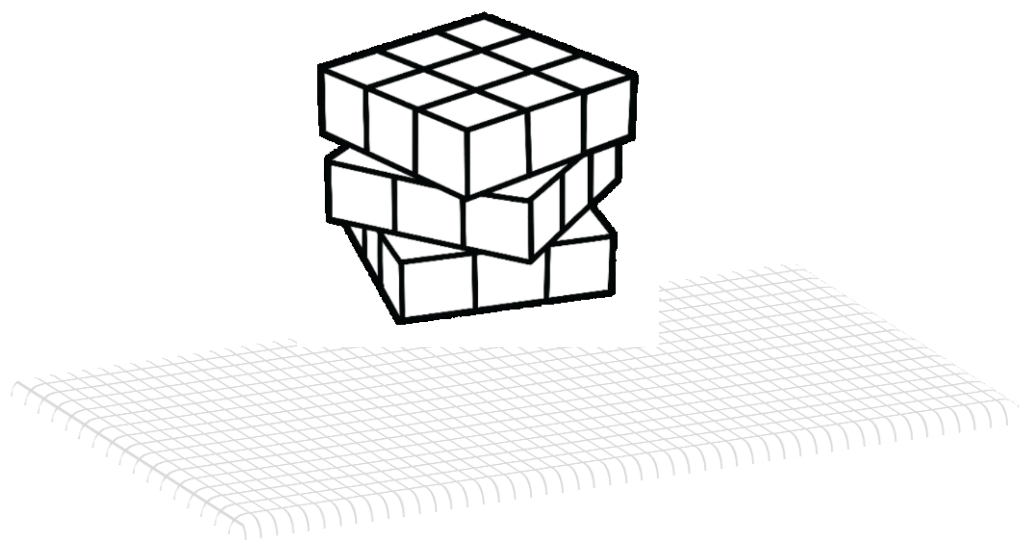


**LIUBOMIR CHIRIAC    DUMITRU COZMA    LARISA SALI**  
**LILIA MIHĂLACHE    DORIN AFANAS    MARCEL TELEUCĂ**

## **ELABORAREA ȘI REZOLVAREA MODELELOR MATEMATICE**



**Lucrare realizată în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)”, inclus în „Program de stat” (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20**

**Coordonator de proiect:**

*Liubomir Chiriac, dr. habilitat, profesor universitar*

**Recenzenți:**

*Inga Țițchiev, dr. conferențiar universitar*

*Natalia Lupașco, dr. conferențiar universitar*

**Autori:**

*Liubomir Chiriac, dr. habilitat, profesor universitar*

*Lilia Mihălache, dr., conferențiar universitar*

*Dumitru Cozma dr. habilitat, profesor universitar*

*Dorin Afanas, dr., conferențiar universitar*

*Larisa Sali, dr., conferențiar universitar*

*Marcel Teleucă, dr., conferențiar universitar*

**Secțiunea**

Capitolul 1

Capitolul 2

Capitolul 3

Capitolul 4

**DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII DIN REPUBLICA MOLDOVA**

Elaborarea și rezolvarea modelelor matematice / Liubomir Chiriac, Lilia Mihălache, Dumitru Cozma [et al.] ; coordonator de proiect: Liubomir Chiriac. – Chișinău : [S. n.], 2023 (CEP UPSC). – 94 p. : fig. color.

Bibliogr.: p. 93-94. – [100] ex.

ISBN 978-9975-46-808-4.

519(07)

E 35

**Centrul Editorial-Poligrafic al Universității Pedagogice de Stat „Ion Creangă”  
din Chișinău, str. Ion Creangă, nr. 1, MD-2069**

## CUPRINS

Introducere.....	4
<b>Capitolul 1. Modelarea matematică. Aplicarea metodelor numerice la soluționarea modelelor matematice.....</b>	<b>6</b>
1.1. Metode și mijloace privind expunerea procesului de modelare .....	6
1.2. Erorile care apar în procesul modelării .....	10
1.3. Aplicarea ecuațiilor algebrice și transcendente la soluționarea modelelor matematice.....	11
1.4. Aspecte didactice privind elaborarea modelelor matematice și soluționarea problemelor prin intermediul sistemelor de ecuații liniare .....	18
1.5. Aplicarea integralelor numerice în procesul de elaborare a modelelor matematice ..	23
1.6. Probleme propuse pentru rezolvare .....	30
<b>Capitolul 2. Elaborarea și rezolvarea modelelor matematice prin aplicarea analizei matematice .....</b>	<b>32</b>
2.1. Rezolvarea modelelor matematice prin aplicarea calculului diferențial.....	32
2.2. Rezolvarea modelelor matematice prin aplicarea calculului integral .....	38
2.3. Rezolvarea modelelor matematice prin aplicarea ecuațiilor diferențiale .....	42
2.4. Probleme propuse spre rezolvare .....	48
<b>Capitolul 3. Determinarea traiectoriei minime de zbor a unui vehicul aerian fără pilot.....</b>	<b>51</b>
3.1. Cunoștințe și competențe necesare pentru determinarea traiectoriei de zbor a unei drone .....	51
3.2. Două metode de rezolvare a problemelor privind identificarea traiectoriei minime de zbor .....	52
<b>Capitolul 4. Aplicarea modelării matematice în fizică și biologie .....</b>	<b>60</b>
4.1. Considerente didactice privind metoda modelării matematice .....	60
4.2. Aplicarea modelării matematice în biologie .....	64
4.3. Aplicarea modelării matematice în fizică.....	67
4.4. Concursuri de modelare matematică .....	75
4.5. Probleme propuse pentru rezolvare .....	84
Bibliografie.....	93

**Modelele matematice** pot fi reprezentate într-o mare varietate de forme, precum ar fi: liniare sau neliniare, stocastice ori deterministe, dinamice ori statice, continue ori discrete, etc. Indiferent de forma de prezentare toate modelele satisfac principiul cauzalității. Modelele matematice se elaborează și se dezvoltă pe baza legilor de conservare. Iar legile de conservare, la rândul lor, după cum reiese din teorema Noether, se bazează pe simetriile existente în spațiu și timp. Dar să le luăm pe rând și să clarificăm noțiunile de bază care vor fi folosite în lucrarea respectivă.

**Matematica** este în general definită ca știință ce studiază relațiile cantitative, modelele de structură (relații calitative), spațiul și schimbarea. În sens modern, matematica este investigarea proprietăților structurilor abstracte definite în mod axiomatic prin intermediul operațiilor logicii formale.

**Un model matematic** este o descriere abstractă a unui sistem real concret folosind concepte matematice și relații matematice. Așa dar, **prin model matematic** vom înțelege sistemul de relații matematice care descriu proprietățile esențiale ale fenomenului ori procesului studiat.

Procesul de dezvoltare a unui model matematic este denumit **modelare matematică**. Modelele matematice sunt utilizate atât în matematica aplicată, științele naturii (fizica, astronomia, biologia, geografia, chimia, etc.) cât și disciplinele de inginerie în sisteme non-fizice, cum ar fi științele sociale (economie, psihologie, sociologie, științe politice, etc.). La fel, modelele matematice sunt folosite eficient și în muzică, lingvistică, filozofie etc. În linii mari un model matematic poate ajuta la explicarea funcționării unui sistem din perspectiva studierii efectelor diferitelor componente cât și pentru a face predicții privind comportamentul sistemului dat în diferite contexte.

Pentru construcția modelelor matematice adecvate, care ar reflecta cu exactitate procesele studiate, este necesar, în opinia noastră, realizarea următorilor pași:

*Pasul 1. Colectarea cunoștințelor empirice.*

*Pasul 2. Identificarea componentelor și proprietăților esențiale.*

*Pasul 3. Formularea exactă a problemelor.*

*Pasul 4. Descrierea matematică a proceselor.*

*Pasul 5. Selectarea metodelor de soluționare.*

*Pasul 6. Elaborarea algoritmilor.*

*Pasul 7. Lansarea programului la calculator.*

*Pasul 8. Analiza rezultatelor obținute.*

Fiecare din pașii punctați mai sus vor examinați în profunzime în lucrarea dată. Procesul de modelare matematică, în viziunea noastră, în virtutea unor circumstanțe

obiective ori subiective, nu sunt tratate destul de profund în procesul de predare-învățare a matematicii și informaticii. Menționăm următoarele:

- Obiectivele centrale în cadrul predării-învățării analizei numerice, presupun însușirea metodelor numerice și aplicarea lor la soluționarea unor probleme concrete, descrierea matematică a cărora este foarte clară și exactă. Chiar dacă această abordare este corectă din punct de vedere al asimilării materiei propuse, acest fapt nu îndeamnă elevii/studentii, mai ales cei cu pregătirea peste nivelul mediu, la o atitudine creatoare privind elaborarea, obținerea modelului matematic, prin intermediul căruia ar putea fi rezolvată problema respectivă.
- În manualele existente de matematică și informatică, la compartimentul modelare, nu sunt destule probleme, destinate elevilor, ce ar conduce la elaborarea modelelor matematice, selectarea metodelor numerice, elaborarea algoritmilor și testarea rezultatelor obținute la calculator. Parcurgerea etapelor fundamentale, care țin de modelarea matematică, în opinia noastră, le va cultiva elevilor o viziune generală privind integritatea procesului examinat și le va dezvolta o atitudine creatoare vizavi de abordarea acestui proces.
- Prin intermediul aparatului matematic în general, și însușirea subiectelor care se referă la modelare, în particular, se poate realiza eficient conexiunea cu alte discipline studiate de elevi/studenti în cursul liceal: fizică, chimie, biologie, geografie, etc. Chestiunile care țin de legăturile interdisciplinare/transdisciplinare, inclusiv din perspectiva STEAM, pot fi tratate cu succes anume în procesul modelării matematice a diverselor fenomene cercetate: chimice, biologice, ecologice, etc. De aceste aspectele didactice menționate mai sus nu întotdeauna se ține cont la predarea matematicii și informaticii.

În lucrarea respectivă autorii, prin intermediul unor probleme concrete, care țin de diverse domenii (fizică, matematică, economie, biologie, chimie, determinarea traiectoriei minime de zbor a vehiculelor aeriene, etc.), preluate din viața reală, utilizând abil aparatul matematic, au arătat diferite modalități de construcție a unor modele matematice și metodele de rezolvare a lor.

În felul acesta sperăm foarte mult că vom contribui la convingerea tinerilor din societatea noastră să îmbrățișeze cu încredere o carieră STEAM, o carieră în domeniul științelor exacte ori într-un domeniu care ține de dezvoltarea economiei reale.

Vrem să credem că lucrarea respectivă va fi utilă elevilor, studenților, profesorilor cât și tuturor celor interesați de acest fascinant compartiment al matematicii, elaborarea și rezolvarea modelelor matematice.

**Liubomir Chiriac,**  
**Dr. habilitat, profesor universitar**

# CAPITOLUL 1. MODELAREA MATEMATICĂ. APLICAREA METODELOR NUMERICE LA SOLUȚIONAREA MODELELOR MATEMATICE

## 1.1. Metode și mijloace privind expunerea procesului de modelare

Expunerea procesului de modelare rămâne a fi o problemă majoră, pentru școală și instituțiile universitare, atât din punct de vedere metodic cât și științific.

**Modelul** este sistemul, care nu se deosebește de obiectul real, fenomenul examinat, privind unele proprietăți, considerate esențiale și se deosebesc după alte proprietăți, considerate neesențiale. În același timp lipsa în modelul construit a elementelor neesențiale nu este mai puțin importantă, ca prezența elementelor esențiale. Procesul de elaborare și aplicare al modelului construit se numește **modelare**.

În opinia noastră, în procesul de predare a cursurilor liceale, se sesizează cinci direcții legate de procesul de modelare:

*Prima direcție* se referă la construcția modelelor după caracteristicile generale ale obiectului de modelare.

În această categorie putem include:

- a) modele de comportament (graficul unei funcții, program pe calculator, creșterea populației);
- b) modele de structură (structura calculatorului, structura frunzei, structura scheletului uman).

*A doua direcție* se referă la construcția modelelor după sfera de activitate a subiectului modelării.

În categoria respectivă sunt incluse:

- a) modele aplicate direct în activitatea practică (calcularea ariei, volumul diferitelor figuri geometrice);
- b) modele de instruire (harta geografică, programe demonstrative, diverse și utilaje fizice sau chimice).

*A treia direcție* se referă la elaborarea modelelor după rolul pe care îl au dirijarea obiectului de modelare.

Astfel, avem următoarele modele:

- a) modele de optimizare (algoritmul pentru repartizarea optimală a resurselor, optimizarea devizului de cheltuieli);
- b) modele de simulare (simularea fulgerului la lecțiile de fizică, simularea unui proces economic);
- c) modele de prognozare (clasificarea diverselor semne ale naturii privind prognozarea temperaturii, presiunii, semne naturale vizavi de evoluția anotimpurilor);
- d) modele etalon (etalonul kilogramului, etalonul metrului).

*A patra direcție se axează pe factorul de timp.*

Din acest punct de vedere deosebim:

- a) modele statice (fotografia unui elev, programul de activitate pentru o săptămână, formula pentru calcularea ariei triunghiului);
- b) modele dinamice determinate (algoritmul lui Euclid, algoritmul de soluționare al ecuației pătrate);
- c) modele dinamice probalistiche (evoluția unei populații de brotăcei).

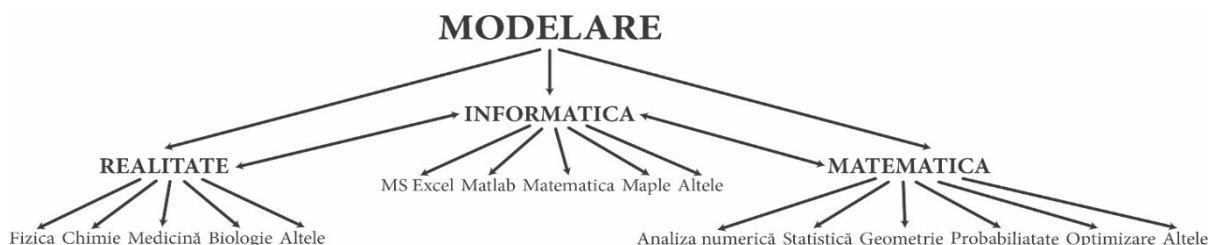
*A cincea direcție ține de elaborarea modelelor după componentele principale ale obiectului de modelare.*

În acest sens deosebim:

- a) modele informaționale (formule matematice, ecuații chimice, programul de televiziune, schema logică a algoritmului);
- b) modele ideale/abstracte (examinarea gazului ideal în fizică, simbolul infinitului în matematică);
- c) modele mininaturale/reale (examinarea gazului ideal în fizică, simbolul infinitului în matematică);
- d) modele mininaturale (macheta unei clădiri, unui avion, vapor).

Menționăm că diferite modele pot fi ilustrate prin unele și aceleași exemple. Astfel, graficul unei funcții este model: informațional, de comportament, de instruire și dinamic determinat. Algoritmul lui Euclid este model: informațional, de comportament, de instruire, dinamic determinat și aplicat direct în activitatea practică. Unele chestiuni privind clasificarea modelelor sunt expuse în [1-4]. În toate cazurile menționate, elaborând modelele respective, sunt cultivate abilități și sunt atinse performanțe, care țin de înțelegerea procesului de modelare, formarea erudiției computaționale și creșterea culturii algoritmice.

Dacă ne vom referi la modele informaționale atunci putem spune că *modelele informaționale reprezintă acea informație, despre obiectul cercetat, descrisă într-o anumită formă, ce reflectă cele mai esențiale proprietăți.*



*Figura 1.1. Corelarea dintre modelare și disciplinele de studiu*

Pe noi ne va interesa modelele informaționale a căror obiect examinat este descris cu ajutorul simbolurilor matematice. Acest tip de modele se mai numesc *modele matematice*. Modelele matematice se întâlnesc la modelarea proceselor studiate la diferite

discipline: matematică, fizică, biologie, geografie, etc. [1-4]. Astfel corelarea dintre modelare și disciplinele de studiu este redată schematic în figura 1.1.

Modele de lucru se reduc la construirea prin intermediul aparatului matematic cunoscut a unei asemănări simplificate abstracte a sistemului ori a procesului cercetat. Se evidențiază câțiva parametri și în continuare, schimbând valoarea lor, în dependență de scopul propus, se studiază comportarea sistemului respectiv. Succint, construcția modelului matematic, în viziunea noastră, presupune realizarea următoarelor etape fundamentale:

- Se formulează exact întrebările la care modelul trebuie să dea răspuns. Se identifică componentele principale și se determină relațiile dintre ele. În cazul când nu se stabilește legătura, dependența funcțională între componentele evidențiate este imposibilă construirea modelului adecvat.
- La a doua etapă, utilizând aparatul matematic cunoscut, se descrie procesul studiat. Relațiile între componentele fundamentale, stabilite anterior, sunt „expuse” într-o formă matematică exactă. Astfel modelul construit reprezintă o expresie, o relație matematică strictă a ipotezei formulate anterior.
- La ultima etapă se verifică modelul construit, confruntându-se rezultatele obținute, schimbând valoarea unor parametri, cu realitatea. La o diferență substanțială a rezultatelor, modelul respectiv se perfecționează sau se respinge. Prin intermediul calculatoarelor se verifică foarte ușor corectitudinea modelului obținut. Schimbând datele inițiale, pot fi controlate, verificate diferite variante, care se referă la simplificarea ori complicarea structurii modelului cercetat.

### ***Elaborarea modelelor matematice***

Să examinăm, mai detaliat, procesul de elaborare al modelelor matematice. *Prin model matematic vom înțelege sistemul de relații matematice care descriu proprietățile esențiale ale fenomenului ori procesului studiat.* Unele idei în acest sens au fost descrise în [1-4]. După cum menționează Neculai Andrei „Modelarea matematică a început încă cu lucrările lui Galileo Galilei (1564-1642) și s-a consolidat după apariția calculului diferențial elaborat de Isaac Newton (1642-1727) și Gottfried Leibniz (1646-1716). Această cale de reprezentare a naturii în simboluri matematice, deschisă de acești adevărați oameni de știință și consolidată de-a lungul timpului de Johann Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Carl Fredrich Gauss (1777-1855), Heinrich Hertz (1857-1894), ș.a. s-a manifestat cu o amploare și acuratețe deosebită atât în domeniul tehnico-ingineresc cât și în domeniul economic și social” [5].

Totodată noțiunea de *modelare matematică* este descrisă și în lucrările lui Cabac V., Mihailov A.P., Sevostyanov A.G., Mișkin A.D. .

Pentru construcția modelelor matematice adecvate, care ar reflecta cu exactitate procesele studiate, este necesar, în opinia noastră, realizarea următorilor pași:



1. *Colectarea cunoștințelor empirice.* În prezent, utilizând calculatoarele moderne, procesul de colectare și depozitare al informației inițiale se perfecționează continuu. Crearea bazelor de date, prin intermediul softurilor moderne, facilitează enorm construcția modelelor matematice. Informația care reprezintă un bogat material factologic se acumulează în baza observărilor efectuate și a experiențelor desfășurate ciclic, într-o perioadă de timp.
2. *Identificarea componentelor și proprietăților esențiale.* Identificarea, mai ales, în sistemele supraorganismice studiate a componentelor esențiale și stabilirea legăturilor principale între ele, permite determinarea „momentelor cheie” în elaborarea viitoarelor modele. Evidențierea proprietăților esențiale ale fenomenului real studiat este un proces care necesită un efort deosebit din partea experților implicați. Considerăm această etapă foarte importantă în construcția viitorului model.
3. *Formularea exactă a problemelor.* Formularea cât mai explicită și exactă a problemelor care trebuie să fie soluționate prin intermediul modelului, necesită abilități deosebite. Fără obiective formulate concret și clar, este imposibilă aplicarea disciplinelor matematice. În dependență de scopul propus, se va desfășura în continuare, procesul de matematizare al fenomenului biologic studiat.
4. *Descrierea matematică a proceselor.* Descrierea matematică a legăturilor principale între componentele esențiale depistate anterior necesită implicarea experților matematicieni și informaticieni. Aplicarea aparatului matematic potrivit, pentru „îmbrăcarea” proceselor biologice, geografice, ecologice, etc., într-o formă strictă și precisă rămâne a fi cea mai dificilă problemă, în concepția noastră, a cercetătorilor contemporani. Multiplicitatea factorilor naturali ai diferitelor procese biologice, de exemplu, nu se „subordonează” complet teoriilor matematice moderne. Abstractizarea, în acest sens, rămâne a fi una dintre cele mai importante probleme ce se cere rezolvată în mileniul trei. Modelul matematic al fenomenului natural, examinat, reprezintă nu altceva, decât descrierea lui prin intermediul limbajului matematic, aplicând diverse teorii matematice.
5. *Selectarea metodelor de soluționare.* După ce modelul matematic a fost elaborat este necesar să se decidă referitor la metodele de soluționare. De exemplu, dacă modelul matematic reprezintă un sistem de ecuații liniare, atunci poate fi selectată una dintre numeroasele metode existente pentru rezolvarea numerică a lui. În cazul când nu se găsește o metodă potrivită, pentru realizarea obiectivelor propuse, este necesar să se modifice una dintre metodele existente, ori să se elaboreze o metodă nouă.
6. *Elaborarea algoritmilor.* Înainte de-a utiliza calculatorul, metoda selectată trebuie să fie expusă sub formă de algoritmi: scheme logice, instrucțiuni, etc. Acest proces va facilita enorm scrierea programului. Se știe că diferite limbaje de programare,

sunt orientate spre soluționarea problemelor de diferite tipuri. În acest caz se alege cel mai potrivit limbaj de programare pentru scrierea programului respectiv.

7. *Lansarea programului la calculator.* Programul alcătuit se introduce pe calculator. Lansând programul, se extrage informația inițială din baza de date, creată anterior, pentru a fi prelucrată. În dependență de scopul propus, informația inițială poate fi prelucrată „din diferite puncte de vedere”, obținând astfel răspuns la mai multe întrebări.
8. *Analiza rezultatelor obținute.* La ultima etapă în mod obligatoriu se face analiza rezultatelor obținute, verificându-se astfel modelul elaborat. Dacă rezultatele sunt în concordanță cu realitatea modelul se acceptă, în caz contrar se perfecționează ori se respinge. Modelul matematic construit corect ne dă posibilitatea să controlăm experimental diferite ipoteze, să reproducem astfel procesele examinate a căror sesizare directă ar suscita cheltuieli materiale și timp.

## 1.2. Erorile care apar în procesul modelării

În procesul modelării unor fenomene reale, simulării experimentului se comit anumite erori. Vom scoate în evidență cele mai semnificative erori, din punctul nostru de vedere, despre care trebuie atenționați elevii ori studenții și de care trebuie să țină cont în procesul realizării experimentului preconizat.

### A) Erorile care țin de formularea problemei

Modelarea, conform definiției date mai sus, „neglijază” unele proprietăți neesențiale ale prototipului. Aceste sunt erorile formulării problemei. Erorile de acest tip pot fi evaluate numai în cazul când se va construi un model mai exact și mai complicat. Dar acest lucru nu este întotdeauna posibil. Din punct de vedere metodic se recomandă să se examineze în ce moment proprietățile „neesențiale” pot să se manifeste ca proprietăți „esențiale” ale modelului.

### B) Erorile datelor inițiale

Informația inițială, care trebuie prelucrată, aproape întotdeauna se cunoaște cu un anumit grad de exactitate, altfel spus cu o anumită aproximație. Aceste și sunt erorile datelor inițiale. Cu cât modelul construit este mai sofisticat cu atât probabilitatea este mai mare că datele inițiale vor fi mai aproximative, deoarece necesită obținerea unui volum mai mare de informație din diferite surse. Erorile datelor inițiale în procesul prelucrării se extind asupra rezultatelor intermediare și finale. Extinderea erorilor poate să crească ori să descrească.

### C) Erorile metodelor

Se știe că există diferite metode matematice care pot fi utilizate pentru soluționarea problemelor după ce modelul a fost elaborat. În acest sens se pot selecta metode mai exacte ori mai puțin exacte. De exemplu, în cazul când trebuie rezolvată o integrală,

aplicarea metodei Simpson care se consideră mai exactă decât metoda trapezelor, va da un rezultat mai bun. Gradul de exactitate a metodei alese poate să crească, „din interior”, modificând parametrii modelului. Un procedeu clasic în acest sens ține de divizarea parametrilor în jumătate, comparându-se de fiecare dată după un anumit criteriu rezultatele obținute, până când se va ajunge la precizia dorită. Astfel se mărește gradul de exactitate a metodei selectate. Evaluarea erorilor se face în dependență de metoda selectată.

#### **D) Erorile instrumentelor**

Instrumentele utilizate atât la colectarea datelor, cât și la prelucrarea lor „imprimă” din start anumite erori. În cazul când se colectează datele empirice indiferent de tipul instrumentelor folosite se comit anumite erori, care sunt inevitabile, și depind de gradul de exactitate a instrumentelor. În procesul de prelucrare a datelor, de cele mai multe ori acest lucru se produce la calculator, la realizarea operațiilor se efectuează rotunjiri, și erorile respective în principiu pot să se acumuleze. Aceasta este eroare a calculatorului. Din punct de vedere teoretic, evaluarea unor astfel de erori se face destul de anevoios.

În paragraful 1.3. vom aduce ca exemple unele probleme ale căror modele matematice sunt elaborate și soluționate cu ajutorul unor metode numerice.

Rezolvarea problemelor de acest tip, duce la creșterea încrederii elevilor referitor la posibilitățile lor de a construi modele matematice, de a găsi metode numerice adecvate și de a analiza rezultatele obținute.

### **1.3. Aplicarea ecuațiilor algebrice și transcendente la soluționarea modelelor matematice**

La rezolvarea numerică a *ecuațiilor algebrice și transcendente* un rol important îl are *localizarea rădăcinilor (separarea soluțiilor)* prin metoda analitică. Pentru a localiza rădăcinile analitic sunt necesare unele noțiuni teoretice, care sunt cunoscute elevilor din cursul de matematică. Aceste noțiuni le reamintim utilizând diverse strategii didactice bazate pe învățarea centrată pe elev.

Una din cele mai vechi probleme care nu și-a pierdut esența în zilele noastre este determinarea rădăcinilor ecuației  $f(x) = 0$ , unde  $f(x)$  este o funcție continuă și strict monotonă pe segmentul  $[a, b]$ . Pentru determinarea soluțiilor sunt necesare de parcurs două etape:

(1) *Localizarea rădăcinilor și*

(2) *Determinarea soluției cu ajutorul metodelor de calcul.*

Pentru prima etapă este necesar de explicat elevilor cum se localizează rădăcinile analitic și grafic. Pentru aceasta vom analiza unele afirmații:

Vom spune că rădăcina  $\zeta$  a ecuației  $f(x) = 0$  este localizată pe segmentul  $[a, b]$  dacă pe acest segment nu există alte rădăcini.

Folosind unele afirmații cunoscute din matematică se poate analitic de localizat rădăcinile ecuației  $f(x) = 0$ . Elevilor li se reamintește următoarele afirmații:

**Afirmația 1.** Dacă funcția  $f(x)$  este continuă pe segmentul  $[a, b]$  și ia valori de semn opus la capetele acestui segment (adică  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ), atunci ecuația  $f(x) = 0$  are cel puțin o rădăcină pe segmentul  $[a, b]$ .

**Afirmația 2.** Dacă funcția  $f(x)$  este continuă și strict monotonă pe segmentul  $[a, b]$  și ia valori de semn opus la capetele acestui segment, atunci ecuația  $f(x) = 0$  are pe segmentul  $[a, b]$  o rădăcină și numai una singură.

**Afirmația 3.** Dacă funcția  $f(x)$  este continuă pe segmentul  $[a, b]$  și ia valori de semn opus la capetele segmentului, iar derivata  $f'(x)$  își păstrează semnul pe segmentul  $[a, b]$ , atunci pe segmentul  $[a, b]$  există o rădăcină a ecuației  $f(x) = 0$  și această rădăcină este unică.

Etapa a doua, de determinare a soluției cu ajutorul metodelor de calcul, presupune utilizarea metodelor: metoda biseției, metoda coardelor, metoda tangentelor. Metodele indicate sunt descrise în mai multe surse [1, 2] și nu vom efectua descrierea lor, pentru a exclude repetările. În lucrare vom propune programe MAPLE pentru metodele Biseției. Vom analiza unele repere pentru metode care nu sunt încadrate în curriculumul la informatică și sunt binevenite pentru studiu utilizând metoda proiectului. Astfel a fost propusă pentru cercetare Metoda modificată a coardei prin analogie cu metoda coardei, studiată de către elevi la orele de curs și din diverse surse [1-3].

#### Metoda coardei din alt punct de vedere

Considerăm funcția  $f(x)$  continuă și strict monotonă pe segmentul  $[a, b]$  și în extremitățile lui are semne contrare. Nu e necesar că funcția  $f(x)$  să fie de două ori derivabilă.

După cum se știe metoda coardei constă în înlocuirea curbei  $y = f(x)$  printr-o coardă dusă prin punctele  $A(a, f(a))$  și  $B(b, f(b))$ . În continuare, spre deosebire de expunerea metodei coardei în sens clasic, ne va interesa nu ecuația coardei, ci punctul ei de intersecție cu axa  $Ox$ , pe care îl vom găsi din asemănarea triunghiurilor  $Axa$  și  $Bxb$  (Vezi figura 1.2).

Avem deci:  $\frac{|f(b)|}{b-x} = \frac{|f(a)|}{x-a}$ . De unde găsim, că  $x = \frac{|f(a)| \cdot b + |f(b)| \cdot a}{|f(a)| + |f(b)|}$ . După aceasta, determinăm  $f(x)$  și verificăm dacă se îndeplinește condiția  $f(a) \cdot f(x) < 0$ . Dacă e așa, atunci punctul  $a$  rămâne neschimbat, iar în calitate de  $b$  considerăm punctul  $x$ , adică  $b = x$ . În caz contrar  $a = x$  și  $b$  rămâne neschimbat. Acum aplicăm același procedeu față de segmentul nou obținut: ducem coarda prin punctele respective și din asemănarea triunghiurilor obținem noul punct de intersecție  $x$  cu axa  $Ox$ .

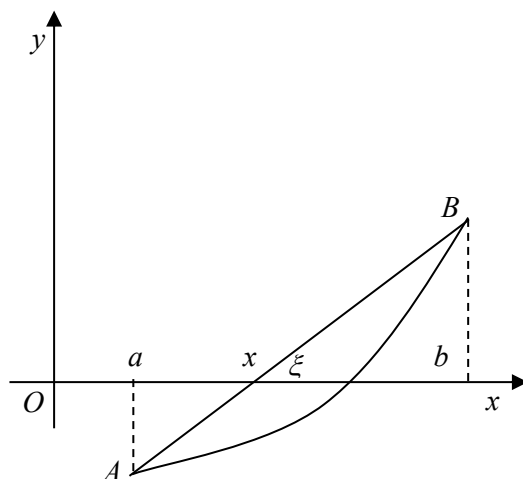


Figura 1.2. Metoda coardei

Procedeeul se repetă până atunci, când  $|x_{i+1} - x_i|$  devine mai mic decât precizia dată  $\varepsilon$ . În calitate de rădăcină se consideră numărul  $\xi = \frac{(x_{i+1} + x_i)}{2}$ . În același mod se va studia și „Metoda mixtă a coardelor și tangentelor”. Pentru metoda aceasta vom concretiza doar unele momente.

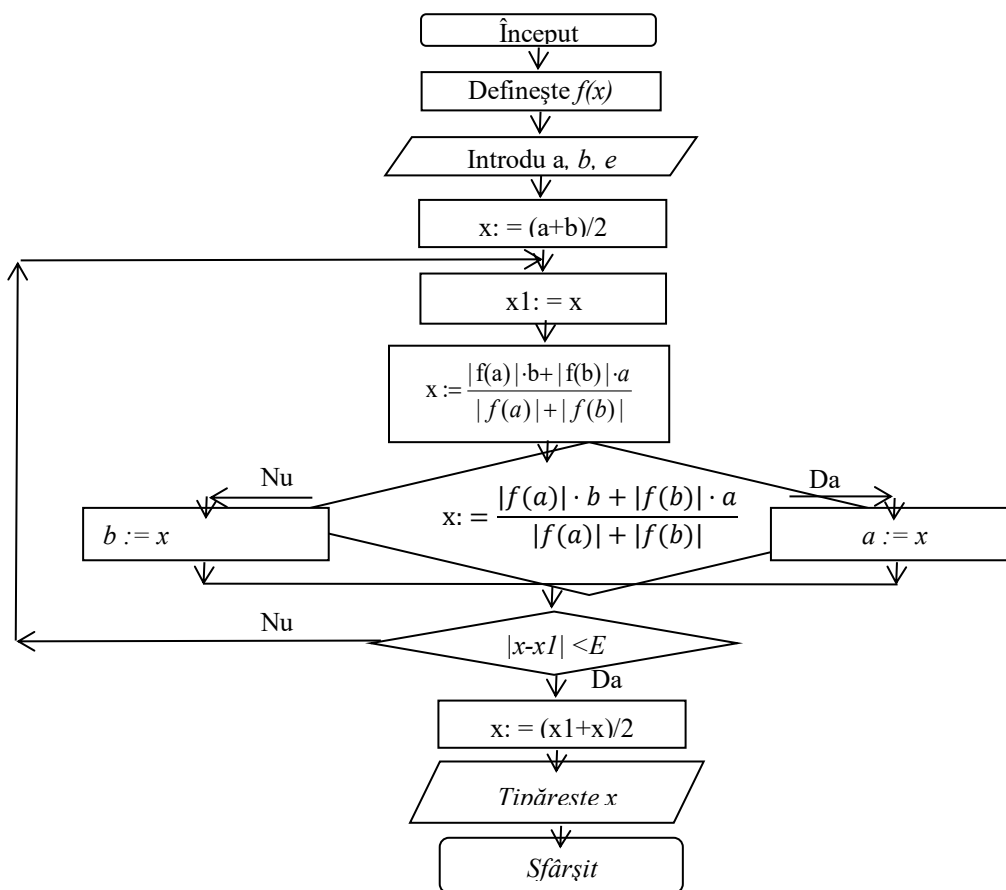


Figura 1.3. Schema logică a metodei coardei

**Regulă.** În calitate de aproximație inițială se alege acel capăt al segmentului  $[a, b]$  în care semnul funcției  $f(x)$  coincide cu semnul derivatei de ordinul doi  $f''(x)$ .

Deci, dacă  $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ , atunci metoda tangentelor permite aproximarea prin lipsă, iar metoda coardelor permite aproximarea prin adaos.

Evident, că  $x_i < \xi < \bar{x}_i$  și desigur  $0 < \xi - x_i < \bar{x}_i - x_i$ .

Procedeeul se oprește atunci când  $|\bar{x}_i - x_i| < \varepsilon$ , unde  $\varepsilon$  este precizia dorită.

Schema logică a *metodei modificate a coardei* este prezentată în figura 1.3.

Ca valoare a rădăcinii  $\xi$  se va lua media aritmetică a ultimilor valori obținute:

$\xi = \frac{1}{2}(x_i + \bar{x}_i)$ , unde  $x_i$  și  $\bar{x}_i$  este aproximarea rădăcinii respectiv prin lipsă și adaos.

Din punct de vedere practic, la identificarea aproximației inițiale, atât pentru metoda Newton-Rafson, care se studiază în cursul liceal, cât și pentru metoda mixtă a coardelor și tangentelor pot să apară anumite dificultăți, care țin de determinarea derivatelor. Necesitatea de a găsi derivata de ordinul întâi și derivata de ordinul doi a funcției  $f(x)$  nu întotdeauna se realizează ușor. Dacă mai luăm în considerație faptul că funcția  $f(x)$  poate să fie destul de complicată, atunci diferențierea analitică se efectuează destul de dificil în sens tehnic. Este și mai complicat de găsit derivatele atunci când expresia analitică a funcției nu se cunoaște. Autorii propun o altă abordare în asemenea cazuri.

Menționăm, că formula *Newton-Rafson*  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  (formula respectivă, dar ceva mai târziu decât Newton a fost obținută, în anul 1690, și de către Rafson). este substituită în programul de mai jos printr-o formulă aproximativă. Și anume, luând în considerație formula aproximativă pentru calcularea derivatei de ordinul unu:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n+\Delta x) - f(x_n-\Delta x)}{2 \cdot \Delta x} \quad (1.1)$$

formula recurentă, după înlocuirea expresiei pentru  $f'(x_n)$ , are forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2 \cdot \Delta x \cdot f(x_n)}{f(x_n+\Delta x) - f(x_n-\Delta x)} \quad (1.2)$$

Formula aproximativă pentru calcularea derivatei de ordinul doi ușor se obține din (1.1):

$$f''(x_n) \approx \frac{(f(x_n+\Delta x+\Delta x) - 2 \cdot f(x_n+\Delta x) + f(x_n))}{\Delta x \cdot \Delta x} \quad (1.3)$$

În relațiile de mai sus vom considera  $\Delta x = E$ , unde  $E$  reprezintă precizia necesară pentru calcularea rădăcinilor. În felul acesta nu va fi necesar să se calculeze manual derivata de ordinul 1 și derivata de ordinul 2. Aceste operații nu întotdeauna se desfășoară rapid și eficient de către elevi. Calculele respective vor fi realizate de calculator. În așa mod nu va fi necesar să se determine aproximația inițială în mod manual și să se calculeze derivatele de către utilizator.

În procedura MAPLE pentru metoda mixtă, prezentată în continuare, ușor se poate înlocui formula Newton-Rafson.

**Remarcă.** Se poate utiliza o formulă cu un grad mai mare de exactitate, așa numita *formulă lui Salzer*:

$$f'(x_n) \approx \frac{4f(x_n+\Delta x) - 3 \cdot f(x_n) - f(x_n+\Delta x+\Delta x)}{2 \cdot \Delta x} \quad (1.4)$$

```

coardenewton := proc (f, A, B, e)
local a, b, t, df1, df2, h, h1, k, k1, y;
a := A;
b := B;
if evalf(f(a)) · evalf(f(b)) > 0
then RETURN(solutiinu - s); fi;
if evalf(f(a)) = 0
then RETURN(evalf(a)); fi;
if evalf(f(b)) = 0
then RETURN(evalf(b)); fi;
df1 := unapply(diff(f(t), t), t);
df2 := unapply(df1(t), t);
if (evalf(f(a)) · evalf(df2(a))) > 0 then h
:= B; k := A else h := A; k := B; fi;
h1 := h -  $\frac{\text{evalf}(f(h)) \cdot (h - k)}{\text{evalf}(f(h)) - \text{evalf}(f(k))}$ ;
k1 := k -  $\frac{\text{evalf}(f(k))}{\text{evalf}(df1(k))}$ ;
while abs(h1 - k1) > e do
h := h1;
k := k1;
h1 := h -  $\frac{\text{evalf}(f(h)) \cdot (h - k)}{\text{evalf}(f(h)) - \text{evalf}(f(k))}$ ;
k1 := k -  $\frac{\text{evalf}(f(k))}{\text{evalf}(df1(k))}$ ;
od;
RETURN( evalf(  $\frac{(h1 + k1)}{2}$  ) );
end;

```

Pentru asimilarea formulei propunem elevilor, din relația (1.4), să se deducă o nouă formulă aproximativă pentru calcularea derivatei de ordinul doi și o altă relație de recurență.

Menționăm că programele pentru metoda coardei modificată cât și pentru metoda mixtă a coardelor și tangentelor pot fi unificate cu programul pentru metoda localizării. În felul acesta, în același timp, vor fi localizate rădăcinile ecuației examinate și precizate prin una din metodele expuse mai sus. În continuare, analizăm unele probleme pentru care este elaborat modelul matematic și soluționate cu ajutorul unor metode de calcul, menționate anterior, de către elevii claselor a XII-a.

**Problema 1.** *O piscină este construită cu baza în formă de pătrat și volumul  $30 \text{ m}^3$ . Care este adâncimea piscinei, dacă se știe că latura pătratului din bază este mai mică decât înălțimea cu  $2 \text{ m}$ ? Să se calculeze rezultatul cu eroarea  $\text{eps}=0.001 \text{ m}$ .*

**Soluție.** Notăm prin  $x$  - adâncimea piscinei. Conform condiției problemei cunoaștem că volumul piscinei este de  $30 \text{ m}^3$ . Utilizând formula pentru calcularea volumului unui paralelipiped ( $V=abc$ ) cu baza în formă de pătrat avem următoarea relație:

$$x(x-2)^2=30 \quad (1.5)$$

Deschidem parantezele în (1) și aducem relația respectivă la forma  $f(x)=0$ .

Obținem modelul matematic a problemei reprezentat prin ecuația:

$$x^3-4x^2+4x-30=0 \quad (1.6)$$

Rezolvăm această ecuație, aplicând programul unificat pentru localizare și metoda coardei modificate găsim că rădăcini pozitive avem doar pe segmentul  $[4;5]$ . Luând în considerație

precizia  $\text{eps}=0.001$  și pasul  $h=0.001$  obținem rădăcina 4.563762, care și reprezintă adâncimea, în metri, a piscinei.

**Problema 2.** Un vas de formă semisferică este plin cu apă. Sub ce unghi  $\alpha$  trebuie înclinat vasul astfel încât să rămână în vas exact o treime din apă? Rezultatul să se obțină cu eroarea  $\text{eps}=0.001$ .

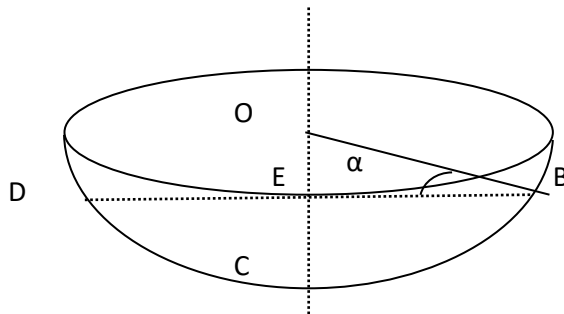


Figura 1.4

**Soluție.** Volumul apei din semisferă se calculează conform formulei :

$$V = 2\pi r^3/3, \quad (1.7)$$

iar conform condiției problemei avem că

$$1/3 V = 2/9\pi r^3 \quad (1.8)$$

Presupunem că o treime din volumul apei se va afla în segmentul semisferic DBC exprimat prin raza  $r$ . Astfel obținem:

$$V_{DBC} = \pi h^2 (r - h/3) \quad (1.9)$$

unde  $h = |OC| - |OE| = r - r \sin \alpha = r(1 - \sin \alpha)$

$$\begin{aligned} V_{DBC} &= \pi r^2 (1 - \sin \alpha)^2 (r - r(1 - \sin \alpha)/3) = \pi r^2 (1 - \sin \alpha)^2 (3r - r + r \sin \alpha)/3 = \\ &= \pi r^3/3 (1 - \sin \alpha)^2 (2 + \sin \alpha) = \pi r^3/3 (1 - 2\sin \alpha + \sin^2 \alpha) (2 + \sin \alpha) = \\ &= \pi r^3/3 (2 - 3\sin \alpha + \sin^3 \alpha) = \pi r^3/3 (\sin^3 \alpha - 3\sin \alpha + 2); \end{aligned}$$

Am obținut:

$$V = \pi r^3/3 (\sin^3 \alpha - 3\sin \alpha + 2); \quad (1.10)$$

Așa cum părțile stângi ale ecuațiilor (1.8) și (1.10) sunt egale, atunci sunt egale și părțile drepte:

$$2\pi r^3/9 = (\pi r^3/3) (\sin^3 \alpha - 3\sin \alpha + 2);$$

Aducem relația de mai sus la forma  $f(x)=0$ , obținem

$$\sin^3 \alpha - 3\sin \alpha + 4/3 = 0$$

Efectuăm substituția  $x = \sin \alpha$  și obținem ecuația:  $x^3 - 3x + 4/3 = 0$

Rezolvăm această ecuație, aplicând programul unificat pentru localizare și metoda coardei modificate găsim că rădăcini pozitive avem doar pe segmentul  $[0;1]$ . Luând în considerație precizia  $\text{eps}=0.001$ , obținem, rădăcina 0.482403. Așa dar  $\sin \alpha = 0.482403$  și unghiul sub care trebuie înclinat vasul astfel încât să rămână exact o treime din apă este  $\alpha = 28^\circ 48'$ .

**Problema 3.** Fie că avem produsul a 5 factori. La fiecare din primii trei factori din produsul respectiv se adaugă factorul însuși înmulțit la unul și același număr  $x$ . Din



fiecare următorii doi factori, a produsului, se scade factorul însuși înmulțit la unul și același număr  $x$ . Determinați numărul  $x$ , dacă se știe că produsul factorilor respectivi, după modificare, rămâne neschimbat.

**Soluție.** Fie că  $a, b, c, d, e$  – sunt factorii produsului,  $x$  – parte din fiecare factor.

Conform condiției problemei alcătuim relația

$$\begin{aligned}(a+ax)(b+bx)(c+cx)(d-dx)(e-ex) &= a b c d e; \\ a(1+x)b(1+x)c(1+x)d(1-x)e(1-x) &= a b c d e; \\ a b c d e (1+x)^3(1-x)^2 &= a b c d e; \\ (1+x)^3(1-x)^2 &= 1; \\ (1+3x+3x^2+x^3)(1-2x+x^2) &= 1; \\ x^5+x^4-2x^3-2x^2+x &= 0; \\ x(x^4+x^3-2x^2-2x+1) &= 0\end{aligned}$$

Modelul matematic reprezintă următoarea relație  $x^4+x^3-2x^2-2x+1=0$ .

Vom determina rezultatul aplicând programul unificat pentru localizare și metoda mixtă a coardelor și tangentelor. Găsim că sunt două segmente cu rădăcini pozitive  $[0,1]$  și  $[1,3]$ .

Pentru segmentul  $[0,1]$  avem:

Rădăcina aparține segmentului  $[0.38900000002; 0.39000000002]$

- rădăcina = 0,38939074,
- rădăcina după metoda tangentei = 0,38939068,
- rădăcina după metoda coardei = 0,38939080.

Iar pentru segmentul  $[1, 3]$  găsim:

Rădăcina aparține segmentului  $[1.28800000010; 1.89000000010]$

- rădăcina  $c = 1,28895796$ ,
- rădăcina după metoda tangentei = 1,28879519,
- rădăcina după metoda coardei = 1,28912073.

**Problema 4.** Un obiect de lemn are formă semisferică, cu raza 3. Se cere să se împartă obiectul în două părți echivalente, tăindu-se astfel încât secțiunea tăieturii să fie paralelă cu baza.

**Soluție.** Fie  $\alpha$  este planul bazei. Planul  $\beta$  va reprezenta secțiunea tăieturii. Deoarece  $\beta \parallel \alpha$ , atunci în secțiune se obține o calotă sferică și o zonă sferică. Din condiția problemei părțile sunt echivalente, atunci

$$V_{calotei} = V_{zonei} = 1/2 V_{semisferei} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{1}{3} \pi R^3, \quad R=OA=OB=OC.$$

Fie  $CO'=x$ , atunci  $OO'=R-x$ . Așa dar,

$$V_{calotei} = \pi x^2 \left( R - \frac{x}{3} \right) \quad (1.11)$$

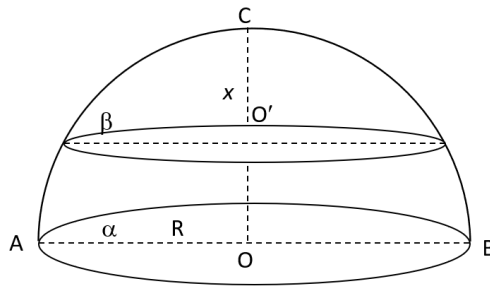


Figura 1.5

Luând în considerație relația (1.11), avem

$$V_{calotei} = \frac{1}{3}\pi R^3 \quad (1.12)$$

Astfel, obținem ecuația:  $\pi x^2(R - \frac{x}{3}) = \frac{1}{3}\pi R^3$ , de unde avem  $3x^2R - x^3 = R^3$ , egalând cu zero obținem:  $x^3 - 3x^2R + R^3 = 0$ .

Deoarece  $R=3$ , obținem  $x^3 - 9x^2 + 27 = 0$ .

Rezolvăm această ecuație, aplicând programul unificat pentru localizare și metoda mixtă a coardelor și tangentelor. Găsim că rădăcini pozitive sunt pe segmentul  $[0,1]$  și  $[8,9]$ . Luând în considerație condiția problemei și precizia  $eps=0.001$ , obținem, rădăcina = 1.95811096. Astfel:

- rădăcina după metoda tangentei = 1.95811093,
- rădăcina după metoda coardei = 1.95811083.

Așa dar trebuie de efectuat o tăietură la distanța  $OO' = R - x = 3 - 1.95811096 = 1,04188904$

#### 1.4. Aspecte didactice privind elaborarea modelelor matematice și soluționarea problemelor prin intermediul sistemelor de ecuații liniare

Rezolvarea problemelor din diverse domenii al căror model matematic este un sistem de ecuații lineare, în mare măsură depinde de viteza calculării acestor sisteme. Metodele de rezolvare a astfel de probleme pot fi divizate în două grupe: (1) metode exacte, ca metoda Cramer, metoda Gauss, studiate în cursul liceal de metode numerice și (2) metode de iterație, numite și metode aproximative [1, 2].

În metodele directe, soluția exactă se obține după un număr finit de operații aritmetice elementare (adunare, scădere, înmulțire, împărțire) și acest număr este de ordinul  $n^3$ . Metodele directe se utilizează la rezolvarea sistemelor de dimensiune  $n \leq 200$ , iar pentru dimensiuni  $n \geq 100$ , se utilizează metodele iterative. Pentru elevi, rezolvarea manuală a sistemelor de ecuații, chiar și de ordinul  $n = 4$ , deja prezintă o dificultate, de aceea atât în utilizarea primei metode, cât a doua metodă, necesită cunoașterea algoritmului de calcul, iar soluționarea propriu zisă să se efectueze cu ajutorul diverselor tehnologii computaționale.

Vom examina unele probleme ale căror modele matematice reprezintă sisteme de ecuații liniare, rezolvarea acestora o prezentăm prin diverse metode cu ajutorul limbajului Pascal și SSM MAPLE [1, 2].

**Problema 5.** Dacă 3 km se merge pe jos, 4 km se merge pe bicicletă și 2 km cu motocicleta, atunci tot drumul va dura 12/5 h. Dacă 4 km se merge pe jos, 6 km se merge pe bicicletă, iar 3 km cu motocicleta, atunci se cheltuie 67/20 h. Dacă 1 km se merge pe jos, 5 km se merge pe bicicletă, iar 2 km se merge cu motocicleta, atunci drumul va dura 32/20 h. Care vor fi vitezele fiecărui mijloc de transport : parcurgerii pe jos, bicicletei și motocicletei?

**Soluție.** Notăm  $V_1$  (km/h),  $V_2$  (km/h),  $V_3$  (km/h) vitezele pentru drumul parcurs pe jos, pentru drumul parcurs cu bicicleta și drumul parcurs cu motocicleta respectiv.

Din condiția problemei obținem următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} \frac{3}{V_1} + \frac{4}{V_2} + \frac{2}{V_3} = \frac{12}{5} \\ \frac{4}{V_1} + \frac{6}{V_2} + \frac{3}{V_3} = \frac{67}{20} \\ \frac{1}{V_1} + \frac{5}{V_2} + \frac{2}{V_3} = \frac{32}{20} \end{cases} \quad (1.13)$$

Din care trebuie să determinăm  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ .

Notăm prin

$$x = \frac{1}{V_1}; y = \frac{1}{V_2}; z = \frac{1}{V_3}. \quad (1.14)$$

Vom obține următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = \frac{12}{5} \\ 4x + 6y + 3z = \frac{67}{20} \\ 1x + 5y + 2z = \frac{32}{20} \end{cases} \quad (1.15)$$

Pentru a determina soluțiile sistemului de ecuații există mai multe metode:

**Metoda 1.** Calcularea sistemului manual și utilizând programul Pascal.

Atât calculul manual al sistemului utilizând metoda Gauss sau Gauss-Jordan, cât și calculul sistemului prin programul realizat în Pascal sunt bine cunoscute din cursul de matematică și informatică și sunt regăsite în multe surse de Metode numerice. Ne vom referi mai mult la:

**Metoda 2.** Determinarea soluțiilor sistemului utilizând MAPLE.

**2.1.** Aplicând MAPLE putem determina soluțiile sistemului direct.

Pentru aceasta vom ține cont de următorii pași:

- inițializăm pachetul algebrei liniare:

> with(linalg);

- definim matricea conform sistemului de ecuații obținut:

> A := Matrix([[3, 4, 2, 12/5], [4, 6, 3, 67/20], [1, 5, 2, 32/20]]);

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & \frac{12}{5} \\ 4 & 6 & 3 & \frac{67}{20} \\ 1 & 5 & 2 & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

- utilizăm funcția eliminării succesive al lui Gauss-Jordan:

> `gaussjord (A,r')`;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

Conform căruia obținem soluțiile:

$$x = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{1}{5}; \quad z = \frac{1}{20}$$

Înlocuind x, y, și z în notațiile (2.14), obținem răspuns la problemă V1=2 km/h, V2=5 km/h, V3=20km/h

## 2.2. Determinarea soluțiilor sistemului prin elaborarea procedurii metodei Gauss.

Pentru aceasta vom ține cont de următorii pași:

- definim procedura pentru calcul:

```

rezolvarealiniara := proc(A, b);
local a, x, n, i, j, k, aux;
n := rowdim(A);
a := matrix(n, n + 1);
x := vector(n);
for i from 1 to n do
for j from 1 to n do a[i, j] := A[i, j] od;
a[i, n + 1] := b[i] od;
for k from 1 to n do i := k; aux := abs(a[k, k]);
for j from k + 1 to n do
if abs(a[j, k]) > aux then aux := abs(a[j, k]); i := j fi od;
if i > k then for j from k to n + 1 do
aux := a[k, j]; a[k, j] := a[i, j]; a[i, j] := aux od fi;
if a[k, k] = 0 then print('matricea singulara '); RETURN(a) fi;
for j from k + 1 to n + 1 do a[k, j] :=
a[k, j] / a[k, k] od;
a[k, k] := 1;
for i from k + 1 to n do
for j from k + 1 to n + 1 do a[i, j] := a[i, j] - a[k, j] · a[i, k] od
od;
for j from k + 1 to n do a[j, k] := 0 od od;
x[n] := a[n, n + 1];
for i from n - 1 by -1 to 1 do x[i] := a[i, n + 1];
for j from i + 1 to n do x[i] := x[i] - a[i, j] · x[j] od od;
RETURN(evalm(x));
end;

```

- definim funcția pentru matrice:

> with(linalg);

- inițializăm elementele matricei și termenii liberi în modul următor:

> a1 := matrix(3, 3, [3, 4, 2, 4, 6, 3, 1, 5, 2]);

$$a1 := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

> b1 := vector(3, [12/5, 67/20, 32/20]);

$$b1 := \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & \frac{67}{20} & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

- facem apel la procedura:

> rezolvarealiniara (a1, b1);

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

Dacă analizăm toate metodele de rezolvare, observăm că rezultatul este același.

**Problema 6.** Pentru necesitățile unei cantine pe parcursul lunii octombrie au fost procurate de trei ori roșii, morcov, zahăr în cantitățile și sumele respective:

3 kg, 4 kg, 5 kg pentru suma 64 lei;

5 kg, 7 kg, 8 kg pentru suma 105 lei;

6 kg, 9 kg, 10 kg pentru suma 131,5 lei.

Cât s-a plătit pentru 1 kg de roșii, 1 kg de morcov, 1 kg de zahăr, dacă prețul acestor produse a rămas constant?

**Soluție.** Conform condiției problemei, notăm prin  $x$  – prețul pentru 1 kg de roșii, prin  $y$  – prețul pentru 1 kg de morcov și prin  $z$  – prețul pentru 1 kg de zahăr, obținem următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 64 \\ 5x + 7y + 8z = 105 \\ 6x + 9y + 10z = 131,5 \end{cases}$$

**Metoda 1.** Rezolvăm sistemul utilizând Regula lui Cramer

Rezolvarea manuală pentru determinarea soluțiilor pentru metoda Cramer și programul Pascal pentru soluționare sunt cunoscute de către elevi din cursul de matematică și informatică. Un interes deosebit îl are

**Metoda 2.** Aplicând MAPLE putem determina soluțiile sistemului direct.

**2.1.** Pentru aceasta vom ține cont de următorii pași:

- inițializăm pachetul algebrei liniare:

> with(linalg);

- utilizăm funcția  $det()$  și  $Matrix()$  pentru determinantului matricei, apoi conform regulii lui Kramer determinăm soluțiile :

> d := det(Matrix([[3, 4, 5], [5, 7, 8], [6, 9, 10]]));

$$d := 1$$

$$> x := \frac{\det(\text{Matrix}([[64, 4, 5], [105, 7, 8], [131.5, 9, 10]]))}{d};$$

$$x := 2.5$$

$$> y := \frac{\det(\text{Matrix}([[3, 64, 5], [5, 105, 8], [6, 131.5, 10]]))}{d};$$

$$y := 3.5$$

$$> z := \frac{\det(\text{Matrix}([[3, 4, 64], [5, 7, 105], [6, 9, 131.5]]))}{d};$$

$$z := 8.5$$

**Problema 7.** Bazinul are trei robinete pentru scurgerea apei. Prin primul și al doilea robinet bazinul poate fi deșertat în 15 minute, prin primul și al treilea robinet – în 12 minute, iar prin al treilea și al doilea robinet – în 10 minute. În cât timp va fi deșertat bazinul prin fiecare robinet în parte?

**Soluție.** Notăm prin  $x$ ,  $y$  și  $z$  – timpul pentru a fi deșertat bazinul de către fiecare robinet în parte respectiv. Volumul bazinului îl considerăm ca 1.

Atunci conform condiției problemei obținem următorul sistem:

$$\begin{cases} \frac{15}{x} + \frac{15}{y} = 1 \\ \frac{12}{x} + \frac{12}{z} = 1 \\ \frac{10}{y} + \frac{10}{z} = 1 \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\text{În sistemul (2.16) efectuăm notațiile: } \frac{5}{y} = v, \frac{3}{x} = u, \frac{2}{z} = w \quad (1.17)$$

Obținem:

$$\begin{cases} 5u + 3v = 1 \\ 4u + 6w = 1 \\ 2v + 5w = 1 \end{cases} \quad (1.18)$$

**Metoda 1.** Rezolvăm sistemul utilizând Regula lui Cramer tradițional:

**1.1.** Vom utiliza rezolvarea manuală pentru determinarea soluțiilor:

**1.2.** Utilizăm programul Pascal pentru soluționare.

**Metoda 2.** Aplicând MAPLE putem determina soluțiile sistemului direct.

**2.1.** Pentru aceasta vom ține cont de următorii pași:

- inițializăm pachetul algebrei liniare:

```
> with(linalg);
```

- utilizăm funcția  $\det$  și  $\text{Matrix}$  pentru determinantului matricii, apoi conform regulii lui Kramer determinăm soluțiile :

```
> d := det(Matrix([[5, 3, 0], [4, 0, 6], [0, 2, 5]]));
```

$$d := -120$$

```
> x := \frac{\det(\text{Matrix}([[1, 3, 0], [1, 0, 6], [1, 2, 5]]))}{d};
```

$$x := \frac{3}{40}$$

$$y := \frac{\det(\text{Matrix}([[5, 1, 0], [4, 1, 6], [0, 1, 5]]))}{d};$$

$$y := \frac{5}{24}$$

$$z := \frac{\det(\text{Matrix}([[5, 3, 1], [4, 0, 1], [0, 2, 1]]))}{d};$$

$$z := \frac{7}{60}$$

Înlocuim  $w$ ,  $v$  și  $u$  în notațiile (1.17), atunci avem  $x = 40$ ,  $y = 24$ , iar  $z = 17.142$ , adică timpul de scurgere prin primul robinet va constitui 40 minute, pentru robinetul al doilea 24 minute, iar pentru al treilea 17.142 minute.

### 1.5. Aplicarea integralelor numerice în procesul de elaborare a modelelor matematice

Modelare matematică în compartimentul Metode numerice este descrisă destul de clar la nivel teoretic. Însă pentru fiecare temă a compartimentelor examinate găsim doar probleme la care elaborarea modelelor matematice nu se cere ori este simplă și puțin captivantă pentru elevi. Chiar dacă această abordare este binevenită, pentru unele categorii de elevi, acest fapt nu încurajează elevii, mai ales cei cu pregătirea peste nivelul mediu, la o atitudine creatoare privind elaborarea, obținerea modelului matematic, prin intermediul căruia ar putea fi rezolvată problema respectivă. De exemplu, pentru compartimentul „Integrale numerice”, ar fi binevenite probleme pentru care s-ar realiza de către elevi modelul matematic, iar apoi să se aplice metoda numerică corespunzătoare pentru soluționare.

Vom examina un exemplu de acest gen:

**Problemă 8.** *Un vas în formă de con, direct circular cu axa verticală; localizarea și mărimea lui este prezentată în Figura 1.6. Vasul este umplut cu apă și apoi apa este evacuată printr-o gaură mică rotundă, situată în partea de jos a vasului (care se află în vârful B). Să se determine timpul de scurgere al apei din vas.*

**Soluție.** Presupunem că, timpul  $t$ , pentru care nivelul apei în vas se va descărca la înălțimea  $x$ , este o oarecare funcție  $t(x)$ , determinăm diferențiala ei  $dt$  pentru modificările lui  $x$  la înălțimea  $dx$ . Fie că scăderea apei în vas la o mică înălțime  $dx$  este determinată de creșterea timpului  $\Delta t$ . Atunci, presupunând, că în perioada aceasta mică de timp apa se scurge din vas cu viteză constantă egală cu  $0.6\sqrt{2g(H-x)}$ .

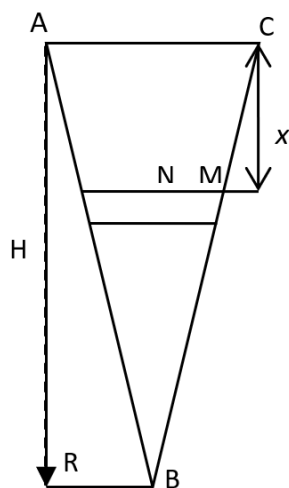


Figura 1.6

Determinăm volumul apei care s-a scurs în timpul  $\Delta t$  prin gaură în partea de jos cu aria  $\pi r^2$ , după formula  $\Delta v = 0.6\pi r^2 \sqrt{2g(H-x)} \Delta t$ .

Tot în același timp  $\Delta t$  volumul apei în vas se va micșora cu înălțimea  $dv_1 = \pi y^2 dx$  care trebuie să fie egală cu volumul apei care s-a scurs  $\Delta v$ . Din egalitatea  $\Delta v = \Delta v_1$ , obținem

$$\Delta t \approx \frac{y^2 dx}{0.6r^2 \sqrt{2g(H-x)}} = dt$$

Timpul  $T$  al scurgerii totale a apei din vas îl obținem integrând  $dt$  după  $x$ , de la  $x=0$  până la  $x=H$ :

$$T = \frac{1}{0.6r^2 \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{y^2 dx}{\sqrt{H-x}}$$

Așa dar, modelul matematic al problemei este construit.

Pentru calcularea integralei vom exprima variabila  $y$  prin variabila  $x$ .

Din asemănarea triunghiurilor  $ABC$  și  $NBM$ , avem pentru vas următoarele formule:

$$\frac{H}{R} = \frac{H-x}{y}, \quad y = \frac{R}{H}(H-x); \quad (1.19)$$

Înlocuim (1.19) în  $T$  obținem:

$$T = \frac{1}{0.6r^2 \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{\left(\frac{R}{H}(H-x)\right)^2 dx}{\sqrt{H-x}} \quad (1.20)$$

Dăm valori conform condiției problemei pentru  $r = 0,5$ ,  $R = 3$ ,  $H = 10$ .

Pentru a rezolva integrala numerică din (2) vom utiliza metodele:

- **Metoda A.** Calcularea integralei utilizând aplicația *Excel*.
- **Metoda B.** Calcularea integralei utilizând aplicația *MAPLE 11*.

Să examinăm metodele menționate.

**Metoda A.** Calcularea integralei utilizând aplicația *Excel*, pentru metoda trapezelor și dreptunghiurilor de stânga.



**A.1.** În acest scop divizăm segmentul  $[0,10]$  în 15 părți egale cu pasul  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{10-0}{15} = 0,66$ . Calculele le indicăm în tabelul următor, unde  $x_i$  diviziunile segmentului,  $h$  pasul, și  $y_i$  rezultatul funcției pentru fiecare diviziune.

$X_i$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$X_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
<b>H</b>	0	0,66	1,32	1,98	2,64	3,3	3,96	4,62	5,28	5,94	6,6
$Y_i$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$
<b>I</b>	2,846050	2,568992	2,301559	2,044109	1,797046	1,560827	1,335974	1,123094	0,922902	0,736261	0,564236
$x_i$		$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$					
<b>H</b>		7,26	7,92	8,58	9,24	9,9					
<b>I</b>		0,4081956	0,2699837	0,1522913	0,0596297	0,002846					

Calculăm integrala utilizând formula trapezelor ( $I_{MT}$ ) și dreptunghiurilor de stânga ( $I_{MDS}$ ) pentru rezultatele obținute în tabel:

$$I_{MT} = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) =$$

$$= \frac{0,66}{2} (2,8460499 + 0,002846 + 2(2,5689924 + 2,3015589 + 2,0441091 + 1,7970462 + 1,5608268 +$$

$$+ 1,3359737 + 1,1230935 + 0,9229018 + 0,7362606 + 0,5642361 + 0,4081956 + 0,2699837 + 0,1522913 +$$

$$+ 0,0596297)) = 11,397901$$

$$I_{MDS} = \int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = 0,66(2,846049 + 2,5689924 + 2,3015589 +$$

$$2,0441091 + +1,7970462 + 1,5608268 + 1,3359737 + 1,1230935 + 0,9229018 +$$

$$0,7362606 + 0,5642361 + 0,4081956 +$$

$$+0,2699837 + 0,1522913 + 0,0596297)) = 12,336159$$

**Metoda B.** Calcularea integralei utilizând aplicația MAPLE.

**B.1.** Aplicând MAPLE se poate obține rezultatul direct utilizând  $evalf(int(f(x), x=a..b))$ , unde  $int$  determină integrala,  $a$  și  $b$  extremitățile segmentului  $[a,b]$ , iar  $f(x) = \frac{(\frac{3}{10}(10-x))^2}{\sqrt{10-x}}$  o vom utiliza pentru toate metodele care le vom analiza în continuare:

$$> f := x \rightarrow \left( \frac{\left( \frac{3}{10} \cdot (10 - x) \right)^2}{\text{sqrt}(10 - x)} \right);$$

$$f := x \rightarrow \frac{\left( 3 - \frac{3}{10} x \right)^2}{\sqrt{10 - x}}$$

$$> evalf(int(f(x), x = 0..10));$$

11.3841995'

Rezultatul se poate determina și utilizând comenzile descrise în 2.1,  $middlebox(f(x), x=a..b, n)$ ,  $evalf(middlesum(f(x), x=a..b, n))$ ,  $leftbox(f(x), x=a..b, n)$ ,  $evalf(leftsum(f(x), x=a..b, n))$ ,  $rightbox(f(x), x=a..b, n)$ ,  $evalf(rightbox(f(x), x=a..b, n))$ .

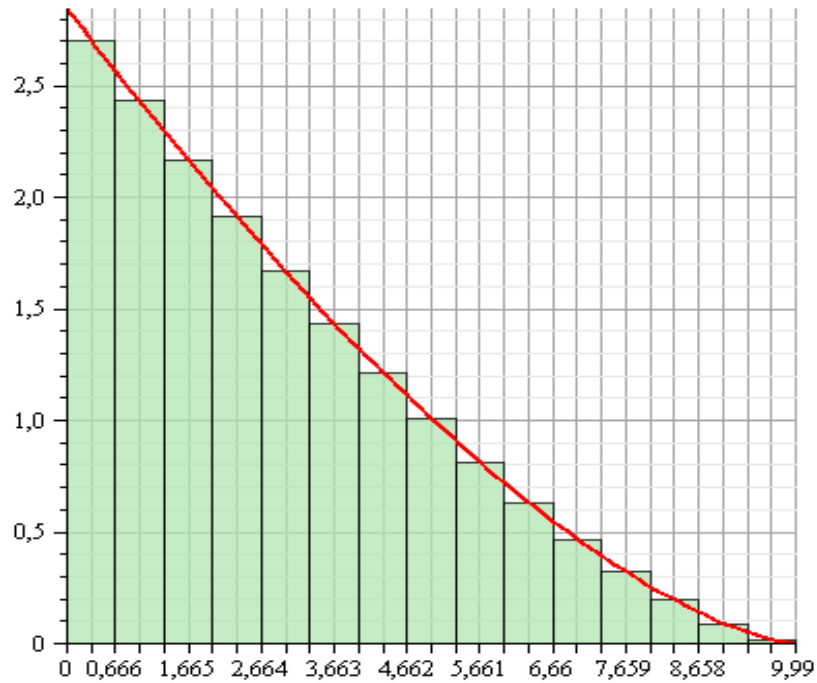
Vom calcula integrala  $\int_0^{10} \frac{(\frac{3}{10}(10-x))^2 dx}{\sqrt{10-x}}$ , ținând cont că funcția de sub integrală a fost definită anterior și vom reprezenta grafic metodele dreptunghiurilor medii, de stânga, de dreapta și trapezelor.

a) Calcularea prin *Metoda dreptunghiurilor medii (IMDM)* se efectuează utilizând:

> `evalf(middlesum(f(x), x = 0 ..10));`

11.2876279

> `middlebox(f(x), x = 0 ..10, 15);`

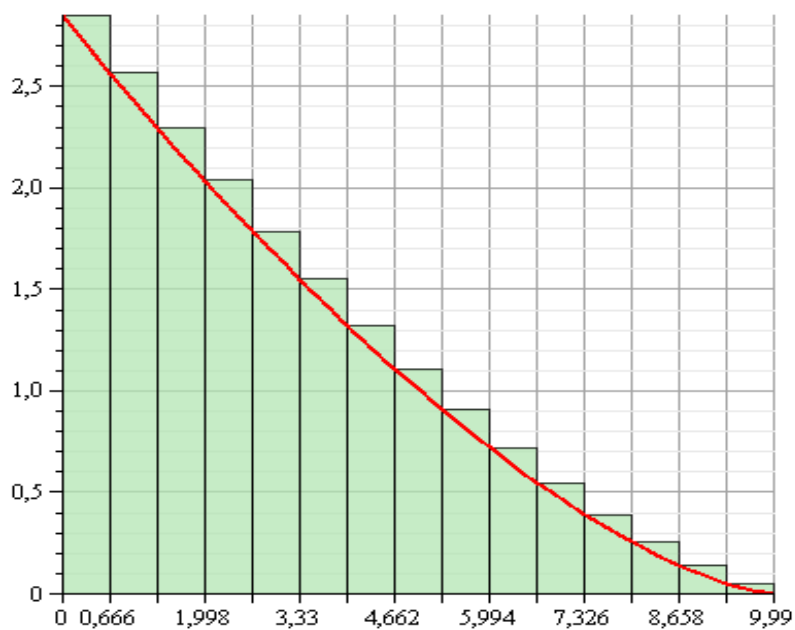


b) *Metoda dreptunghiurilor de stânga (IMDS)*:

> `evalf(leftsum(f(x), x = 0 ..10));`

15.1415008

> `leftbox(f(x), x = 0 ..10, 15);`

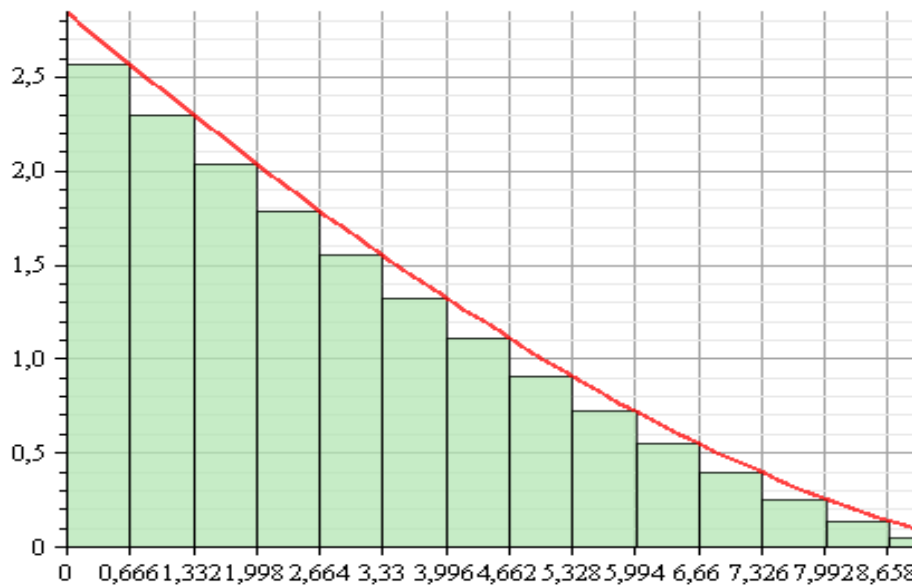


**c) Metoda dreptunghiurilor de dreapta ( $I_{MD}$ )**

> `evalf(rightsum(f(x), x = 0..9.999));`

8.026589190

> `rightbox(f(x), x = 0..9.999, 15);`

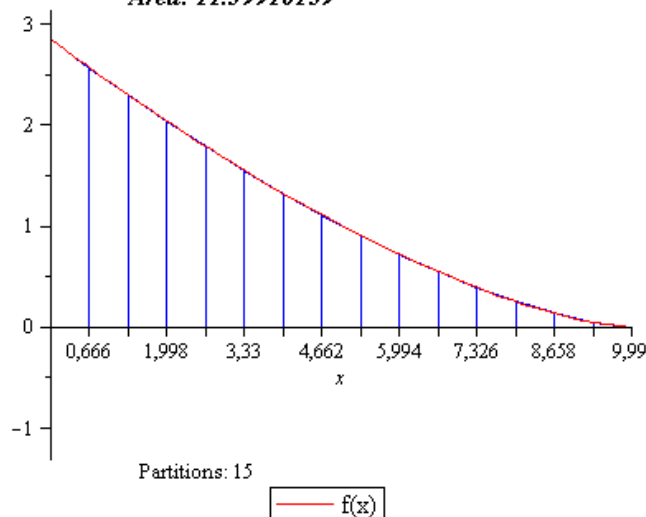


**d) Metoda trapezelor ( $I_{MT}$ ).**

Pentru această metodă vom utiliza comanda `ApproximateInt(f(x), x = a..b, opts):`

> `ApproximateInt(f(x), x = 0..9.999, method=trapezoid output=plot partition= 15);`

An Approximation of the Integral of  
 $f(x) = (3-3/10*x)^2/(10-x)^{1/2}$   
 on the Interval  $[0, 9.999]$   
 Using the Trapezoid Rule  
**Area: 11.39916159**



**B.2.** Rezultatul poate fi obținut și programat, aplicând procedura pentru metoda dreptunghiurilor de stânga și trapezelor în MAPLE:

```

dreptunghiuristing := proc(f, a, b, n)
local i, iab, h, h0;
iab := 0; h :=  $\frac{(b - a)}{n}$ ; h0 := a;
for i from 0 to n - 1 do
iab := iab + evalf(f(h0 + i·h));od;
iab := iab·h;
RETURN(evalf(iab))
end;

trapezel := proc(f, a, b, n);
local i, iab, h;
iab := 0; h :=  $\frac{(b - a)}{n}$ ;
for i from 1 to n - 1 do
iab := iab + evalf(f(a + i·h)) od;
iab := iab +  $\frac{(f(a) + f(b))}{2}$ ; iab := iab·h;
RETURN(evalf(iab))
end;

```

Definim funcția și facem apel la procedurile *dreptunghiuristing* și *trapezel* :

$$> f := x \rightarrow \left( \frac{\left( \frac{3}{10} \cdot (10 - x) \right)^2}{\text{sqrt}(10 - x)} \right);$$

$$f := x \rightarrow \frac{\left( 3 - \frac{3}{10} x \right)^2}{\sqrt{10 - x}}$$

> *dreptunghiuristing* (*f*, 0, 10, 15)

12.3478622

> *trapezel* (*f*, 0, 9.9, 15);

11.3979013

După ce am calculat integrala  $\int_0^{10} \frac{\left(\frac{3}{10}(10-x)\right)^2 dx}{\sqrt{10-x}}$ , rămâne să înmulțim rezultatul obținut cu  $\frac{1}{0.6r^2\sqrt{2g}}$ , înlocuind datele problemei.

Astfel luând în considerație că  $I_{MT} = 11,3979013$ , înlocuim rezultatul în (2.20) și determinăm timpul  $T = \frac{1}{0.6 \cdot 0.5^2 \sqrt{2 \cdot 9.8}} \cdot 11,3979013 = 17,165237$ .

**Metoda C.** Calculul integralei cu precizia  $\varepsilon$ .

**C.1.** Vom utiliza procedurile cu precizia  $\varepsilon$  în MAPLE pentru metoda dreptunghiurilor de stânga și metoda trapezelor.

```

dreptunghiuri2 :=proc(f, a, b, eps)
local i, iab, h, h0, n;
n := floor( $\frac{1}{4} \cdot \frac{(b-a)^2}{eps}$ ) + 1;
print('Numar de pashi', n);
h :=  $\frac{(b-a)}{n}$ ;
iab := 0;
h0 := a;
for i from 0 to n - 1 do
iab := iab + evalf(f(h0 + i·h)) od;
iab := iab·h;
RETURN(evalf(iab))
end;

```

```

trapeze2 :=proc(f, a, b, eps)
local i, iab, h, n;
n := floor( $\left(\frac{(b-a)^3}{(12 \cdot eps)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ ) + 1;
print('Numar de pasi', n); h :=  $\frac{(b-a)}{n}$ ; iab := 0;
for i from 1 to n - 1 do
iab := iab + evalf(f(a + i·h)) od;
iab := iab +  $\left(\frac{1}{2} \cdot f(a) + \frac{1}{2} \cdot f(b)\right)$ ; iab := iab·h;
RETURN(evalf(iab)); end

```

Rezultatul pentru funcția  $f$  conform apelurilor procedurilor pe  $[0,10]$  și precizia  $eps=0,001$  este:

```
> dreptunghiuri2 (f, 0, 10, 0.001);
```

Numar de pashi, 25001

11.3847688

```
> trapeze2 (f, 0, 9.9, 0.001);
```

11.3841243

Am calculat integrala din  $T = \frac{1}{0.6r^2\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{\left(\frac{R}{H}(H-x)\right)^2 dx}{\sqrt{H-x}}$ , rămâne să înmulțim rezultatul obținut prin diverse metode cu  $\frac{1}{0.6r^2\sqrt{2g}}$ , înlocuind condițiile problemei.

Concretizare: rezultatul a fost calculat pentru integrala din T prin diverse metode, ca exemplu, prin metoda B.2, metoda trapezelor am obținut  $T=11,3979013$ , înlocuim în T și determinăm timpul  $T = \frac{1}{0.6 \cdot 0.5^2 \sqrt{2 \cdot 9.8}} \cdot 11,3979013 = 17,165237$ .

Rezultatul comparativ pentru integrala din formula (1.20) determinat prin diverse metode îl indicăm în tabelul 1.1:

**Tabelul 1.1. Rezultatele comparative**

Integrala	Metoda A	Metoda B		Metoda C
	A.1 (Excel)	B.1 (MAPLE)	B.2 (Procedura MAPLE)	C.1 (procedura MAPLE cu precizia $\epsilon$ )
$\int_0^{9.9} \frac{\left(\frac{3}{10}(10-x)\right)^2}{\sqrt{10-x}}$	$I_{MT}=11,397901$ $I_{MDS}=12.336159$	11,3841995 $I_{MDM}=11,2876279$ $I_{MDS}=15,1415008$ $I_{MDD}=8,02658919$ $I_{MT}=11,39916159$	$I_{MDS}=12,840507$ $I_{MT}=11,3979013$	11,3847688 $I_{MT}=11,384124$

Pentru Problema dată modelul matematic este o integrală numerică, care poate fi rezolvată prin diverse metode. Conform datelor din tabel se observă că pentru formula trapezelor în cazul A.1, A.2, B.1, B.2 și C.1 rezultatele coincid, ceea ce denotă că formula trapezelor este binevenit să fie utilizată la rezolvarea problemelor al căror model

matematic este asemănător modelului problemei. În ceea ce privește formula dreptunghiurilor de stânga și de dreapta se obțin rezultate diferite, deoarece acestea se utilizează pentru integrale a căror funcții sunt aproximate prin extremități ale segmentelor fie din stânga, fie din dreapta și se obțin rezultate cu adaos sau prin lipsă, din aceste considerente rezultatele problemei pentru formulele dreptunghiurilor de dreapta și de stânga sunt diferite.

## 1.6. Probleme propuse pentru rezolvare

**Problema 1.** O piscină este construită cu baza în formă de dreptunghi și volumul  $60 \text{ m}^3$ . Care este adâncimea piscinei, dacă se știe că latura mai mare a dreptunghiului din bază este mai mică decât înălțimea cu 3 m, iar latura mai mică a dreptunghiului este mai mică decât înălțimea cu 2m? Să se calculeze rezultatul cu eroarea  $\text{eps}=0.001 \text{ m}$ .

**Problema 2.** Fie că avem produsul a 6 factori. La fiecare din primii trei factori din produsul respectiv se adaugă factorul însuși înmulțit la unul și același număr  $x$ . Din fiecare următorii trei factori, a produsului, se scade factorul însuși înmulțit la unul și același număr  $x$ . Determinați numărul  $x$ , dacă se știe că produsul factorilor respectivi, după modificare, rămâne neschimbat.

**Problema 3.** Un obiect de lemn are formă semisferică, cu raza 6. Se cere să se împartă obiectul în trei părți echivalente, tăindu-se astfel încât secțiunile celor 2 tăieturi să fie paralele cu baza.

**Problema 4.** Pentru necesitățile unei cantine școlare pe parcursul lunii septembrie au fost procurate de trei ori roșii, morcovi, mere în cantitățile și sumele respective:

4 kg, 5 kg, 8 kg pentru suma 119 lei;

2 kg, 3 kg, 4 kg pentru suma 63 lei;

5 kg, 4 kg, 5 kg pentru suma 93 lei.

Cât s-a plătit pentru 1 kg de roșii, 1 kg de morcov, 1 kg de zahăr, dacă prețul acestor produse a rămas constant?

**Problema 5.** Bazinul are trei robinete pentru scurgerea apei. Prin primul și al doilea robinet bazinul poate fi deșertat în 20 minute, prin primul și al treilea robinet – în 15 minute, iar prin al treilea și al doilea robinet – în 10 minute. În cât timp va fi deșertat bazinul prin fiecare robinet în parte?

**Problema 6.** Două corpuri au început să se miște în același timp, din același punct în aceeași direcție într-o linie dreaptă. Primul corp se mișcă cu o viteză de  $v = (6t^2 + 2t) \text{ m/s}$

doilea - cu o viteză  $v = (4t + 5) \text{ m/s}$ . Cât de departe unul de altul vor fi ei după 10 secunde?

**Problema 7.** Un corp este aruncat pe vertical de la sol cu viteza  $v = (39,2 - 9,8t) \text{ m/s}$  înălțimea maximă a corpului în cădere. Găsiți înălțimea maximă a corpului în cădere

**Problema 8.** Spirala în repaus are lungimea de 0,2m. La puterea de 50H spirala se întinde cu 0,01m. Ce lucru trebuie de efectuat pentru a o întinde de la 0,22 la 0,42m?

**Problema 9.** Un rezervor cilindric cu o rază a bazei de 0,5m și o înălțime de 3 m este umplut cu apă. Calculați lucru care trebuie efectuat pentru a pompa apa din rezervor.

**Problema 10.** O găleată goală se pune sub robinet și se umple cu apă.  $t$  reprezintă timpul cât stă găleata sub robinet. Debitul apei care curge este egal cu  $2,3 - 0,1t$  t galoane pe minut. Câtă apă este în găleată după 5 minute?

**Problema 11.** O albină călătorește cu viteza  $v(t) = 10 - te^{-t} \text{ m/s}$ . Unde  $t$ -timpul măsurat în secunde în momentul plecării de la stup. Cât de departe ajunge albina în timpul celei de a doua secundă?

**Problema 12.** Se confecționează un vas având forma corpului de rotație determinat de funcția  $f: [2,6] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  unei unități de pe axă corespunzându-i 10 cm. Verificați dacă încap în acest corp 50 litri de apă.

## CAPITOLUL 2. ELABORAREA ȘI REZOLVAREA MODELELOR MATEMATICE PRIN APLICAREA ANALIZEI MATEMATICE

Calculul diferențial și cel integral sunt printre invențiile cele mai mari ale matematicii, cu efecte profunde asupra dezvoltării științelor exacte și ale naturii. Ele au fost inventate practic simultan de către Newton (1643–1727) și Leibniz (1646–1716), pornind de la probleme de natură cinematică. Pentru Newton, calculul integral însemna găsirea „fluenților” atunci când sunt cunoscute „fluxiunile” (derivatele), obiectivul principal fiind determinarea legii de mișcare a unui punct material atunci când este cunoscută permanent viteza sa.

Ecuțiile diferențiale reprezintă un instrument important al calculului diferențial și integral cu numeroase aplicații în diverse procese naturale și sociale, precum mecanică, astronomie, termodinamică, chimie, biologie, ecologie, economie, medicină etc.

Primele contribuții notabile în teoria ecuațiilor diferențiale aparțin creatorilor analizei matematice Newton și Leibniz, iar primă definiție clară a ecuației diferențiale a fost dată de Euler, explicând și în ce constă rezolvarea unei astfel de ecuații.

Cercetând probleme din dinamica punctului material, Newton a descoperit legea a doua a mecanicii, relație care reprezintă o ecuație diferențială. Combinând această lege cu legea gravitației, el a calculat orbitele planetelor și a unor comete. Leibniz a studiat ecuațiile diferențiale pornind de la probleme din geometrie, așa numita problemă inversă a tangentelor, care constă în determinarea unei curbe plecând de la unele proprietăți ale tangentei la curbă.

### 2.1. Rezolvarea modelelor matematice prin aplicarea calculului diferențial

Derivata funcției într-un punct semnifică rata cu care se modifică valoarea funcției atunci când se modifică argumentul, adică este o formulare matematică a noțiunii de rată de variație.

Fie funcția  $y = f(x)$  definită pe un interval  $(a, b)$  și considerăm un punct arbitrar  $x_0 \in (a, b)$ . Vom da argumentului  $x$  o creștere arbitrară  $\Delta x > 0$  ( $\Delta x < 0$ ) în punctul  $x_0$ , astfel încât  $x = x_0 + \Delta x$  să aparțină la fel intervalului  $(a, b)$ . Atunci valoarea funcției  $y_0 = f(x_0)$  se înlocuiește cu valoare  $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ , adică  $f(x)$  va obține o creștere

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (2.1)$$

**Definiția 2.1.** Se numește *derivată* a funcției  $y = f(x)$  în punctul  $x_0$  limita finită a raportului creșterii funcției în acest punct la creșterea argumentului, atunci când  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Derivata funcției  $y = f(x)$  în punctul  $x_0$  se notează cu simbolurile:

$$f'(x_0), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}.$$

Astfel, conform definiției avem:



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (2.2)$$

În studiul variației unei funcții este important să cunoaștem în ce condiții funcția este monotonă pe un interval dat.

**Teorema 2.1.** Fie  $f(x)$  o funcție derivabilă în intervalul  $(a, b)$ . Dacă  $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ , atunci  $f$  este *strict crescătoare* pe  $(a, b)$ . Dacă  $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ , atunci  $f$  este *strict descrescătoare* pe  $(a, b)$ .

La rezolvarea problemelor de optimizare din geometrie, fizică, biologie, chimie, economie etc se utilizează cercetarea funcției la existența extremului local.

**Definiția 2.2.** Punctul  $x_0 \in (a, b)$  se numește *punct de maxim local* al funcției  $f(x)$  dacă există o vecinătate  $V(x_0)$  a lui  $x_0$ , astfel încât  $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in V(x_0) \cap (a, b)$ .

Valoarea  $f(x_0)$  se numește *maxim local* al funcției  $f$  în punctul  $x_0$ .

**Definiția 2.3.** Punctul  $x_0 \in (a, b)$  se numește *punct de minim local* al funcției  $f(x)$  dacă există o vecinătate  $V(x_0)$  a lui  $x_0$ , astfel încât  $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in V(x_0) \cap (a, b)$ .

Valoarea  $f(x_0)$  se numește *minim local* al funcției  $f$  în punctul  $x_0$ .

**Definiția 2.4.** Punctele de maxim local și de minim local ale funcției  $f(x)$  se numesc *puncte de extrem local* ale acestei funcții. Valorile funcției  $f(x)$  în punctele ei de extrem local se numesc *extremele locale* ale acestei funcții.

**Teorema 2.2 (condiție necesară de extrem local).** Fie  $f(x)$  o funcție derivabilă în intervalul  $(a, b)$  și  $x_0 \in (a, b)$ . Dacă  $x_0$  este un punct de extrem local al funcției, atunci  $f'(x_0) = 0$ .

**Definiția 2.5.** Punctele  $x_0$  din intervalul  $(a, b)$  în care  $f'(x_0) = 0$  sau  $f'(x_0) = \infty$  sau  $f'(x_0)$  nu există se numesc *puncte critice* ale funcției  $f(x)$ .

**Teorema 2.3 (condiție suficientă de extrem local).** Fie  $f(x)$  o funcție derivabilă în intervalul  $(a, b)$  poate cu excepția punctului  $x_0 \in (a, b)$ , iar  $x_0$  este un punct critic al funcției  $f(x)$  în care ea este continuă. Dacă derivata  $f'(x)$  își schimbă semnul la trecerea prin punctul  $x_0$ , atunci  $x_0$  este punct de extrem local al funcției  $f(x)$  (din plus în minus, atunci  $x_0$  este punct de maxim local; din minus în plus, atunci  $x_0$  este punct de minim local). Dacă derivata  $f'(x)$  are același semn la stânga și la dreapta lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  nu este punct de extrem local al funcției  $f(x)$ .

La rezolvarea problemelor de optimizare se compune modelul matematic al problemei, adică modelul analitic al problemei date. Succesul rezolvării problemei depinde de alegerea chibzuită a variabilei independente  $x$  și a exprimării mărimii cercetate  $y$  prin variabila  $x$ . Funcția  $y = y(x)$  se cercetează aplicând calculul diferențial și algoritmul de cercetare la extrem local.

Compunerea modelului matematic al problemei și cercetarea lui poate fi realizată după următorii pași:

- se evidențiază mărimea de optimizare pentru care se va calcula cea mai mare sau cea mai mică valoare și o notăm cu  $y$  (sau altă literă  $s, v, r$  în dependență de conținutul problemei);
- una dintre mărimile necunoscute în problema se alege ca variabilă independentă, spre exemplu  $x$  (timpul, mărimea unghiului, mărimea laturii etc) și se determină domeniul de variație a acestei mărimi;
- ținând cont de condițiile problemei, se exprimăm  $y$  prin  $x$  și mărimile cunoscute;
- se cercetează funcția obținută  $y = y(x)$  la extrem local (se găsește punctul de maxim sau de minim local în dependență de conținutul problemei) pe domeniul de variație a lui  $x$ ;
- se determină valoarea funcției în punctul de extrem local și se obține cea mai mică sau cea mai mare valoare (în dependență de condițiile problemei).
- se interpretează rezultatul obținut pentru problema rezolvată.

### Aplicații ale derivatei

**Sensul geometric al derivatei.** Derivata funcției  $f(x)$  în punctul  $x_0$  reprezintă coeficientul unghiular al tangentei duse la graficul funcției  $f(x)$  în punctul  $(x_0, f(x_0))$ :

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha.$$

**Viteza** în mișcarea rectilinie este derivata spațiului în raport cu timpul

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0).$$

**Accelerația** în mișcarea rectilinie este derivata vitezei în raport cu timpul sau derivata a doua a spațiului în raport cu timpul

$$a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0).$$

**Debitul** unui lichid este derivata cantității de lichid în raport cu timpul

$$D(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} = Q'(t_0).$$

**Intensitatea** curentului electric este derivata cantității de electricitate în raport cu timpul

$$I(t) = Q'(t) = \frac{dQ}{dt}.$$

**Densitatea** unei repartiții liniare de masă este derivata masei în raport cu lungimea

$$\rho(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} = m'(x_0).$$

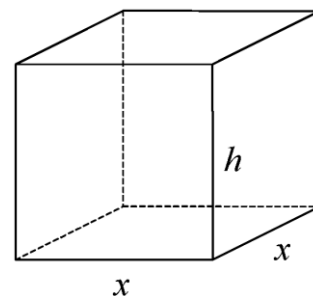
**Coeficientul de dilatare** liniară a unei bare omogene este dat de produsul

$$\frac{1}{f(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

**Coeficientul de expansiune** a volumului unei mase de gaz este dat de produsul

$$\frac{1}{V(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} = \frac{V'(x)}{V(x)}.$$

**Exemplul 2.1 (aplicații în geometrie).** Care trebuie să fie dimensiunile unui container cu volumul de  $32 \text{ m}^3$  pentru depozitarea deșeurilor, încât la confecționarea lui să se utilizeze o cantitate minimă de material? Containerul are forma de cuboid cu fundul pătrat.



*Rezolvare.* Notăm cu  $x$  latura bazei și cu  $h$  înălțimea containerului. Așa cum baza containerului este un pătrat, iar containerul nu are capac, atunci suprafața totală este

$$S = x^2 + 4xh.$$

Restricția problemei este dată de volumul containerului

$$V = x^2h = 32.$$

Substituind  $h$  din expresia pentru volum  $h = \frac{32}{x^2}$ , obținem funcția

$$S(x) = x^2 + 4x \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x},$$

care trebuie minimizată pentru  $x > 0$ . Cercetăm funcția la minim local

$$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2}.$$

Prin urmare,  $S'(x) = 0$ , dacă  $x = 4$ . Așa cum

$$S'(x) < 0, \text{ dacă } x \in (0; 4) \text{ și } S'(x) > 0, \text{ dacă } x \in (4; +\infty),$$

atunci  $x = 4$  este un punct de minim local al funcției  $S(x)$ . Pentru  $x = 4$  m avem  $h = 2$  m.

*Răspuns.* Containerul trebuie construit cu baza de 4 m și înălțimea de 2 m, atunci suprafața este de  $48 \text{ m}^2$ , iar consumul de material utilizat este minim.

**Exemplul 2.2 (aplicații în algebră).** Care dintre numerele  $\cos 1988$  și  $1 + \cos 1989$  este mai mare?

*Rezolvare.* Modelăm această problemă considerând funcția  $f(x) = x + \cos x$ . Așa cum

$$f'(x) = 1 - \sin x \geq 0 \text{ și } f'(x) = 0 \text{ pentru } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

atunci funcția  $f(x)$  este crescătoare pe toată axa numerică. Ținând cont de definiția funcției crescătoare, obținem că  $f(1988) < f(1989)$ . Prin urmare,

$$\begin{aligned} 1988 + \cos 1988 &< 1989 + \cos 1989, \\ \cos 1988 &< 1 + \cos 1989. \end{aligned}$$

*Răspuns.* Mai mare este numărul  $1 + \cos 1989$ .

**Exemplul 2.3 (aplicații în chimie).** Amestecul gazos este format din oxid de azot  $NO$  și oxigen  $O_2$ . Este necesar să se afle la ce concentrație a oxigenului conținutul de oxid de azot din amestec se oxidează cu cea mai mare viteză.

*Rezolvare.* În condiții de ireversibilitate practică, viteza de reacție  $2NO + O_2 = 2NO_2$  se exprimă prin formula  $v = kx^2y$ , unde  $x$  este concentrația oxidului de azot  $NO$  în orice moment de timp,  $y$  este concentrația de oxigen  $O_2$ , iar  $k$  este constanta vitezei de reacție,

care nu depinde de concentrația componentelor care reacționează, dar depinde numai de temperatură. Vom exprima concentrația gazelor în procente de volum. În acest caz

$$y = 100 - x, \quad v(x) = kx^2(100 - x), \quad 0 < x < 100.$$

Derivata funcției este

$$v'(x) = k(200x - 3x^2).$$

Funcția  $v(x)$  are punctul critic  $x = 200/3$ . Ușor stabilim că

$$v'(x) > 0, \text{ dacă } x \in (0; 200/3) \text{ și } v'(x) < 0, \text{ dacă } x \in (200/3; +\infty).$$

Astfel, am arătat că  $x = 200/3$  este un punct de maxim local pentru funcția  $v(x)$ .

*Răspuns.* Viteza de oxidare este cea mai mare când  $x = \frac{200}{3}\%$ , iar  $y = \frac{100}{3}\%$ .

**Exemplul 2.4 (aplicații în biologie).** Într-un mediu nutritiv se adaugă o populație de 1000 de bacterii. Mărimea populației crește conform legii

$$p(t) = 1000 + \frac{1000t}{100 + t^2},$$

unde timpul  $t$  este exprimat în ore. Determinați mărimea maximă a acestei populații.

*Rezolvare.* Așa cum mărimea populației este o funcție  $p = p(t)$  care depinde de timp,  $t > 0$ , vom cerceta această funcție la extrem local. Derivata ei este

$$p'(t) = 0 + 1000 \cdot \frac{t'(100 + t^2) - t(100 + t^2)'}{(100 + t^2)^2} = 1000 \cdot \frac{100 - t^2}{(100 + t^2)^2}.$$

Aflăm punctele critice ale funcției  $p = p(t)$ , adică rezolvăm ecuația  $p'(t) = 0$ . Obținem

$$100 - t^2 = 0, \quad t = 10.$$

Cercetăm semnul derivatei în intervalele  $(0; 10)$  și  $(10; +\infty)$ . Așa cum  $p'(4) > 0$ , iar  $p'(12) < 0$ , atunci în punctul  $t = 10$  funcția  $p = p(t)$  are maxim local. Prin urmare, mărimea maximă a acestei populații va fi

$$p(10) = 1000 + \frac{1000 \cdot 100}{100 + 100} = 1050.$$

*Răspuns.* Mărimea maximă a populației în mediu nutritiv este de 1050 bacterii.

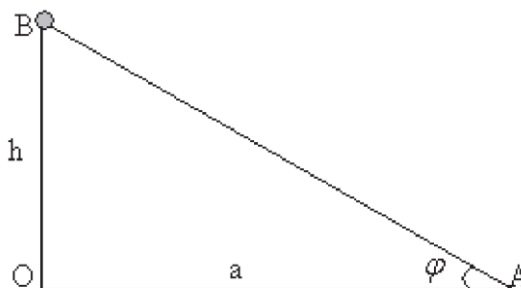
**Exemplul 2.5 (aplicații în fizică).** Un bec electric este atârnat pe pod în punctul  $B$ . La ce distanță  $h$  de la podea trebuie să fie plasat acest bec pentru ca în punctul  $A$ , aflat la distanța  $a$  de punctul  $O$ , intensitatea iluminării să fie maximală?

*Rezolvare.* Iluminarea  $E$  este direct proporțională cu sinusul unghiului de cădere  $\sin \varphi$  și invers proporțională cu pătratul distanței până la sursă

$$E = k \frac{\sin \varphi}{AB^2},$$

unde  $k$  este intensitatea sursei.

Determinăm distanța  $AB$  până la sursa de lumină și sinusul unghiului de cădere. Din triunghiul dreptunghic  $BOA$ , unde  $BO = h$ ,  $AO = a$ , avem



$$AB^2 = a^2 + h^2, \quad \sin \varphi = \frac{h}{AB} = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Astfel, obținem formula pentru iluminarea  $E$ :

$$E = k \frac{h}{(a^2 + h^2)\sqrt{a^2 + h^2}} = k \frac{h}{(a^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Cercetăm funcția  $E(h)$  la extrem local pe intervalul  $(0, +\infty)$ . Aflăm derivata

$$E'(h) = k \frac{h'(a^2 + h^2)^{3/2} - h \left( (a^2 + h^2)^{3/2} \right)'}{(a^2 + h^2)^3} = k \frac{(a^2 + h^2)^{3/2} - 1,5h(a^2 + h^2)^{1/2} \cdot 2h}{(a^2 + h^2)^3},$$

$$E'(h) = k \frac{(a^2 + h^2)^{1/2}(a^2 + h^2 - 3h^2)}{(a^2 + h^2)^3} = k \frac{a^2 - 2h^2}{(a^2 + h^2)^{5/2}}.$$

Determinăm punctele critice ale funcției  $E(h)$  pe intervalul  $(0, +\infty)$ :

$$E'(h) = 0, \quad a^2 - 2h^2 = 0, \quad h = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Doar punctul critic  $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$  satisface condiției problemei.

Aflăm semnul derivatei  $E'(h)$  în intervale  $\left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$  și  $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ . Obținem că

$$E'(a/4) > 0, \quad E'(a) < 0.$$

Așa cum  $E'(h) > 0$ , dacă  $h \in \left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$  și  $E'(h) < 0$  dacă  $h \in \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$ , atunci iluminarea este maximală în punctul critic  $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

*Răspuns.* Becul trebuie atârnat la înălțimea  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  de la podea.

**Exemplul 2.6 (aplicații în economie).** O companie vinde automobile prin două căi: cu ridicata în magazinele auto și cu amănuntul. La vânzarea a  $x$  automobile cu amănuntul, cheltuielile de comercializare constituie  $4x + x^2$  u.c., iar la vânzarea a  $y$  automobile cu ridicata suma cheltuielilor de comercializare constituie  $y^2$  u.c. Să se determine metoda optimală de comercializare a automobilelor, care minimalizează cheltuielile de vânzare, dacă sunt vândute 200 de automobile.

*Rezolvare.* Compunem modelul matematic. Cheltuielile sumare de comercializare a automobilelor sunt reprezentate de funcția

$$L = 4x + x^2 + y^2.$$

După condiție trebuie să determinăm minimumul acestei funcții. Așa cum sunt vândute 200 de automobile, atunci necunoscutele  $x$  și  $y$  sunt legate între ele prin ecuația

$$x + y = 200, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Din această ecuația găsim  $y = 200 - x$  și substituind în  $L$  obținem o funcție de o singură necunoscută

$$L(x) = 4x + x^2 + (200 - x)^2 = 2x^2 - 396x + 40000.$$

Astfel, problema se reduce la determinarea extremului local al funcției  $L(x)$ . Avem

$$L'(x) = 4x - 396,$$

iar  $x = 99$  este un punct critic. Ușor stabilim că

$$L'(x) < 0, \text{ dacă } x \in (0; 99) \text{ și } L'(x) > 0, \text{ dacă } x \in (99; +\infty).$$

Astfel,  $x = 99$  este un punct de minim local pentru funcția  $L(x)$ , iar  $y = 101$ .

*Răspuns.* Cheltuielile de comercializare vor fi minime dacă 99 automobile vor fi vândute cu amănuntul, iar 101 automobile cu ridicata.

## 2.2. Rezolvarea modelelor matematice prin aplicarea calculului integral

Fie  $X$  un interval deschis din  $\mathbb{R}$  și  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție.

**Definiția 2.6.** Funcția  $F(x)$ , definită pe intervalul  $X$ , se numește *primitivă* a funcției  $f(x)$  pe  $X$ , dacă  $F(x)$  este derivabilă pe  $X$  și are loc egalitatea  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in X$ .

**Definiția 2.7.** Mulțimea primitivelor funcției  $f(x)$  pe intervalul  $X$  se numește *integrală nedefinită a funcției  $f(x)$*  și se notează  $\int f(x) dx$ .

Dacă  $F(x)$  este o primitivă a funcției  $f(x)$  pe intervalul  $X$ , atunci

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (2.3)$$

unde  $C$  este o constantă arbitrară.

Calculul integralelor mai complicate se reduce la calculul unor integrale mai simple prin introducerea unei variabile noi de integrare. Această metodă se numește *metoda substituției*.

**Teorema 2.4.** Fie funcția  $F(x)$  o primitivă a funcției  $f(x)$  pe intervalul  $X$ , iar  $x = \varphi(t)$  o funcție continuă și care are derivată continuă pe intervalul  $Y$ , astfel încât  $\varphi(t) \in X$ ,  $\forall t \in Y$ . Atunci

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (2.4)$$

**Teorema 2.5.** Fie funcțiile  $u(x), v(x)$  derivabile și au derivabile continue pe intervalul  $X$ , atunci funcțiile  $u(x)v(x)$ ,  $u'(x)v(x)$  și  $u(x)v'(x)$  admit primitive și

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx. \quad (2.5)$$

Relația (2.5) se numește *formula integrării prin părți* în integrala nedefinită.

Fie intervalul închis  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  și o funcție  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă pe  $[a, b]$ . Să considerăm o diviziune arbitrară  $T$  a intervalului  $[a, b]$  într-un număr finit de intervale  $[x_{k-1}, x_k]$  cu puncte  $\{x_k\}_{k=1}^n$ , astfel încât  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$ .

Notăm cu  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  lungimea intervalului elementar  $[x_{k-1}, x_k]$  și pe fiecare interval  $[x_{k-1}, x_k]$  alegem în mod arbitrar câte un punct  $\xi_k$ . Se numește *normă* a diviziunii  $T$  numărul pozitiv  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ , iar *sumă integrală* asociată funcției  $f$  se numește numărul real  $\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ .

**Definiția 2.8.** Se spune că funcția  $f(x)$  este *integrabilă (în sens Riemann)* pe intervalul  $[a, b]$  dacă există limita finită a sumei integrale  $\sigma$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I, \quad I \in \mathbb{R}.$$

Numărul  $I$  se numește *integrală definită* (*integrala Riemann*) a funcției  $f(x)$  pe  $[a, b]$  și se notează  $\int_a^b f(x)dx$ . Așadar,

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Pentru calcularea integralei definite vom utiliza trei metode de bază: integrarea *directă* (aplicarea formulei Leibniz-Newton), integrarea *prin schimbarea de variabilă* (*metoda substituției*) și *integrarea prin părți*.

**Teorema 2.6 (formula Leibniz-Newton).** Fie  $f(x)$  o funcție continuă pe intervalul  $[a, b]$ . Atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a), \quad (2.6)$$

unde  $F(x)$  este o primitivă a funcției  $f(x)$  pe intervalul  $[a, b]$ .

Formula (2.6) se aplică la calcularea integralelor definite doar în cazul, când egalitatea  $F'(x) = f(x)$  se realizează pe întreg intervalul  $[a, b]$ . În particular, primitiva  $F(x)$  trebuie să fie o funcție continuă pe întreg intervalul  $[a, b]$ .

**Teorema 2.7.** Fie funcția  $f(x)$  continuă pe  $[a, b]$ , iar funcția  $x = \varphi(t)$  are derivată  $\varphi'(t)$  continuă și diferită de zero pe  $[\alpha, \beta]$ . Fie  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ . Atunci este adevărată *formula schimbării de variabilă* în integrala definită

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (2.7)$$

**Teorema 2.8.** Fie  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  și  $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcții derivabile pe  $[a, b]$  cu derivatele  $u': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  și  $v': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue pe  $[a, b]$ . Atunci este adevărată formula

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx, \quad (2.8)$$

numită *formula de integrare prin părți*.

## Aplicații ale integralei definite

**Interpretarea geometrică a integralei definite.** Integrala definită a unei funcții  $f(x)$ , continuă și pozitive pe intervalul  $[a, b]$ , reprezintă geometric aria

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

subgraficului funcției  $f(x)$  pe intervalul  $[a, b]$ .

**Volumul corpului** obținut prin rotirea subgraficului funcției  $f(x)$  pe intervalul  $[a, b]$  în jurul axei  $Ox$  se calculează după formula

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

**Drumul parcurs** la mișcarea rectilinie în intervalul de timp  $[t_1, t_2]$  se determină după formula

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

**Lucrul efectuat** de o forță variabilă  $F(x)$  la mișcarea pe drumul  $[x_1, x_2]$  se determină după formula

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx.$$

**Cantitatea** de scurgere a unui lichid în intervalul de timp  $[t_1, t_2]$  se determină după formula

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} D(t) dt,$$

unde  $D(t)$  este debitul lichidului.

**Cantitatea** de electricitate care trece printr-un conductor în intervalul de timp  $[t_1, t_2]$  se determină după formula

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt,$$

unde  $I(t)$  este intensitatea curentului.

**Exemplul 2.7 (aplicații în analiza matematică).** Să se calculeze limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left[ \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right].$$

*Rezolvare.* Numerele din paranteza pătrată reprezintă valorile funcției  $f(x) = \sin x$  în punctele

$$x_1 = \frac{\pi}{n}, x_2 = \frac{2\pi}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)\pi}{n},$$

care divizează intervalul  $[0, \pi]$  în  $n$  părți egale de mărimea  $\Delta x = \pi/n$ . Să adăugăm în această sumă și termenul  $\sin \frac{n\pi}{n} = 0$ . Atunci suma din paranteza pătrată este o sumă integrală pentru funcția  $f(x) = \sin x$  pe segmentul  $[0, \pi]$ . Limita acestei sume integrale, când  $n \rightarrow \infty$ , reprezintă integrala definită a funcției  $f(x) = \sin x$  pe segmentul  $[0, \pi]$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left[ \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \sin \frac{n\pi}{n} \right] = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2.$$

*Răspuns.* Valoarea limitei este 2.

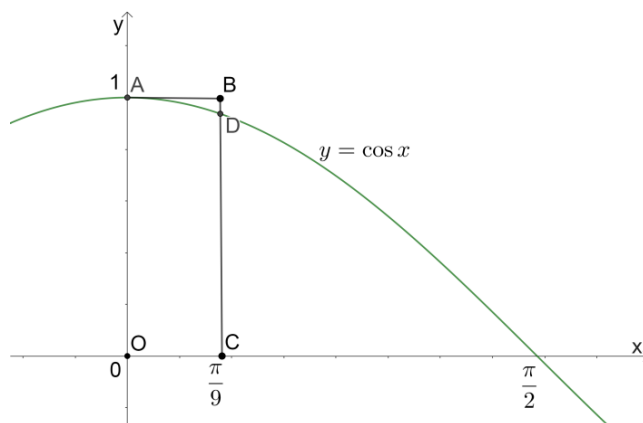
**Exemplul 2.8 (aplicații în algebră).** Să se demonstreze inegalitatea

$$\sin 20^\circ < \frac{7}{20}.$$

*Rezolvare.* Are loc egalitatea

$$\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9} = \int_0^{\pi/9} \cos x dx = s,$$

unde  $s$  este aria subgraficului funcției  $f(x) = \cos x$  pe intervalul  $[0, \pi/9]$ , adică aria figurii  $OADC$ . Să notăm cu  $S$





aria dreptunghiului  $OABC$  cu baza de lungimea  $\pi/9$  și înălțimea 1, care conține în interior sau subgraficul funcției  $f(x)$ , unde  $S = \pi/9$ . Atunci,  $s < S$  și prin urmare

$$\sin 20^\circ < \frac{\pi}{9} < \frac{7}{20}.$$

**Exemplul 2.9 (aplicații în fizică).** O piatră este aruncată vertical în sus de pe acoperișul unei case care are înălțimea de 15 m. Să se determine viteza inițială a pietrei, dacă peste o secundă după aruncare ea se află la înălțimea de 25 m.

*Rezolvare.* Fie piatra este aruncată vertical în sus cu viteza inițială  $v_0$ . Viteza de mișcare a pietrei este dată de formula  $v(t) = v_0 - gt$ , unde  $g$  este accelerația căderii libere. Piatra va zbura în sus timp de o secundă. Aplicăm formula

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (v_0 - gt) dt$$

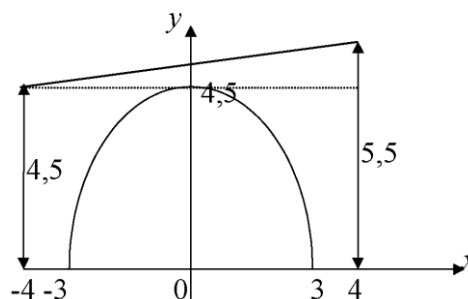
în intervalul de timp  $[0; 1]$ , unde  $S = 25 \text{ m} - 15 \text{ m} = 10 \text{ m}$ . Obținem

$$10 = \int_0^1 (v_0 - gt) dt = \left( v_0 t - g \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = v_0 - \frac{g}{2}.$$

Prin urmare,  $v_0 = 10 + 4,9 = 14,9$ .

*Răspuns.* Viteza inițială a pietrei este 14,9 m/s.

**Exemplul 2.10 (aplicații în economie).** Arcul de sub un pod este descris de ecuația parabolei. Intrarea sub pod este prezentată în figura de mai jos. Segmentul unitate este de 1 m. Lățimea podului este de 4 m. Câtă piatră zdrobită va trebui să livreze producătorul pentru a construi acest pod?



*Rezolvare.* Considerăm un sistem cartezian de coordonate cu segmentul unitate de 1 m, iar originea sistemului o plasăm jos în mijlocul arcului. Atunci ecuația parabolei are forma  $y = -kx^2 + 4,5$ .

Parabola trece prin punctul  $(3, 0)$  și putem determina coeficientul  $k = 1/2$ . Astfel, ecuația parabolei este  $y = -0,5x^2 + 4,5$ .

Vom determina aria subgraficului parabolei pe intervalul  $[-3, 3]$ :

$$A_p = \int_{-3}^3 (4,5 - 0,5x^2) dx = 2 \int_0^3 (4,5 - 0,5x^2) dx = \left( 9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 27 - 9 = 18.$$

Aria trapezului dreptunghic cu bazele 4,5 și 5,5, și înălțimea de 8 este

$$A_t = \frac{4,5 + 5,5}{2} \cdot 8 = 40.$$

Aria figurii plane mărginită de trapezul dreptunghic și parabolă este

$$A = A_p - A_t = 40 - 18 = 22.$$

Volumul corpului de lățimea 4 m, care trebuie împlut cu pietriș este  $V = 22 \cdot 4 = 88 \text{ m}^3$ .

*Răspuns.* Este nevoie de livrat  $88 \text{ m}^3$  de pietriș.

### 2.3. Rezolvarea modelelor matematice prin aplicarea ecuațiilor diferențiale

Ecuațiile diferențiale reprezintă un instrument important al calculului diferențial și integral. Ele deschid orizonturi prin dezvoltarea rolului matematicii în înțelegerea fenomenelor naturii. Aceeași ecuație diferențială modelează probleme din geometrie și fenomene electrice, mecanice, biologice, chimice etc.

**Definiția 2.9.** Se numește *ecuație diferențială de ordinul întâi* cu variabila independentă  $x$  și funcția necunoscută  $y = y(x)$  o egalitate de forma

$$F(x, y, y') = 0, \quad (2.9)$$

unde  $F$  este o funcție dată și continuă pe domeniul  $\Omega$ , iar  $y'$  este derivata lui  $y$ .

Dacă ecuația (2.9) este rezolvabilă în raport cu derivata  $y'$ , atunci ea poate fi scrisă în forma normală

$$y' = f(x, y), \quad (2.10)$$

unde  $f(x, y)$  este o funcție continuă pe un domeniu  $D \subset \mathbb{R}^2$  sau în forma simetrică

$$P(x, y)dx - Q(x, y)dy = 0, \quad (2.11)$$

unde  $P(x, y)$  și  $Q(x, y)$  sunt funcții continue pe domeniul  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definiția 2.10.** Se numește *soluție a ecuației diferențiale* (2.10) pe intervalul  $X \subset \mathbb{R}$  orice funcție  $y = \varphi(x)$  continuu diferențiabilă pe  $X$  și care verifică ecuația (2.10), adică

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)), \quad \forall x \in X.$$

Graficul soluției ecuației diferențiale reprezintă o curbă pe planul de coordonate, care se numește *curbă integrală*.

**Teorema 2.9.** Dacă funcția  $f(x, y)$  și derivata ei parțială  $f'_y(x, y)$  sunt continue pe un domeniu  $D$  din  $\mathbb{R}^2$ . Atunci pentru orice punct  $M_0(x_0, y_0)$  din  $D$  există o unică soluție  $y = y(x)$  a ecuației (2.10) care verifică condiția inițială (condiția Cauchy)

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.12)$$

Prin *problemă Cauchy* asociată ecuației (2.10) se înțelege determinarea unei soluții a ecuației (2.10) care satisface o condiție inițială (2.12)

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.13)$$

**Definiția 2.11.** Se numește *soluție generală* a ecuației diferențiale (2.10) pe un domeniu  $D$  din  $\mathbb{R}^2$  funcția  $y = \varphi(x, C)$ , care depinde de variabila independentă  $x$  și de o singură constantă arbitrară  $C$  și care verifică următoarele condiții:

- 1) este soluție a ecuației (2.10) pentru orice valoare a constantei  $C$ ;
- 2) pentru orice condiție inițială (2.12) există o valoare unică  $C = C_0$  a constantei, astfel încât funcția  $y = \varphi(x, C_0)$  verifică condiția inițială dată, adică  $\varphi(x_0, C_0) = y_0$ .

**Definiția 2.12.** Funcția  $y = \varphi(x, C_0)$  se numește *soluție particulară* a ecuației (2.10) pe domeniul  $D$ , dacă ea se obține din soluția generală pentru o valoare bine determinată  $C = C_0$ .

Soluția generală  $y = \varphi(x, C)$  reprezintă geometric o familie de curbe integrale pe planul  $Oxy$ , ce depinde de o constantă arbitrară  $C$ , iar soluția particulară  $y = \varphi(x, C_0)$  este una dintre curbele integrale ale acestei familii, care trece prin punctul  $(x_0, y_0)$ .

*A rezolva sau a integra* o ecuație diferențială înseamnă:

- 1) a determina soluția generală a ecuației (dacă nu sunt date condiții inițiale);
- 2) a determina acea soluție particulară a ecuației care verifică condițiile inițiale.

**Unele tipuri de ecuații diferențiale elementare:**

1) *Ecuații cu variabile separabile.* Forma generală a ecuației este

$$y' = g(x) \cdot h(y), \quad (2.14)$$

unde  $g(x)$  și  $h(y)$  sunt funcții reale date și continue pe domeniul lor de definiție.

Ecuațiile (2.14) se rezolvă prin separarea variabilelor fiind aduse la forma

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx.$$

Integrând membrul stâng al ultimei ecuații după variabila  $y$ , iar cel drept după variabila  $x$  obținem integrala generală a ecuației (soluția generală).

2) *Ecuații omogene.* Forma generală a ecuației este

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.15)$$

Prin schimbarea de variabilă  $y = x \cdot u(x)$ ,  $y' = u(x) + xu'(x)$  se obține o ecuație cu variabile separabile.

3) *Ecuații diferențiale liniare.* Forma generală a ecuației este

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (2.16)$$

unde  $P(x)$  și  $Q(x)$  sunt funcții reale date și continue pe domeniul de definiție. Soluția generală a ecuației (2.16) se caută sub forma  $y = u(x) \cdot v(x)$ ,  $y' = u'v + uv'$ , unde  $u(x)$  și  $v(x)$  sunt funcții diferențiabile în careva interval.

4) *Ecuații de tip Bernoulli.* Forma generală a ecuației este

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m, \quad (2.17)$$

unde  $P(x)$  și  $Q(x)$  sunt funcții reale date și continue pe domeniul de definiție, iar  $m \in R$ ,  $m \neq 0, m \neq 1$ . Prin schimbarea de variabilă  $y^{1-m} = z(x)$  se obține o ecuație diferențială liniară.

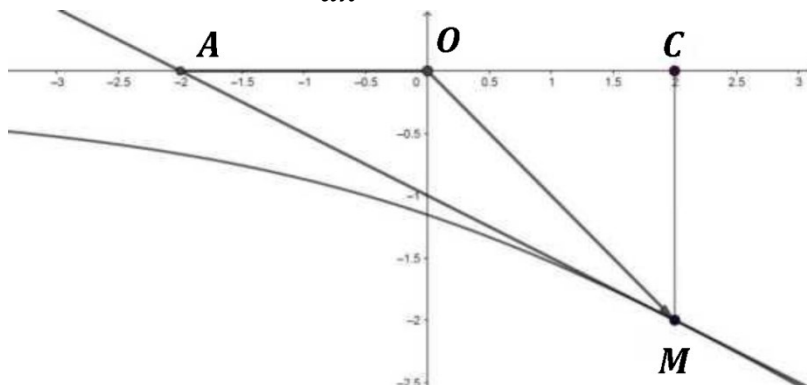
**Problema 2.11 (aplicații în geometrie).** Aria triunghiului mărginit de raza-vector al oricărui punct  $M$  al curbei, tangenta la curbă în acest punct și axa absciselor este egală cu 2 u.p. Aflați ecuația acestei curbe, dacă ea trece prin punctul  $(2; -2)$ .

*Rezolvare.* Considerăm triunghiul  $OMA$  format de raza-vector  $OM$  dusă în punctul  $M$  al curbei, tangenta  $AM$  la curbă și segmentul  $OA$  al axei absciselor. Panta curbei în punctul  $M$  este determinată de panta tangentei în acest punct, adică, de derivata

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Ecuația tangentei  $AM$  dusă la curbă în punctul  $M(x, y)$  este

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x - x_0).$$



Coordonatele punctului  $A(x_0, y_0)$ , se obțin la intersecția tangentei cu axa absciselor

$$\begin{cases} y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x - x_0), \\ y_0 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{dy}{dx}(x - x_0), \\ y_0 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x - y \frac{dx}{dy}, \\ y_0 = 0. \end{cases}$$

Segmentul  $OA$  are lungimea  $x - yx'(y)$ , iar aria triunghiului  $OMA$  este

$$A_{\Delta OMA} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot y = \frac{y}{2} \left( x - y \frac{dx}{dy} \right),$$

unde  $y$  este înălțimea triunghiului. Din enunțul problemei, avem

$$\frac{y}{2} \left( x - y \frac{dx}{dy} \right) = 2, \quad x - y \frac{dx}{dy} = \frac{4}{y}$$

și obținem ecuația diferențială

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -\frac{4}{y^2}. \quad (2.18)$$

Am obținut o ecuație diferențială liniară în raport cu necunoscuta  $x = x(y)$ . Vom căuta soluția generală a ecuației (2.18) sub forma  $x = u(y) \cdot v(y)$ , unde  $x' = u'v + uv'$ . Avem

$$u'v + uv' - \frac{1}{y}uv = -\frac{4}{y^2}, \quad u'v + u \left( v' - \frac{1}{y}v \right) = -\frac{4}{y^2}. \quad (2.19)$$

1) Găsim funcția  $v = v(y)$  ca o soluție particulară a ecuației liniare omogenă

$$v' - \frac{1}{y}v = 0, \quad \frac{dv}{dy} - \frac{v}{y} = 0,$$

care este cu variabile separabile. Separăm variabilele și integrăm ecuația. Avem

$$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}, \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y}, \quad \ln|v| = \ln|y| + C_1, \quad \ln \left| \frac{v}{y} \right| = C_1,$$

$$\left| \frac{v}{y} \right| = e^{C_1}, \quad \frac{v}{y} = e^{C_1}, \quad \frac{v}{y} = C_2, \quad v = C_2 y,$$

unde  $C_2 = e^{C_1}$  este constanta de integrare. Alegem  $v(y) = y$ .

2) Determinăm funcția  $u = u(y)$  din ecuația (2.19), ținând cont că  $v = y$ . Obținem

$$u'y + u \cdot 0 = -\frac{4}{y^2}, \quad u' = -\frac{4}{y^3}.$$

Prin integrare, găsim

$$u(y) = -4 \int \frac{dy}{y^3} = -4 \int y^{-3} dy = \frac{2}{y^2} + C.$$

Substituind funcțiile  $u(y)$  și  $v(y)$  în  $x(y)$ , găsim soluția generală a ecuației (2.18)

$$x = u(y) \cdot v(y) = \left( \frac{2}{y^2} + C \right) y = Cy + \frac{2}{y}, \quad (2.20)$$

unde  $C$  este o constanta de integrare.

3) Determinăm constanta  $C$ , ținând cont că curba trece prin punctul  $(2; -2)$

$$2 = -2C - 1, \quad C = -1,5.$$

Substituim  $C$  în funcția (2.20) și obținem ecuația curbei

$$x = -\frac{3y}{2} + \frac{2}{y}, \quad 2xy = -3y^2 + 4, \quad 3y^2 + 2xy - 4 = 0.$$

*Răspuns.* Curba reprezintă hiperbola  $3y^2 + 2xy - 4 = 0$ .

**Problema 2.12 (aplicații în fizică).** O barcă cu motor se mișcă în apă stătătoare cu viteza de  $v_0 = 40$  km/h. În timpul mișcării se oprește motorul și timp de 40 de secunde viteza bărcii se micșorează până la  $v_1 = 16$  km/h. Rezistența apei este direct proporțională cu viteza mișcării bărcii. Să se determine viteza bărcii peste 2 minute după ce s-a oprit motorul.

*Rezolvare.* Asupra bărcii în mișcare acționează forța  $F = -kv$ , unde  $k$  este coeficientul de proporționalitate. Conform legii lui Newton, avem  $F = m \frac{dv}{dt}$ . Astfel, obținem o ecuația diferențială cu variabile separabile

$$m \frac{dv}{dt} = -kv. \quad (2.21)$$

Separăm variabilele în ecuația (2.21), iar apoi integrăm ecuația

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt; \quad \int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt; \quad \ln v = -\frac{k}{m} t + C_1;$$

$$v = e^{-\frac{k}{m}t + C_1} = e^{-\frac{k}{m}t} e^{C_1} = C e^{-\frac{k}{m}t}, \quad e^{C_1} = C > 0.$$

Soluția generală a ecuației (2.21) este

$$v = C e^{-\frac{k}{m}t}, \quad (2.22)$$

unde  $C$  este o constantă arbitrară. Constanta  $C$  poate fi determinată folosind condițiile inițiale. În momentul inițial de timp avem:  $t = 0$ ,  $v_0 = 40$  km/h. Substituim aceste date în (2.22)

$$40 = C e^{-\frac{k}{m} \cdot 0}; \quad C = 40.$$

Astfel, viteza bărcii se micșorează în timp după legea

$$v = 40 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Pentru a determina raportul  $\frac{k}{m}$  (în cazul dat  $e^{\frac{k}{m}}$ ) folosim datele ce țin de oprirea motorului, că timp de  $t = 40 \text{ sec} = \frac{1}{90} \text{ h}$ , viteza bărcii se micșorează până la  $v_1 = 16 \text{ km/h}$ .

Obținem

$$16 = 40e^{-\frac{k}{m} \frac{1}{90}}; \quad e^{-\frac{k}{m} \frac{1}{90}} = \frac{2}{5}; \quad e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{90}.$$

Prin urmare, avem

$$v = 40 \left(\frac{2}{5}\right)^{90t}.$$

Peste 2 minute de la oprirea motorului ( $t = \frac{1}{30} \text{ h}$ ), viteza bărcii este

$$v = 40 \left(\frac{2}{5}\right)^{90 \cdot \frac{1}{30}} = 40 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{64}{25} \approx 2,56.$$

*Răspuns.* Viteza bărcii este 2,56 km/h.

**Problema 2.13 (aplicații în economie).** O pâine scoasă din cuptor are temperatura  $100^\circ\text{C}$  și timp de 20 minute se răcește până la temperatura de  $60^\circ\text{C}$ . Peste cât timp, începând din momentul răcirii, pâinea va avea temperatura de  $25^\circ\text{C}$ , dacă temperatura aerului este de  $20^\circ\text{C}$ .

*Rezolvare.* Notăm cu  $x(t)$  temperatura pâinii în momentul  $t$  și folosim legea lui Newton, conform căreia, viteza de răcire a unui corp cu temperatura  $x(t)$ , situat într-un mediu cu temperatura  $x_0$ , este proporțională cu diferența  $x(t) - x_0$ . Obținem ecuația diferențială

$$x'(t) = k(x(t) - x_0).$$

Funcția  $y(t) = x(t) - x_0$  verifică ecuația

$$y'(t) = k \cdot y(t), \quad \frac{dy}{dt} = k \cdot y(t), \quad \frac{dy}{y} = k \cdot dt,$$

care este o ecuație diferențială cu variabile separabile. Integrăm ecuația și obținem

$$\int \frac{dy}{y} = k \int dt, \quad \ln y = kt + C_1, \quad y(t) = e^{kt+C_1} = e^{C_1} e^{kt}.$$

Notăm  $e^{C_1} = C_2$  și ținem cont că  $y(t) = x(t) - x_0$ . Obținem ecuația de răcire

$$x(t) = x_0 + C_2 e^{kt}.$$

Cum temperatura aerului este  $x_0 = 20^\circ\text{C}$ , pentru determinarea constantelor  $C_2$  și  $k$  folosim condițiile inițiale

$$x(0) = 100^\circ\text{C}, \quad x(20) = 60^\circ\text{C}.$$

Avem  $100 = 20 + C_2 e^{0t}$ ,  $C_2 = 80$  și obținem  $x(t) = 20 + 80e^{kt}$ .

Deoarece  $x(20) = 60^\circ\text{C}$ , avem

$$60 = 20 + 80e^{20k}, \quad e^{20k} = \frac{1}{2}, \quad e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}.$$

Astfel

$$x(t) = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}.$$

Fie  $t^*$  timpul în care temperatura devine  $25^{\circ}C$ , atunci avem ecuația

$$25 = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t^*}{20}}.$$

Determinăm  $t^*$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t^*}{20}} = \left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad \frac{t^*}{20} = 4, \quad t^* = 80.$$

*Răspuns.* Peste 80 de minute pâinea va avea temperatura de  $25^{\circ}C$ .

**Problema 2.14 (aplicații în medicină).** Unui pacient i se administrează oral 8 mg de medicament. Ce parte a medicamentului este asimilat de organism după 8 ore, dacă la 4 ore după administrarea a 4 mg de medicament, masa medicamentului a scăzut la jumătate?

*Rezolvare.* Este necesar să determinăm legea de asimilare de către organism a cantității de medicament. Fie  $n_0 = 8$  cantitatea de medicament (mg) din organism în momentul inițial de timp, iar  $n_2 = 4$  cantitatea de medicament după două ore. Să notăm cu  $n$  cantitatea de medicament din organism în orice moment de timp  $t$ , unde  $n = n(t), t \geq 0$ .

Rata de asimilare a cantității de medicament de către organism reprezintă derivata  $n'(t)$  și această mărime este proporțională cu cantitatea de medicament din organism la momentul dat

$$n'(t) = k \cdot n(t),$$

unde  $k$  este un coeficient de proporționalitate. Am obținut ecuația cu variabile separabile

$$\frac{dn}{dt} = k \cdot n(t), \quad \frac{dn}{n} = k \cdot dt.$$

Integrăm ecuația și obținem soluția generală

$$\int \frac{dn}{n} = k \int dt, \quad \ln n = kt + C_1, \quad n = e^{kt+C_1} = e^{kt} e^{C_1} = C e^{kt},$$
$$n(t) = C e^{kt}, \quad (2.23)$$

unde  $C = e^{C_1}$  este o constantă de integrare.

Constanta  $C$  o găsim din relația (2.23) folosind condițiile inițiale:  $t_0 = 0, n_0 = 8$ . Obținem  $8 = C e^{k \cdot 0}, C = 8$ . Astfel, cantitatea de medicament asimilată de organism variază după legea

$$n(t) = 8e^{kt}.$$

Pentru a determina constanta  $k$ , ținem cont că la 4 ore după administrarea a 4 mg de medicament, masa acestuia a scăzut la jumătate, adică  $n_2 = 4$  și  $t_2 = 4$ . Avem:

$$4 = 8e^{4k}, \quad e^{4k} = 0,5, \quad 4k = \ln 0,5, \quad k = \frac{1}{4} \ln 0,5 = \ln \sqrt[4]{0,5}.$$

Prin urmare, cantitatea de medicament asimilată de organism variază în timp după legea

$$n(t) = 8e^{t \ln \sqrt[4]{0,5}} = 8 \left( e^{\ln \sqrt[4]{0,5}} \right)^t = 8 \left( \sqrt[4]{0,5} \right)^t = 8 \left( \frac{1}{2} \right)^{t/4}.$$

Determinăm ce parte a medicamentului a fost asimilată de organism după 8 ore de la administrare

$$n(8) = 8 \left( \frac{1}{2} \right)^2 = 2.$$

După 8 ore, în organism vor fi 2 mg de medicament. În acest timp,  $8 \text{ mg} - 2 \text{ mg} = 6 \text{ mg}$  s-au asimilat. Astfel, 6 mg din substanță s-au asimilat în 8 ore.

*Răspuns.* Peste 8 ore vor fi asimilate 6 mg de medicament.

## 2.4. Probleme propuse spre rezolvare

**Problema 1.** Se proiectează un cazan de presiune pentru vapori cu un volum de  $1000 \text{ dm}^3$ , de formă cilindrică. Materialul pereților laterali costă  $a \text{ lei/dm}^2$ , iar pentru funduri  $b \text{ lei/dm}^2$ . Să se afle raza cilindrului pentru care cheltuiala este minimă.

Răspuns:  $R = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi b}}$ .

**Problema 2.** Dintr-un sector de cerc de rază dată  $R$  se înfășoară o pâlnie conică. Pentru ce unghi la centru  $\alpha$ , această pâlnie are volumul maxim.

Răspuns: Raza pâlniei este  $\frac{R\alpha}{360}$ , iar  $\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

**Problema 3.** Să se înscrie într-o sferă de rază  $r$  un con circular drept de volum maxim.

Răspuns: Înălțimea conului este  $4r/3$ .

**Problema 4.** Care dintre numerele  $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$  sau  $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$  este mai mare.

Răspuns: Se consideră funcția  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x > 0$  și în baza monotoniei ei se demonstrează că  $x^y < y^x$ , dacă  $0 < x < y < e$ . Astfel,  $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} < (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ .

**Problema 5.** Fie  $0 < a < 0,5$ . Să se demonstreze că  $2a + a^{-2} > 5$ .

Indicație: Se cercetează la monotonie funcția ajutoare  $f(x) = 2x + x^{-2}$  pe intervalul  $(0; 0,5]$ .

**Problema 6.** La erupția unui vulcan rocile sunt aruncate perpendicular în sus cu o viteză inițială  $v_0 = 120 \text{ m/s}$ . Care este înălțimea maximă pe care o vor atinge pietrele dacă este neglijată rezistența vântului?

Răspuns: Pietrele de stâncă vor atinge o înălțime de 720 m de la marginea vulcanului.



**Problema 7.** O fereastră are forma unui dreptunghi, completată sus cu un semicerc. Perimetrul ferestrei este de 15 m. Pentru care rază a semicercului prin fereastră va intra cea mai mare cantitate de lumină?

Răspuns:  $R = 15/(\pi + 4) \approx 2,1$  m.

**Problema 8.** La ce distanță de sol trebuie făcută o gaură într-un vas cilindric de înălțimea  $H$ , astfel încât distanța de acțiune a jetului de la gaură să fie cea mai mare?

Răspuns: Gaura trebuie făcută la înălțimea  $H/2$ .

**Problema 9.** La pregătirea pentru susținerea unui examen, un student în  $t$  zile învață  $t/(t + 16)$  din mărimea cursului și uită  $t/25$  din materialul învățat. De câte zile are nevoie studentul pentru a învăța partea maximală a cursului?

Răspuns: Partea maximală a cursului va fi învățată în 4 zile.

**Problema 10.** Demonstrați că volumul conului circular drept de înălțime  $h$  și rază a bazei  $R$  este  $\pi R^2 h/3$ .

**Problema 11.** Calculați presiunea lichidului (cu densitatea  $\gamma$ ) pe pereții unui rezervor, care reprezintă o emisferă cu raza  $R$ . Rezervorul este complet umplut.

Răspuns:  $P = \pi\gamma R^2$ .

**Problema 12.** Un punct material se mișcă rectiliniu cu viteza  $v(t) = 6t^2 + 4t + 1$  m/s. Determinați drumul parcurs de acest punct în intervalul de timp  $[0; 3]$ .

Răspuns: 56 m.

**Problema 13.** Determinați aria figurii plane mărginite de liniile  $y = x^2 - 2x + 1$ ,  $y = 2x - 2$ .

Răspuns:  $4/3$  u. p.

**Problema 14.** Să se demonstreze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$ .

Indicație: Se transformă suma din paranteză încât ea să reprezinte o sumă integrală pentru funcția  $f(x) = 1/(1+x)$  pe segmentul  $[0; 1]$ , divizat în  $n$  părți egale.

**Problema 15.** Un parașutist cu masa  $m$  sare cu parașuta. Rezistența aerului este proporțională cu pătratul vitezei lui de zbor. Cum se schimbă viteza de zbor a parașutistului cu timpul?

Răspuns: Viteza parașutistului va tinde către mărimea  $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ .

**Problema 16.** Să se determine forma oglinzii (în secțiune), care ar reflecta toate razele de lumină ce vin dintr-un punct  $O$  paralel cu o direcție dată.

Răspuns: Se obține ecuație diferențială omogenă  $ydy = (\sqrt{x^2 + y^2} - x)dx$ , soluția generală a căreia  $y^2 = 2Cx + C^2$  ne arată că avem o oglindă parabolică.

**Problema 17.** Viteza de creștere a unei sume de bani, plasată cu dobândă compusă, într-o anumită perioadă este direct proporțională cu suma disponibilă. Să se determine suma disponibilă  $S(t)$  în orice moment de timp  $t$  dacă se știe suma  $S_0$  plasată inițial și procentul anual  $p$ .

Răspuns:  $S(t) = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ .

**Problema 18.** Populația unei țări s-a dublat în 50 de ani, peste cât timp se va tripla, dacă viteza de creștere este proporțională cu mărimea sa?

Răspuns: Populația se va tripla după 79 de ani.

**Problema 19.** Viteza de dezintegrare a radiului este proporțională cu cantitatea sa. Se știe că după 1600 ani nu rămâne decât o jumătate din cantitatea de radium inițială (perioada de înjumătățire este 1600 ani). Să se determine procentajul de radium dezintegrat după 100 ani.

Răspuns: 4,23%.

**Problema 20.** Unei bobine cu inductanța  $L = 1$  H și rezistența  $R = 2\Omega$  i se aplică o tensiune electromotoare  $E(t) = \sin 3t$  V. Care este intensitatea curentului în bobină?

Răspuns:  $i(t) = \frac{3}{13}e^{-2t} + \frac{2}{13}\sin 3t - \frac{3}{13}\cos 3t$ .

## CAPITOLUL 3. DETERMINAREA TRAIECTORIEI MINIME DE ZBOR A UNUI VEHICUL AERIAN FĂRĂ PILOT

### 3.1. Cunoștințe și competențe necesare pentru determinarea traiectoriei de zbor a unei drone

Vehiculele aeriene fără pilot uman la bord, mai ales cele multirotor, motoarele căruia sunt bazate pe consumul energiei electrice, posedă un dezavantaj: sunt limitate de timpul de zbor. Majoritatea dintre ele se pot menține în aer cel mult 30 – 35 minute. Din această cauză este foarte important să cunoaștem cum putem planifica un zbor astfel încât traiectoria dintre punctele  $A$  și  $B$  să fie cea mai scurtă.

Tema cercetată aici pune în discuție anume problema menționată. Sunt prezentate diferite metode matematice de determinare a celei mai scurte traiectorii a unui vehicul aerian fără pilot uman la bord. În dependență de metoda aplicată, vor fi necesare cunoștințe din matematica superioară sau din matematica elementară.

Activitățile realizate în cadrul acestei teme facilitează conștientizarea aplicațiilor instrumentelor matematice la rezolvarea problemelor cu conținut cotidian atât la nivel gimnazial, liceal cât și la nivel de facultate.

Pentru a rezolva astfel de probleme studenții trebuie să posede următoarele cunoștințe și competențe din cadrul temelor:

- ◆ Teoria funcțiilor de mai multe variabile.
- ◆ Derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale funcțiilor de mai multe variabile.
- ◆ Algoritmii determinării extremelor funcțiilor de două variabile.
- ◆ Sistemul rectangular cartezian de coordonate în spațiu.
- ◆ Formula distanței dintre două puncte în spațiu.
- ◆ Ecuațiile drepte în spațiu.
- ◆ Ecuațiile planului.
- ◆ Triunghiul dreptunghic.
- ◆ Teorema lui Pitagora.
- ◆ Rezolvarea triunghiurilor.

Se încep activitățile cu rezolvarea problemei de tipul: dependența funcțională  $f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha}$  ne caracterizează traiectoria matematică specifică a unui vehicul aerian fără pilot uman la bord din punctul  $A$  în punctul  $B$ , dependența funcțională  $g(y) = \sqrt{y^2 + \beta}$  – din punctul  $B$  în punctul  $C$  și dependența funcțională  $\varphi(z) = \sqrt{z^2 + \gamma}$  – din punctul  $C$  în punctul  $D$ .

Determinați:

- a) traiectoria cea mai scurtă dintre punctele  $A$  și  $D$ , dacă variabilele  $x$ ,  $y$  și  $z$  trebuie să satisfacă ecuației planului  $ax + by + cz = \delta$ ;

- b) expresia analitică în coordonate rectangulare carteziene a traiectoriei vehiculului aerian fără pilot uman la bord ce conține punctele  $A, B, C$  și  $D$ ;
- c) expresiile parametrice ale traiectoriei vehiculului aerian fără pilot uman la bord ce conține punctele  $A, B, C$  și  $D$ ;
- d) valorile parametrului  $t$  pentru fiecare dintre punctele  $A, B, C$  și  $D$ .

După realizarea acestor activități, problema de mai sus poate fi modificată propunându-se și rezolvându-se probleme cu un grad sporit de dificultate, în care obținem nu triunghiuri dreptunghice, dar triunghiuri arbitrare.

### 3.2. Două metode de rezolvare a problemelor privind identificarea traiectoriei minime de zbor

**Problemă 1.** *Dependența funcțională  $T(x) = \sqrt{x^2 + 1600}$  ne caracterizează traiectoria matematică a unui vehicul aerian fără pilot dintre punctele  $O$  și  $A$ ,  $T(y) = \sqrt{y^2 + 6400}$  – dintre punctele  $A$  și  $B$ , iar  $T(z) = \sqrt{z^2 + 14400}$  – dintre punctele  $B$  și  $C$ .*

**Determinați:**

- a) traiectoria cea mai scurtă dintre punctele  $O$  și  $C$ , dacă variabilele  $x, y$  și  $z$  trebuie să satisfacă ecuația planului  $x + y + z = 180$ ;
- b) expresia analitică în coordonate rectangulare carteziene a celei mai scurte traiectorii a vehiculului aerian într-un plan paralel cu planul  $(xOy)$ ;
- c) expresiile parametrice ale celei mai scurte traiectorii a vehiculului aerian;
- d) valorile parametrului  $t$  pentru fiecare dintre punctele  $O, A, B$  și  $C$ .

După obținerea rezultatelor matematice:

- e) programați în limbajul Scratch cu ajutorul blocurilor traiectoria vehiculului aerian;
- f) realizați zborul la un simulator specializat conform traiectoriei programate;
- g) realizați un zbor real cu un vehicul aerian educațional conform traiectoriei programate.

**Rezolvare.** Din condițiile problemei rezultă că traiectoria cea mai scurtă dintre punctele  $O$  și  $C$  va fi egală cu suma lungimilor traiectoriilor  $OA, AB$  și  $BC$ , adică  $OC = OA + AB + BC$ . Pentru determinarea celei mai scurte traiectorii a vehiculului aerian dintre punctele  $O$  și  $C$  vom prezenta două metode [1].

**Metoda 1.** *Această metodă poate fi prezentată studenților care sunt cunoscători cu teoria funcțiilor de mai multe variabile și extremele lor.*

Pentru determinarea celei mai scurte traiectorii trebuie să cercetăm la extrem funcția de trei variabile  $f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + 1600} + \sqrt{y^2 + 6400} + \sqrt{z^2 + 14400}$ , unde  $x + y + z = 180$ , adică trebuie să determinăm minimumul ei. Această metodă ne conduce la calcule destul de voluminoase care sunt reflectate în continuare.

Deoarece  $z = 180 - x - y$ , atunci obținem funcția de două variabile:

$$f(x; y) = \sqrt{x^2 + 1600} + \sqrt{y^2 + 6400} + \sqrt{(180 - x - y)^2 + 14400}.$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale acestei funcții sunt:

$$f'_x(x; y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1600}} - \frac{180 - x - y}{\sqrt{(180 - x - y)^2 + 14400}}$$

$$f'_y(x; y) = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 6400}} - \frac{180 - x - y}{\sqrt{(180 - x - y)^2 + 14400}}$$

Egalând aceste derivate cu zero:  $f'_x(x; y) = f'_y(x; y) = 0$ , vom primi

$$x\sqrt{y^2 + 6400} = y\sqrt{x^2 + 1600}, \quad x^2y^2 + 6400x^2 = x^2y^2 + 1600y^2, \quad y^2 = 4x^2, \quad y = \pm 2x.$$

Admitem că  $y = 2x$ . Atunci obținem ecuația

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1600}} - \frac{180 - 3x}{\sqrt{(180 - 3x)^2 + 14400}} = 0,$$

ce admite unica soluție  $x = 30$ . Dar atunci  $y = 60$  și  $z = 90$ . Deci un punct staționar are coordonatele:  $(30; 60; 90)$ .

Admitem acum  $y = -2x$ . Atunci primim ecuația:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1600}} - \frac{180 + x}{\sqrt{(180 + x)^2 + 14400}} = 0,$$

de unde rezultă ecuația pătrată:

$$x^2 - 45x - 4050 = 0,$$

care admite soluțiile:  $x_1 = -45$  și  $x_2 = 90$ . Dar atunci

$$y_1 = 90 \text{ și } y_2 = -180, \text{ iar } z_1 = 135 \text{ și } z_2 = 270.$$

Astfel am obținut trei puncte staționare:

$$(30; 60; 90), (-45; 90; 135) \text{ și } (90; -180; 270).$$

Aflăm valorile funcției  $f(x; y; z)$  în punctele staționare:

$$f(30; 60; 90) = \sqrt{900 + 1600} + \sqrt{3600 + 6400} + \sqrt{8100 + 14400} = \\ \sqrt{2500} + \sqrt{10000} + \sqrt{22500} = 50 + 100 + 150 = 300;$$

$$f(-45; 90; 135) = \sqrt{2025 + 1600} + \sqrt{8100 + 6400} + \sqrt{18225 + 14400} = \\ = \sqrt{3625} + \sqrt{14500} + \sqrt{32625} = 30\sqrt{145} \approx 361,25;$$

$$f(90; -180; 270) = \sqrt{8100 + 1600} + \sqrt{32400 + 6400} + \sqrt{72900 + 14400} = \\ = \sqrt{9700} + \sqrt{38800} + \sqrt{87300} = 60\sqrt{97} \approx 590,93.$$

Astfel studenții ajung la concluzia că traiectoria cea mai scurtă dintre punctele  $O$  și  $C$  va fi egală cu 300, deoarece valoarea cea mai mică a funcției cercetate este egală cu 300.

Pentru determinarea celei mai scurte traiectorii a vehiculului aerian dintre punctele  $O$  și  $C$  putem indica o altă metodă care nu necesită cunoștințe din domeniul matematicii superioare și deci o astfel de problemă poate fi rezolvată cu elevii din ciclul gimnazial.

**Metoda 2. Această metodă se bazează pe ilustrații geometrice, triunghiul dreptunghic și teorema lui Pitagora**

Cercetăm figura 3.1. Traectoria vehiculului aerian va fi cea mai scurtă atunci când lungimea liniei frânte  $OABC$  va avea lungimea cea mai mică. Aceasta este posibil numai atunci când punctele  $O$ ,  $A$ ,  $B$  și  $C$  vor fi situate pe una și aceeași dreaptă, adică lungimea cea mai mică trebuie să fie lungimea segmentului  $OC$ , care este ipotenuza triunghiului dreptunghic  $OFC$ . Deoarece catetele triunghiului dreptunghic sunt 180 și 240, rezultă că  $OC = 300$ .

b) Pentru a determina expresia analitică în coordonate rectangulare carteziene a traectoriei vehiculului aerian fixăm un sistem rectangular cartezian de coordonate cu originea în punctul  $O$  (vezi Figura 3.2). Direcțiile pozitive ale axelor  $(Ox)$  și  $(Oy)$  le alegem așa cum este indicat în figura 3.2.

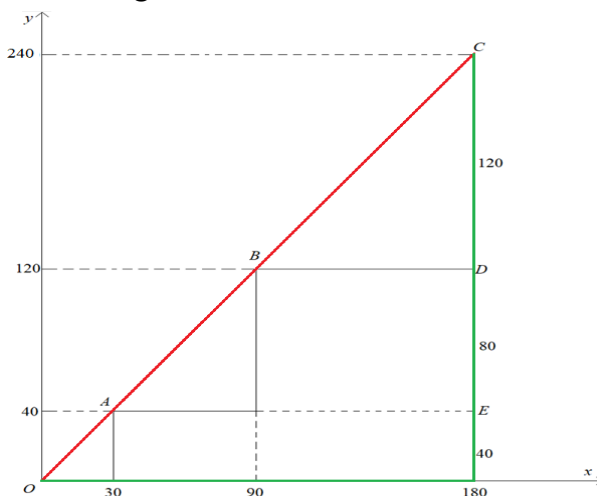


Figura 3.1.

Notăm  $O(x_0; y_0)$ ,  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$  și  $C(x_C; y_C)$ . Deoarece punctul  $O$  este originea sistemului rectangular cartezian de coordonate, rezultă că  $O(0; 0)$ . Conform rezultatelor obținute mai sus rezultă că prima coordonată a punctului  $A$  este 30. Din egalitatea  $AB = \sqrt{x^2 + 1600}$ , formula distanței

$$OA = \sqrt{(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2} = \sqrt{(30 - 0)^2 + (40 - 0)^2},$$

modul cum a fost ales sistemul rectangular cartezian de coordonate, din considerente practice și de securitate a realizării unui zbor cu vehiculul aerian, respectând legislația Republicii Moldova în vigoare, tragem concluzia că a doua coordonată a punctului  $A$  este 40. Deci punctul  $A$  are coordonatele  $(30; 40)$ . În mod analog obținem:  $B(90; 120)$  și  $C(180; 240)$ .

Deoarece traectoria vehiculului aerian reprezintă o dreaptă, iar dreapta se determină

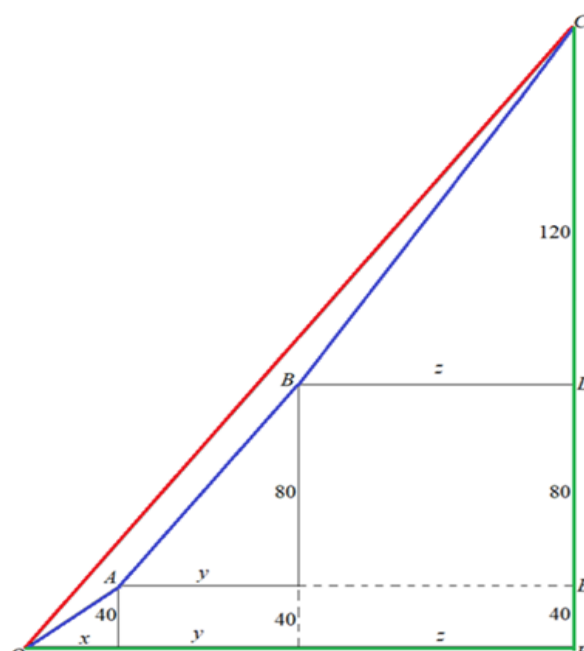


Figura 3.2.

în mod univoc de orice două puncte distincte ale ei, atunci alegem, de exemplu, punctele  $O$  și  $A$  cu ajutorul cărora determinăm ecuația ei în coordonate rectangulare carteziene:

$$\frac{x - x_0}{x_A - x_0} = \frac{y - y_0}{y_A - y_0}, \quad \frac{x}{30} = \frac{y}{40}, \quad 4x - 3y = 0.$$

Dacă substituim coordonatele punctelor  $B$  și  $C$  în ecuația dreptei obținute, atunci ne putem convinge că ele de asemenea aparțin dreptei  $4x - 3y = 0$ .

Prin urmare, ecuația traiectoriei vehiculului aerian are forma:  $4x - 3y = 0$ .

c) Expresiile sau ecuațiile parametrice ale traiectoriei vehiculului aerian ce conține punctele  $O, A, B$  și  $C$  vor avea forma:

$$\frac{x}{30} = \frac{y}{40} = t, \text{ de unde } \begin{cases} x = 3t, \\ y = 4t. \end{cases}$$

d) Valorile parametrului  $t$  pentru fiecare dintre punctele  $O, A, B$  și  $C$  le aflăm substituind coordonatele punctelor respective în ecuațiile parametrice ale traiectoriei.

Astfel, pentru punctul  $O(0; 0)$  avem  $t = 0$ , pentru punctul  $A(30; 40)$  valoarea parametrului  $t = 10$ , pentru punctul  $B(90; 120)$  obținem  $t = 30$ , iar pentru punctul  $C(180; 240)$  parametrul  $t = 60$ .

După obținerea rezultatelor matematice continuăm cu activitatea de programare a zborului.

e) Programul pentru realizarea zborului vehiculului aerian fără pilot uman la bord în limbajul Scratch prin intermediul blocurilor este prezentat în figura 3.3.

Din considerente de securitate și comodate zborul se va realiza în planul ce se determină de ecuația  $4x - 3y + z = 90$ . Realizarea zborului în acest plan și în localul respectiv nu necesită acordul autorităților respective.



Figura 3.3. Programul pentru realizarea zborului

După ce a fost programată traiectoria vehiculului aerian fără pilot uman la bord, studenții vor fi capabili să modeleze un zbor atât la un simulator specializat cât și să realizeze un zbor cu un vehicul aerian real printr-o singură apăsare pe butonul respectiv.

În următoarele trei figuri de mai jos (Figura 3.4 – 3.6) este prezentată traiectoria vehiculului aerian, la un simulator, ce conține punctele  $O$ ,  $A$ ,  $B$  și  $C$ .

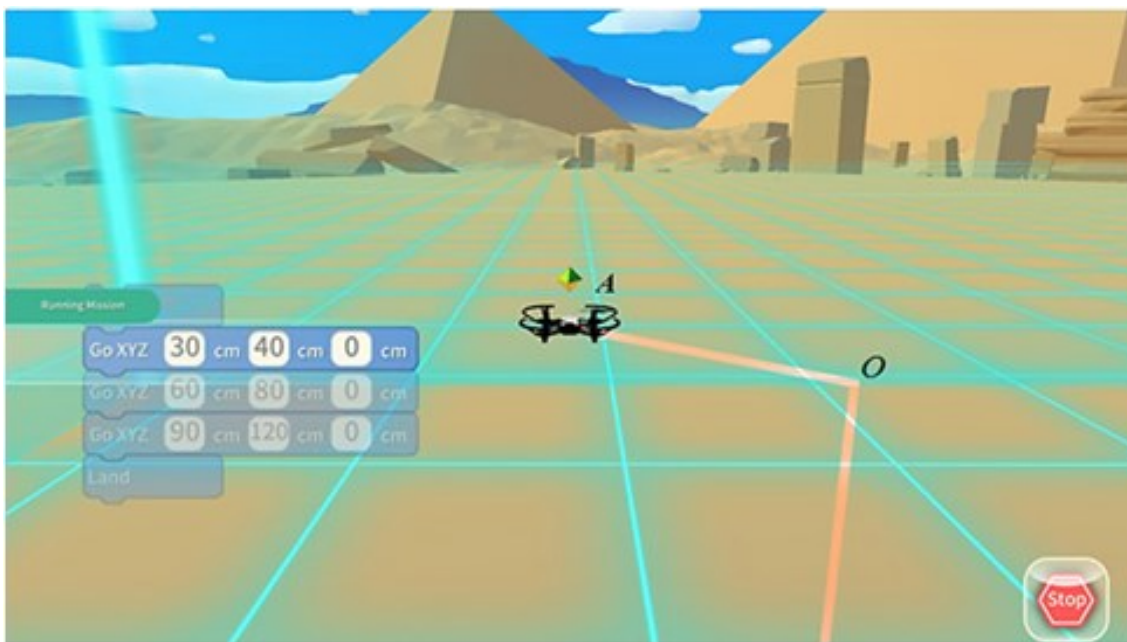


Figura 3.4. Traiectoria vehiculului aerian fără pilot din punctul  $O$  în punctul  $A$



Figura 3.5. Traiectoria vehiculului aerian fără pilot din punctul  $A$  în punctul  $B$

Evident, cadrul didactic poate modifica această problemă cerând, de exemplu, să fie determinate toate traiectoriile posibile ale vehiculului aerian fără pilot aferente punctelor staționare ale funcției de trei variabile

$$f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + 1600} + \sqrt{y^2 + 6400} + \sqrt{z^2 + 14400},$$

unde  $x + y + z = 180$  și pentru traiectoriile obținute studenții să:

- f) scrie programul în limbajul Scratch cu ajutorul blocurilor;
- g) realizeze zborul la un simulator specializat;



h) realizeze zborul cu un vehicul aerian real.

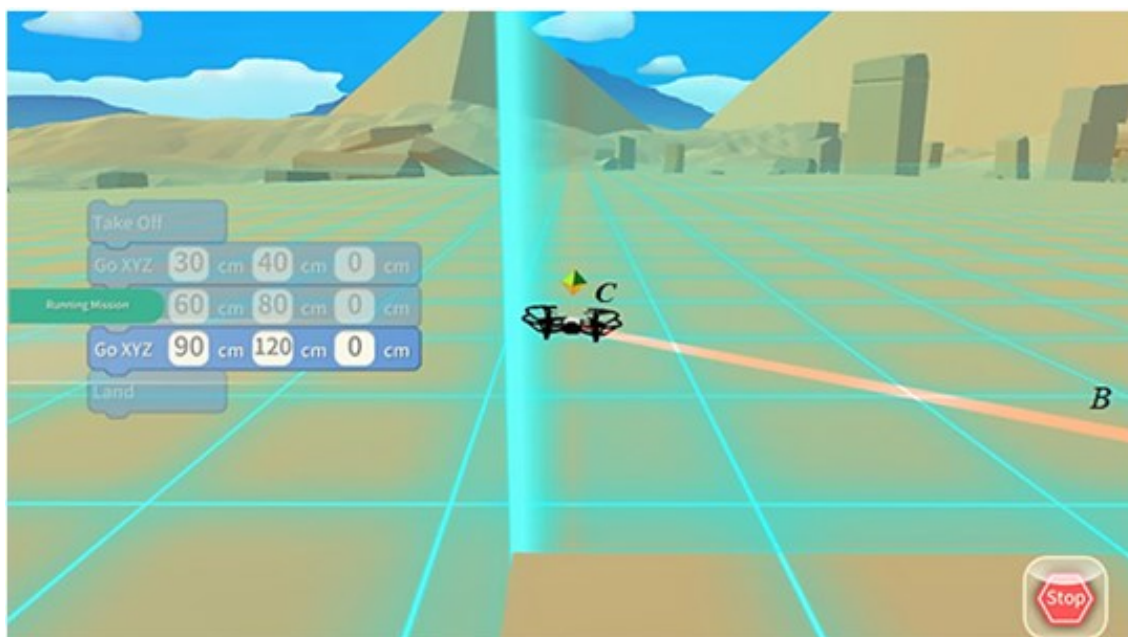


Figura 3.6. Traiectoria vehiculului aerian fără pilot din punctul B în punctul C

În asemenea caz pentru punctul staționar cu coordonatele  $(-45; 90; 135)$ , prin modelare, vom obține că traiectoria vehiculului aerian trece prin punctele  $O(0; 0)$ ,  $A_1(-45; 40)$ ,  $B_1(90; 80)$  și  $C_1(135; 120)$ .

Observăm că punctele  $O$ ,  $B_1$  și  $C_1$  aparțin dreptei  $8x - 9y = 0$ , iar punctul  $A_1$  nu aparține dreptei date (Figura 3.7).

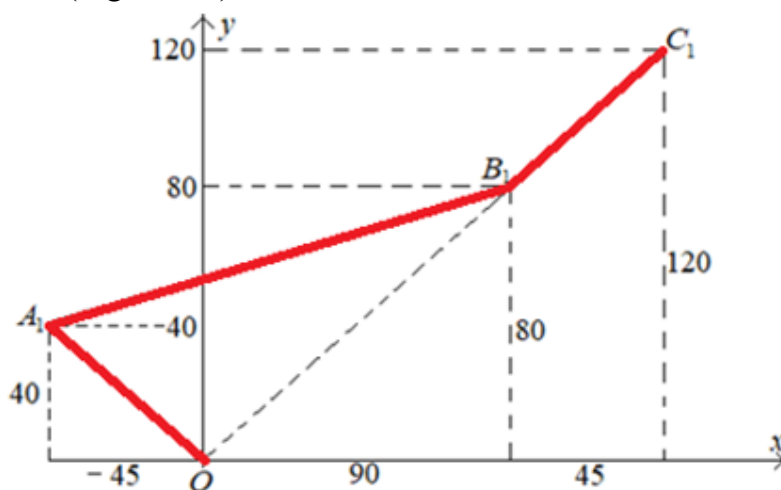


Figura 3.7. Traiectoria matematică a vehiculului aerian fără pilot pentru punctul staționar  $(-45; 90; 135)$

Însă punctele  $O(0; 0; 90)$ ,  $A_1(-45; 40; 90)$ ,  $B_1(90; 80; 90)$  și  $C_1(135; 120; 90)$  aparțin planului  $z = 90$ . Prin urmare, zborul îl putem realiza în planul ce se determină de ecuația  $z = 90$ . Traiectoria matematică a vehiculului aerian fără pilot este prezentată în figura 3.7.

Programul pentru realizarea zborului vehiculului aerian fără pilot în limbajul Scratch prin intermediul blocurilor este prezentat în figura 3.8.



Figura 3.8. Programul pentru realizarea zborului aferent punctului staționar (-45; 90; 135)

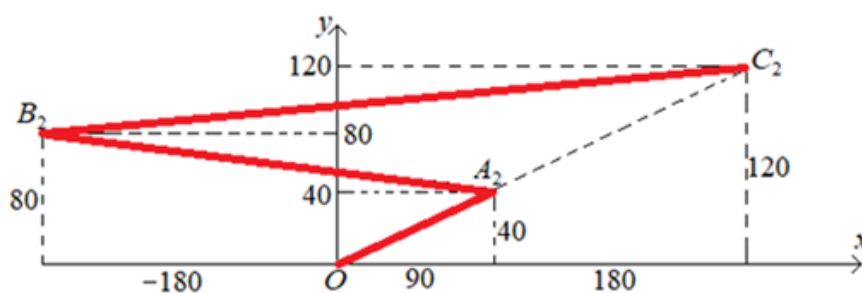


Figura 3.9. Traiectoria matematică a vehiculului aerian fără pilot pentru punctul staționar (90; -180; 270)



Figura 3.10. Programul pentru realizarea zborului aferent punctului staționar (90; -180; 270)

Pentru punctul staționar cu coordonatele  $(90; -180; 270)$  – traiectoria vehiculului aerian de asemenea este o linie frântă și trece prin punctele:  $O(0; 0)$ ,  $A_2(90; 40)$ ,  $B_2(-180; 80)$  și  $C_2(270; 120)$ . Observăm că punctele  $O$ ,  $A_2$  și  $C_2$  aparțin dreptei  $4x - 9y = 0$ , iar punctul  $B_2$  nu aparține dreptei date. Însă punctele  $O(0; 0; 90)$ ,  $A_2(90; 40; 90)$ ,  $B_2(-180; 80; 90)$  și  $C_2(270; 120; 90)$  aparțin planului  $z = 90$ . Prin urmare, zborul îl putem realiza de asemenea în planul ce se determină de ecuația  $z = 90$ . Traectoria matematică a vehiculului aerian este prezentată în figura 3.9.

Programul pentru realizarea zborului vehiculului aerian în limbajul Scratch prin intermediul blocurilor este prezentat în figura 3.10.

Pentru consolidarea cunoștințelor și formarea competențelor de rezolvare a problemelor de tipul celei de mai sus prin metoda nonstandardă pot fi rezolvate și alte probleme, generalizându-le până la triunghiuri arbitrare.

## CAPITOLUL 4. APLICAREA MODELĂRII MATEMATICE ÎN FIZICĂ ȘI BIOLOGIE

### 4.1. Considerente didactice privind metoda modelării matematice

Un model matematic este o descriere a unui sistem folosind conceptele și limbajul matematic. Procesul de dezvoltare a unui model matematic este denumit modelare matematică. Modelele matematice se pot constitui în sisteme dinamice, modele statistice, ecuații diferențiale, modele ale teoriei jocurilor sau diverse combinații ale lor, implicând o varietate de structuri abstracte.

Modelarea matematică se concentrează pe aplicarea conceptelor algebrice, geometrice, din analiza matematică, statistice și de probabilitate, la experiențe din lumea reală. Calitatea unui domeniu științific depinde de cât de bine armonizează modelele matematice ale teoriei domeniului respectiv cu rezultatele experimentelor repetabile.

În literatură sunt descrise diverse tipuri de modele matematice: liniare și non-liniare; statice și dinamice; explicite și implicite; discrete și continue; deterministe și probabiliste (stocastice); deductive, inductive sau variabile (flotant); strategice și non-strategice.

Modelele raționale sunt derivate din inferențe logice bazate pe observație, teorie și lansarea de ipoteze despre comportamentul componentelor fizice ale unui sistem, în timp ce modelele empirice reflectă principalele caracteristici ale datelor disponibile. Domeniile importante de aplicare a modelelor includ măsurarea, colectarea de date, diagnosticarea, predicția, planificarea și evaluarea măsurilor de prevenire și control, analiza cost-beneficiu, evaluarea riscurilor și maximizarea eficacității operațiunilor.

În educația matematică elementele de modelare matematică sunt menite să consolideze abilitățile de calcul, să aprofundeze înțelegerea ideilor cheie și a strategiilor de soluționare a unor probleme, să contribuie la extinderea cunoștințelor printr-o varietate de aplicații, la dezvoltarea fluentei computaționale ș.a. Interesul recent pentru modelarea matematică a fost stimulat de studiul PISA al OCDE, care are drept scop evaluarea gradului de alfabetizare matematică a elevilor.

Autorii publicației [2] consideră necesar a răspunde la întrebările

(1) Dacă privim modelarea matematică ca un proces bidirecțional de transfer între lumea reală și matematică, care sunt caracteristicile sale esențiale?

(2) Care dintre aceste caracteristici esențiale diferențiază modelarea matematică de rezolvarea problemelor din matematica școlară?

(3) Din punctul de vedere al unui practician al modelării matematice, care sunt competențele și caracteristicile esențiale ale gândirii care trebuie dezvoltate la elevi pentru a le permite să devină modelatori matematici competenți?

Cercetătorii recomandă examinarea procesului de formare a abilității de modelare matematică din următoarele perspective: matematic, cognitiv, curricular, instrucțional și al formării profesorilor școlari.

În lucrarea [3] se constată că atunci când modelarea este examinată din perspectivă cognitivă, accentul se pune pe procesele de gândire individuale care sunt exprimate, în principal, prin anumite acțiuni verbale și non-verbale în combinație cu soluții scrise în timpul activităților de modelare ale indivizilor (inclusiv profesorilor).

Este oare posibil sau este oare necesar să se identifice un core curriculum referitor la modelarea matematică în cadrul curriculumului matematic general?

În curriculum-ul la matematică pentru liceu aprobat în Republica Moldova în lista de valori și atitudini figurează *formarea obișnuinței de a recurge la concepte și metode matematice în abordarea unor situații cotidiene sau pentru rezolvarea unor probleme în situații reale și/sau modelate* [5].

În afară de aceasta, doar pentru profilul umanist este inclusă următoarea competență specifică: *Investigarea seturilor de date, folosind instrumente, inclusiv digitale, și modele matematice, pentru a studia/explica relații și procese, manifestând perseverență și spirit analitic* [5, p. 10].

Din punct de vedere al instruirii se cere a preciza răspunsul la întrebările:

- Care sunt conținuturile relevante pentru a forma competențele specifice corelate cu modelarea matematică?
- Cum trebuie să fie construit discursul cadrului didactic în acest context?
- Care este volumul de timp necesar pentru realizarea sarcinilor ce vizează dezvoltarea competențelor specifice corelate cu modelarea matematică?
- Cum vom evalua dacă elevul deține competența?

În curriculumul pentru liceu la unele unități de conținut sunt prescrise unități de competențe care vizează procesul de modelare:

1. Modelarea unor situații practice, a unor procese reale, inclusiv din domeniul economic sau tehnic, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală.
2. Modelarea geometrică a unor situații cotidiene și/sau din alte domenii, inclusiv utilizând dreptele, ecuațiile dreptelor.
3. Modelarea unor situații cotidiene simple prin intermediul funcțiilor, ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor studiate și rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor obținute. P. 61
4. Modelarea unor situații practice, a unor procese reale, inclusiv din domeniul economic, antreprenorial, tehnic, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală.
5. Modelarea, folosind materiale adecvate, a unor poziții relative ale punctelor, ale dreptelor, ale figurilor în plan și spațiu, ale planelor în spațiu în contextul relației de perpendicularitate în spațiu.

6. Modelarea transformărilor geometrice în spațiu, utilizând diverse materiale adecvate, inclusiv a unor situații reale și/sau modelate [5].

În opinia noastră, aceste unități de competență se referă la două semnificații ale termenului „modelare”. Primele patru unități de competență din lista de mai sus se referă la metoda modelării matematice, iar ultimele două se referă la elaborarea (construirea, confecționarea) unor mostre care ar putea servi drept mijloace didactice pentru demonstrarea/vizualizarea spațială a situațiilor descrise.

În ce privește profesorii de matematică, este incontestabil rolul lor în stimularea însușirii de către elevi a metodei modelării matematice și a dezvoltării competențelor matematice prin implementarea acestei metode la clasă. Dar este important ca profesorii să fi fost implicați în soluționarea unor probleme autentice prin implementarea metodei modelării matematice, să dețină cunoștințe privind aplicarea metodei, să-și dezvolte continuu abilitățile didactice în vederea familiarizării elevilor cu procesul de modelare matematică la nivel teoretic și practic.

În opinia noastră, familiarizarea cu metoda modelării matematice, ca metodă științifică de studiere a realității, poate fi natural corelată cu implementarea metodei didactice – metoda proiectului și cu abordarea STEM în educație, deoarece aplicarea metodei modelării matematice va presupune neapărat luarea în considerare a diferitor aspecte interdisciplinare. Cel puțin încă două aspecte trebuie ținute la evidență: utilizarea tehnologiilor informaționale la toate etapele de implementare a metodei modelării matematice și organizarea/orchestrarea procesului de executare a sarcinilor de către elevi, pentru a simula procesul de modelare matematică pentru rezolvarea unor probleme reale.

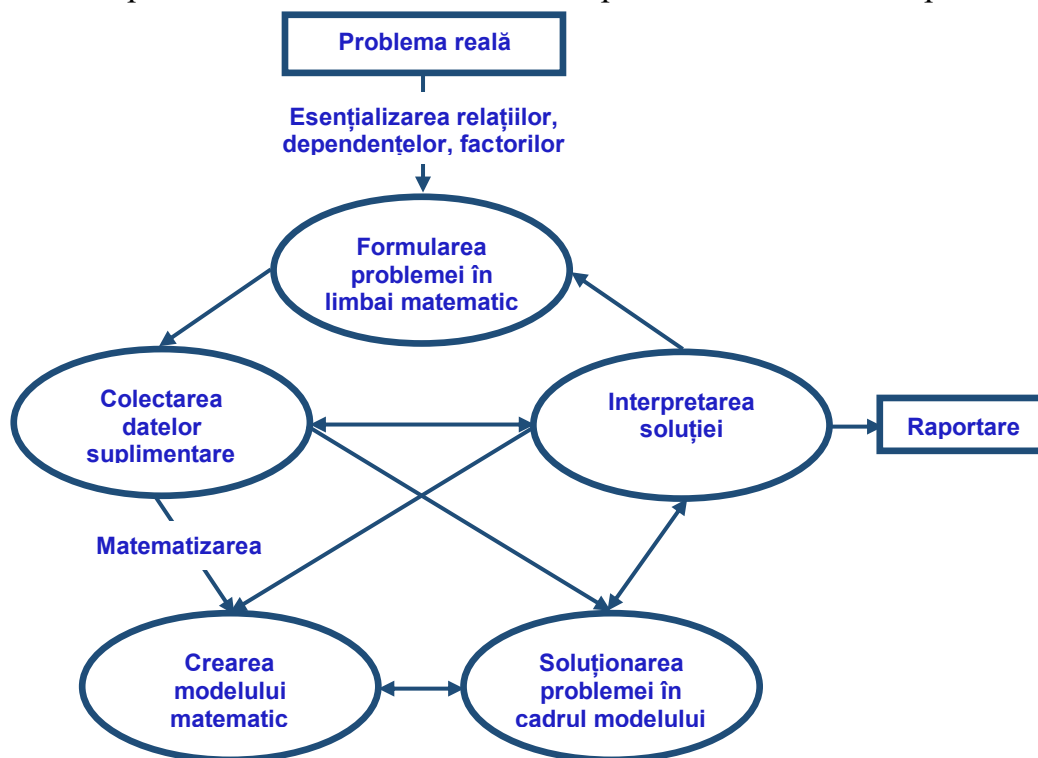


Figura 4.1. Etapele procesului de modelare matematică

Aspectele didactice privind particularitățile familiarizării elevilor cu metoda modelării matematice sunt prezentate în [6].

Viziunea noastră privind structura procesului de modelare matematică este prezentată în Figura 4.1.

Tabelul de mai jos include o sinteză a proceselor, etapelor și a unor acțiuni care vizează modelarea matematică.

Procese	Etape	Acțiuni
Problema reală		Comunicarea cu partea interesată în rezolvarea problemei. Stabilirea scopului și a obiectivelor.
Modelarea matematică	Formularea problemei în limbaj matematic	Stabilirea dependențelor între parametrii prezentați explicit. Identificarea unor factori ascunși. Decizia cu privire la tipul modelului adecvat situației.
	Colectarea datelor	După necesitate: observarea, experimentul, măsurări, stabilirea priorităților etc.
	Elaborarea modelului	Prelucrarea bazelor de date. Stabilirea fundamentelor teoretice matematice și de specialitate: concepte, relații, Stabilirea limitelor și restricțiilor Elaborarea schemelor-bloc, a algoritmilor, programelor etc. Formalizarea/transcrierea problemei în limbaj matematic.
	Soluționarea problemei în cadrul modelului	Rezolvarea analitică/sintetică a problemei. Executarea programelor. Selectarea soluțiilor adecvate.
	Interpretarea soluției	Analiza rezultatelor. Vizualizarea în mediul real de proveniență a problemei. Validarea soluției
Raportarea		Descrierea rezultatelor în limbaj accesibil solicitantului. Analiza rezultatelor. Formularea de recomandări.

Cadrul didactic care își asumă familiarizarea elevilor cu modelarea matematică va trebui să-și dezvolte continuu abilități complexe pe mai multe paliere: din perspectiva matematică, ele vor ține de compartimentele de bază (algebra liniară; analiza numerică; statistică matematică și probabilitate; geometrie, inclusiv computațională; analiză matematică, calcul diferențial și integral; analiza funcțională; algoritmizare non-numerică ș.a.); din perspectiva metacognitivă ele vor fi orientate atât spre realitate, cât și către matematică (stabilirea de inferențe logice; gândire inductivă (observațională); analogie; clasificare; ordonare, seriere; formulare de obiective; prioritizare; a observa pattern-uri spațiale ancorate în timp în lumea reală; gândire translațională; formularea ipotezelor despre realitate pentru a elabora un model matematic).

Drept strategie comportamentală pentru cadrele didactice și elevi poate servi următoarea: priviți (studiați) cum modelează alții în situații similare. Exemplele de

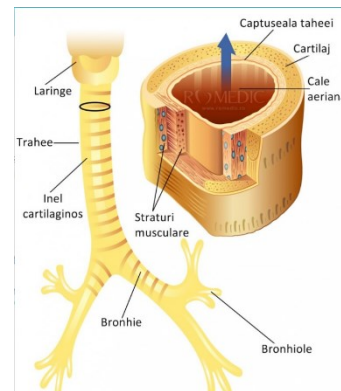
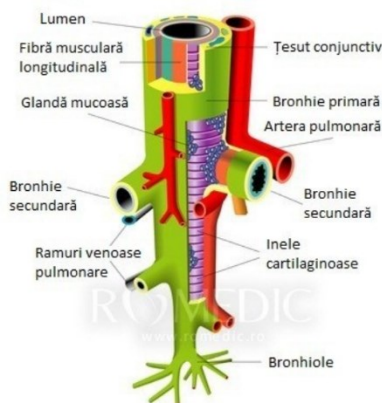
aplicare a metodei modelării matematice în procesul educațional nu sunt foarte răspândite. În Ghidul pentru implementarea curriculumului este invocat conceptul de modelare matematică în legătură cu rezolvarea unei probleme al cărei enunț se referă la dezvoltarea bacteriilor *Escherichia coli* [5, p. 151]. De fapt, autorii prezintă o problemă matematică simplă, care presupune aplicarea conceptului de progresie geometrică.

Particularități ale procesului de modelare matematică corelate cu procesul educațional corespunzător și exemple concrete pot fi examinate în publicațiile [1 – 4].

## 4.2. Aplicarea modelării matematice în biologie

### *Traheea*

Traheea este un organ fibrocartilagos, tubular care continuă laringele întinzându-se de la extremitatea inferioară a acestuia până în mediastin unde se bifurcă în cele două bronhii principale sau pulmonare. Ea prezintă două neregularități numite depresiuni și anume depresiunea aortică, produsă la aortă și depresiunea tiroidiană, produsă de glanda tiroidă. Este un organ elastic, putându-se alungi sau scurta ca un resort.



Tusea este un mecanism de apărare al aparatului respirator, care apare automat, deși îl putem declanșa și voluntar. Mecanismul de producere a tusei este următorul: un inspir profund care este urmat de închiderea glotei (reprezentată de corzile vocale care se apropie una de alta), creșterea presiunii intratoracice prin contracția mușchilor expiratori, apoi glota se deschide brusc și aerul este expulzat cu putere. Când tușim, raza traheii se micșorează, afectând viteza aerului din trahee.

Vom crea un model matematic al acestui proces, considerând că traheea este cilindrică.

Dacă  $r_0$  este raza traheii în stare normală, relația dintre viteza  $V$  a fluxului de aer și raza  $r$  a traheii în timpul tusei este dată de funcția

$$V(r) = ar^2(r_0 - r), \quad (1)$$

unde  $a$  este un coeficient constant pozitiv. Vom afla raza traheii pentru care viteza fluxului de aer este maximă.

Constatăm că



$$0 \leq r \leq r_0. \quad (2)$$

Prima derivată de la funcția  $V(r)$  va permite să găsim extremele funcției:

$$V'(r) = 2arr_0 - 3ar^2 = ar(2r_0 - 3r). \quad (3)$$

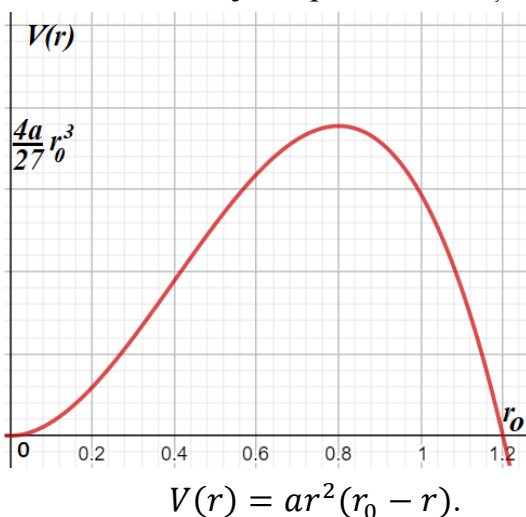
Aflăm zerourile derivatei:  $r = 0$  și  $r = \frac{2}{3}r_0$ . Ambele valori satisfac condiția (1), iar una este extremitatea intervalului în care variază  $r$ .

Calculăm valoarea vitezei  $V(r)$  pentru  $r = 0$ ,  $r = \frac{2}{3}r_0$  și  $r = r_0$ :

$$V(0) = 0; V\left(\frac{2}{3}r_0\right) = \frac{4a}{27}r_0^3; V(r_0) = 0.$$

Diametrul transversal extern al traheii este de 2cm la bărbați și 1,5cm la femei. Diametrul transversal intern este de 12mm și crește după deces prin relaxarea musculaturii netede de la nivelul feței sale posterioare.

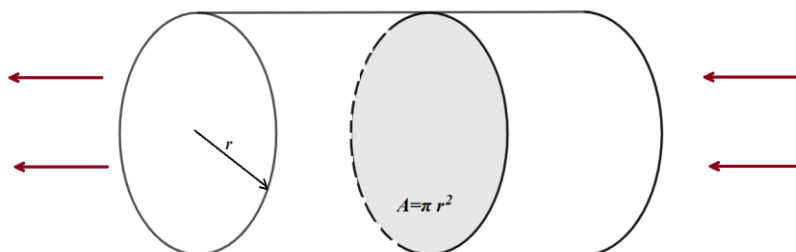
Prin urmare,  $r_0 = 1,2cm$ . Graficul de mai jos reprezintă funcția  $V(r)$  pentru  $a \approx 3$ .



Biologii calculează fluxul  $F$  de aer care se află în trahee cu ajutorul formulei  $F = V \cdot A$ , unde  $V$  este viteza aerului, iar  $A$  – aria secțiunii transversale a traheii. Vom determina cu ce este egală raza  $r$ , pentru ca fluxul să fie maxim. Vom aplica formula de calculare a vitezei (1).

Pentru a modela situația se presupune că secțiunea transversală este circulară.

Prin urmare,  $A = \pi r^2$ .



Derivăm funcția  $F(r) = ar^2(r_0 - r) \cdot \pi r^2 = a\pi r^4(r_0 - r)$  pentru a determina valoarea lui  $r$ , care este corespunzătoare fluxului maximum:

$$F'(r) = (a\pi r^4(r_0 - r))' = 4a\pi r^3 r_0 - 5a\pi r^4 = a\pi r^3(4r_0 - 5r).$$

Aflăm zerourile derivatei:  $r = 0$  și  $r = \frac{4}{5}r_0$ . Ambele valori satisfac condiția (1), iar una este extremitatea intervalului în care variază  $r$ .

Calculăm valoarea vitezei  $F(r)$  pentru  $r = 0$ ,  $r = \frac{4}{5}r_0$  și  $r = r_0$ :

$$F(0) = 0; V\left(\frac{4}{5}r_0\right) = \frac{256a\pi}{3125}r_0^5; V(r_0) = 0.$$

### Modele exponențiale

Funcțiile exponențiale care au baza  $e$  au rolul central în matematica aplicată.

O cantitate  $Q(t)$  care variază după legea

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}, \quad (1)$$

unde  $Q_0$  și  $k$  sunt constante pozitive, este considerată că posedă o creștere exponențială. Cantitățile care cresc exponențial sunt caracterizate de faptul că rata creșterii lor este proporțională cu mărimea lor. În formula (1) mărimea  $Q_0$  este valoarea inițială  $Q(0)$ . În absența unor constrângeri ale mediului, populațiile cresc exponențial.

**Problema A.** A fost determinat în baza studiilor experimentale că în condiții ideale numărul de bacterii al unei colonii crește exponențial. Presupunem că într-un mediu sunt prezente 2000 de bacterii, iar peste 20 de minute numărul lor a crescut până la 6000. Câte bacterii vor fi în total peste o oră?

**Soluție.** Fie  $Q(t)$  este numărul de bacterii prezente peste un timp  $t$ . Deoarece la momentul inițial de timp erau prezente 2000 de bacterii, avem  $Q_0 = 2000$ .

Atunci modelul matematic al procesului de creștere a populației de bacterii va fi

$$Q(t) = 2000e^{kt}.$$

Peste 20 de minute vor fi 6000 de bacterii, prin urmare  $Q(20) = 6000$ . Dar atunci  $6000 = 2000e^{20k} \Rightarrow e^{20k} = 3$ .

Calculăm câte bacterii vor fi prezente în acest mediu peste 1h:

$$Q(60) = 2000e^{60k} \Rightarrow Q(60) = 2000(e^{20k})^3 \Rightarrow Q(60) = 54000 \text{ bacterii.}$$

### Procesul de învățare

Curbă de învățare reflectă o corelație între nivelul performanței unui individ de a realiza o sarcină și numărul de exersări sau timpul necesar pentru a finaliza sarcina.

Deși teoria afirmă că mai multă exersare va conduce la o scădere a timpului, nu întotdeauna funcționează așa. Mulți factori pot influența rezultatele finale, rezultând o varietate de forme diferite ale curbei de învățare. Arthur Bills a descris curba de învățare în lucrarea sa „Psihologie experimentală generală”: „curba de învățare este un dispozitiv grafic pentru a reprezenta rata de îmbunătățire în termenii unui anumit criteriu de eficiență, ca rezultat al practicii” [9, p. 192].

O formulă simplă stabilită în baza unor măsurări este  $f(x) = ax^b$ , unde  $f(x)$  este timpul mediu pe durata măsurată;  $a$  reprezintă timpul pentru finalizarea sarcinii prima dată;  $x$  reprezintă numărul total de încercări finalizate;  $b$  reprezintă panta funcției [10].

Formula poate fi folosită ca instrument de predicție pentru a prognoza performanța viitoare.

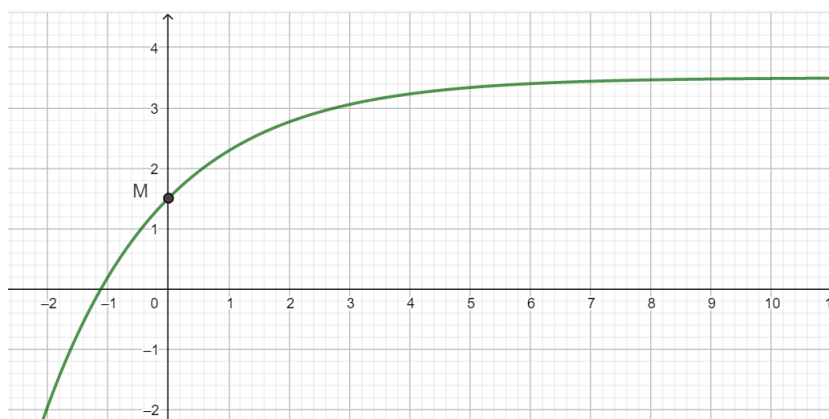
Un model precizat al curbei de învățare este:

$$Q(t) = B - Ae^{-kt}, \quad (2)$$

unde  $A, B, k$  sunt constante pozitive.

Pentru a construi graficul funcției stabilim câteva proprietăți:

- 1) Punctul de intersecție cu axa OY este  $M(0, B - A)$ , deoarece  $Q(0) = B - A$ .
- 2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = B - 0 = B$ .
- 3)  $\lim_{t \rightarrow -\infty} Q(t) = -\infty$ .



### 4.3. Aplicarea modelării matematice în fizică

Mecanica este știința mișcării și echilibrului corpurilor și a mediilor continue sub acțiunea forțelor de natură variată și a interacțiunilor și proceselor care însoțesc aceste mișcări.

O serie de compartimente ale mecanicii sunt asociate cu semnificația de bază a cuvântului „mecanică” încă la grecii antici - știința mașinilor, a mecanismelor. O sarcină a mecanicii este dezvoltarea unor metode pentru controlul unor sisteme tehnice. Obiectul studiului mecanicii include, de asemenea, domenii precum: prognoza meteo bazată pe calculul mișcărilor atmosferice complexe asociate cu transferul de căldură și umiditate; studiul sistemului circulator uman; proiectarea de noi materiale etc..

Una dintre principalele metode ale mecanicii moderne este crearea și studiul modelelor matematice ale fenomenelor studiate. În cazul unor procese complexe, este imposibil să se ia în considerare pe deplin toate circumstanțele și procesele care sunt asociate cu fenomenul studiat. Prin urmare, în mecanică (și într-adevăr în știință) studiul unui fenomen real este înlocuit cu studiul modelului său.

Există modele standard, utilizate în mod obișnuit, de exemplu, un punct de material, un corp absolut rigid, un continuum elastic, diverse modele de medii elastic-plastice, un lichid și gaz ideal (nevâscos), lichide și gaze vâscoase, modele de amestec și multe altele. Nu sunt modelate doar obiectele de studiu, ci și modalitățile de interacțiune a acestora,

adică sunt introduse conceptele de diferite tipuri de forțe și câmpuri, conceptele de fluxuri de căldură, difuzie etc..

Cercetătorul trebuie să aleagă cel mai simplu model care descrie în mod adecvat procesul studiat. De exemplu, în procesele lente, care durează zeci de mii de ani, scoarța terestră este considerată ca un lichid foarte vâscos, în timp ce în cazul cutremurelor scoarța terestră este modelată ca un corp elastic.

### **Modelul Navier-Stokes**

Academicianul M.A. Lavrentiev (matematician și specialist în hidrodinamică) a studiat acțiunea asupra unui obstacol a unei tije metalice care se mișcă cu viteză mare de-a lungul axei sale. Acest lucru anticipează, în esență, ideea efectului cumulativ al unei explozii. El a propus o interpretare hidrodinamică originală a fenomenului de cumul, conform căreia, la presiuni enorme care apar în momentul exploziei, metalul poate fi considerat ca un lichid ideal incompresibil; după aceea, folosind ecuațiile hidrodinamicii, a fost posibil să se calculeze dinamica jetului de metal și efectul de penetrare. Mișcarea metalului blindajului (armurii) în timpul penetrării cumulate în modelul clasic al lui M. A. Lavrentiev este descrisă ca fluxul unui fluid ideal, adică nevâscos. Baza pentru posibilitatea unei astfel de descrieri este că, la viteze gigantice, proprietățile de rezistență ale metalului tije și armurii cumulate sunt neglijabile în comparație cu forțele de presiune care apar ca urmare a efectelor inerțiale. Pe de altă parte, atunci când un glonț care zboară rapid interacționează cu un jet de apă și îl lovește, jetul „se rupe” în bucăți (fragmente, nu picături), ca un corp solid.

Ca în orice știință în curs de dezvoltare, noi modele sunt dezvoltate constant în mecanică. De exemplu, la mijlocul secolului al XX-lea, au fost create modele de lichide și gaze care interacționează cu un câmp electromagnetic și sunt acum utilizate activ - magnetohidrodinamică, electrohidrodinamică, hidrodinamica lichidelor magnetizabile.

Nu există o graniță clară între matematicieni și mecanici. Cu munca lor, mecanicii dezvoltă și matematica, formulând și rezolvând noi probleme matematice. Mulți matematicieni se mândresc cu rezultatele legate de mecanică.

Modelul Navier-Stokes al curgerii fluidului vâscos a fost utilizat în mod activ de mai bine de un secol și jumătate, în timp ce teorema existenței și unicității pentru acest model nu a fost încă dovedită.

Ecuațiile Navier-Stokes sunt un sistem de ecuații diferențiale parțiale care descriu mișcarea unui fluid newtonian vâscos. Ecuațiile Navier-Stokes sunt printre cele mai importante în hidrodinamică și sunt utilizate în modelarea matematică a multor fenomene naturale și probleme tehnice. Numit după fizicianul francez Henri Navier și matematicianul britanic George Stokes. În cazul unui fluid incompresibil, sistemul este format din două ecuații:

- ecuații de mișcare,
- ecuații de continuitate.

În hidrodinamică, ecuația Navier-Stokes este de obicei numită o singură ecuație vectorială a mișcării. Ecuația Navier-Stokes a fost obținută pentru prima dată de Navier (1822, fluid incompresibil [7]) și Poisson (1829, fluid compresibil [8]), care au pornit de la conceptele model ale forțelor moleculare.

În formă vectorială pentru un lichid, acestea sunt scrise după cum urmează:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v} + \nu \Delta \bar{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \bar{f},$$

unde

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$  ( $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  – sunt vectorii directori pentru axele  $x, y, z$ ) operatorul nabra;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - operatorul vectorial al lui Laplas;

$t$  – timpul;

$\nu$  - coeficientul de vâscozitate cinematică;

$\rho$  – densitatea;

$p$  – presiunea;

$\bar{v}$  - câmpul vectorial al vitezei;

$\bar{f}$  - câmpul vectorial al forțelor de masă

Complexitatea modelelor matematice moderne în mecanică, împletirea caracteristicilor fizice, geometrice și de altă natură ale proceselor din ele duc la necesitatea utilizării tuturor mijloacelor matematicii moderne. În unele cazuri, aplicarea metodelor și abordărilor existente este suficientă pentru a rezolva problema, în altele, este necesară dezvoltarea unui nou aparat matematic.

### **Retroreflectoarele**

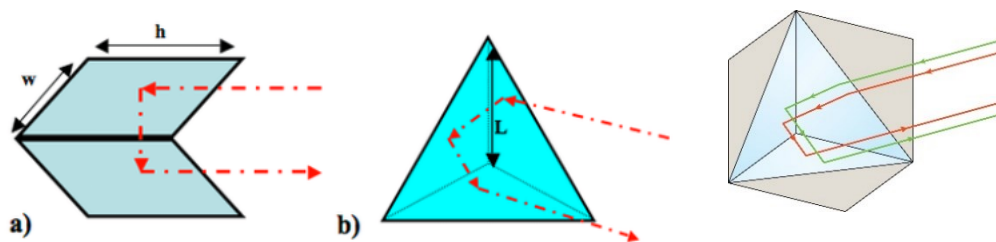
Reflectoarele joacă un rol important în îmbunătățirea siguranței rutiere. Spre deosebire de faruri, reflectoarele nu necesită energie și nu conțin becuri.

Reflectorul roșu de pe spatele unei biciclete sau al unei mașini are o formă astfel încât lumina de la farul unei mașini să treacă direct prin suprafața frontală. Spatele reflectorului are forma unui rând de prisme cu unghiul dintre fețe de  $90^0$ .

Are loc reflexia internă totală. Toată lumina se întoarce și se întoarce în direcția din care a venit, indiferent în ce direcție incide lumina pe reflector. Deci, șoferii de mașini văd reflectarea propriilor faruri în reflector. Pentru a explica principiile de funcționare a unui reflector de colț, cunoștințele școlare de optică și geometrie sunt suficiente.

Să luăm două oglinzi amplasate în plane perpendiculare. Un fascicul de lumină este reflectat conform legii „unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie”. Reflectându-se de la ambele oglinzi, fasciculul se va întoarce spre sursă paralel cu fasciculul original. Pentru a demonstra afirmația formulată, este suficient să amintim și să aplicăm două fapte geometrice: 1) suma unghiurilor interioare într-un triunghi este de

180°, 2) criteriul de paralelism al dreptelor (suma unghiurilor interne de aceeași parte a unei secante este 180°).



Un dispozitiv cu proprietăți similare se confecționează din trei oglinzi plane care formează un unghi triedru cu unghiurile plane de 90°.

O explicație „economă” a efectului poate fi dată în limbajul vectorilor. Dacă direcția fasciculului inițial este dată de un vector cu coordonate  $(a, b, c)$ , atunci după reflectarea fasciculului de la planul XOY, vectorul său director va fi  $(a, b, -c)$ , iar după reflexii succesive de la planurile YOZ și ZOZ – vectorii directori vor fi  $(-a, b, -c)$ , și respectiv  $(-a, -b, -c)$ .



Retrorefletoarele pentru biciclete și automobile conțin un set de celule similare unghiului triedru descris mai sus, care asigură o amplificare a „puterii de reflexie” a dispozitivului. Lumina farurilor incluse, reflectată de reflector, se va „întoarce” către șoferul mașinii, informându-l despre obiectul din față.

Retrorefletoarele servesc cu fidelitate și în alte medii, de exemplu, fac parte din echipamentul iahturilor și plutelor mici; o geamandură care definește limitele unor sectoare sau ale căilor navigabile, cu un reflector fixat pe ea, devine o sursă de semnale importante.

Pentru studiul lunii în Uniunea Sovietică, a fost dezvoltată o serie de aparate „Lunohod”. Primul aparat „Lunohod-1” a fost transportat pe suprafața Lunii pe 17 noiembrie 1970, „Lunohod-2” - în ianuarie 1973. Pe ambele aparate au fost instalate retrorefletoare. Aceste retrorefletoare, precum și reflectoarele programului american Apollo, au făcut posibilă măsurarea distanței în continuă schimbare de la Pământ la Lună cu mare precizie.

### ***Problema celor trei vase***

Este interesant modelul de aplicare a simetriei la rezolvarea problemelor de „turnare din vas în vas” a lichidelor. Instrumentul utilizat este sistemul „triangular” de coordonate - rețeaua imprimată pe foaia de hârtie pe care se creează modelul nu este formată din pătrate, ci din triunghiuri echilaterale. Într-un asemenea sistem de coordonate este

examinat un triunghi echilateral, de exemplu  $ABC$ , cu latura  $a$  și înălțimea  $h$ . Coordonate ale unui punct  $P$  situat în planul triunghiului  $ABC$  sunt considerate distanțele  $x, y, z$  ale punctului  $P$  de la laturile  $[BC]$ ,  $[CA]$ ,  $[AB]$  corespunzător. Aceste distanțe se consideră pozitive, dacă punctul  $P$  este situat în interiorul triunghiului și negative - dacă punctul  $P$  este situat în exteriorul triunghiului.

Constatăm că pentru punctul arbitrar  $P(x, y, z)$  situat în interiorul triunghiului avem:

$$A_{PBC} + A_{PCA} + A_{PAB} = A_{ABC} = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az = \frac{1}{2}ah \Rightarrow x + y + z = h.$$

În acest mod putem reprezenta diverse situații în care trei mărimi variabile au suma constantă. Dacă una dintre cele trei variabile se menține constantă, iar celelalte două variază, atunci punctul  $P(x, y, z)$  se deplasează pe o dreaptă paralelă unei laturi a  $\Delta ABC$ . În particular, coordonatele vârfurilor  $\Delta ABC$  au coordonatele:  $A(h, 0, 0)$ ,  $B(0, h, 0)$ ,  $C(0, 0, h)$

Laturile  $\Delta ABC$  sunt descrise de ecuațiile:

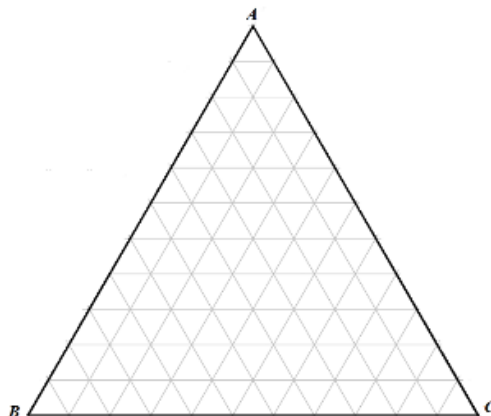
$$AB: z = 0; BC: x = 0; AC: y = 0.$$

Acest model poate fi util la rezolvarea situației când lichidul dintr-un vas trebuie distribuit în trei vase, astfel, încât în primul vas să fie  $x$  litri, în al doilea vas să fie  $y$  litri și în al treilea –  $z$  litri de lichid. Turnarea treptată a lichidului din vasul al doilea în cel de al treilea corespunde deplasării punctului  $P(x, y, z)$  de-a lungul dreptei  $x = const$  în direcția care presupune micșorarea lui  $y$  și creșterea lui  $z$ . Dacă fiecare vas are capacitatea  $h$ , atunci fiecare coordonată poate varia în limitele  $[0; h]$ . Vom nota faptul că fiecare vas are capacitatea  $h$  astfel:  $[h; h, h, h]$ . Mulțimea punctelor în care se poate ajunge în acest caz, turnând lichidul dintr-un vas în altul o vom numi *domeniul operației* și acest domeniu coincide cu interiorul triunghiului  $ABC$ :  $0 \leq x \leq h$ ;  $0 \leq y \leq h$ ;  $0 \leq z \leq h$ .

Prezintă interes cazul  $[h; h, h, h]$ , unde  $h \geq a > b > c$ . Acum cele trei vase au capacitățile  $a, b, c$  corespunzător și problema constă în a măsura o anumită cantitate  $\alpha$  de lichid, turnând din vas în vas de mai multe ori, de fiecare dată umplând un oarecare vas și golindu-l turnând în altul (uneori făcând și una și alta). Domeniul operației va fi acum:  $0 \leq x \leq a$ ;  $0 \leq y \leq b$ ;  $0 \leq z \leq c$ . Acest domeniu va reprezenta un hexagon, mărginit de șase drepte:

$$x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c.$$

În unele cazuri, domeniul poate fi un pentagon, un trapez, un paralelogram sau un triunghi.

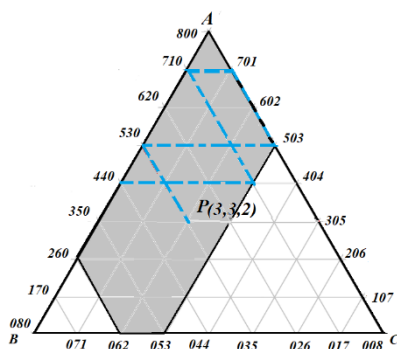
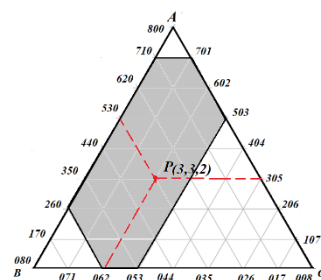


De exemplu, pe imaginea alăturată este reprezentată situația  $[8; 7, 6, 3]$ : 8 litri de lichid sunt distribuiți într-un anumit mod în vase cu capacitatea 7, 6, 3 litri. Domeniul operației va fi hexagonul hașurat, care este mărginit de dreptele:

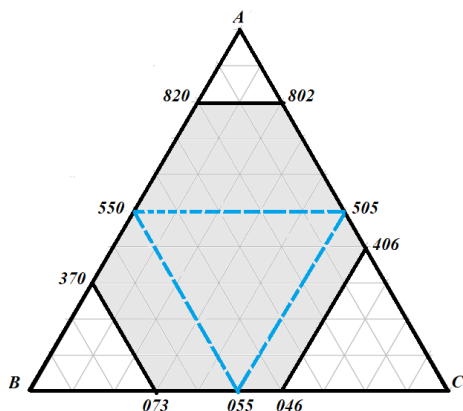
$$x = 0, x = 7, y = 0, y = 6, z = 0, z = 3.$$

Vârful hexagonului au coordonatele  $(7,0,1), (7,1,0), (2,6,0), (0,6,2), (0,5,3), (5,0,3)$ , iar în figură ele sunt codate: 701, 710, 260, 062, 053, 503.

Punctul  $P(3,3,2)$  evidențiat pe imagine corespunde situației: 3 litri în primul vas, 3 litri în al doilea vas și 2 litri în vasul al treilea. Segmentele care pornesc din acest punct indică 6 posibilități de turnare. Traseul de la 332 până la 530 indică vărsarea vasului al treilea în primul vas, respectiv, golirea vasului al treilea. Traseul de la 332 până la 233 indică umplerea vasului al treilea cu lichid din primul vas – se toarnă 1 litru din primul vas în al treilea, ultimul devenind plin. Traseul de la 332 până la 062 indică umplerea vasului al doilea cu lichid din primul vas, respectiv, golirea primului vas.



În figura alăturată linia frântă întreruptă indică cum separăm 4 litri de lichid din 8 litri, pornind de la situația 332. Acesta este unul dintre posibilele trasee. Linia frântă se construiește imitând mișcarea bilei pe masa de biliard care are forma hexagonului hașurat: direcția se schimbă la atingerea laturii hexagonului sau în vârful acestuia. În exemplul de mai sus, dacă continuăm mișcarea după regula descrisă, vom trece prin toate punctele domeniului operației care au drept coordonate numere întregi. Prin urmare, în cazul situației  $[8; 7, 6, 3]$  putem măsura orice cantitate de lichid (care se exprimă în numere întregi mai mici decât 8).



În situația  $[10; 8, 7, 6]$  putem măsura 1, 2, 3, 4 litri, dar nu vom putea măsura 5 litri, dacă inițial unul dintre vase conține 5 litri. Traseul formează un ciclu închis și nu se poate nimeri pe el din careva nod al rețelei. Astfel de situații se întâlnesc în situațiile  $[h; a, b, c]$ , unde  $h = 2d \geq a > b > c > d$ .

Un alt tip de anomalie se întâlnește în situația  $[10; 8, 7, 6]$ , în care traseele care trec prin punctul 550



formează un ornament din triunghiuri echilaterale și hexagoane regulate cu latura egală cu 1. Explicația se rezumă la faptul că nu putem separa un număr impar de litri, dacă avem la dispoziție doar vase ale căror capacitate este un număr par de litri. Același fenomen se produce și în situațiile  $[h; a, b, c]$ , unde  $a, b, c$  au un divizor comun mai mare decât 1.

Sunt deosebite și situațiile  $[h; a, b, c]$ , unde  $h = a = 2d = b + c$ , iar numerele  $b$  și  $c$  sunt reciproc prime. Domeniul operației va fi un paralelogram cu vârfurile  $a00$ ,  $cb0$ ,  $0bc$ ,  $b0c$ .

**Problema B.** Separați 4 litri de apă, având la dispoziție un vas de 8 litri plin cu apă și două vase deșarte de 3 și 5 litri.

*Soluție.* Evident, din vasul de 8 litri putem turna în vasul de 5 litri sau în cel de 3 litri. În primul caz vom realiza 7 turnări: 800, 350, 323, 620, 602, 152, 143, 440.

În cazul al doilea de asemenea 7 turnări: 800, 503, 530, 233, 251, 701, 710, 413.

### Navigatoarele spațiale

**Problema C.** În sistemul de navigație prin satelit se pot distinge două componente principale: cosmică și de control. Componenta cosmică constă dintr-o constelație de sateliți distanțați uniform în jurul Pământului. Componenta de control, situată pe Pământ, asigură, în particular, sincronizarea timpului pentru întreg „sistemul” și utilizarea unui singur sistem de coordonate. Fiecare satelit transmite în mod constant mesaje de navigație care conțin, în particular, coordonatele satelitului la momentul în care mesajul a fost trimis și ora la care a fost trimis. Un receptor care primește un astfel de mesaj poate calcula distanța până la satelit:

$$d = (t_r - t_0)c.$$

În această formulă,  $t_0$  este ora lansării semnalului,  $t_r$  este ora receptării semnalului,  $c$  este viteza de propagare a semnalului radio, adică viteza luminii.

Dacă într-un sistem de coordonate carteziene coordonatele receptorului sunt  $(x, y, z)$ , iar coordonatele satelitului la momentul trimiterii mesajului erau  $(x_1; y_1; z_1)$ , atunci putem calcula distanța dintre satelit și receptor  $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d_1^2$ .

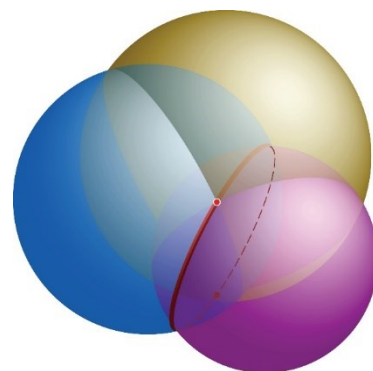
Dacă receptorul primește simultan mesaje de navigație de la încă doi sateliți, va putea găsi coordonatele receptorului rezolvând un sistem de trei ecuații:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d_1^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = d_2^2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = d_3^2, \end{cases}$$

unde  $(x_i; y_i; z_i)$  sunt coordonatele satelitului  $i$ , iar  $d_i$  – distanța de la receptor până la satelit.

Interpretarea geometrică a acestui sistem este următoarea. Fiecare satelit este considerat centrul unei sfere cu centrul pe satelit și raza egală cu distanța de la satelit până

la receptor. Toate cele trei sfere au un punct comun, fapt care rezultă din însăși

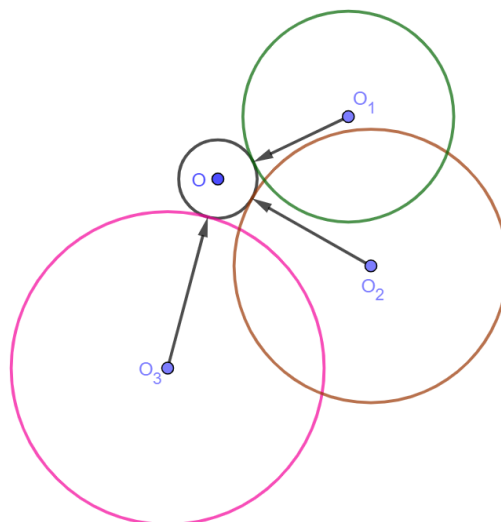


compoziția sistemului. Dintre cele două soluții „formale” (intersecția cercului cu a treia sferă), una este neplauzibilă, a doua - coordonatele receptorului.

Schema descrisă a sistemului de navigație prin satelit este simplificată, realitatea forțează utilizarea unui model mai complex. Problema de mai jos este de un grad mai înalt de dificultate și necesită cunoștințe ample de fizică.

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d_1^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = d_2^2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = d_3^2, \end{cases}$$

Schema descrisă a sistemului de navigație prin satelit este simplificată, realitatea forțează utilizarea unui model mai complex. De exemplu, schema luată în considerare este foarte sensibilă la erori, una dintre principalele probleme este influența acurateții ceasului navigatorului, care nu este capabil să comunice cu stațiile terestre ale sistemului de navigație pentru a corecta ora. Imaginați-vă că ceasul este în urmă cu 0,001s. Viteza luminii este 300000km/s deci, la determinarea distanțelor până la sateliți (a razelor sferelor) va exista o eroare de 300 km! Sistemul de ecuații de mai sus, dacă are o soluție, nu are legătură cu locația corectă. Această problemă poate fi depășită, chiar și în cazul în care precizia ceasului ne este necunoscută. Să presupunem că ceasul receptorului rămâne în urmă cu  $\delta$  secunde (o valoare necunoscută de noi) și ora în momentul trimiterii mesajului este  $t_t$ , iar în momentul primirii mesajului este  $t_p$ . Navigatorul va „presupune” că distanța până la satelit este  $d = (t_p - t_t) \cdot c$ , care este mai mică decât distanța reală  $d + \delta c$ .



Pentru a găsi coordonatele  $(x, y, z)$  și noua necunoscută  $r = \delta c$ , este nevoie de încă o ecuație, care va apărea dacă există date de la patru sateliți:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (d_1 + r)^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = (d_2 + r)^2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = (d_3 + r)^2, \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = (d_4 + r)^2. \end{cases}$$

Interpretarea geometrică a soluției problemei este următoarea. Receptorul este centrul unei sfere de rază  $r$ , care este tangentă exterior la patru sfere de rază  $d_i$  ale căror centre sunt sateliții. O astfel de sferă există, iar centrul ei este locația receptorului. (Figura arată o versiune bidimensională a acestei probleme: un cerc cu rază atinge în exterior trei cercuri).

#### 4.4. Concursuri de modelare matematică

La etapa actuală din punct de vedere psihopedagogic se creionează din ce în ce mai mult ideea că, în procesul de învățare a matematicii, elevul cu abilități mai pronunțate nu trebuie numai să urmărească și să înțeleagă raționamentele profesorului, ci este indicat ca el să parcurgă sub îndrumarea acestuia un traseu de cunoaștere, având multiple puncte comune cu cel care are loc în mintea creatorului de matematică. În concordanță cu această teorie, elevii ar trebui să formuleze probleme și tot ei să caute soluții [4]. Când copiilor li se oferă motive care au sens pentru ei pentru a-și articula gândirea, când sarcinile sunt plasate în contexte importante, ei manifestă comportamente metacognitive și auto-reglatoare, iar progresul individual al copiilor în dezvoltarea acestor abilități poate fi influențat semnificativ de anumite practici pedagogice [6].

Predarea și învățarea modelării matematice au devenit sarcini importante în educația matematică și standardele educaționale în multe țări prevăd formarea de competențe pe această dimensiune. Scopul principal al modelării matematice este de a face educația matematică interesantă și de a ajuta elevii să se bucure de matematică nu numai pentru rezultatele lor academice, ci și pentru a descoperi modul în care sunt capabili să conecteze matematica la situații din viața reală. Toți elevii au potențialul de a se angaja în modelarea matematică. Implicarea elevilor la modelarea fenomenelor și proceselor servește ca bază pentru dezvoltarea abilităților de rezolvare a problemelor, permite aprecierea importanței și relevanței matematicii în viața lor [1].

Primii pași în promovarea studiului modelării matematice pot fi realizați prin adoptarea unui program de amplificare a conținuturilor școlare. Strategia de amplificare sau îmbogățire școlară presupune conceperea unor serii de programe speciale, destinate unui individ sau unui grup mic de elevi, în afara programului școlar. Programele vor include conținuturi suplimentare la disciplinele din aria curriculară aleasă, care nu sunt acoperite decât parțial de cursurile obișnuite [2].

Există o recunoaștere certă a importanței deținerii abilităților de modelare matematică de către absolvenții de universități. Cursurile de modelare au proliferat în studiile de licență în matematică din întreaga lume. La nivel mondial sunt organizate multe competiții universitare de modelare matematică, dar la nivel școlar ele aproape că lipsesc. O modalitate importantă de a influența cultura școlii secundare și practicile de predare și învățare este instituirea unui concursului International Mathematical Modelling Challenge (IM<sup>2</sup>C). Problemele reale propuse necesită un amestec de diferite tipuri de matematică pentru analiza și rezolvarea lor, timp și muncă în echipă. Aceasta este o adevărată competiție de echipă, desfășurată pe parcursul mai multor zile, cu elevi capabili să folosească orice resurse.

Cercetătorii recomandă examinarea procesului de formare a abilității de modelare matematică din următoarele perspective: matematic, cognitiv, curricular, instrucțional și al formării profesorilor școlari.

În lucrarea [3] se constată că atunci când modelarea matematică este examinată din perspectivă cognitivă, accentul se pune pe procesele de gândire individuale care sunt exprimate, în principal, prin anumite acțiuni verbale și non-verbale în combinație cu soluții scrise în timpul activităților de modelare ale indivizilor (inclusiv profesorilor). În condițiile când experimentarea directă nu este posibilă în laboratoare specializate, un rol important îl poate avea studiul sistemic al modelelor matematice realizate de savanți-experimentatori în diverse domenii. În calitate de strategie didactică de formare a abilităților elementare de modelare matematică poate fi recomandată rezolvarea sistematică de probleme contextuale care necesită aplicarea a diverse dependențe funcționale pentru diferite domenii: științe ale naturii; economie; științe sociale; medicină.

Complexitatea problemelor extrase din contexte va crește gradual - de la situații familiare din cotidian, la fenomene și procese mai sofisticate care se produc în natură sau în activitatea umană modernă.

Vom specifica faptul că la concursurile tradiționale de matematică problemele care presupun modelarea matematică nu se întâlnesc în număr mare. Însă, este recunoscut, că elevii capabili de performanțe înalte la matematică, aplică cu succes aparatul matematic la concursurile de fizică, chimie, biologie. Propunem câteva exemple cu diferit grad de dificultate, care permit generalizări, interconexiuni și matematizarea contextelor.

### **Concentrația substanțelor**

**Problema 1.** *Se ia un pahar cu cafea neagră. Se bea  $\frac{1}{5}$  din cantitatea de cafea și se toarnă lapte în pahar pentru a umple paharul. Iar se bea  $\frac{1}{5}$  din cantitatea de cafea cu lapte și se toarnă lapte în pahar pentru a umple paharul. Apoi se beau  $\frac{3}{5}$  din cantitatea de cafea cu lapte și se constată că în cantitatea rămasă cafea este cu  $28 \text{ cm}^3$  mai mult decât lapte. Să se afle volumul paharului.*

Problema a fost propusă la un concurs pentru clasele a 6-a, până ca elevii să fie familiarizați cu noțiunea de concentrație. Omitem să propunem soluția, ea fiind accesibilă elevilor.

Un context mai sofisticat distingem în următoarea problemă, care va permite elevilor să argumenteze nu doar din punct de vedere matematic niște efecte chimice, dar și să explice comportamentul chimiștilor.

**Problema 2.** *Un vas cu acid și un pahar gradat cu apă curată au fost lăsate în cabinetul de chimie după lecție. Profesorul a golit vasul și urmează să-l clătească cu apă din pahar. Pentru a face acest lucru, intenționează să împartă toată apa din pahar în porții, nu neapărat egale între ele, și să clătească bine vasul cu fiecare porție de apă separat: mai întâi cu prima porție, apoi cu a doua și așa mai departe. Se știe că după fiecare golire a vasului, pe pereții acestuia rămâne o cantitate de lichid (de fiecare dată aceeași cantitate).*

- a) Pentru care dintre următoarele patru valori ale lui  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  după spălare cu  $n$  porții egale de apă, vasul va deveni, în cele din urmă, mai curat (adică va conține mai puțin acid)?
- b) În ce raport este mai bine să împărțiți apa din pahar în  $n = 3$  porții, astfel încât vasul să ajungă cât mai curat?
- c) Este adevărat că cu cât este mai mare numărul de porții egale în care se împarte apa, cu atât vasul devine mai curat în final?
- d) Este adevărat că, pe măsură ce numărul de porții egale crește, cantitatea de acid rămasă în vas ca urmare tinde spre zero?

**Soluție.** Să luăm ca unitate (întregul) cantitatea de lichid rămasă pe pereții vasului după golirea acestuia. Dacă în vas se toarnă o cantitate  $x$  de apă pură, soluție de acid în vas va fi  $x + 1$ , iar raportul dintre cantitatea de acid și cantitatea de soluție va fi  $\frac{1}{x+1}$ . Adică cantitatea de acid într-o unitate de soluție se va micșora de  $x + 1$  ori, iar după golire, va rămâne exact o unitate din această soluție care conține  $\frac{1}{x+1}$  acid.

**a, c)** Dacă cantitatea inițială  $x$  de apă este împărțită în  $n$  părți egale, atunci la sfârșit în soluție se obține  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$  acid, iar dacă se iau  $n + 1$  porții, atunci va fi  $\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{-(n+1)}$  acid.

Considerăm raportul:

$$\frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}}{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{-(n+1)}} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{(n+1)}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \frac{n^n(n+1+x)^{n+1}}{(n+x)^n(n+1)^{n+1}} = \frac{n+1+x}{n+1} \left(1 - \frac{x}{n^2+nx+n+x}\right)^n.$$

Conform inegalității lui Bernoulli (pentru  $x \geq -1$  și  $r \geq 1$ , are loc inegalitatea  $(1+x)^r \geq 1 + rx$ ) obținem:  $\frac{n+1+x}{n+1} \left(1 - \frac{x}{n^2+nx+n+x}\right)^n > \frac{n+1+x}{n+1} \left(1 - \frac{nx}{n^2+nx+n+x}\right)^n = \frac{n+1+x}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+x}{n^2+nx+n+x} = \frac{n^3+n^2(2+x)+n(1+2x)+x+x^2}{n^3+n^2(2+x)+n(1+2x)+x} > 1.$

Prin urmare, cu creșterea numărului  $n$  vasul devine mai curat.

**b).** Dacă cantitatea inițială  $x$  de apă este împărțită în  $n$  porții neegale  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , atunci  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = x$  și, conform inegalității mediilor, cantitatea totală de acid permite o estimare de jos:

$$\left((1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) \dots (1+x_n)\right)^{-1} \geq \left(\frac{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) \dots (1+x_n)}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Egalitatea se realizează doar în cazul porțiilor egale  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = \frac{x}{n}$ .

**d)** Dacă cantitatea de apă pură  $x$  este fixată și  $n \rightarrow \infty$ , atunci, notând  $t = \frac{n}{x}$ , rezultă că  $t \rightarrow \infty$ . Pentru cantitatea minimă finală de acid, folosind a doua limită remarcabilă, obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^{-x} = e^{-x} > 0.$$

Răspuns: a) 4. b) În părți egale. c) Da. d) Nu.

**Problema 3.** Conform presei, pe 3 iulie 2020 a avut loc corectarea orbitei Stației Spațiale Internaționale (SSI), în rezultatul căreia viteza stației s-a schimbat cu 0.5 m/s, iar raza orbitei s-a mărit cu 900 m. Masa SSI este 420t, raza Pământului 6400 km și accelerația gravitațională este  $10 \text{ m/s}^2$ .

- Aflați energia necesară pentru această corectare.
- Ce distanță va putea parcurge un automobil folosind energia respectivă, dacă motorul acestuia are o putere de 70 kW și o viteză constantă de 90 km/h?
- Folosind datele primite și  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  (accelerația gravitațională), aflați înălțimea orbitei SSI față de suprafața Pământului.
- Cu ce precizie (în metri) trebuie să fie măsurată schimbarea în raza orbitei ca eroarea calculării înălțimii orbitei față de Pământ să nu fie mai mare de 100 km.

**Soluție.** Pentru simplitatea creării modelului orbita stației este considerată circulară atât înainte, cât și după corectare. Accelerația centripetă este creată de forța de atracție gravitațională:  $m \frac{v^2}{R} = G \frac{mM}{R^2}$ , unde  $m$  și  $M$  sunt masele stației și a Pământului respectiv,  $G$  - constanta gravitațională,  $v$  - viteza stației, iar  $R$  - raza orbitei. Pentru o orbită la înălțimea  $d$  față de suprafața Pământului, avem:

$$\frac{mv^2}{R_0 + d} = mg \frac{R_0^2}{(R_0 + d)^2} \quad (1)$$

$R_0$  - raza Pământului,  $g = GM/R_0^2$  - accelerația gravitațională la suprafața Pământului.

Deci, obținem:

$$v^2 = \frac{gR_0^2}{R_0 + d}. \quad (2)$$

Observăm ca viteza scade cu mărirea razei orbitei. Putem astfel deduce că, în rezultatul manevrei date, viteza stației a scăzut.

Orbita SSI se află aproape de suprafața Pământului, deci vom considera că în timpul execuției manevrei accelerația gravitațională se schimbă nesemnificativ și nu diferă mult de  $g$ . Lucrul depus pentru a efectua manevra este:

$$E = \frac{m(v + \Delta v)^2}{2} + mg(H + \Delta H) - \left[ \frac{mv^2}{2} + mgH \right] \approx mv\Delta v + mg\Delta H$$

$\Delta v = 0.5 \text{ m/s}$  este mult mai mic decât prima viteză cosmică, cu care corpurile se mișcă în orbita terestră joasă, ceea ce ne permite să efectuăm aproximația dată. Valoarea primei viteze cosmice poate fi aflată din formula (2) pentru  $d = 0$ :  $v_1 = \sqrt{gR_0} = 8 \text{ km/s}$ .

Folosind ceea ce am demonstrat mai sus ( $\Delta v < 0$ ), obținem:

$$E = m(g\Delta H - |\Delta v|\sqrt{gR_0}) = 2.1 \cdot 10^9 \text{ J}$$

**b)** Aflăm timpul cât va lucra motorul automobilului  $T$  ( $P$  - puterea)  $E = PT$  și distanța parcursă  $L = VT = \frac{VE}{P}$ .

Pentru  $V = 25 \text{ m/s}$ , obținem  $L = 750 \text{ km}$ .

c) Rescriem formula (2) pentru două situații: 1) înainte de corectare  $d = H$ ,  $v = v_0$ ; 2) după corectare  $d = H + h$ ,  $v = v_0 + \Delta v$ .

$$v_0^2 = \frac{gR_0^2}{R_0 + H}, \quad (v_0 + \Delta v)^2 = \frac{gR_0^2}{R_0 + H + h} = \frac{gR_0^2}{R_0 + H} \left(1 + \frac{h}{R_0 + H}\right)^{-1}$$

Deoarece  $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$  pentru  $x \ll 1$  și  $|\Delta v| \ll v_0$ ,  $h \ll (R_0 + H)$ , obținem:

$$2v_0\Delta v = -\frac{gR_0^2}{(R_0+H)^2} h \quad (3)$$

Este evident, deci, că  $\Delta v < 0$ . Formăm sistemul de ecuații: 
$$\begin{cases} \frac{v_0(R_0+H)^2}{gR_0^2} = -\frac{1}{2} \frac{h}{\Delta v_0}, \\ v_0^2 = \frac{gR_0^2}{R_0+H}. \end{cases}$$

Rezolvându-l, obținem:

$$H = R_0 \left[ \left(\frac{g}{4R_0}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{h^2}{(\Delta v)^2}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] = 476 \text{ km}. \quad (4)$$

D) Folosind formula (3), magnitudinea valorilor omise este  $(\Delta v/v_0)^2 \sim 10^{-8}$  și  $(h/R_0)^2 \sim 10^{-7}$ , deci utilizarea aproximărilor nu schimbă semnificativ valoarea aflată H. Pentru a calcula precizia căutată, scriem derivata relației (4), presupunând că toate valorile în afară de h sunt cunoscute și fixate:

$$\frac{dH}{dh} = \frac{2}{3} \left(\frac{g}{4(\Delta v)^2}\right)^{\frac{1}{3}} R_0^{\frac{2}{3}} h^{-\frac{1}{3}} \approx 5100.$$

Schimbarea valorii lui h cu  $\Delta h$  va duce la modificarea valorii lui H cu  $\Delta H$ :  $\Delta H = \frac{dH}{dh} \Delta h \approx 5100 \Delta h$ . Erorii  $\Delta H = 100 \text{ km}$  îi revine  $\Delta h = 10^5/5100 \approx 19.5 \text{ m}$ .

**Problema 4.** Gicu a decis să cântărească manualul de matematică. El nu are un cântar, dar are greutatea de 200 g, o riglă ușoară fără marcaj la marginile ei, un creion și ață cu masa neglijabilă. Gicu a atârnat manualul de o margine a riglei și o greutate de cealaltă margine. Apoi a balansat rigla pe creion pentru a fi în echilibru. După ce a adăugat a doua greutate la prima, el a mișcat rigla cu 3 cm. După ce a adăugat o a treia greutate la primele două, el a mișcat rigla cu 2 cm pentru a duce sistemul în echilibru. Care este masa manualului?

**Soluție.** Fie  $M$  masa manualului,  $m$  masa greutăților. Valoarea deplasărilor riglei vor fi  $x$  și  $y$  respectiv. Condițiile de echilibru pentru cele 3 cazuri sunt:

$$Ml_1 = ml_2$$

$$M(l_1 + x) = 2m(l_2 - x)$$

$$M(l_1 + x + y) = 3m(l_2 - x - y)$$

Înmulțind prima relație cu 2 și 3 și scăzând-o din a doua și a treia relație, respectiv, obținem:

$$Mx - Ml_1 = -2mx$$

$$M(x + y) - 2Ml_1 = -3m(x + y)$$

cu care ajungem la

$$M = \frac{3y - x}{x - y} m = 600$$

**Răspuns:** 600g.

**Problema 5.** Într-un proces termodinamic, presiunea  $p$  a 1 mol de gaz monoatomic depinde de volumul  $V$  după formula dată

$$p = p_0 \left(1 - \frac{V}{V_0}\right),$$

$p_0$  și  $V_0$  fiind constante. Volumul gazului este mărit încet. Dați un răspuns justificat la următoarele întrebări:

A. Temperatura gazului scade sau se mărește pentru  $V = 9V_0/16$ ?

B. În acel moment gazul primește sau elimină căldură?

**Soluție.** Ecuația de stare pentru 1 mol de gaz este

$$pV = RT.$$

Astfel obținem

$$T = \frac{pV}{R} = \frac{p_0 V}{R} \left(1 - \frac{V}{V_0}\right) = \frac{p_0 V_0}{R} x(1 - x), \quad x = \frac{V}{V_0}.$$

Temperatura crește pentru  $x < 1/2$ , deci pentru valoarea dată  $x = 9/16$  temperatura scade.

Pentru a determina dacă procesul primește sau elimină căldură, considerăm prima lege a termodinamicii pentru schimbări mici ale volumului  $\Delta V = V_0 \Delta x$ , cantitatea de căldură primită de gaz este

$$\Delta Q = p \Delta V + c_v \Delta T,$$

unde  $c_v = 3R/2$  ( pentru gaz monoatomic). Diferența de temperatură este

$$\Delta T = \frac{p_0 V_0}{R} [\Delta x - \Delta(x^2)] \approx \frac{p_0 V_0}{R} \Delta x (1 - 2x).$$

Prima lege a termodinamicii ne dă

$$\Delta Q = p_0 V_0 (1 - x) \Delta x + \frac{c_v}{R} p_0 V_0 \Delta x (1 - 2x) = p_0 V_0 \Delta x \left[1 + \frac{c_v}{R} - x \left(1 + 2 \frac{c_v}{R}\right)\right]$$

Deoarece  $\Delta x > 0$  (gazul se extinde), termenul din paranteze determină semnul transferului de căldură. Gazul primește căldură ( $\Delta Q > 0$ ) dacă

$$x < \frac{1 + c_v/R}{1 + 2 c_v/R} = \frac{5}{8}$$

Pentru valoarea lui  $x$  dată, gazul primește căldură.

**Răspuns:** În procesul dat, temperatura scade și gazul primește căldură.

**Problema 6.** Limita de viteză în orașul  $M$  este 80 km/h, și toți șoferii respectă strict această regulă. Acest oras este cunoscut pentru ambuteiajul care se formează zilnic. În medie, un traseu de 30 km poate fi parcurs în 45 de minute. Estimați schimbarea duratei medie a unui traseu, dacă limita de viteză ar fi 50 km/h, iar timpul pierdut în ambuteiaj rămâne același.



**Soluție.** Înainte de schimbarea limitei de viteză, viteza medie era  $30/0.75 = 40$  km/h. Deci schimbarea limitei de viteză nu îi afecta pe șoferii care evită ambuteiajele. E clar că schimbarea va avea un efect major asupra șoferilor care stau parțial în ambuteiaj sau care merg cu viteza limită.

Timpul petrecut în ambuteiaj este

$$t = T_1 - \frac{L}{V_1}$$

$L$  este lungimea traseului,  $V_1$  și  $T_1$  sunt viteza maximă și durata drumului înainte de schimbare.

După schimbare, durata este ( $V_2$  și  $T_2$  sunt viteza maximă și durata drumului după schimbarea vitezei limită)

$$T_2 = \frac{L}{V_2} + t = T_1 + \frac{L}{V_2} - \frac{L}{V_1}$$

Schimbarea relativă este

$$\varepsilon = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{L(V_1 - V_2)}{T_1 V_1 V_2} = 30\%$$

**Răspuns:** 30%

**Problema 7.** Un jucător de fotbal începător Vassily poate alerga cu o minge cu viteza  $v_1 = 5$  m/s și lovi mingea în repaus, astfel încât ea zboară cu viteza inițială de  $v_2 = 10$  m/s cu orice unghi până la orizontală. Băiatul se poate opri pe sine și mingea instantaneu. Care este timpul minim necesar pentru a muta mingea de la un capăt la celălalt al terenului? Mingea se oprește imediat după aterizare și nu este permis să o atingem după. Lățimea câmpului este de 64 m, accelerația gravitațională este  $10$  m/s<sup>2</sup>, Rezistența aerului se neglijează.

**Soluție.** Este clar că jucătorul are distanța de parcurs  $L = 64$  m, nu mai mult. Viteza mingii în zbor este mai mare decât viteza de alergare, deci este rezonabil să se lovească mingea la un punct pentru a o lăsa să zboare și să aterizeze pe cealaltă parte a terenului. Considerați timpul traversării terenului ca funcție a unghiului  $\alpha$  dintre direcția vitezei inițiale a mingii și orizont:

$$T = \frac{\left( L - \frac{v_2^2 \cdot (\sin 2\alpha)}{g} \right)}{v_1} + \frac{(2 \cdot v_2 \sin \alpha)}{g} \quad (1)$$

Pentru a afla minimumul acestei funcții pe segmentul  $\alpha \in [0; \pi/2]$  calculăm derivata

$$\frac{dT}{d\alpha} = \frac{v_2}{g} \left( \left( (-2) \cdot \frac{v_2}{v_1} \cdot \cos 2\alpha + 2 \cos \alpha \right) \right)$$

Verificând zerourile funcției obținem ecuația

$$n \cdot \cos(2\alpha) = \cos(\alpha), \quad n = \frac{v_2}{v_1}$$

Una dintre rădăcini este

$$\alpha = \arccos\left(\frac{(1 + \sqrt{1 + 8n^2})}{4n}\right)$$

pentru  $n > 1$  aparține  $[0, \pi/4]$  și corespunde unui minim și are sens fizic. Înlocuind aceasta soluția în (1) obținem timpul minim, pentru valorile date,  $T_{\min} = 12,06$  sec.

**Problema 8.** Un băiat Vassily a găsit o pâlnie care are un diametru al orificiului de ieșire de 2 cm. A trebuit să umple o sticlă de doi litri folosind această pâlnie, diametrul gâtului sticlei este de 1 cm. Băiatul a reușit să fixeze pâlnia, așa că orificiul ei de ieșire este deasupra gâtului sticlei, la 45 cm. Vassily a aflat că, cu puțină grijă, nici o picătură de apă nu trece pe lângă sticlă. Care este timpul minim necesar pentru umplerea sticlei de doi litri cu configurația descrisă, dacă apa nu trece pe lângă sticlă?

**Soluție.** Fie  $U_0$  viteza apei la ieșirea din pâlnie. Între pâlnie și sticlă, observăm căderea liberă a jetului, deci legea de conservare a energiei dă viteza la intrarea în sticlă  $U = \sqrt{(U_0)^2 + 2gh}$ . Deoarece volumul apei care traversează orice secțiune transversală pe unitatea de timp este același, avem egalitatea (ecuația de continuitate):

$$U_0 \cdot \frac{(\pi D^2)}{4} = \frac{U(\pi d^2)}{4} \Leftrightarrow U_0 D^2 = \sqrt{U_0^2 + 2gh} \cdot d^2,$$

$$U_0 D^2 = U d^2 \Leftrightarrow U = \frac{(U_0 D^2)}{d^2} \Leftrightarrow U_0 = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{U_0^2 + 2gh} \Leftrightarrow \left(\frac{U_0^2 D^4}{d^4}\right) = U_0^2 + 2gh \Leftrightarrow$$

$$\left(U_0^2 \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{d^4}\right) = 2gh \Leftrightarrow U_0 = d^2 \cdot \frac{(\sqrt{2gh})}{\sqrt{D^4 - d^4}},$$

unde  $D$  este diametrul ieșirii pâlniei,  $d$  este diametrul jetului la intrarea în sticlă. Pentru a colecta toată apa, solicităm  $d \leq D$ , unde  $d$  este diametrul de intrare al sticlei. Prin urmare

$$U_0 \leq \frac{\sqrt{2gh} \cdot d^2}{\sqrt{D^4 - d^4}}.$$

Astfel timpul necesar pentru colectarea volumului  $V$  este

$$T = \frac{V}{U_0 \pi \cdot \left(\frac{D^2}{4}\right)} \geq \frac{(4V\sqrt{D^4 - d^4})}{\pi D^2 d^2 \sqrt{2gh}} = 8.22 \text{ sec.}$$

**Problema 9.** Un laborator se ocupă cu experimente de evaporare. Mai întâi, au plasat o picătură suficient de mare pe o placă și au descoperit că picătura a rămas emisferică pe tot parcursul experimentului, raza ei depinzând de timp  $r(t) = R/(1 + Dt)$ , unde  $R$  este raza inițială a picăturii și  $D$  este o constantă. În al doilea experiment, au pus o picătură inițială pe farfurie și au adăugat picături de volum  $V$  la intervale de timp egale  $T$ . Lichidul devine o picătură emisferică imediat după fiecare adăugare. Răspunde la următoarele întrebări despre al doilea experiment.

1. Fie că volumul inițial este astfel încât dependența razei picăturilor de timp este periodică. Care este volumul maxim și minim de lichid în timpul experimentului în acest caz? Faceți calculele pentru  $V = 1 \text{ mm}^3$ ,  $D = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $T = 1 \text{ s}$ .

2. Fie  $V$ ,  $D$ ,  $T$  la fel ca pentru subproblema 1, iar volumul picăturii inițiale să fie  $8 \text{ mm}^3$ . Care este volumul lichidului după adăugarea celei de-a patra picături?
3. Demonstrați că pentru orice volum inițial, dependența razei de timp tinde spre a fi ca cea descrisă în subproblema 1 (periodic).

Presupune-ți că evaporarea este întotdeauna aceeași ca în primul experiment.

Volumul unei emisfere cu raza  $r$  este  $2\pi r^3/3$ .

**Soluție.**

1. Pentru regimul periodic. Scăderea volumului în timpul evaporării este compensată de volumul picăturii adăugate. Fie  $R_0$  raza inițială, atunci:  $2\pi R_0^3/3 - 2\pi R_0^3/(3(1+DT)^3) = V$ , deci

$$R_0 = \left\{ \frac{3V}{2\pi} \cdot \left[ \frac{(1+DT)^3}{(1+DT)^3 - 1} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

Volumul maxim este cel inițial, el apare imediat după adăugarea picăturii. Corespunde cu raza găsită mai sus

$$V(\max) = V \cdot \frac{(1+DT)^3}{(1+DT)^3 - 1} = \frac{8}{7} \text{ mm}^3$$

Volumul minim este mai mic decât  $V$  și este egal cu

$$V(\min) = V \cdot \frac{1}{(1+DT)^3 - 1} = \frac{1}{7} \text{ mm}^3$$

2. Valorile  $V_n$  în momentele  $nT$  (imediat după adăugarea picăturii a  $n$ -a) formează succesiunea dată de următoarea relație:

$$V(n+1) = \frac{1}{(1+DT)^3} V_n + V$$

Valoarea necesară poate fi găsită prin calcul direct sau prin formula membrului comun:

$$V_n = Cq^n + \frac{V}{1-q}, \quad q = \frac{1}{(1+DT)^3}, \quad |q| < 1, \quad C = V_0 - \frac{V}{1-q}$$

Pentru valorile  $q=1/8$  și  $C=48/7 \text{ mm}^3$

$$V_4 = \frac{4102}{3584} \text{ mm}^3$$

3. Cantitatea de lichid evaporat  $v$  depinde în mod monoton de raza inițială:

$$v = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot \frac{((1+DT)^3 - 1)}{(1+DT)^3}$$

Dacă  $v < V$ , atunci volumul de lichid pentru următoarea picătură ar fi mai mare decât pentru cea dată, iar volumul evaporat ar fi mai mare decât pentru etapa anterioară.

Pentru  $v > V$ , avem situația opusă. În timpul ciclului, volumul ar scădea și volumul evaporat, de asemenea.

Secvența  $V_n$  în momentele  $nT$  (imediat după adăugarea celei de-a  $n$ -a picături) formează secvența dată de expresia:

$$V(n+1) = \frac{1}{(1+DT)^3} Vn + V$$

Formula pentru al  $n$ -lea membru este aceeași ca și în 2.

#### 4.5. probleme propuse pentru rezolvare

**Problema 1.** [Mongolia, 2000] Avem o țară cu  $n$  orașe. Fie  $x_{ij}$  - costul călătoriei din orașul  $i$  în orașul  $j$  ( $x_{ij}$  nu este neapărat egal cu  $x_{ji}$ ). Presupunem că suma totală necesară pentru a călători prin fiecare oraș exact o dată, astfel încât în final ne întoarcem de unde am pornit, nu depinde de traseul ales. Arătați că există numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ , astfel încât  $x_{ij} = a_i + b_j$ , pentru orice  $1 \leq i \neq j \leq n$ .

**Soluție.** Cazurile  $n = 1$  și  $n = 2$  sunt triviale.

Dacă  $n = 3$ , avem  $x_{12} + x_{23} + x_{31} = x_{21} + x_{13} + x_{32}$ .

Considerăm  $n \geq 3$ . Fie că am găsit  $a_i$  și  $b_j$ , cu  $x_{ij} = a_i + b_j$ . Atunci, adăugând aceeași valoare  $v$  la fiecare  $b_i$  și scăzând  $v$  din fiecare  $a_i$ , am obține noi numere  $a'_i, b'_j$ , astfel încât  $x_{ij} = a'_i + b'_j$ . Pentru  $v = a_1$  vom avea  $a'_1 = 0$ .

Ca să nu folosim prea multe notații, fie că  $a_1 = 0$  și  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ , satisfac condiția  $x_{ij} = a_i + b_j$ . Atunci  $x_{1i} = a_1 + b_i = b_i$ .

Fie  $b_1 = t$ . Atunci  $x_{i1} = a_i + t$ . Deci, obținem relațiile  $b_i = x_{1i}$  și  $a_i = x_{i1} - t$ .

Presupunem acum că suntem la începutul soluției și avem de arătat existența numerelor  $a_i$  și  $b_j$ . Atunci este firesc să luăm  $b_i = x_{1i}$  pentru  $i \neq 1$  și  $a_i = x_{i1} - b_1$  și ar trebui să arătăm că pentru o alegere convenabilă a lui  $b_1$  avem  $x_{ij} = a_i + b_j$  pentru orice  $2 \leq i \neq j \leq n$  (dacă  $i$  sau  $j$  este 1, relația este evidentă). Aceasta devine  $x_{ij} = x_{i1} - b_1 + x_{1j}$  sau  $b_1 = x_{i1} + x_{1j} - x_{ij}$ . Deoarece  $b_1$  e constant, trebuie să arătăm că expresia  $E(i, j) = x_{i1} + x_{1j} - x_{ij}$  este constantă, după care luăm  $b_1 = E(i, j)$  și problema e rezolvată.

$$\begin{aligned} \text{Într-adevăr, } E(i, j) - E(j, k) &= (x_{i1} + x_{1j} - x_{ij}) - (x_{j1} + x_{1k} - x_{jk}) = \\ &= (x_{i1} + x_{1j} + x_{jk}) - (x_{ij} + x_{j1} + x_{1k}). \end{aligned}$$

Considerăm un traseu  $R$  de la  $k$  la  $i$  care nu trece nici prin  $j$  nici prin 1 (existența unui asemenea traseu se demonstrează ușor).

Conform enunțului costul traseelor  $i1jkR$  și  $ij1kR$  este același, deci  $x_{i1} + x_{1j} + x_{jk} = x_{ij} + x_{j1} + x_{1k}$ , adică  $E(i, j) = E(j, k)$ . Dacă  $k$  și  $l$  sunt diferite de  $i$  și  $j$  atunci  $E(i, j) = E(j, k) = E(k, l)$ . Rămâne de arătat că  $E(i, j) = E(j, i)$ . Pentru  $n \geq 4$  luăm  $k, l$  diferite de  $i, j$ . Avem  $E(i, j) = E(j, k) = E(k, l)$ .

Dacă  $n = 3$ , atunci trebuie să arătăm, de exemplu, că  $E(2, 3) = E(3, 2)$ , adică:  $x_{21} + x_{13} - x_{23} = x_{31} + x_{12} - x_{32}$ , sau  $x_{12} + x_{23} + x_{31} = x_{21} + x_{13} + x_{32}$ , relație adevărată, deoarece cele două expresii reprezintă costul unui tur complet.

**Problema 2.** [Olimpiada țărilor CSI, 2007] Într-o închisoare se află 100 de deținuți. Judecătorul a propus următoarele: într-o singură seară, toți deținuții vor fi adunați într-o cameră și lăsați să vorbească liber între ei. Apoi se vor întoarce în celulele lor și nu vor mai comunica deloc. Va fi construită o cameră cu o lampă în interior, care inițial este stinsă. În fiecare zi un deținut va fi adus în această cameră și la ieșire el va lăsa lampa așa cum vrea el - aprinsă sau stinsă. Condiția deținuții să fie eliberați este ca la un moment dat unul dintre deținuți să afirme că în cameră, la sigur, au intrat toți deținuții. Dacă această afirmație va fi adevărată toți deținuții vor fi eliberați. În caz contrar, ei vor fi condamnați la moarte. Se știe că atâta timp cât nici unul nu va vorbi, fiecare deținut va trece prin camera respectivă de o infinitate de ori. Pot deținuții să scape?

**Soluție.** Da, pot. Presupunem că sunt  $n$  deținuți:  $D_1, \dots, D_n$ . Iată care este strategia lor. Cel care va vorbi, afirmând cu certitudine că toți deținuții au fost cel puțin o dată în cameră, este  $D_1$ . Niciun deținut cu excepția lui  $D_1$  nu va stinge lampa, iar deținuții  $D_2, \dots, D_n$  vor aprinde fiecare o singură dată lampa. Inițial lampa e stinsă. Avem câteva posibilități pentru un deținut  $D_i$ ,  $i > 1$ , care intră în camera respectivă: Dacă el deja a aprins o dată lampa (mai înainte), atunci indiferent de starea lămpii la moment, el o lasă la fel. Dacă el încă nu a aprins niciodată lampa, atunci iarăși avem 2 cazuri. Dacă lampa este aprinsă, o lasă exact la fel, iar dacă e stinsă - o aprinde. Acum să descriem acțiunile deținutului  $D_1$ . Acesta nu va aprinde niciodată lampa. El va păstra în memorie un număr  $X$ . Inițial acesta este  $X = 0$ . Atunci când el intră în camera respectivă, dacă lampa e stinsă o lasă la fel, iar dacă e aprinsă - adaugă 1 la  $X$  și când iese stinge lampa. Deoarece fiecare deținut cu excepția lui  $D_1$  aprinde exact o dată lampa, nici unul nu va fi numărat de 2 ori în  $X$ . Condiția că fiecare deținut va intra de o infinitate de ori în camera respectivă ne asigură că acțiunile de mai sus vor avea loc. Atunci când  $X$  ajunge la valoarea  $n - 1$ ,  $D_1$  va vorbi - el va fi sigur că toți deținuții (inclusiv el) au fost în camera respectivă.

### **Probleme de la concursuri de modelare**

**Problema 3.** [Olimpiada TMM, 2022] Trenul coboară pe porțiunea unui drum înclinat pe care este fixată limita de viteză 36km/h. Panta este de 2% (2m de coborâre la 100m de drum). Șoferul poate frâna, în cazul în care modulul accelerației va fi  $0,15\text{m/s}^2$ . Între utilizarea consecutivă a frânei trebuie să fie o pauză de cel puțin 10s pentru pomparea sistemului pneumatic. Determinați viteza medie maximă de mișcare, ținând cont de toate restricțiile.

**Indicație.** Viteza medie maximă se obține când utilizezi frâna până ajungi la o viteză  $V_1$ , astfel încât peste exact 10 secunde vei atinge viteza 36km/h, și poți frâna din nou, apoi repeți procesul. Determină  $V_1$  și află viteza medie.

**Problema 4.** [Olimpiada TMM, 2022] Creioane de lemn de formă cilindrică ajung la fabrică în pachete a câte 3000 de creioane. Pachetele sunt identice și au formă cilindrică de aceeași înălțime. Fabrica transformă creioanele cilindrice în creioane hexagonale (cu

baza - hexagon regulat) prin tăierea a cât mai puțin lemn. Estimați câte creioane prelucrate încap într-un pachet. Efectele de margine sunt neglijabile, să presupunem că creioanele sunt ambalate în cel mai dens mod. Estimați eroarea produsă de neglijarea efectelor de margine.

**Indicație.** Încearcă să rezolvi problema, pentru pachete a câte 7 creioane, apoi să aplici rezultatul pentru a rezolva problema cu  $n = 3000$ .

**Problema 5.** [Olimpiada TMM, 2022] Într-o zi, revenind de la școală, Ion a observat în bucătărie un borcan, cu volumul de 1 litru, plin cu dulceață de zmeură. Lui Ion îi plac dulciurile foarte tare, așa că a mâncat o treime din dulceață. Ion și-a amintit că mama lui făcea dulceață special pentru oaspeți, deci pentru ca nimeni să nu observe, a completat borcanul cu sirop. Peste jumătate de oră, deoarece nimeni nu a sosit, el a mâncat o treime din amestec, și l-a completat din nou cu sirop. Ion a repetat acest proces fiecare jumătate de oră. Peste cât timp Ion a mâncat 90% din conținutul inițial de dulceață?

**Indicație:** Presupunem că peste  $n/2$  ore concentrația dulceței în borcan e  $C_n$  ( $C_0 = 1$ ). Evident  $C_{n+1} = C_n * 2/3$ . Deci după  $n/2$  ore el a mâncat  $\frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} C_n$  dulceață.

**Problema 6. Programarea unui film** [Olimpiada IM<sup>2</sup>, 2015] Înainte ca un film să poată fi filmat trebuie să fie pregătite multe lucruri. Trebuie identificate decorurile și scenele importante, trebuie calculate nevoile de resurse și aranjate programările. Un studio de film și-a contactat compania și vor să aibă un model care ar permite producerea unui film. Problema gestionării timpului este în centrul activităților de modelare. Trebuie să construiți exemple ca să arătați că modelul este eficient. Răspundeți la întrebările de mai jos.

Întrebarea 1: Creează un model care va reflecta producerea unui film ținând cont de următoarele aspecte:

- 1) Datele calendaristice când sunt disponibili actorii.
- 2) Timpul necesar pentru a filma o listă de scene specifice.
- 3) Timpul necesar pentru a monta un film dintr-o listă de scene specifice filmate.
- 4) Datele calendaristice când sunt disponibile anumite resurse specifice (de exemplu ar putea fi nevoie de elicoptere, macarale ș.a. care sunt disponibile doar în anumite perioade).
- 5) Trebuie să ai timp de rezervă pentru a reface anumite scene după editare, dacă nu sunt reușite.

Întrebarea 2: Creează un nou model luând la bază modelul creat anterior, dar care ar permite amânarea din cauza unui anumit aspect (de exemplu, dacă unul din actori a avut un accident ar trebui să poți modifica programul).

Întrebarea 3: Realizează un model care ar determina cele mai importante limitări (riscuri) din întrebarea 1, adică care limitări ar cauza cele mai multe amânări în caz că apare o problemă.

**Indicație.** Poți încerca să definești o mărime D-disponibilitate și să formulezi algoritmul creării programului în baza acesteia.

**Problema 7. Diferența de fus orar** [Olimpiada IM<sup>2</sup>, 2017]. *Organizarea întâlnirilor internaționale nu este ușoară din multe puncte de vedere, inclusiv problema că unii dintre participanți pot experimenta efectele diferenței de fus orar după o călătorie recentă din țara lor de origine la locul întâlnirii, care poate fi într-un alt fus orar, altă climă, perioadă a anului etc. Toate aceste lucruri pot afecta dramatic productivitatea întâlnirii.*

*Corporația Internațională de Management a ședințelor îți cere să vii cu un algoritm ce ar sugera cel mai bun loc de a ține o ședință, dat fiind: numărul de participanți, țările în care locuiesc, data aproximativă a ședinței și alte informații.*

Rezultatul modelului trebuie să fie o listă de locații pentru desfășurarea ședinței care ar maximiza productivitatea ei. Corporația are un buget limitat, deci costurile vor fi considerate ca un parametru. De asemenea, Corporația nu își poate permite să aducă participanții la ședința cu o săptămână înainte pentru a se adapta la condiții, vreme, fus orar, etc.

Testați modelul în cel puțin două scenarii:

1) *Ședință mică*

Perioada: mijlocul lui iunie

Participanți din: Monterey (S.U.A), Zutphen (Olanda), Melbourne (Australia), Shanghai (China), Hong Kong (China), Moscova (Rusia).

2) *Ședință mare*

Perioada: Luna ianuarie.

Participanți din: Boston (S.U.A, 2 persoane), Singapore, Beijing (China), Hong Kong (China, 2 persoane), Moscova (Rusia), Varșovia (Polonia), Copenhagen (Danemarca), Melbourne (Australia).

**Indicație.** Încercați să analizați cum fiecare participant își petrece ziua (câte ore durează somnul, în ce timp al zilei va fi cel mai productiv, cum îl va afecta fusul orar, etc.).

**Problema 8. Cel mai bun spital** [Olimpiada IM<sup>2</sup>, 2018] *Aproape toată lumea va căuta asistență medicală la un moment dat în viață. Într-o situație de urgență, o persoană va merge, cel mai probabil, la cel mai apropiat spital, dar în cazul non-urgențelor, poate fi o alegere a unde să căutăm tratament.*

Să presupunem că există 4 sau 5 spitale accesibile în mod rezonabil de la locuința dvs. Doriți să alegeți cel mai bun spital. Cum ați măsura și alege "cel mai bun" dintre aceste spitale locale?

Să presupunem că gravitatea situației dvs este astfel încât sunteți dispus să călătoriți pentru îngrijirea sănătății și doriți să alegeți "cel mai bun" dintre 50 sau mai multe spitale. Ce variabile folosiți și cât de bine le puteți măsura?

Cu siguranță, mortalitatea este o variabilă importantă. Măsurarea ratelor de deces are avantajul că decesul este un eveniment unic definit. Numărul total de decese poate să nu fie o măsură bună a calității spitalului, dar (1) numărul de decese evitabile ar putea fi o măsură foarte bună. Cum decidem dacă un deces este evitabil sau inevitabil? Fiecare caz de deces poate fi codificat cu date care să includă, de exemplu, diagnosticul principal, vârsta, sexul, urgența internării, (2) comorbiditatea, durata șederii, (3) deprivarea socială și alți factori. Cu dimensiuni de eșantion mari, performanța diferitelor spitale ar putea fi măsurată prin compararea cazurilor cu caracteristici similare.

În plus față de mortalitate, există și alți factori pe care dorim să-i utilizăm în măsurarea calității generale a unui spital. Câteva variabile posibile includ: experiența medicilor; cantitatea de atenție pe care așteptăm să o primim de la personalul; personalitatea medicului curant.

Utilizați modelarea matematică pentru a respecta trei cerințe:

1. Elaborați un model care utilizează mortalitatea pentru a măsura calitatea unui spital.
2. Dezvoltați un model care utilizează și alți factori (în afară de mortalitate) pentru a măsura calitatea unui spital. În baza factorilor identificați în spitale particulare, modelul dvs trebuie să ofere informații pentru a lua o decizie cu privire la cel mai bun spital.
3. În plus față de analiza matematică, includeți în raportul dvs. un memorandum „user-friendly” de două pagini pe care o persoană fără multă expertiză matematică sau abilități de calcul o poate utiliza pentru a alege un spital.

## Glosar

1. Evitabil: capabil să fie evitat.
2. Comorbiditate: prezența unei sau mai multor afecțiuni medicale care apar împreună cu o afecțiune primară.
3. Deprivare socială: privare de beneficiile materiale obișnuite ale vieții în societate.

**Problema 9. „Capacitatea de transport” a planetei Pământ [Olimpiada IM<sup>2</sup>, 2019]** Care este „capacitatea de transport” a planetei Pământ pentru umanitate? Capacitatea de transport a unei specii biologice într-un mediu este dimensiunea maximă a populației speciilor pe care mediul o poate susține la infinit, având în vedere hrana, habitatul, apa și alte necesități disponibile în mediul respectiv.

1. Identificați și analizați principalii factori pe care îi considerați cruciali pentru limitarea capacității de transport a Pământului pentru viața umană în condițiile actuale.
2. Utilizați modelarea matematică pentru a determina capacitatea actuală de transport a Pământului pentru viața umană în condițiile și tehnologia de astăzi.



3. Ce poate face umanitatea în mod real pentru a crește capacitatea de transport a Pământului pentru viitorul umanității? Care ar fi acele condiții?

**Problema 10.** [Olimpiada TMM, 2021] Există două tipuri de parcări paralele organizate pe marginea drumului: parcări marcate, care sunt împărțite în locuri de parcare individuale (Figura 4.2) și parcări nedivizate („zone de parcare”), care fie nu au marcaje sau pot avea o linie comună de marcare care le separă de drum (Figura 4.3). În conformitate cu prevederile Regulamentului de Circulație, dacă există marcaje pentru locurile de parcare individuale, șoferii trebuie să le respecte și să parcheze doar o mașină pe un loc de parcare. În „zonele de parcare” șoferii aleg liber spațiul de parcare în zona permisă.

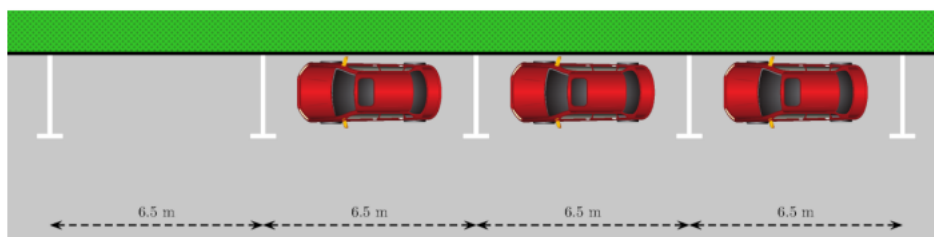


Figura 4.2. Parcare paralelă cu spații individuale marcate



Figura 4.3. Parcare paralelă în „zonă de parcare” fără marcarea spațiilor individuale

În cazul marcajului standard de primul tip, lungimea fiecărui loc de parcare este de 6,5 metri, ceea ce depășește semnificativ lungimea medie a unei mașini și duce la o parcare mai „rărită” decât este posibil.

La prima vedere, „zona de parcare” ar putea rezolva această problemă, deoarece șoferii pot parca cât mai strâns posibil, găzduind mai multe mașini pe aceeași lungime a străzii. Cu toate acestea, deoarece mașinile și alte vehicule sunt vizibil diferite ca lungime și șoferii aleg locuri de parcare în zona liberă în mod arbitrar, între ele se formează goluri care pot fi destul de mari, dar încă insuficiente pentru a parca în ele mașinile noi care sosesc.

Ce tip de parcare este mai bun pentru un oraș mare în ceea ce privește maximizarea numărului mediu de mașini parcate pe o anumită lungime a unei parcări?

#### **Sarcini:**

- 1) Determinați distribuția lungimii vehiculelor în orașul dvs (adică cât de „dens” posibil sunt parcate vehiculele din fiecare spațiu cercetat). Se recomandă prezentarea rezultatelor sub formă de histogramă sau grafic.

- 2) Determinați distribuția golurilor între mașinile parcate, pe care șoferii le lasă pentru a putea ieși din parcare.
- 3) Să presupunem că marcajul unei parcări în spații individuale a fost șters și acum mașinile stau pe aceasta în mod optim (ținând cont de distribuțiile din sarcinile 1 și 2). Cu cât, pe medie, va crește capacitatea acestei parcări?
- 4) Construiți un model matematic care descrie procesul de parcare într-o „zonă de parcare” (luând în considerare sosirea și părăsirea mașinilor și variabilitatea comportamentului șoferilor atunci când își aleg un loc de parcare) și estimați numărul mediu de mașini pe o „zonă de parcare” de o anumită lungime.
- 5) Comparați eficiența parcărilor de primul și al doilea tip într-o aplicație reală în oraș. Ce tip este mai eficient și cu cât mai mult?

**Observație:** Să presupunem că toți șoferii respectă cu strictețe Codul Rutier și marcajele.

### Indicații:

- 1) Uitați-vă în jur, aici indiciile nu pot ajuta.
- 2) Acceptați o mărime medie a unei mașini și încercați să vedeți prin diagrame de cât spațiu are nevoie șoferul.
- 3) Luând în considerare niște dimensiuni medii ale unei mașini calculați cu ce valoare se optimizează distanța având parcate 2, 3 și 4 mașini și ulterior generalizați rezultatul.
- 4) Pur și simplu creați un model matematic utilizând datele obținute anterior și mărimea unui loc de parcare decisă de către dumneavoastră.
- 5) Din nou faceți o comparație rapidă pentru 2, 3 și până la 10 mașini apoi, generalizarea rezultatului ar trebui să fie partea ușoară.

**Problema 11.** [Olimpiada TMM, 2022] Către începutul secolului al 23-lea, omenirea s-a stabilit pe Marte, Lună și alte corpuri ale sistemului solar. Sub conducerea unui computer algoritmic programat euristic HAL13, Humankind Post livrează mărfuri între numeroase colonii și stații spațiale. Alice, Bob, Charlie, David și Erin trăiesc într-o bază de cercetare de pe Marte. Într-o zi, Nava Humankind Post livrează un colet la baza acestor cercetători cu încărcătură, care era în mod clar că avea altă destinație. Dar HAL13 neagă eroarea, neagă sosirea transportului și însăși existența acestei nave. Deoarece este imposibil de returnat coletul, cercetătorii decid să împartă mărfurile între ei. În acest scop, au întocmit o listă completă de mărfuri, iar fiecare persoană, independent de celelalte, a estimat valoarea subiectivă a fiecărei mărfi (adică valoarea personală a mărfii), exprimându-o în moneda omenirii – astrocredite (acr.):

No.	Obiectele	Valoarea estimată în astrocredite				
		Alice	Bob	Charlie	David	Erin
1	Unelte	30	70	60	45	45
2	Cutie cu condimente	20	22	25	23	15

3	Țesătură de mătase	110	70	50	90	80
4	Memorie pentru calculator	50	100	50	90	20
5	Termometru	200	310	200	320	300
6	Câine jucărie	180	50	-50	0	200
7	Față de masă	7	6	5	5	6
8	Costum spațial	200	700	450	550	550
9	Cravată	3	10	3	4	1
10	Televizor	75	50	90	50	40
11	Set de tacâmuri	4	4	1	1	3
12	Sandale	15	5	7	5	10
13	Card de acces la puntea holografică	10	110	110	30	40
14	Cutie cu cărți rare	120	80	90	150	170
15	Semițe de dovleac	5	3	15	30	100
16	Microscop	200	800	600	1100	1000
17	Kit de streaming video	150	50	300	100	100
18	Haine	20	20	20	20	20
19	Proiector	5	8	7	20	35
20	Tastatură albaniană	9	10	15	2	5
21	Proprietate imobiliară (impozit mare)	50	75	-30	-50	-40
22	Cutie cu mixtură condimentată	50	25	95	100	50
23	Numărător automatizat de găini	20	75	20	70	90
24	iPphone 17 (raritate)	200	300	340	125	150
25	Sabie de lumină	50	100	220	110	70
26	Instrument de corectare a elevilor de liceu	200	250	150	400	500
27	Piese mecanice nesuspicioase	3	30	5	7	5
28	Piese mecanice suspicioase	3	45	50	70	45
29	Album „Ne-au numit BTS” (cărți)	70	40	100	10	120
30	Certificatul de naștere a lui Luc	30	5	25	10	5

*Observația 1:* Valorile negative ale unor mărfuri se explică prin faptul că valorile acestor mărfuri pentru unii cercetători este scăzut, dar aceste obiecte implică costuri de întreținere.

*Sarcini:*

- 1) Distribuți toate încărcăturile între Alice și Bob, dându-le oricui îi plac cel mai mult. Va fi astfel distribuția mărfurilor corectă?
- 2) Creați un set de criterii pentru o distribuție echitabilă a mărfurilor. Toți cercetătorii implicați în distribuția mărfurilor au drepturi egale.

- 3) Cei cinci cercetători pot concura unii cu alții sau pot coopera în atingerea unor obiective colective. Cum se vor schimba criteriile pentru distribuirea echitabilă a mărfurilor, dacă se iau în considerare interacțiunile sociale între coloniști?
- 4) Cercetătorii au evaluat fiecare marfă separat. Cu toate acestea, valoarea subiectivă a bunurilor se poate modifica în funcție de alte bunuri pe care le deține sau nu le deține persoana respectivă. Examinați lista mărfurilor și sugerați modificări ale valorilor acestora în funcție de deținerea altor mărfuri.
- 5) Distribuți toate mărfurile conform principiilor pe care le-ați sugerat între membrii fiecăruia dintre următoarele grupuri (adică, creați patru distribuții independente de marfă):
  - a) Alice și Bob,
  - b) Alice și Charlie,
  - c) Alice, Bob și Charlie,
  - d) Alice, Bob, Charlie, David și Erin.

Explicați în ce măsură distribuțiile pe care le-ați obținut sunt conforme sau nu cu principiile dvs. de corectitudine.

*Observația 2:* Mărfurile sunt indivizibile, adică fiecare marfă poate fi dată doar unui singur cercetător.

#### **Indicii:**

- 1) Calculați suma astrocreditelor obținute de cei doi cercetători, numărul de elemente obținute, cât și repartiția celor mai dorite obiecte de către ei.
- 2) Exprimați un indice care să reflecte cât e de bună o repartizare în dependență de numărul de obiecte obținute de oameni, valorile lor, și alte criterii impuse de voi înșiși.
- 3), 4) Creați un sistem de relații între obiecte care adaugă valoare acestora în dependență de faptul dacă sunt deținute sau nu de același om.
- 5) Respectați criteriile impuse la 2) 3) și 4) și căutați o repartizare bună.

**Capitolul 1**

1. CHIRIAC, Liubomir; GOLOVCO, Nicolae. Metode Numerice. Îndrumar de laborator. Chişinău: UST, 2004. 125 p. ISBN 9975-9777-0-7.
2. CHIRIAC, Liubomir. *Metode numerice*. Chişinău: Editura Tipografia Centrală, 2014. 196 p. ISBN 978-9975-53-300-3.
3. CHIRIAC, Liubomir. (coord.) *Evaluarea procesului de studiere a ştiinţelor reale şi ale naturii din perspectiva inter/transdisciplinarităţii*, Chişinău: Editura Tipografia Centrală, 2020. 252 p. ISBN 978-9975-117-50-0.
4. CHIRIAC, Liubomir; MIHĂLACHE, Lilia; LUPAŞCO, Natalia. *Formula de cuadratură Newton-Cotes. Aplicaţii în MAPLE* (recomandări metodice privind studierea integrării numerice). Ch.: UST, 2021. p. 74. ISBN 978-9975-76-335-6.
5. NECULAI, Andrei. *Despre modelarea matematică. Concepţia simetriei de interpretare raţională a Divinităţii*. Disponibil online: <https://camo.ici.ro/neculai/z17a10.pdf>

**Capitolul 2**

1. ACHIRI, I. şi alţii. *Matematică: Manual pentru clasa a XI-a*, Chişinău: Prut Internaţional, 2014. 304 p.
2. ACHIRI, I. şi alţii. *Matematică: Manual pentru clasa a XII-a*, Chişinău: Prut Internaţional, 2017. 264 p.
3. COZMA, D. *Ecuatii şi sisteme diferenţiale liniare*, Chişinău: UST, 2022. 242 p.
4. FIHTENGOLT, G.M. *Bazele analizei matematice*. Chişinău: Lumina, 1968. 472 p.
5. ZAMBIŢCHI, D.; CIOBANU, I.; COZMA, D. *Ecuatii diferenţiale ordinare*. Chişinău: Evrica, 2004. 88 p.
6. БАВАРИН, И.И. *Начала анализа и математические модели в естествознаниях и экономике*. Москва: Просвещение, 1987. 80 с.
7. ВАВИЛОВ, В.В. и др. *Задачи по математике. Начала анализа*. Москва: Наука, 1990. 607 с.
8. РОВЕНСКАЯ, О.Г.; БЕЛЫХ, Н.В. *Прикладные задачи математического анализа*, Краматорск: ДГМА, 2011. 152 с.

**Capitolul 3**

1. CALMUŢCHI, Laurenţiu; AFANAS, Dorin; CIOBAN, Mitrofan. *Geometrie analitică în spaţiu*. Chişinău: UST, 2014. 210 p. ISBN 978-9975-76-118-5.
2. AFANAS, Dorin; CHIRIAC, Liubomir; BRAICOV, Andrei. Implementation of remotely piloted aerial vehicle in research and education. În: *Acta et Commentationes, Sciences of Education*. 2020, nr. 2 (20), pp. 7-12.

## Capitolul 4

1. ASEMPAPA, R. S.; STURGILL, D.R. Mathematical Modeling: Issues and Challenges in Mathematics Education and Teaching. In: *Journal of Mathematics Research. Published by Canadian Center of Science and Education*; Vol. 11, No. 5; October 2019.
2. BORROMEO FERRI, R. On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behaviour. In: *Journal für Mathematikdidaktik*, 31(1), 99-118. 2010.
3. CAI, J.; CIRILLO, M.; PELESCO, J., and other. Mathematical modeling in school education: mathematical, cognitive, curricular, instructional and teacher education perspectives. In: *Proceedings of the 38th meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vancouver, Canada: IGPME, 2014.
4. BOUDAHRI, F.; BABA AHMED, A.; BELKAID, F.; BOUKLI, H. R. Modelling and optimization for improving the performance of agri-foods supply chain for milk products. In *International Journal of mathematical models and methods in applied sciences*. 2022, Vol. 16, pp. 83-88.
5. Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova. *Matematică. Curriculum național: Clasele 10-12. Curriculum disciplinar. Ghid de implementare*. Chișinău: Lyceum, 2020. 192 p.
6. ЛЯЩЕНКО, Е. *Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики*. М., 1988. 223 с.
7. <https://immchallenge.org/Contests/index.html>
8. <https://internat.msu.ru/educational-projects/turniry-i-konferentsii/turnir-mm/turnir-mm-5/>
9. BILLS, A.G. *General Experimental Psychology*. New York, London: Longmans, Green and Co, 1934. 620 p.
10. <https://www.valamis.com/hub/learning-curve#learning-curve-model-examples>