.2. Funcția $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (fig. 3) are *minim local* în $x_0 = 0$. Derivata ei este

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = (x^{2/3})' = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

În punctul $x_0 = 0$, derivata este infinită $f'(0) = \infty$.

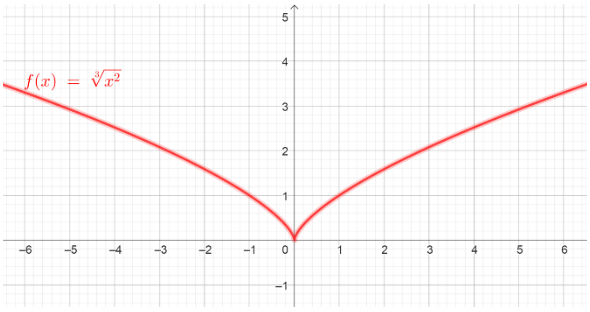

Figura 3.

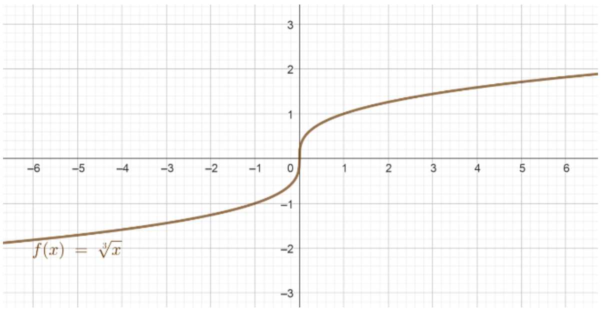

Figura 4.

Contraexemplul 4.2. Funcția $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (fig. 4) are derivata

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

și este strict crescătoare $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. În punctul $x_0 = 0$, cu toate că derivata funcției este infinită $f'(0) = +\infty$, funcția nu are extrem local.

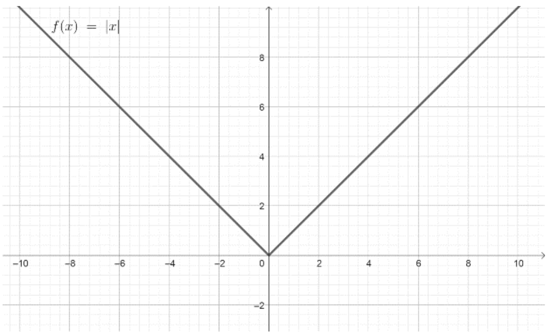

Figura 5.

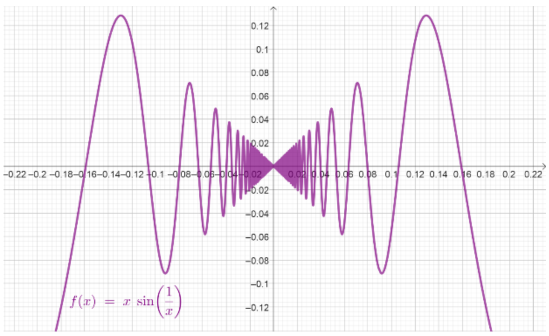

Figura 6.

Exemplul 4.3. Funcția $f(x) = |x|$ are *minim local* în $x_0 = 0$ (fig. 5) și nu are derivată în acest punct. Derivatele laterale, la dreapta $f'_d(0) = 1$ și la stânga $f'_s(0) = -1$, nu sunt egale.

Contraexemplul 4.3. Funcția $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ nu are derivată în punctul $x_0 = 0$. Această funcție (fig. 6) nu este continuă în punctul $x_0 = 0$, deci, nu are extrem local.

Definiţia 4.2. Punctele în care derivata funcției se anulează sau derivata este infinită, sau derivata nu există se numesc *puncte critice*.

Așadar, funcţia poate avea extrem local numai în punctele critice, dar fiecare punct critic trebuie cercetat la extrem local prin condiții suficiente (Teorema 4.2).

Teorema 4.2. Fie x_0 un punct critic al funcţiei $f(x)$, iar $f(x)$ este continuă în punctul x_0 și diferenţiabilă într-o vecinătate $\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a punctului x_0 (poate cu excepţia punctului x_0). Atunci: a) x_0 este punct de maxim local, dacă $f'(x_0) > 0$ pentru $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ și $f'(x_0) < 0$ pentru $x \in (x_0, x_0 + \delta)$; b) x_0 este punct de minim local, dacă $f'(x_0) < 0$ pentru $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ și $f'(x_0) > 0$ pentru $x \in (x_0, x_0 + \delta)$; c) x_0 nu este punct de extrem local (de maxim sau de minim), dacă $f'(x_0)$ nu-şi schimbă semnul la trecerea lui x prin punctul x_0.

5. Concluzii

Construirea exemplelor și contraexemplelor nu este în niciun caz o activitate algoritmică și necesită o gândire matematică destul de dezvoltată. Exersând construirea de exemple și contraexemple, elevii/studenții își dezvoltă creativitatea și gândirea critică, care este parte integrantă a modului de gândire matematică.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. BARAHMAND, A. On mathematical conjectures and counterexamples. In: *Journal of Humanistic Mathematics*. 2019, 1 (9), pp. 295-303. ISSN 2159-8118.
2. GELBAUM, B.R., OLMSTED, John M.H. *Counterexamples in Analysis*. New York: Dover Publications. 1964. 195 p. ISBN 0 486 42875-3.
3. KLYCHUK, S. *Counterexamples in Calculus*. New Zealand: Maths Press, 2004. 101p. ISBN: 978-0-88385-765-6
4. SALI, L., ANTON, F. Dezvoltarea gândirii critice prin utilizarea contraexemplelor în procesul de studiere a matematicii. În: *Proceedings of CAIM 2022* (Education), Chisinau, Moldova, August 25-27, 2022, pp. 184-193.
5. VERENESCU, A. *Exemple și contraexemple în analiza matematică. Funcții de o singură variabilă*. București: Matrix Rom, 2012. 148 p. ISBN 978-973-755-813-8.
6. ШИБИНСКИЙ, В.М. *Примеры и контрапримеры в курсе математического анализа*. Москва: Высшая школа, 2007. 543 с. ISBN 978-5-06-005774-4.