DETERMINAREA RĂDĂCINII DE ORDINUL DOI DINTR-UN NUMĂR COMPLEX: PERSPECTIVA TRIGONOMETRICĂ

Serghei Maftea, *conf. univ., dr.,*
Academia „Ştefan cel Mare" a MAI, Chişinău,

DETERMINING THE SQUARE ROOT OF A COMPLEX NUMBER: THE TRIGONOMETRIC PERSPECTIVE

Serghei Maftea*, PhD., Assoc. Prof.,*
Stefan cel Mare Police Academy,
ORCID: 0000-0001-9497-2967
psuplimentar@gmail.com

CZU: 511.11+514.11
DOI: 10.46727/c.v3.24-25-03-2023.p282-287

Abstract. Domeniul de aplicare al numerelor complexe este diverse, acestea legate de parte semnificativă din pregătirea matematică necesară, în special, inginerilor, constructorilor, programatorilor, economiştilor. Abordarea multor probleme de matematică, fizică, mecanică, electricitate, electronică este practic imposibilă fără aceste numere. În articol este pus în discuție conceptul de rădăcină de ordine doi dintru-un număr complex, în principal, din punct de vedere al formei trigonometrice de reprezentare al acestuia. Sînt prezentate câteva abordări pentru determinarea formulelor pentru cele două rădăcini de ordine doi, ceea ce contribuie la implementarea principiului varietăţii de învăţare. Drept scop precum și dezvoltarea competențelor privind conceptul de număr complex, şi a abilităților de operare cu aparatul matematic pus la dispoziție de trigonometrie. Aceste elemente vor ajuta elevul să stăpânească procedura de extragere a radicalului de ordine doi, precum și aplicarea la un nivel înalt al formulelor trigonometrice.

Keywords: root, imaginary, complex, trigonometry.

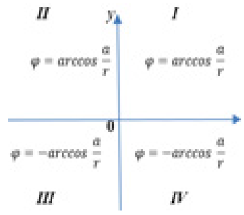
Ca obiective în cadrul studierii matematicii, pe lîngă formarea competenţelor preconizate, trebuie avute în vedere realizarea conexiunilor intradisciplinare, organizarea şi executarea recapitulării conţinuturilor deja studiate, acestea contribuind la dezvoltarea şi menţinerea interesului pentru matematică. Din perspectiva celor menţionate şi în vederea conștientizării esenţei materiei matematice puse în discuţie, intevine necesitatea ca profesorul să propună elevilor diferite abordări ale subiectelor studiate. Acest aspect este urmărit şi de unitățile de conţinut, propuse de cuuriculumul naţional la matematică. Astfel, se constată că în semestrul doi la clasa a X-a este propus compartimentul „Elemente de trigonometrie", propunîndu-se în acest sens 27 ore. Iar în semestrul doi la clasa a XI-a este propus compartimentul „Numere complexe" cu durata de 19 ore [2]. În aşa fel, profesorul, în cadrul studierii tematiciilor aferente numerelor complexe, are posibiitatea de a interveni în vederea realizării legăturii intradisciplinare. Ca urmare, se poate aştepta că, pe lângă dezvoltarea competenţelor specifice, elevii îşi vor spori capacitățile creative, vor dezvolta abilităţi de a aplica cunoştinţe anterioare în materia nouă, gândirea logică, de asemenea, va creşte gradul interesului pentru matematică şi se va realiza pregătirea pentru susţinerea examenului de bacalaureat la matematică.

Scopul oricărui subiect de matematică trebuie văzut prin spectrul aprofundării și extinderii cunoștințelor, al dezvoltării interesului pentru subiect, al dezvoltării abilităților matematice, precum şi al dezvoltării abilităţilor de cercetare și dezvoltarea creativității. Astfel, compartimentul din curriculumul la matematică „Numere complexe" ţinteşte aprofundarea, extinderea şi generalizarea conceptului de număr. Cunoaşterea numerelor complexe reprezintă etapa finală în cadrul nivelului licelal al sistemului de învăţămînt naţional, de studiere a muţimilor de numere, în urma cărora elevii ar trebui să aibă o bună înțelegere a conceptului de număr, a relației dintre numerele reale și complexe, să poată efectua operații aritmetice cu numere complexe în forme algebrice și trigonometrice, să reprezinte geometric numere complexe, să fie capabili să aplice numere complexe la găsirea rădăcinilor polinoamelor, la demonstrarea formulelor trigonometrice etc. În toate cele menţionate intervine şi competenţa de a extrage rădicalul de ordinul doi din numere complexe.

Interesul faţă de studierea numerelor complexe trebuie tratat, cel puţin, din perspectiva faptului că spectrul de domenii, care apelează la numere complexe, este vast. Aici pot fi menţionate fizica, ingineria (electronica, electrică, informatică, mecanică și civilă, cuantică).

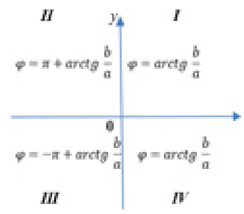
În cele ce urmează vom direcţiona eforturile spre determinarea radicalului de ordinul doi, z_1 şi z, a numărului complex $z = a + bi$, pornind de la faptul că forma trigonometrică a numărului complex se defineşte ca $z = r(\cos\varphi + i\, sin\,\varphi)$, unde $\varphi \in Arg z = \{\arg z + 2k\pi, k \in Z\}$ şi $-\pi < \arg z \leq \pi$, iar $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ [1]. În acest sens, se deosebesc mai multe abordări cu privire la procedura de determinare a argumentului principal, $\arg z$, al numărului complex. Totodată, reieşind din faptul că atât pentru $a = 0$, cât şi pentru $b = 0$, soluţionarea problemei este trivială, se va considera $a, b \in R^*$.

La baza uneia dintre aceste abordări se află propoziția $cos\varphi = \frac{a}{r}$. Ca rezultat al aplicării noţiunii de arccosinus se obţine $\arg z = \begin{cases} \arccos\frac{a}{r}, \textit{dacă } b > 0, \\ -\arccos\frac{a}{r}, \textit{dacă } b < 0. \end{cases}$



Într-o altă abordare ca punct de plecare se defineşte propoziţia $tg\varphi = \frac{b}{a}$. Ca rezultat al aplicării noţiunii de actangenta [cartea] se obţine uşor:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, \textit{dacă } a > 0, \\ \pi + arctg\,\dfrac{b}{a}, \textit{dacă } a < 0, b > 0, \\ -\pi + arctg\,\dfrac{b}{a}, \textit{dacă } a < 0, b < 0. \end{cases}$$



În acest ultim caz, se observă că valoarea argumentului este dependentă nu doar de semiplanul în care se află numărul complex examinat, dar şi de cadranul sistemului cartezian de coordonate aferent.

Reieşind din faptul că mulţimea tuturor rădăcinilor de ordinul doi din numărul complex $z = a + bi$ este $\left\{\sqrt{r}\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{2} + i\, sin\frac{\varphi+2k\pi}{2}\right) \middle| k = 0{,}1\right\}$, se obţine, în condiţiile notaţiilor efectuate, că $z_1 = \sqrt{r}\left(cos\frac{\varphi}{2} + i\, sin\frac{\varphi}{2}\right)$ şi $z_2 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\, sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right)$.

În cazul cînd ne înscriem în forma de abordare cu privire la definirea argumentului principal al numărului complex prin $-\pi < \varphi \leq \pi$, urmează că $-\frac{\pi}{2} < \frac{\varphi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$. În aşa fel, argumentul $\frac{\varphi}{2}$

al funcţiior trigonometrice care definesc rădăcina de ordinul doi, z_1, se află în semiplanul format de cadranele I şi IV ale sitemului cartezian de coordonate, iar argumentul $\frac{\varphi}{2}+\pi$, care defineşte rădăcina de ordinul doi, z_2, se află în semiplanul format de cadranele II şi III. Ca rezultat al aplicării formulelor de reducere avem $\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)=-\cos\varphi$ [3]. Problematica aplicării formulelor de reducere în cazul celui de al doilea termen din expresia pentru z_2 este ridicată de semnul funcţiei sinus, care este diferit în cele ultime două cadrane specificate mai sus. Ca urmare, sunt posibile două situaţii, care se materializează

$$\text{în } sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)=\begin{cases}\sin\frac{\varphi}{2}, dacă\ \frac{\varphi}{2}<0,\\ -\sin\frac{\varphi}{2}, dacă\ \frac{\varphi}{2}>0.\end{cases}$$

Astfel, în cazul abodării detreminării argumentului prin intermediului funcţiei cosinus

$$\text{se obţine } sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)=\begin{cases}\sin\frac{\varphi}{2}, dacă\ b<0,\\ -\sin\frac{\varphi}{2}, dacă\ b>0.\end{cases}$$

$$\text{Deci } z_2=\begin{cases}\sqrt{r}(-\cos\frac{\varphi}{2}+i\ sin\frac{\varphi}{2}), dacă\ b<0,\\ \sqrt{r}\left(-\cos\frac{\varphi}{2}-i\ sin\frac{\varphi}{2}\right), dacă\ b>0\end{cases}$$

$$\text{sau } z_2=-\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\ sgn\ b\cdot sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\text{unde } sgn\ b=\begin{cases}1,\ dacă\ b>0,\\ 0,\ dacă\ b=0,\\ -1, dacă\ b<0.\end{cases}$$

Aceeaşi formulă pentru y_2 se obţine şi în cazul abodării detreminării argumentului prin intermediului funcţiei tangenta. Într-adevăr, deoarece

$$\frac{\varphi}{2}=\frac{\arg z}{2}=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{b}{a}, dacă\ a>0,\\ \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}arctg\ \frac{b}{a}, dacă\ a>0, b>0,\\ -\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}arctg\ \frac{b}{a}, dacă\ a>0, b<0.\end{cases}$$

se observă că prima linie impune atât valoarea pozitivă, cât şi cea negativă în funcție de semnul numărului real $b\neq 0$, care este patrea imaginară a numărului complex $z=a+bi$. A doua linie implică doar valoarea pozitivă, deoarece domeniul de valori al funcţiei arctangenta este intervalul deschis $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$[3]. În cazul celei de a treia linii avem, din acelaşi considerent, $\frac{\varphi}{2}<0$. Aşadar, argumentul $\frac{\varphi}{2}$ este pozitiv pentru cazul când partea imaginară a numărului complex este pozitivă, $b > 0$ şi negativă pentru cazul când partea imaginară a numărului complex este negativă, $Im\ z = b < 0$.

Astfel, $z_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\ sin\frac{\varphi}{2}\right)$,

$$z_2 = -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\ sgn\ b \cdot sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

În continuare, ne vom concentra eforturile pentru a exprima $\cos\frac{\varphi}{2}$ şi $\sin\frac{\varphi}{2}$ prin partea reală şi imaginară a numărului complex scris în formă algebrică, adică numerele reale a şi b. Pentru aceasta vom apela la elemente de trigonometrie şi anume formulele semiargumentului [3] $cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 + cos\varphi)$ şi $sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 - cos\varphi)$.

Pentru abordarea ce prevede determinarea argumentului prin intermediul cosinusului se aplică faptul că $cos\varphi = \frac{a}{r}$, urmează că $cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{r})$ şi $sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{r})$. De unde rezultă că $cos\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{r+a}{2r}}$ şi $sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{r-a}{2r}}$. Semnul „+”, respectiv „–“, fiind ales în funcție de semnul funcţiei cosinus, respectiv sinus. Ca urmare, se obţine că:

în cazul când $b > 0$ atunci $\frac{\varphi}{2} \in (0;\frac{\pi}{2})$ şi urmează $cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{r+a}{2r}}$şi $sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{r-a}{2r}}$. Deci, rădăcinile de ordinul doi din numărul complex $z = a + bi$ se determină conform următoarelor formule

$$z_1 = \sqrt{r}(\sqrt{\frac{r+a}{2r}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2r}}) = \sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2}},\ z_2 = -\sqrt{r}(\sqrt{\frac{r+a}{2r}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2r}}) = -(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2}}).$$

în cazul când $b < 0$ $b < 0$ atunci $\frac{\varphi}{2} \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$

şi urmează $cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{r+a}{2r}}$ şi $sin\frac{\varphi}{2} = -\sqrt{\frac{r-a}{2r}}$.

Ca rezultat

$$z_1 = \sqrt{r}(\sqrt{\frac{r+a}{2r}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2r}}) = \sqrt{\frac{r+a}{2}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2}},\ z_2 = -\sqrt{r}(\sqrt{\frac{r+a}{2r}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2r}}) = -(\sqrt{\frac{r+a}{2}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2}})$$

Generalizînd se obţine $z_1 = \sqrt{\frac{r+a}{2}} + sgn\ b \cdot i\sqrt{\frac{r-a}{2}},\ z_2 = -(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + sgn\ b \cdot i\sqrt{\frac{r-a}{2}})$.

Pentru abordarea ce prevede determinarea argumentului prin intermediul tangentei se aplică şi formulele de exprimare a funcţiilor trigonometrice cosinus şi sinus prin tangentă [3]:

$cos^2\varphi = \frac{1}{1+tg^2\varphi}$ şi $sin^2\varphi = \frac{tg^2\varphi}{1+tg^2\varphi}$. Urmează că $cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 + cos\varphi) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{1+tg^2\varphi}}\right)$ şi $sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 - cos\varphi) = \frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{\frac{1}{1+tg^2\varphi}}\right)$. Conform definiţiei arctangentei şi formulelor respective de reducere se obţine uşor $tg\varphi = \frac{b}{a}$. Astfel,

$$cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{|a|}{r}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{r}\right) \text{ şi } sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{|a|}{r}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{r}\right).$$

Deci $cos\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{r+a}{2r}}$ şi $sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{r-a}{2r}}$. Ca rezultat

pentru $\frac{\varphi}{2} \in (0;\frac{\pi}{2})$ se obţine

$$z_1 = \sqrt{r}\left(\sqrt{\frac{r+a}{2r}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2r}}\right) = \sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2}} \text{ şi } z_2 = -\sqrt{r}\left(\sqrt{\frac{r+a}{2r}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2r}}\right) = -\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right).$$

pentru $\frac{\varphi}{2} \in (-\frac{\pi}{2};0)$ se obţine

$$z = \sqrt{r}\left(\sqrt{\frac{r+a}{2r}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2r}}\right) = \sqrt{\frac{r+a}{2}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2}} \quad \text{şi}$$

$$z_2 = -\sqrt{r}\left(\sqrt{\frac{r+a}{2r}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2r}}\right) = -\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right).$$

Generalizînd, se obţine că rădăcinile de ordinul doi din numărul complex $z = a + bi, b \neq 0$ se prezintă în forma

$$z_1 = \sqrt{\frac{r+a}{2}} + sgn\ b \cdot i\sqrt{\frac{r-a}{2}},\ z_2 = -\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + sgn\ b \cdot i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right).$$

Sau

$$z_1 = \sqrt{\frac{r+a}{2}} + \frac{|b|}{b} \cdot i\sqrt{\frac{r-a}{2}},\ z_2 = -\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + \frac{|b|}{b} \cdot i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right).$$

Articolul a fost elaborat şi din necesitatea de a contribui la aspectul de trecere, prin prisma formării de competenţe, de la prezentarea de informaţii la formarea la elevi a competenţelor funcţionale. În acest context, este eficient de a desfăşura procesul de predare-învăţare prezentînd relaţia multiaspectuală dintre diferite module incluse în curriculumul naţional la matematică în învăţămîntul secundar de nivel liceal. Ceea ce permite reducerea perecepţiei de fărâmiţare a matematicii. De menţionat că Manual pentru clasa a XI-a, care reprezintă instrumentul didactic principal privind predarea învăţarea-evaluarea matematicii atât pentru elev, cât şi pentru profesor propune în vederea determinării rădăcinilor de ordinul doi dintr-un număr complex doar formulele respective [1].

BIBLIOGRAFIE

1. ACHIRI I., EFROS P., GARIT V., PRODAN N. Matematică: Manual pentru clasa a XI-a. Editura Prut Internaţional, 2012.
1. Matematică: Curriculum naţional: Clasele 10-12: Curriculum disciplinar: Ghid de implementare /Ministerul Educaţiei, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova. Disponibil: https://mecc.gov.md/sites/default/files/matematica_liceu_ro.pdf.
2. MAFTEA S. Iniţiere în trigonometrie Chişinău: Departamentul Editorial-Poligrafic al Academiei „Ștefan cel Mare", 2021.
3. MAFTEA S. Geogebra ca instrument digital pentru elaborarea de sarcini interactive la matematică. În: Materialele conferinței ştiinţifico-practice internaţională ,,Știință, educație, cultură". СБОРНИК СТАТЕЙ ТОМ I. 11 FEBRUARIE, Comrat, 2021. pg. 282-286. GeoGebra. https://www.geogebra.org/