SOLUȚIONAREA PROBLEMELOR DE CONCURS DIN GEOMETRIE CONSTRUCTIVĂ

Sergiu Port, *conf. univ., dr.,*
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău

SOLVING CONTEST PROBLEMS IN CONSTRUCTIVE GEOMETRY

***Sergiu Port**, PhD., Assoc. Prof.,*
“Ion Creanga” State Pedagogical University of Chisinau
ORCID:0000-0001-7758-943X
e-mail: port.sergiu@upsc.md

CZU: 514.115
DOI: 10.46727/c.v3.24-25-03-2023.p288-292

Abstract. In this paper, using mathematical software, geometrical constructions are presented. These proofs should be presented, in school textbooks, additionally to the analytical demonstrations.

Keywords: Geometrical constructions, mathematical software, analytical demonstrations.

În acest articol voi aduce soluționarea unor probleme de concurs la geometrie, bazate pe contrucțiile geometrice. Sunt prezentate diferite metode de construcții și demonstrații. Voi utiliza atât setul clasic de instrumente, adică rigla unilaterală și compasul, cât și rigla unilaterală.

În prima problemă sunt construcții cu rigla unilaterală și compasul.

Problema 1. Construiți triunghiul dacă sunt date înălțimile h_a, h_b, h_c.

Rezolvare. Aplicăm metoda algebrică în construcții [1]. Deducem formula ce leagă latura necunoscută a cu înălțimile h_a, h_b, h_c. La bază este formula lui Heron:

$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}$ *(1),* unde a,b,c sunt laturile, S - aria triunghiului, iar p semiperimetrul.

$$2p=a+b+c=2S(\frac{1}{ha}+\frac{1}{hb}+\frac{1}{hc}),\ p=S(\frac{1}{ha}+\frac{1}{hb}+\frac{1}{hc}),$$

$$p-a=S(\frac{1}{hb}+\frac{1}{hc}-\frac{1}{ha}),\ p-b=S(\frac{1}{ha}+\frac{1}{hc}-\frac{1}{hb}),\ p-c=S(\frac{1}{hb}-\frac{1}{hc}+\frac{1}{ha}),$$

Substituim în *(1)* egalitățile de mai sus

$$S=\sqrt{S\left(\frac{1}{ha}+\frac{1}{hb}+\frac{1}{hc}\right)S\left(\frac{1}{hb}+\frac{1}{hc}-\frac{1}{ha}\right)S(\frac{1}{hb}-\frac{1}{hc}+\frac{1}{ha})S(\frac{1}{ha}+\frac{1}{hc}-\frac{1}{hb})},$$

sau

$$S=\sqrt{\left(\frac{1}{ha}+\frac{1}{hb}+\frac{1}{hc}\right)\left(\frac{1}{hb}+\frac{1}{hc}-\frac{1}{ha}\right)(\frac{1}{hb}-\frac{1}{hc}+\frac{1}{ha})(\frac{1}{ha}+\frac{1}{hc}-\frac{1}{hb})}\ (2).$$

Notăm

$$x=(\frac{1}{ha}+\frac{1}{hb}+\frac{1}{hc})=\frac{hb*hc}{hb+\frac{hb*hc}{ha}+hc}=\frac{hb*hc}{hb+t+hc},$$

$$y=\left(\frac{1}{hb}+\frac{1}{hc}-\frac{1}{ha}\right)=\frac{hb*hc}{hb-\frac{hb*hc}{ha}+hc}=\frac{hb*hc}{hb-t+hc},$$

$$u=\left(\frac{1}{ha}+\frac{1}{hb}-\frac{1}{hc}\right)=\frac{hb*hc}{hb+\frac{hb*hc}{ha}-hc}=\frac{hb*hc}{hb+t-hc},$$

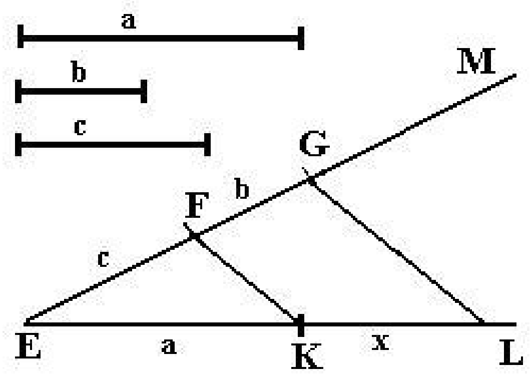
$$v=\left(\frac{1}{ha}-\frac{1}{hb}+\frac{1}{hc}\right)=\frac{hb*hc}{\frac{hb*hc}{ha}+hc-hb}=\frac{hb*hc}{t+hc-hb}, \text{ unde } t=\frac{hb*hc}{ha}.$$

Segmentele *x,y,u,v,t* se vor construi conform formulei 6 din [1], adică

6. **x**$=\frac{b*a}{c}$. (segmentul al patrulea proporţional)

***Construcţia*:**
1. <MEN – arbitrar
2. [EK]=a: K Є [EN)
3. [EF]=c: F Є [EM)
4. [FG]=b: G Є [FM)
5. (GL) || (FK): L Є [KN)

x = [KL]



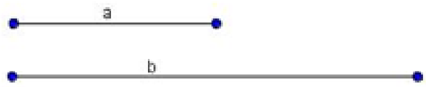
Substituim *x,y,u,v* în *(2)* $S=\sqrt{x*y*u*v}=\sqrt{x*y}*\sqrt{u*v}=f*l$ *(3)*, unde $f=\sqrt{x*y}$, $l=\sqrt{u*v}$.

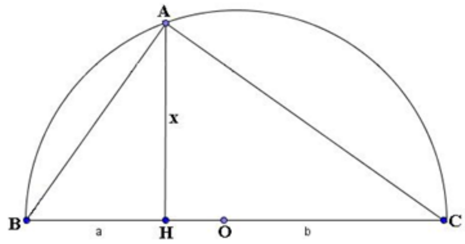
Segmentele *f, l* se vor construi co nform formulei 7 din [1], adică

7. $\mathbf{x}=\sqrt{\mathbf{a\,b}}$

***Construcţia*:**
1. [BH]=a, [HC]=b: HЄ[BC]
2. O – mij. [BC]
3. ω(O; [BO])
4. (AH)) | ((BC): A Є ω

x = [AH]

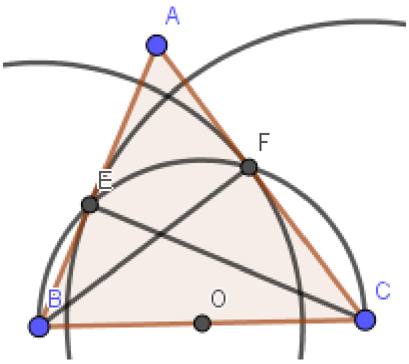




***Construcţia*:**

1. [BC]=a,
2. O – mij. [BC],
3. $\omega(O; [BO])$,
4. $F=\omega_1(B; h_b) \cap \omega$, $E=\omega_2(C; h_c) \cap \omega$,
5. $A=[BE) \cap [CF)$.

ΔABC – construit.

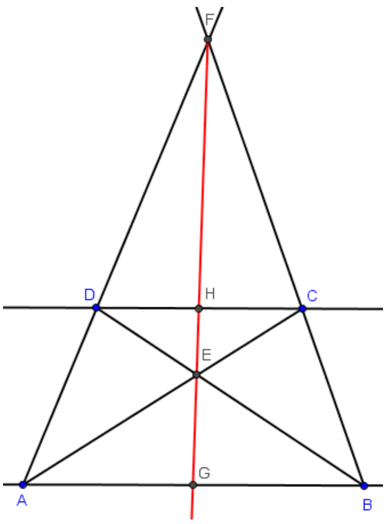


Din (*3*) obţinem $a*h_a=2f*l$ *(4)* , iar latura *a* se construește conform formulei 6 din [1],

În final, triunghiul se construește după *a* cu înălţimile h_b, h_c.

Problema 2. Sunt dreptele paralele *m,n* şi *[BC]€m*. Să se tripleze segmentul *[BC]* doar cu rigla unilaterală.

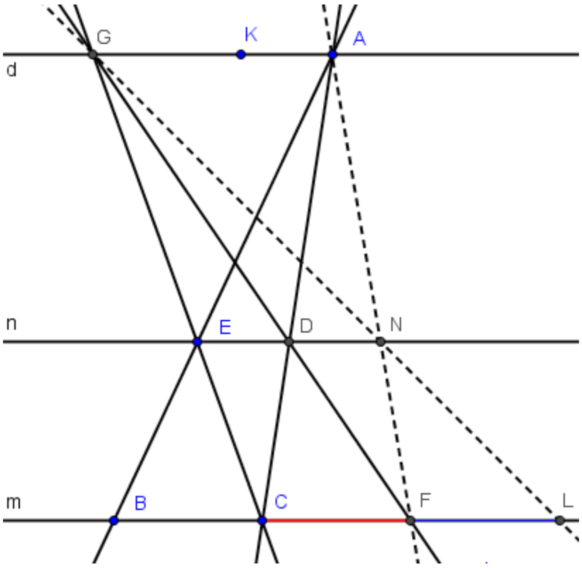
Această problemă se soluționează cu ajutorul lemei trapezului [1]:



Dacă prin punctul *E*-intersecţia diagonalelor trapezului *ABCD* şi *F*- intersecţia laturilor neparalele, atunci dreapta *(EF)* împarte bazele trapezului în jumătate.

AG : GB=DH : HC=1

considerând *G*-mijlocul bazei *[AB]*, iar *H*-mijlocul bazei *[DC]*.



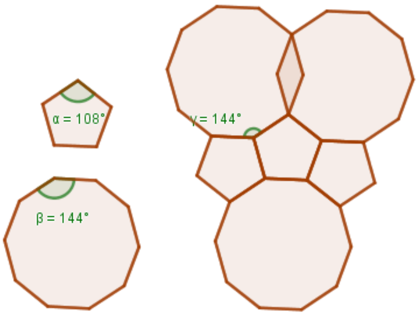
Construcția

1. AK||m: A $\not\subset$ n,m
2. [AB] $\cap$ n=E
3. [AC] $\cap$ n=D
4. (CE) $\cap$ (KA)=G
5. (GD) $\cap$ m=F

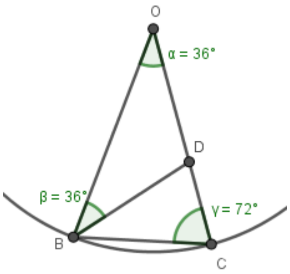
[BC]=[CF]= [FL]

Următoarea problemă face parte din problemele parchetului. Construcțiile sunt executate cu rigla unilaterală și compasul.

Problema 3. Este posibilă construcția parchetului numai din poligoane regulate cu *5* și *10* laturi?



Din desenul alăturat este clar că nu se poate construi parchetul în continuu [4]. Dar se poate construi o floare dintr-un decagon și zece pentagoane. Pentru aceasta construim decagonul și pentagonul prin împărțirea cercului în zece părți.



Este suficient de construit decagonul prin metoda algebrică, ce se rezumă la construcția triunghiului de aur (secțiunea de aur) [2].

În urma împărțirii cercului în zece părți obținem triunghiul *BOC,* pentru care *[BO]=[OC]=R,* iar segmentul care trebuie găsit este *x=[BC]*. Δ *BOC* este isoscel cu unghiul opus bazei de 36^0. Notăm *D* Є*[OC]* încât *[BD]* - bisectoare. Deci, Δ*BDC* și Δ*BDO* sunt isoscele, deci *x=[BC]=[BD]=[DO],* iar *R=[OC]*. Δ*BDC* și Δ*BDO* sunt asemenea, deoarece unghiul opus bazei este de 36^0. Din raporturile $\frac{BC}{DC}=\frac{OC}{BC}$ rezultă $\frac{x}{R-x}=\frac{R}{x}$, de unde $x^2+Rx-R^2=0$, iar soluția $x=\frac{-R+R\sqrt{5}}{2}$. Această formulă se construiește prin metoda algebrică [1]. Construcția pentagonului rezultă din formula de mai sus.

Floarea construită poate fi încadrată în pătrat sau completată cu alte poligoane până la un parchet.

Problemele geometriei constructive sunt simple în expunere, dar interesante. De aceste probleme au fost interesați nu numai matematicienii din diferite ramuri, dar și împărații. Printre aceștia este Napoleon, care a împărțit cercul în cinci părți numai cu compasul „ruginit". Mai mult ca atât, loja masonică are în calitate de simboluri instrumente ale geometriei constructive.

Construcțiile au fost executate în GeoGebra.

BIBLIOGRAFIE

1. PORT S. Geometrie constructivă. Chișinău 2009.
2. PORT S., TRIFAN V.. Istoria matematicii. Chișinău 2015.
3. АВГУСТ АДЛЕР. Теория геометрических построений. 1940.
4. NAGIBEN F., KANIN E. Caleidoscop matematic. Lumina. Chișinău 1987.