Grupuri pseudocompacte $G^{\square}$

Boris Țarălungă, dr., conf. univ.

Summary

Let G be an Abelian group and $G^{\square}$ be the group equipped with the finest ω-narrow topology. If $|G| \geq \aleph_0$, then $G^{\square}$ is not pseudocompact. If G and H are almost isomorfic Abelian groups, then $G^{\square} \cong H^{\square}$.

Grupul topologic Abelian G se numește ω – mărginit, dacă pentru orice vecinătate V a elementului neutru există o mulțime numărabilă S de elemente, încât $G = VS$. Dacă (G, T) este un grup discret, atunci cu $G^{\square}$ se notează grupul (G, T) echipat cu cea mai fină topologie ω – mărginită. Unele proprietăți ale grupului Abelian $G^{\square}$ sunt prezentate în [4].

În §1 se demonstrează, că grupul Abelian infinit $\boldsymbol{G}^{\square}$ nu este grup pseudocompact. În §2 se arată că, dacă două grupuri Abeliene sunt aproape izomorfe, atunci grupurile date sunt izomorfe ca spații topologice.

§1. Grupuri pseudocompacte $\boldsymbol{G}^{\square}$

Grupul topologic G se numește pseudocompact, dacă orice funcție continuă $f: G \to R$ este mărginită. Grupul topologic G se numește local pseudocompact, dacă el conţine o submulţime deschisă, încât cl$U$ este o mulţime pseudocompactă. Spațiul X se numește spațiu Moscow, dacă pentru orice submulțime deschisă U închiderea cl$U$ este o reuniune de submulțimi de tipul G_δ. Grupul topologic X se numește grup cosmic, dacă el posedă o rețea numărabilă. Prin extendul spațiului topologic X și notat cu $e(X)$ se înțelege supremumul cardinalelor submulțimilor discrete și închise în X. Se spune că submulțimea A a grupului G cu elementul neutru 0 este o submulțime independentă, dacă pentru elementele $a_1, a_2, \ldots, a_1 \in A$ și pentru $m_1, m_2, \ldots, m_n \in Z$ din relația $m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n = 0$, rezultă $m_i a_i = 0$, $i \in \{1.,,,.n\}$. Spațiul topologic X se numește k-separabil, daca el conține un subspațiu dens $\sigma -$ compact. Prin k(X) se înțelege numărul minimal de submulțimi compacte ce acoperă X.

Teorema 1. Dacă G este un grup Abelian infinit, atunci $G^{\square}$ nu este un grup pseudocompact.

Demonstrație. Fie G un grup numărabil. Atunci $G^{\square}$ este un grup discret. Cum orice grup pseudocompact este nenumărabil, rezultă că $G^{\square}$ nu este pseudocompact.

Fie acum G este un grup nenumărabil. Presupunem, că $G^{\square}$ este pseudocompact. Există un subgrup H, încât $|G/H| = \aleph_0$. Cum $G^{\square}$ este pseudocompact, atunci și $(G/H)^{\square}$ este pseudocompact, deci finit - contradicție. *Teorema este demonstrată.*

Propoziția 2. Orice grup Abelian $G^{\square}$ conține un subgrup local pseudocompact.

Demonstrație. Daca G este numărabil, atunci $G^{\square}$ este local pseudocompact.

Fie G nenumărabil, atunci G conține o submulțime numărabilă L. Considerăm subgrupul $D = <L>$, atunci $D^{\square}$ este un grup discret, deci local pseudocompact. *Propoziția este demonstrată.*

Propoziția 3. Dacă G este un grup Abelian, încât $|G| \leq 2^{\aleph_0}$, atunci spațiul grupului $G^{\square}$ este un spațiu Moscow.

Demonstrație. După [4], pseudocaracterul grupului topologic $G^{\square}$ este numărabil.

$\psi(G^{\square}) \leq \aleph_0$. Conform [1], spațiul grupului $G^{\square}$ este un spațiu Moscow. *Propoziția este demonstrată.*

Propoziția 4. Dacă G este un grup Abelian nenumărabil, atunci grupul $G^{\square}$ nu este un grup cosmic.

Demonstrație. Presupunem contrariul, adică $G^{\square}$ este un grup cosmic. Atunci $G^{\square}$,conform [1], este un grup R- factorizabil- contradicție [4]. *Propoziția este demonstrată.*

Propoziția 5. Dacă G este un grup Abelian, încât $|G| \leq 2^{\aleph_0}$, atunci grupul $G^\square$ admite o aplicație continuă izomorfă pe un grup K cu $\omega(K) \leq \aleph_0$.

Demonstrație. Cum $\psi(G^\square) \leq \aleph_0$ există o familie $\rho = \{U_\alpha : \alpha < \aleph_0.\}$ de vecinătăti deschise U_α a elementului neutru {e}, încât $\cap \{U_\alpha : \alpha < \aleph_0\} = \{e\}$. După lema 5.1.7 [1] pentru orice $\alpha < \aleph_0$ există un omomorfism continuu $f_\alpha : G^\square \to K_\alpha$ a grupului $G^\square$ pe grupul topologic K_α, unde $\omega(K_\alpha) \leq \leq \aleph_0$, încât $f_\alpha^{-1}(V_\alpha) \subset U_\alpha$ pentru orice vecinătate V_α a elementului neutru a grupului K_α.

Definim produsul diagonal ϕ a aplicațiilor f_α, $\alpha < \aleph_0$, $\phi: G \to K = \prod_{\alpha<\aleph_0} K_\alpha$.

Atunci $\omega(K) \leq \aleph_0$. Cum Ker $\phi = \{e\}$ rezultă, că $\phi: G^\square \to K$ este un izomorfism continuu. *Propoziția este demonstrată.*

Propoziția 6. Dacă G este un grup Abelian, atunci $e(G^\square) \leq \aleph_0$.

Demonstrație. După [4], orice subgrup K a grupului $G^\square$ este închis. Dacă $K^\square$ este discret, atunci K este numărabil. *Propoziția este demonstrată.*

Propoziția 7. Orice submulţime independentă a grupului Abelian $G^\square$ este o mulţime numărabilă și închisă.

Demonstrație. Fie L o submulțime independentă a grupului G, iar $x \in L$. Atunci după [4] grupul K_x generat de submulțimea $L \setminus \{x\}$ este un grup închis în grupul $G^\square$, iar $L \cap (G \setminus K_x) = = \{x\}$, deci $\{x\}$ este un punct izolat . Astef submulțimea L este o submulțime discretă în $G^\square$. După [1] L este o mulțime numărabilă și închisă. *Propoziția este demonstrată.*

Propoziția 8. Dacă grupul Abelian $G^\square$ este un grup σ −compact, atunci G este un grup numărabil.

Demonstrație. Fie $G^\square$ este un grup σ −compact, deci $G^\square = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, unde K_i este o mulțime compactă, $i = \overline{1,\infty}$. Cum K_i este finită [4] rezultă, că G este numărabil. *Propoziția este demonstrată.*

Propoziția 9. Dacă grupul Abelian $G^\square$ este k-separabil, atunci G este un grup numărabil.

Demonstrație. Fie grupul $G^\square$ este k-separabil. Atunci există un subspațiu H dens și σ −compact. După propozitia 7 subspațiul H este numărabil. Conform [1] orice submulțime numarăbila a grupului $G^\square$ este închisă. Rezultă, că grupul $G^\square$ este σ −compact, deci numărabil. *Propoziția este demonstrată.*

Propoziția 10. Dacă G este un grup Abelian, atunci k$(G^\square) = |G|$.

Demonstrație. Daca $G^\square$ este discret , atunci propoziția este adevărată. Dacă G este nediscret, atunci $|G| > \aleph_0$. Avem $G = \bigcup_{i \in I} K_i$. Cum fiecare submulțime K_i este compactă conform [4] K_i este finită. Atunci k$(G^\square) = |I| \cdot |K_i| = |I| = |G|$. *Propoziția este demonstrată.*

§2. Grupuri *U*- omeomorfe $G^\square$

Problema Bohr omeomorfizmului pentru grupurile topologice $G^\#$ a fost formulată de E.K. van Douwen în [2]. Rezultate seminficative în rezolvarea acestei probleme a obținut K. Kunen [3].

Definiția 1. Două grupuri G și H se numesc U- omeomorfe, dacă grupurile $G^\square$ și $H^\square$ sunt omeomorfe ca spații topologice. Se notează $G^\square \cong H^\square$.

Este clar că grupurile U – omeomorfe au acelaș cardinal, iar grupurile izomorfe sunt U – omeomorfe .

Exemplu. $Q^\square \cong (Q/Z)^\square \times Z^\square$, însa $Q \ncong Q/Z \times Z$. Acest exemplu demonstrează, că 2 grupuri U- omeomorfe nu sunt și izomorfe .

Definiția 2. Două grupuri G și H se numesc aproape izomorfe, dacă ele au subgrupuri de indice numărabil izomorfe.

Lemă. Dacă G este un grup Abelian infinit și numărabil, iar A și B sunt doua submulțimi deschise și închise în $G^{\square}$, $A = \bigcup_t S_t$, $B = \bigcup_t L_t$, atunci există un omeomorfism f: $A \to B$, încât pentru orice t restrictia f_t este o translație a lui S_t pe L_t.

Demonstrație. Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ și $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ două submulțimi deschise și închise în $G^{\square}$. Fie translația f_1 a lui a_1 în b_1. Cum $G^{\square}$ este discret, iar A și B sunt deschise și închise există $a_1 \in S_1 \subset A$ și $b_1 \in L_1 \subset B$, încât $f_1(S_1) = L_1$. Atunci submulțimile $A_1 = A \setminus S_1$ și $B_1 = B \setminus L_1$ sunt deschise și închise.

Fie m_1 si r_1 indicii minimali pentru care $a_{m_1} \in A_1$ și $b_{r_1} \in B_1$. Alegem submulțimile deschise și închise $a_{m_1} \in S_2 \subset A_1$ și $b_{r_1} \in L_2 \subset B_1$, încât translația $x \to x + a_{m_1} - b_{r_1}$ translează pe S_2 în L_2. Analog alegem S_3,…,S_t ,… și L_3,…,L_t,…, încât $\bigcup_{t=1}^{q} S_t$ conține a_1 ,… a_q , iar $\bigcup_{t=1}^{q} L_t$ conține b_1,…, b_q. Astfel $A = \bigcup_t S_t$, $B = \bigcup_t L_t$. *Lema este demonstrată.*

Teoremă. Dacă G si K sunt doua grupuri Abeliene aproape izomorfe, atunci $G^{\square} \cong K^{\square}$.

Demonstrație. Dacă G este un grup Abelian numărabil infinit, iar K este un subgrup infinit în G, atunci $K^{\square}$ este deschis în $G^{\square}$ [1]. După lemă $G^{\square} \cong K^{\square}$.

Fie acum G un grup nenumărabil. Există subgrupul D, încât grupul factor G/D este un grup numărabil. Fie π: $G \to G/D$ - omomorfismul canonic. Atunci $\pi(K)$ are indice numărabil în grupul G/D. După lemă există partiția din submulțimi deschise și închise $/D = \bigcup_t S_t$, $\pi(K) = \bigcup_t L_t$ și o mulțime de elemente s_t din G/D, încât translația u_t:$x \to x + s_t$ trece S_t în L_t. Pentru orice t, fie $g_t \in G$, încât $\pi(g_t) = s_t$. Fie $N_t = \pi^{-1}(S_t)$ și $M_t = \pi^{-1}(L_t)$. Atunci $G = \bigcup_t N_t$ și $K = \bigcup_t M_t$ este o partiție din mulțimi deschise și închise. Fie v_t:y→ $y + g_t$ o translație a grupului G. Atunci $\pi \circ v_t = u_t \circ \pi$ și $v_t(N_t) = M_t$. Astfel familia (v_t) definește omeomorfismul f: $G^{\square} \to K^{\square}$, încât restricția omeomorfismul f la N_t coincide cu v_t. *Teorema este demonstrată.*

Bibliografie

1.Arkhangeliskii, A., Tkachenco, M., Topological groups and related structures, Atlantis Press, Amsterdam - Paris, 2008.
2. E.K. van Douwen, The maximal totally bounded group topology on G and the biggest minimal G- space for Abelian groups G. Topolgy Appl., 34 (1990), 69-91.
3. Kunen, K., Bohr topology and partition theorems for vector spaces Topology Appl., 90 (1998), 97-107.
4. Lorenzo de Leo, Weak and strong topologies in topological Abelian groups, Memoria para optar al grado de doctor, Madrid, 2009.