DESPRE SOLUȚIILE UNOR ECUAȚII DIOFANTICE NELINIARE

Boris Țarălungă, *conf. univ., dr.,*
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă" din Chișinău

ABOUT SOLUTIONS OF SOME NON – LINEAR DIOPHANTINE EQUATIONS

Boris Țarălungă, *Assoc. Prof.,*
„Ion Creanga" State Pedagogical University of Chisinau
ORCID: 000-0002-2477-9736
taralunga.boris@upsc.md

CZU: 511.526/.528
DOI: 10.46727/c.v3.24-25-03-2023.p293-298

Abstract. In this paper, it is show that the Diophantine exponential equation: $2^x + 12^y = z^2$ has exactly three non – negative integer solutions {(3,0,3),(2,1,4),(8,2,20)}, the Diophantine exponential equation: $2^x + 14^y = z^2$ has exactly three non–negative integer solutions: {(3,0,3), (1,1,4),(7,2,18)}, the Diophantine exponential equation $2^x + 15^y = z^2$ has exactly two non–negative integer solutions: {(3,0,3), (6,2,17)}.
Keywords: Diophantine equation; Integer solutions.

Ecuațiile diofantice neliniare sunt intens studiate în literatura de specialitate. Un tip aparte de ecuații diofantice neliniare îl reprezintă ecuațiile de forma $a^x + b^y = z^2$, abordate în [1-3]. În lucrare se arată că ecuația diofantică exponențială $2^x + 12^y = z^2$ are exact trei soluții întregi nenegative: $\{(3,0,3),(2,1,4),(8,2,20)\}$, ecuația diofantică $2^x + 14^y = z^2$ are exact trei soluții întregi nenegative: $\{(3,0,3),(1,1,4),(7,2,18)\}$, iar ecuația diofantică exponențială $2^x + 15^y = z^2$ are exact două soluții întregi nenegative: $\{(3,0,3),(6,2,17)\}$.

Lema 1. Ecuația

$$2^x - 3^y = 1$$

are exact două soluții întregi nenegative: $\{(1,0),(2,1)\}$.

*Demonstrație***.** Fie $x = 0$. Atunci rezultă ecuația $1 - 3^y = 1$, care nu are soluții întregi. Fie $x = 1$. Substituim și obținem $2 - 3^y = 1$, de unde $3^y = 1$, deci $y = 0$. Fie $x = 2$. Înlocuim și obținem ecuația $4 - 3^y = 1$. De aici rezultă $y = 1$.

Din ecuația

$$2^x - 3^y = 1$$

rezultă

$$2^x - 1 = 3^y.$$

Pentru $x \geq 3$, rezultă relația $2^x \equiv 0(mod 8)$. Atunci $2^x - 1 \equiv -1(mod 8)$. Dacă $y = 2t$, atunci $3^{2t} \equiv 1(mod 8)3^{2t} \equiv 1(mod 8)$ și ecuatia dată nu are soluții întregi. Dacă $y = 2t + 1$, atunci $3^{2t+1} \equiv 3(mod 8)3^{2t+1} \equiv 3(mod 8)$ și ecuatia nu are soluții întregi. Lema este demonstrată.

Teorema 1. Ecuația

$$2^x + 12^y = z^2$$

are exact trei solutii întregi nenegative: $\{(3,0,3),(2,1,4),(8,2,20)\}.(3,0,3),(2,1,4),(8,2,20)\}$.

*Demonstrație***.** Fie $y=0$. Înlocuim și obținem ecuația

$$2^x+1=z^2.$$

De aici rezultă

$$z^2-1=2^x$$

sau

$$(z-1)(z+1)=2^x.$$

Notăm cu $z-1=2^v$, iar $z+1=2^{x-v}$, $x>2v, v\in N$. Din relația a doua scădem prima relatie și obținem

$$2^{x-v}-2^v=2$$

sau

$$2^v(2^{x-2v}-1)=2.$$

Rezultă că $v=1$. Atunci $2^{x-2}=2$, deci $x=3$. Atunci $z=3$.

Fie $y=2t$. Avem ecuația

$$2^x+12^{2t}=z^2.$$

Din această ecuație obținem

$$2^x=z^2-12^{2t}$$

sau

$$2^x=(z-12^t)(z-12^t).$$

Notăm cu $z-12^t=2^q$, iar $z+12^t=2^{x-q}$, $x>2q, q\in N$. Din relația a doua scădem prima relație și primim

$$2^{x-q}-2^q=2\cdot 12^t$$

sau

$$2^q(2^{x-2q}-1)=2^{2t+1}.3^t 2^q(2^{x-2q}-1)=2^{2t+1}.3^t$$

De aici rezultă că $q=2t+1$. Atunci $2^{x-2(2t+1)}-1=3^t$. Conform lemei 1, $t=1, q=3$ și obținem soluția ecuației: $(x,y,z)=(8,2,20)$.

Fie $y=2t+1$. Atunci avem ecuația

$$2^x+12^{2t+1}=z^2.$$

Sau

$$2^x+12\cdot 12^{2t}=z^2$$

Ecuația dată poate fi scrisă sub forma

$$2^x+(3+9)\cdot 12^{2t}=z^2.2^x+(3+9)\cdot 12^{2t}=z^2.$$

Ultima ecuație o reprezentăm astfel

$$2^x+3\cdot 12^{2t}=z^2-9\cdot 12^{2t}.$$

Descompunem partea dreaptă în produs

$$(z-3\cdot 12^t)\cdot(z+3\cdot 12^t)=2^x+3\cdot 12^{2t}.$$

Am primit sistemele de ecuații

$$\begin{cases} z+3\cdot 12^t=2^x+3\cdot 12^{2t} \\ z-3\cdot 12^t=1 \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} z-3\cdot 12^t=2^x+3\cdot 12^{2t} \\ z+3\cdot 12^t=1 \end{cases}$$

Rezolvăm primul sistem și obținem soluția: $(x, y, z) = (2,1,4)$. Observăm că sistemul doi nu are soluții întregi. Teorema este demonstrată.

Lema 2. Ecuația

$$2^x - 7^y = 1$$

are exact două soluții întregi nenegative: $\{(1,0), (3,1)\}$.

Demonstrație. Fie $x = 0$. Atunci rezultă ecuația $1 - 7^y = 1$, care nu are soluții întregi. Fie $x = 1$. Substituim și obținem $2 - 7^y = 1$, de unde $7^y = 1$ și ecuatia nu are solutii. Fie $x = 2$. Înlocuim și primim ecuația $4 - 7^y = 1$. De aici rezultă $7^y = 3$ și ecuația nu are soluții întregi. Fie $x = 3$. Înlocuim și obținem ecuația $8 - 7^y = 1$. De aici rezultă $y = 1$.

Din ecuația

$$2^x - 7^y = 1$$

rezultă ecuația

$$2^x - 1 = 7^y.$$

Pentru $x \geq 4$, avem $2^x \equiv 0(mod16)$. Atunci $2^x - 1 \equiv -1(mod16)$. Dacă $y = 2s$, atunci $7^{2s} \equiv 1(mod16)$și ecuația nu are soluții întregi. Dacă $y = 2t + 1$, atunci $7^{2t+1} \equiv\equiv 7(mod16)$ și ecuația nu are soluții întregi. Lema este demonstrată.

Teorema 2. Ecuația

$$2^x + 14^y = z^2$$

are exact trei soluții întregi nenegative: $\{(3,0,3), (1,1,4), (7,2,18)\}$.

Demonstrație. Fie $y = 0$. Înlocuim și obținem ecuația

$$2^x + 1 = z^2.$$

De aici rezultă

$$z^2 - 1 = 2^x$$

sau

$$(z - 1)(z + 1) = 2^x.$$

Notăm cu $z - 1 = 2^b$, iar $z + 1 = 2^{x-b}$, $x > 2b, b \in N$. Din relația a doua scădem prima relatie și obținem

$$2^{x-b} - 2^b = 2$$

sau

$$2^b(2^{x-2b} - 1) = 2.$$

Rezultă că $b = 1$. Atunci $2^{x-2} = 2$, deci $x = 3$ Atunci $z = 3$

Fie $y = 2k$. Înlocuim și obținem ecuația

$$2^x + 14^{2k} = z^2.$$

Din această ecuație avem

$$2^x = z^2 - 14^{2k}$$

sau

$$2^x = (z - 14^k)(z - 14^k).$$

Notăm cu $z - 14^k = 2^m$, iar $z + 14^k = 2^{x-m}$, $x > 2m, m \in N$. Din relația a doua scădem prima relatie și obținem

$$2^{x-m} - 2^q = 2 \cdot 14^k$$

sau

$$2^m(2^{x-2m}-1)=2^{k+1}.7^k$$

Atunci $m=k+1$. Înlocuim şi avem ecuația

$$2^{x-2(k+1)}-1=7^k.$$

Conform lemei 2, $k=1, m=2, x=7$. Atunci ecuația inițială are soluția: $(7,2,18)$.

Fie $y=2k+1$. Înlocuim și obținem ecuația

$$2^x+14^{2k+1}=z^2.$$

Din această ecuație avem

$$2^x+14\cdot 12^{2k}=z^2$$

sau

$$2^x+(5+9)\cdot 12^{2k}=z^2.$$

De aici rezultă

$$2^x+3\cdot 12^{2k}=z^2-9\cdot 12^{2k}.$$

Descompunem în produs partea dreaptă a ecuației. Atunci
$(z-3\cdot 14^k)\cdot(z+4\cdot 14^k)=2^x+5\cdot 14^{2k}$.

Am obținut deci sistemele de ecuații

$$\begin{cases} z+3\cdot 14^k=2^x+5\cdot 14^{2k} \\ z-3\cdot 14^k=1 \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} z-3\cdot 14^k=2^x+3\cdot 14^{2k} \\ z+3\cdot 14^k=1 \end{cases}.$$

Rezolvând primul sistem, obținem soluția $(x,y,z)=(1,1,4)$. Observăm că sistemul doi nu are soluții întregi. Teorema este demonstrată.

Lema 3. Ecuația

$$2^x-15^y=1$$

are exact două soluții întregi nenegative: $\{(1,0),(4,1)\}$.

Demonstrație. Fie $x=0$. Atunci ecuația $1-15^y=1$ nu are soluții întregi. Fie $x=1$. Substituim și obținem $2-15^y=1$, de unde $15^y=1$ și ecuația nu are soluții. Fie $x=2$. Înlocuim și obținem ecuația $4-15^y=1$. De aici rezultă $15^y=3$ și ecuația nu are soluții. Fie $x=3$. Înlocuim și obținem ecuația $15-7^y=1$. Atunci obținem $15^y=14$ și ecuația nu are soluții întregi. Fie $x=4$. Înlocuim și obținem ecuația $16-15^y=1$. De aici rezultă $y=1$.

Ecuația

$$2^x-15^y=1$$

o reprezentăm astfel

$$2^x-1=15^y.$$

Pentru $x\geq 5$, avem $2^x\equiv 0(mod32)$. Atunci $2^x-1\equiv -1(mod32)$. Dacă $y=2k$, atunci obținem congruența $15^{2k}\equiv 1(mod32)$ și ecuația nu are soluții. Dacă $y=2k+1$, atunci $15^{2k+1}\equiv 15(mod16)$ și ecuația nu are soluții întregi. Lema este demonstrată.

Teorema 3. Ecuația

$$2^x+15^y=z^2$$

are exact două soluții întregi nenegative: $\{(3,0,3),(6,2,17)\}$.

Demonstrație. Fie $y = 0$. Atunci obținem ecuația

$$2^x + 1 = z^2.$$

De aici rezultă

$$z^2 - 1 = 2^x$$

sau

$$(z-1)(z+1) = 2^x.$$

Notăm cu $z - 1 = 2^c$, iar $z + 1 = 2^{x-b}$, $x > 2b, b \in N$. Din relația a doua scădem prima relație și obținem

$$2^{x-b} - 2^b = 2$$

sau

$$2^b(2^{x-2b} - 1) = 2.$$

Atunci $b = 1$. Înlocuim și obținem $2^{x-2} = 2$, deci $x = 3$. Atunci $z = 3$.

Fie $y = 2s$. Atunci obținem ecuația

$$2^x + 15^{2s} = z^2.$$

Din această ecuație rezultă

$$2^x = z^2 - 15^{2s}$$

sau

$$2^x = (z - 15^s)(z - 15^s).$$

Notăm cu $z - 15^s = 2^w$, iar $z + 15^s = 2^{x-w}$, $x > 2w, w \in N$. Din relația a doua scădem prima relatie și obținem

$$2^{x-w} - 2^w = 2 \cdot 15^s$$

sau

$$2^w(2^{x-2w} - 1) = 2 \cdot 15^s$$

Rezultă că $w = 1$. Înlocuim și obținem

$$2^{x-2} - 1 = 15^s.$$

Conform afirmației lemei 3, ecuația dată are soluția $s = 1, x = 4$. Atunci ecuația inițială are soluția: $(6,2,17)$.

Fie $y = 2t + 1$. Atunci rezultă ecuația

$$2^x + 15^{2t+1} = z^2.$$

Ecuația dată o putem reprezenta sub forma

$$2^x + 15 \cdot 15^{2t} = z^2$$

sau

$$2^x + (16-1) \cdot 15^{2t} = z^2.$$

De aici se obține

$$2^x - 15^{2t} = z^2 - 16 \cdot 15^{2t}.$$

Descompunem în produs partea dreaptă și avem

$$(z - 4 \cdot 15^k)(z + 4 \cdot 15^k) = 2^x - 15^{2t}.$$

Am obținut sistemele de ecuații

$$\begin{cases} z + 4 \cdot 15^t = 2^x - 15^{2t} \\ z - 4 \cdot 15^t = 1 \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} z - 4 \cdot 15^t = 2^x - 15^{2t} \\ z + 4 \cdot 15^t = 1 \end{cases}$$

Sistemele date de ecuații nu au soluții întregi. Teorema este demonstrată.

BIBLIOGRAFIE

1. BURSHTEIN N. All the Solutions to an Open Problem of S. Chotchaisthit on the Diophatine Equation $2^x + p^y = z^2$ when p are the Particular Primes and $y = 1$. Annals of Pure and Applied Matehematics, Vol.16, No.1, 2018, pp.31-35.
ISSN: 2279-087.
2. SUVARNAMANI A., Solutions of the Diophantine equation $2^x + 3^y = z^2$. International Jurnal of Mathematical of Pure and Applied Mathematics, Vol. 84, No. 2, 2013, pp.133-137. ISSN: 1311-8080
3. ȚARĂLUNGĂ B., NEGRU N., ZDRAGAT L. Despre unele ecuații diofantice. Conferința internațională. Perspectivele și Problemele Integrării în Spațiul European al Cercetării și Educației. Nr 1(146)/2010, Cahul, 2019, pp. 371-373, ISSN 1068-3755.