MATEMATICĂ PENTRU ZBORUL DUPĂ COORDONATE

***Dorin Afanas**, conf. univ., dr.,*
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă" din Chișinău

MATHEMATICS FOR FLIGHT BY COORDINATES

***Dorin Afanas**, PhD., Assoc. Prof.,*
"Ion Creanga" State Pedagogical University of Chisinau,,
ORCID: 0000-0001-7758-943X
afanas.dorin@upsc.md

CZU: 629.7.02+51
DOI: 10.46727/c.v3.24-25-03-2023.p265-273

Abstract. Due to its applicability in numerous fields, drones have become popular in recent times. Due to the rapid development of technologies and software, they are used by both children and adults, both as a hobby and professionally. Drones can become quite an effective tool in motivating youth to learn math.

In this article, the coordinate method in three-dimensional Euclidean space is investigated. This method allows us to solve various problems related to planning the flight path of a drone through which we can form mathematical skills in studious youth.

Keywords: coordinates, trajectory, unmanned aerial vehicle, security, flight.

Cercetarea spațiului euclidian tridimensional joacă un rol important la planificarea traectoriei unui vehicul aerian fără pilot uman la bord, deoarece traiectoriile pot fi diverse și pot să descrie diferite figuri geometrice: linie dreaptă, triunghi, cerc, pătrat, dreptunghi, patrulater arbitrar, linie frântă, etc. Traectoriile vehiculului aerian fără pilot uman la bord pot fi realizate atât într-o încăpere, cât și în exteriorul unei clădiri. Cunoașterea noțiunilor din cadrul temei date facilitează considerabil realizarea zborului după coordonate (a nu se confunda cu zborul după puncte) şi, totodată, contribuie la conștientizarea noțiunilor matematice respective, aferente aplicațiilor practice prin intermediul problemelor cu aspect cotidian.

Se recomandă, mai întâi, să ne axăm pe reperele teoretice, care vor sta la baza activităților ulterioare.

1. Repere teoretice

Studenții trebuie să posede următoarele cunoștințe și competențe din cadrul temelor:

- Elementele algebrei vectoriale.
- Sistemul afin și cel rectangular cartezian de coordonate în spațiu.
- Formula distanței dintre două puncte.
- Formulele de calcul ale coordonatelor mijlocului segmentului.
- Produsul vectorial a doi vectori. Aria triunghiului.
- Ecuațiile planului.
- Formula de calcul a razei cercului circumscris triunghiului.
- Formula de calcul a razei cercului înscris într-un triunghi.

Se rezolvă probleme de tipul:

1. Vârfurile triunghiului ABC au coordonatele: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ și $C(x_3; y_3; z_3)$. Determinați:

a) lungimile laturilor triunghiului;

b) perimetrul triunghiului;

c) lungimea medianei dusă din vârful B al triunghiului;
d) aria triunghiului;
e) lungimea înălțimii dusă din vârful C al triunghiului;
f) raza cercului circumscris triunghiului;
g) raza cercului înscris în triunghi.

2. Determinați coordonatele vectorilor: $2\vec{u}$; $5\vec{u}$ și $\sqrt{3}\,\vec{u}$. Prin ce se caracterizează vectorii calculați?

3. Sunt dați vectorii $\vec{u} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$și $\vec{v} = \{v_1;\ v_2;\ v_3\}$. Determinați:
a) lungimile vectorilor;
b) produsul scalar al vectorilor;
c) unghiul dintre vectori.

4. Vârfurile patrulaterului $ABCD$ au coordonatele: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ și $D(x_4; y_4; z_4)$.
a) Demonstrați că patrulaterul dat este un pătrat.
b) Aflați lungimile diagonalelor pătratului.
c) Aflați lungimea razei cercului înscris în acest pătrat.
d) Aflați raza cercului circumscris acestui pătrat.

5. Vârfurile patrulaterului $ABCD$ au coordonatele: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ și $D(x_4; y_4; z_4)$.
a) Demonstrați că patrulaterul dat este un dreptunghi.
b) Aflați lungimile diagonalelor dreptunghiului.
c) Aflați lungimea razei cercului înscris în acest dreptunghi.
d) Aflați lungimea razei cercului circumscris acestui dreptunghi.

6. Scrieți ecuația planului π care trece prin punctul $A(x_1; y_1; z_1)$ și este perpendicular pe vectorul $\vec{n} = \{A; B; C\}$. Determinați lungimea vectorului $\vec{n}$.

În baza reperelor teoretice se rezolvă probleme.

2. Modele de probleme cu rezolvări

Problema 2.1. Vârfurile triunghiului ABC au coordonatele: $A(0; 0; 0)$, $B(4; 2; 4)$ și $C(-3; -4; 0)$ (fig. 1). Determinați:
a) lungimile laturilor triunghiului;
b) perimetrul triunghiului;
c) lungimea medianei dusă din vârful B al triunghiului;
d) aria triunghiului;
e) lungimea înălțimii dusă din vârful A al triunghiului;
f) raza cercului circumscris triunghiului;
g) raza cercului înscris în triunghi.

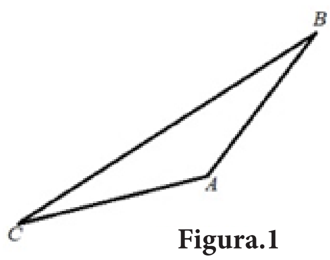

Figura.1

Rezolvare

a) Pentru a calcula lungimile laturilor triunghiului vom utiliza formula distanței dintre două puncte [1, formula (9), p. 12]:

$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{36} = 6,$$

$$AC = \sqrt{(-3-0)^2 + (-4-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$BC = \sqrt{(-3-4)^2 + (-4-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{101}.$$

b) Perimetrul triunghiului reprezintă suma lungimilor laturilor lui:

$$P_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = 11 + \sqrt{101}.\sqrt{101}.$$

c) Notăm cu D mijlocul laturii AC (fig. 2). Pentru a determina coordonatele punctului

$D(x_D; y_D; z_D)$, vom utiliza formulele de calcul ale coordonatelor mijlocului segmentului AC [1, formula (7), p. 11]:

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{x_A + x_C}{2}, \\ y_D = \dfrac{y_A + y_C}{2}, \\ z_D = \dfrac{z_A + z_C}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_D = \dfrac{0-3}{2}, \\ y_D = \dfrac{0-4}{2}, \\ z_D = \dfrac{0+0}{2}. \end{cases}$$

Deci, punctul D are coordonatele: $\left(-\frac{3}{2}; -2; 0\right)$.Lungimea medianei BD o determinăm ca distanța dintre punctele B și D:

$$BD = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - 4\right)^2 + (-2-2)^2 + (0-4)^2} = \frac{\sqrt{249}}{2}.$$

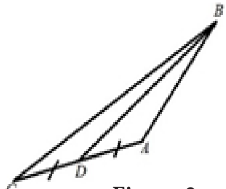

Figura.2

d) Aria triunghiului ABC o determinăm prin intermediul produsului vectorial a doi vectori [1, §2, p.13 – 16]. În acest scop aflăm mai întâi coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$și $\overrightarrow{AC}$ [1, formula (3), p. 9]:

$$\overrightarrow{AB} = \{4-0; 2-0; 4-0\} = \{4; 2; 4\},$$
$$\overrightarrow{AC} = \{-3-0; -4-0; 0-0\} = \{-3; -4; 0\}.$$

Produsul vectorial al $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ va fi [1, formula (8), p. 13]:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left\{ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \right\} = \{16; -12; -10\}.$$

Lungimea produsului vectorial este [1, formula (8), p. 10]:

$$\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{16^2 + (-12)^2 + (-10)^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}.$$

Astfel, aria triunghiului ABC [1, formula (10), p. 16] este:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|}{2} = \frac{10\sqrt{5}}{2} = 5\sqrt{5}.$$

e) Notăm cu E piciorul înălțimii dusă din vârful A al triunghiului (fig. 3). Atunci, lungimea înălțimii AE va fi:

$$AE = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{101}} = \frac{10\sqrt{505}}{101}.$$

f) Raza cercului circumscris triunghiului o determinăm după formula:

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{30\sqrt{101}}{4 \cdot 5\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{101}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{505}}{2}.$$

g) Semiperimetrului triunghiului ABC este:

$$p = \frac{11 + \sqrt{101}}{2}.$$

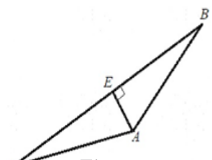

Figura.3

Atunci raza cercului înscris în triunghi o determinăm după formula:

$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{5\sqrt{5}}{\frac{11+\sqrt{101}}{2}} = \frac{10\sqrt{5}}{11+\sqrt{101}} = \frac{\sqrt{5}\left(11-\sqrt{101}\right)}{2}.$$

Problema 2.1 este rezolvată.

Problema 2.2. Vârfurile patrulaterului *ABCD* au coordonatele: *A*(2; 2; –3), *B*(–1; 6; –3), *C*(–1; 6; 2) și *D*(2; 2; 2).

a) Demonstrați că patrulaterul dat este un pătrat.
b) Aflați lungimile diagonalelor pătratului.
c) Aflați lungimea razei cercului înscris în acest pătrat.
d) Aflați lungimea razei cercului circumscris acestui pătrat.

Rezolvare. a) Pentru a demonstra că patrulaterul dat este un pătrat, vom demonstra că:
– vârfurile lui sunt situate în același plan;
– laturile lui au lungimi egale;
– măsurile unghiurilor lui sunt egale cu 90^0.

În acest scop scriem ecuația planului ce conține punctele *A*, *B* și *C* [1, formula (3), p. 43]:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+3 \\ -1-2 & 6-2 & -3+3 \\ -1-2 & 6-2 & 2+3 \end{vmatrix} = 0,$$

de unde obținem:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+3 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$20x - 40 + 15y - 30 = 0,\ 20x + 15y - 70 = 0,\ 4x + 3y - 14 = 0.$$

Deci, ecuația planului (*ABC*) are forma: $4x + 3y - 14 = 0$. Substituind coordonatele punctului *D* în ecuația planului (*ABC*) vom primi:

$$4 \times 2 + 3 \times 2 - 14 = 0.$$

Deoarece coordonatele punctului *D* satisfac ecuației planului (*ABC*), rezultă că planul (*ABC*) conține punctul *D*, adică punctele *A*, *B*, *C* și *D*, care sunt vârfurile patrulaterului dat, aparțin aceluiași plan.

Determinăm în continuare coordonatele vectorilor: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{DA}$ [1, formula (3), p. 9]:

$$\overrightarrow{AB} = \{-1-2; 6-2; -3-(-3)\} = \{-3; 4; 0\}.$$

În mod analog determinăm coordonatele celorlalți trei vectori:

$$\overrightarrow{BC} = \{0; 0; 5\}, \overrightarrow{CD} = \{3; \ -4; 0\} \text{ și } \overrightarrow{DA} = \{0; 0; \ -5\}.$$

Atunci lungimile vectorilor calculați vor fi [1, formula (8), p. 12]:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

În mod analog obținem: $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{DA}\right| = 5.$ Deci, lungimile lor sunt egale.

Calculăm produsul scalar [1, p. 12]:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = -3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 5 = 0.$$

În mod analog obținem:

$$\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}\right) = \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AB}\right) = 0.$$

Din faptul că vectorii calculați sunt reciproc ortogonali și nu sunt egali cu vectorul nul, rezultă că unghiurile formate de către ei sunt unghiuri drepte.

Astfel, am demonstrat că patrulaterul *ABCD* are toate laturile congruente, toate unghiurile sunt drepte și toate vârfurile lui aparțin aceluiași plan. Prin urmare, *ABCD* este un pătrat (fig. 4).

b) Deoarece patrulaterul dat este un pătrat, rezultă că este suficient să determinăm lungimea unei diagonale, deoarece pentru pătrat lungimile diagonalelor sunt egale. Pentru a determina lungimea diagonalei, de exemplu *AC*, aplicăm formula distanței [1, formula (9), p. 12]:

$$AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (6-2)^2 + \left(2-(3)\right)^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Prin urmare, lungimile diagonalelor sunt egale cu $5\sqrt{2}$ $(u.\,l.)$.

c) Lungimea razei cercului înscris în acest pătrat reprezintă jumătate din lungimea laturii pătratului și deci va fi egală cu 2,5 (*u. l.*).

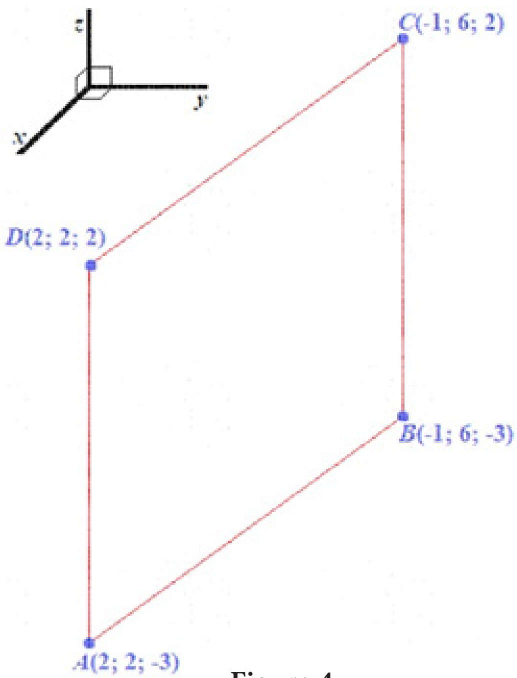

Figura.4

d) Lungimea razei cercului circumscris acestui pătrat reprezintă jumătate din lungimea diagonalei pătratului și deci va fi egală cu $2{,}5\sqrt{2}$ (*u. l.*).

Problema 2.2 este rezolvată.

Problema 2.3. Scrieți ecuația planului π care trece prin punctul $A(8; 5; 9)$ și este perpendicular pe vectorul $\vec{n} = \{-2; 4; 7\}$. Determinați lungimea $\vec{n}$.

Rezolvare. Ecuația planului π va avea forma [1, formula (5), p. 44]:

$$-2 \times (x-8) + 4 \times (y-5) + 7 \times (z-9) = 0,$$
$$-2x + 16 + 4y - 20 + 7z - 63 = 0,$$
$$-2x + 4y + 7z - 67 = 0,\ 2x - 4y - 7z + 67 = 0.$$

Lungimea vectorului $\vec{n}$ va fi [1, formula (8), p. 12]:

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 16 + 49} = \sqrt{69}.$$

Problema 2.3 este rezolvată.

Problema 2.4. După ce un student a explicat colegilor săi regimele automate pe care le poate configura la un vehicul aerian fără pilot, a hotărât să prezinte rezultatele acestor configurări într-o încăpere de forma unui paralelipiped dreptunghiular cu dimensiunile 10 m x 6 m x 4m. În acest scop el trebuie să determine:

a) coordonatele rectangulare carteziene ale vârfurilor paralelipipedului;

b) Ecuația planului π care este paralel cu planul (xOy) și se află la înălțimea 1,2 m față de planul (xOy);

c) traiectoriile rectilinii de lungime maximală în planele (xOy), (xOz), (yOz) și în spațiul ($Oxyz$);

d) raza r de lungime maximală a cercului pe care o poate descrie traectoria vehiculului aerian fără pilot într-un plan paralel cu planul (xOy);

e) poziția centrului T al cercului de rază r în planul π.

Rezolvare.

a) Conform ipotezei, încăperea este de forma unui paralelipiped dreptunghiular. Deci, fixăm un sistem rectangular cartezian de coordonate ($Oxyz$) cu originea O în unul din vârfurile paralelipipedului și axele pe cele trei muchii ce pornesc din vârful O.
Fie x – lungimea, y – lățimea și z – înălțimea paralelipipedului dat. Atunci, față de sistemul ($Oxyz$) construit, vârfurile paralelipipedului vor avea coordonatele:

$$O(0; 0; 0), A(10; 0; 0), B(10; 6; 0), C(0; 6; 0),$$
$$O_1(0; 0; 4), A_1(10; 0; 4), B_1(10; 6; 4) \text{ și } C_1(0; 6; 4) \text{ (fig. 5).}$$

b) Ecuația planului (xOy) este $z = 0$. Dar atunci ecuația planului π paralel cu planul (xOy) și care se află la înălțimea 1,2 m față de (xOy) va fi $z = 1,2$ (fig. 6).

c) Pentru a determina traectoriile rectilinii de lungime maximală în planele (xOy), (xOz) (yOz) și în spațiul ($Oxyz$), trebuie să determinăm lungimile diagonalelor dreptunghiurilor $ABCO$, AOO_1A_1, COO_1C_1 și A_1B_1CO, respectiv. Aplicând formula distanței, vom obține consecutiv:

$$OB = \sqrt{10^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}, O_1A = \sqrt{10^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29},$$

$$OC_1 = \sqrt{0^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}, OB_1 = \sqrt{10^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{152} = 2\sqrt{38}.$$

d) Raza de lungime maximală a cercului pe care o poate descrie traiectoria vehiculului aerian într-un plan paralel cu planul (xOy) va fi egală cu jumătate din lungimea laturii mai mici a dreptunghiului $ABCO$.

Deoarece $OC = 6$ (m), rezultă că $r = 3$ (m).

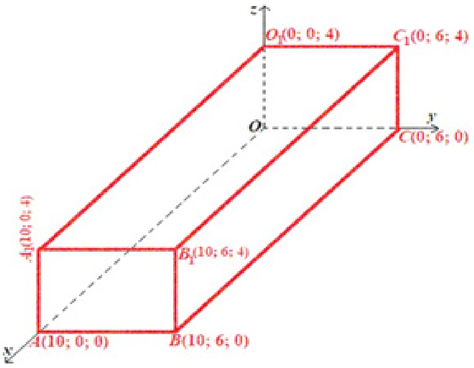

Figura. 5

e) Pentru a determina poziția centrului T al cercului de rază r în planul π, aflăm, mai întîi, ecuațiile parametrice ale dreptei (MN) ce conține mijlocurile laturilor dreptunghiului situat în planul π. Deoarece $M(10; 3; 1,2)$ și $N(0; 3; 1,2)$, rezultă că ecuațiile parametrice ale dreptei (MN) au forma:

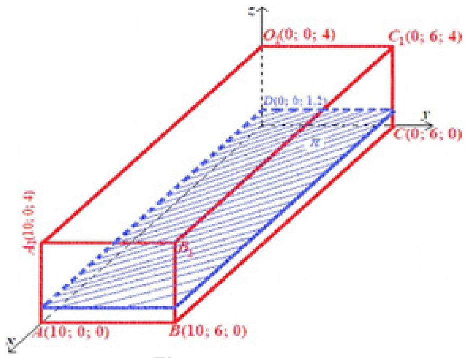

Figura. 6

$$\begin{cases} x = 10 - 10t, \\ y = 3, \\ z = 1{,}2. \end{cases}$$

Raza cercului $r = 3$ și deci centrul T al cercului se va afla pe dreapta (MN) cu condiția că $3 \leq x \leq 7$ (fig. 7).

Problema 2.4 este rezolvată.

Următoarea problemă se referă la securitatea zborului, atunci cînd spațiul aerian este survolat de mai multe vehicule aeriene. De asemenea, această problemă este relevantă programării unui roi de vehicule aeriene fără pilot.

Problema 2.5. Zborul a două vehicule aeriene a fost programat pe o traiectorie rectilinie. Traectoria primului vehicul începe în punctul $A(141; 135; 160)$ și se sfîrșește în punctul $B(129; 123; 100)$, iar traectoria vehiculului al doilea începe în punctul $C(139; 137; 122)$ și se sfîrșește în punctul $D(131; 121; 138)$. Ambele vehicule încep zborul concomitent, avînd pe întreaga traectorie aceeași viteză. Determinați dacă aceste vehicule aeriene vor suferi un impact în timpul zborului.

Rezolvare. Deoarece traectoriile sunt rectilinii, rezultă că forma lor este o linie dreaptă. Scriem ecuațiile traectoriilor (AB) și (CD). Vectorii directori a traectoriilor date vor fi respectiv:

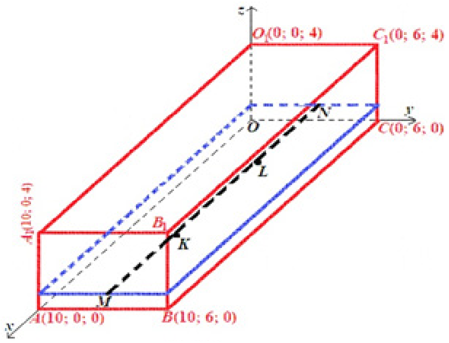

Figura. 7

$$\overrightarrow{AB} = \{129 - 141; 123 - 135; 100 - 160\} = \{-12;\ -12; -60,\},$$

$$\overrightarrow{CD} = \{131 - 139; 121 - 137; 138 - 122\} = \{-8; -16; 16.\}$$

Prin urmare, putem considera că vectorul director al traectoriei (*AB*) are coordonatele $\{1; 1; 5\}$, iar vectorul director al traectoriei (*CD*) este $\{1; 2;\ -2\}$.

Ecuațiile traectoriilor date vor avea forma [1, formula (1), p. 58]:

$$(AB): \frac{x - 141}{1} = \frac{y - 135}{1} = \frac{z - 160}{5}, (CD): \frac{x - 139}{1} = \frac{y - 137}{2} = \frac{z - 122}{-2}.$$

Vectorul $\overrightarrow{AC}$ are coordonatele:$\{-2; 2;\ -38\}$. Calculăm valoarea produsului mixt [1, formula (3), p. 18]:

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & -38 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 19 \end{vmatrix} = -2 \cdot 0 = 0.$$

Astfel, am obținut că produsul mixt al vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{AC}$ este egal cu zero, însă coloanele determinantului de ordinul trei nu sunt proporționale. Prin urmare, traectoriile (*AB*) și (*CD*) sunt situate în același plan și se intersectează. De aici, putem trage concluzia greșită că vehiculele aeriene vor suferi un impact în timpul zborului, deoarece traiectoriile lor se intersectează. În realitate, nu este așa. Pentru a demonstra aceasta, determinăm mai întîi coordonatele punctului în care poate avea loc impactul vehiculelor aeriene:

$$\begin{cases} \dfrac{x - 141}{1} = \dfrac{y - 135}{1} = \dfrac{z - 160}{5}, \\ \dfrac{x - 139}{1} = \dfrac{y - 137}{2} = \dfrac{z - 122}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 141 = y - 135, \\ x - 141 = \dfrac{z - 160}{5}, \\ x - 139 = \dfrac{y - 137}{2}, \\ x - 139 = \dfrac{z - 122}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 6 = 0, \\ 5x - z - 545 = 0, \\ 2x - y - 141 = 0, \\ 2x + z - 400 = 0. \end{cases}$$

Din ultimul sistem obținem soluția unică (135; 129; 130). Notăm cu *E* punctul presupusului impact. Atunci, putem afirma că traectoriile vehiculelor aeriene se intersectează în punctul *E*(135; 129; 130). Lungimile traectoriilor (*AE*) și (*CE*) vor fi respectiv [1, formula (9), p. 12]:

$$AE = \sqrt{(135-141)^2 + (129-135)^2 + (130-160)^2} = 18\sqrt{3},$$

$$CE = \sqrt{(135-139)^2 + (129-137)^2 + (130-122)^2} = 12.$$

Luînd în considerație că vehiculele aeriene încep zborul concomitent având pe întreaga traectorie aceeași viteză, rezultă că al doilea vehicul aerian va ajunge în punctul *E* cu mult înainte decât primul și va continua zborul mai departe. Al doilea vehicul aerian, pentru a ajunge în punctul *E*, va chieltui de $1{,}5\sqrt{3} \approx 2{,}6$ ori mai puțin timp decât primul. De aici, tragem concluzia că, deși traiectoriile vehiculelor aeriene se intersectează, ele nu vor suferi un impact. Problema 2.5 este rezolvată.

BIBLIOGRAFIE

1. LAURENȚIU CALMUȚCHI, DORIN AFANAS, MITROFAN CIOBAN. Geometrie analitică în spațiu. Chișinău, UST, 2014, 210 p. (ISBN 978–9975–76–118–5)