Aplicaţii ale algebrelor la sisteme diferenţiale

Pricop Victor, lector superior

Summary

This paper talks about the usage of algebraic methods in the studying of polinomial autonomus differential systems $\frac{dx}{dt}=\sum_{i=0}^{\ell}P_{m_i}(x,y),\ \frac{dy}{dt}=\sum_{i=0}^{\ell}Q_{m_i}(x,y),$ *where* $P_{m_i}(x,y)$ *and* $Q_{m_i}(x,y)$ *are homogeneous polynomials of degree* m_i *in* x *and* y*. With the help of Hilbert series and Sibirsky graded algebras of comitants and invariants we obtain the nummerical upper bound of the number of algebraically independent focal pseudo–quantities, which take part in solving the center–focus problem for the differential systems.*

În ultimii ani, la studiul sistemelor de ecuaţii diferenţiale tot mai des se observă că metodele algebrice pot aduce noi contribuţii în cercetarea lor calitativă. În ultima perioadă, specialiştii din algebră au un interes sporit în aplicarea rezultatelor lor ştiinţifice în domeniul ecuaţiilor diferenţiale. În acest articol este vorba de utilizarea obiectelor algebrice, ce se întîlnesc în teoria calitativă a sistemelor de ecuaţii diferenţiale polinomiale autonome.

În general vorbind, invariantul, precum şi analogul său mai complicat–comitantul, este un polinom de la coeficienţii sistemului diferenţial ce nu se schimbă, cînd cu ajutorul transformărilor grupului centroafin în sistemul dat s-a schimbat totul, în afară de forma lui iniţială. În [5] se arată că mulţimea invarianţilor şi comitanţilor centroafini ai sistemului diferenţial $s(m_0,...,m_\ell)$ în raport cu grupul unimodular $SL(2,R)\subset GL(2,R)$ formează o algebră infinită graduată de invarianţi $SI_{m_0,...,m_\ell}$ şi comitanţi $S_{m_0,...,m_\ell}$. Algebra invarianţilor este o subalgebră a algebrei comitanţilor a sistemului dat. Aceste algebre poartă numele de algebrele graduate Sibirschi [6].

În lucrarea [5] s-a recurs la funcţiile generatoare şi seriile Hilbert ale acestor algebre infinite, care sunt unele din cele mai eficiente metode de „îmblînzire” a infinitului [7].

Vom menţiona că, după T. Springer, [8] ordinul de transcendenţă peste cîmpul ***R*** a cîturilor algebrelor graduate *A*, în particular a algebrelor Sibirschi $S_{m_0,...,m_\ell}$, $(SI_{m_0,...,m_\ell})$ se numeşte dimensiunea lui Krull a algebrei, şi se notează prin $\rho(A)$. Această dimensiune este egală cu numărul maximal de elemente algebric independente omogene în algebrele menţionate, şi, de asemenea, cu ordinul polului seriei Hilbert obişnuite [5], [7] în unitate.

Pentru a găsi dimensiunea lui Krull a algebrelor Sibirschi este necesar de determinat seriile Hilbert obişnuite ale lor pentru orice sistem diferenţial, ceea ce este un lucru foarte complicat şi greu de realizat. Dar, totuşi, în lucrările [2], [3], [5] au fost construite aceste serii pentru o mulţime de algebre Sibirschi a diferitor sisteme diferenţiale.

După cum s-a menţionat, cunoaşterea seriilor Hilbert a algebrelor Sibirschi pentru sistemul diferenţial dat este extrem de importantă. Ea ne aduce mult mai multă informaţie despre comportamentul algebrei date, nemaivorbind de dimensiunea lui Krull. Însă practica a arătat [4] că dimensiunea lui Krull a acestor algebre joacă un rol important în rezolvarea Problemei generalizate a Centrului şi Focarului, ce este o reformulare reuşită a Problemei Centrului şi Focarului clasice pusă de Henri Poincaré cu aproape 130 de ani în urmă.

Problemele de bază ale teoriei calitative a sistemelor de mai sus sunt legate de determinarea poziţiei curbelor integrale în vecinătatea punctelor singulare izolate ale lor. Printre aceste probleme se evidenţiază problema deosebirii centrului de focar.

Problema Centrului şi Focarului constă în determinarea condiţiilor care asigură că punctul singular este un centru. În cazul general problema centrului este algebric irezolubilă.

Calea de rezolvare a Problemei Centrului şi Focarului a fost iniţial trasată de matematicianul A. Lyapunov. Însă, aplicînd metoda acestuia, chiar şi pentru cele mai simple sisteme diferenţiale, te confruntai cu nişte calcule enorme, ce nu puteau fi depăşite nici cu ajutorul celor mai moderne calculatoare. De aceea, s-a luat ca bază Problema generalizată a Centrului şi Focarului pentru sistemele diferenţiale $s(1, m_1, ..., m_\ell)$, evitînd calcularea mărimilor Poincaré-Lyapunov pentru fiecare sistem în parte. Problema generalizată constă în următoarele: şirul infinit cu mărimile Poincaré–Lyapunov a fost substituit cu un şir de algebre Lie şi un şir infinit de subspaţii liniare ale unei algebre graduate Sibirschi ale invarianţilor şi comitanţilor. La estimarea numărului maximal de mărimi focale algebric independente au fost aplicate aceste algebre [1].

Cînd sunt cunoscute seriile Hilbert ale algebrelor graduate Sibirschi infinite ale comitanţilor şi invarianţilor lui pentru sistemul dat $s(1, m_1, ..., m_\ell)$, cu ajutorul şirului infinit de subspaţii liniare ale acestei algebre, ce corespund şirului infinit de mărimi Poincaré-Lyapunov, poate fi construită o subalgebră graduată, ce se dă studiului cu ajutorul seriilor Hilbert.

Vom examina sistemul polinomial de ecuaţii diferenţiale polinomiale $s(m_0, ..., m_\ell)$

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^{\ell} P_{m_i}(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^{\ell} Q_{m_i}(x, y), \qquad (1)$$

unde P_{m_i} şi Q_{m_i} sunt polinoame omogene de grad $m_i > 1$ în raport cu variabilele x şi y. În continuare, pentru comoditate în unele cazuri, vom utiliza notaţia $\Gamma = \{m_0, ..., m_\ell\}$, unde mulţimea dată constă dintr–un număr finit $\ell < \infty$ de numere naturale diferite. Coeficienţii şi variabilele polinoamelor P_{m_i} şi Q_{m_i} iau valori din cîmpul numerelor reale.

Considerăm sistemele diferenţiale $s(1,4)$ şi $s(1,5)$ ce se obţin din (1) pentru $\Gamma = \{1,4\}$, $\Gamma = \{1,5\}$. Pentru aceste sisteme au fost construite funcţiile generatoare şi seriile Hilbert, apoi cu ajutorul lor au fost obţinute:

Teoremă. *Dimensiunea lui Krull* $\rho(S_{1,4})$ *a algebrei graduate Sibirschi* $S_{1,4}$ *este egală cu* 13.

Teoremă. *Dimensiunea lui Krull* $\rho(SI_{1,4})$ *a algebrei graduate Sibirschi* $SI_{1,4}$ *este egală cu* 11.

Teoremă. *Dimensiunea lui Krull* $\rho(S_{1,5})$ *a algebrei graduate Sibirschi* $S_{1,5}$ *este egală cu* 15.

Teoremă. *Dimensiunea lui Krull* $\rho(SI_{1,5})$ *a algebrei graduate Sibirschi* $SI_{1,5}$ *este egală cu* 13.

Considerăm Problema Centrului şi Focarului pentru sistemele diferenţiale polinomiale. Rezultate fundamentale la această problemă au fost obţinute de A. Lyapunov. H. Poincaré şi A. Lyapunov au pus bazele metodelor teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale.

După cum s-a stabilit, condiţiile centrului reprezintă egalitatea cu zero a unui şir infinit de polinoame (mărimi focale, constante Lyapunov, constante Poincaré-Lyapunov)

$$L_1, ..., L_k, ... \qquad (2)$$

ce depind de coeficienţii polinoamelor din părţile drepte ale sistemului $s(1, m_1, ..., m_\ell)$.

Dacă, cel puţin, una din mărimile din (2) este diferită de zero, atunci originea de coordonate pentru sistemul $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ este focar. Aceste condiţii sunt necesare şi suficiente.

Din teorema lui David Hilbert despre finitudinea bazei idealelor polinomiale rezultă că, condiţiile esenţiale, ce exprimă egalitatea cu zero a şirului infinit de polinoame (2), constau dintr–un număr finit de polinoame, iar celelalte sunt o urmare a lor.

Luînd în consideraţie acest rezultat, Problema Centrului şi Focarului poate fi formulată în felul următor: ce număr finit ω de polinoame (condiţii esenţiale ale centrului)

$$L_{n_1}, ..., L_{n_\omega}, ..., \; n_i \in \{1, 2, ..., k, ...\}, \; i = \overline{1, \omega}, \; \omega < \infty, \tag{3}$$

sunt necesare pentru ca egalitatea lor cu zero să anuleze celelalte polinoame din (2)?

Problema Centrului şi Focarului este divizată în două părţi. Prima parte constă în estimarea numerică de sus a numărului ω de condiţii esenţiale ale centrului, iar a doua parte constă în determinarea mulţimii $\Omega = \{n_1, ..., n_\omega\}$ de indici ai condiţiilor esenţiale ale centrului. Vom considera prima parte a problemei ca Problema slabă a Centrului şi Focarului. Problema generalizată a Centrului şi Focarului constă în estimarea de sus a numărului λ de elemente algebric independente din $\Pi = \{L_i : i \in \Omega\}$ luate din (2)–(3), adică pentru orice polinom netrivial de la variabilele $L_{i_1}, ..., L_{i_\lambda}$ are loc inegalitatea $F(L_{i_1}, ..., L_{i_\lambda}) \neq 0, \; i_1, ..., i_\lambda \in \Omega$ [1].

Utilizarea algebrelor Lie şi a algebrelor graduate Sibirschi permit rezolvarea Problemei generalizate a Centrului şi Focarului.

Pentru sistemele diferenţiale $s(1, m_1, ..., m_\ell)$ mărimile focale se obţin sub forma

$$G_k = \frac{G_{k,i_1,...,i_k} + B_{k,i_1,...,i_k} b_{i_k} + ... + Z_{k,i_1,...,i_k} z_{i_k}}{\sigma_{k,i_1,...,i_k}}.$$

Expresiile $G_{k,i_1,...,i_k} + B_{k,i_1,...,i_k} b_{i_k} + ... + Z_{k,i_1,...,i_k} z_{i_k}$, care determină comitanţi de ponderea -1, de tipul dat, corespunzători constantelor G_k le vom numi pseudo-mărimi focale generalizate.

Utilizînd seriile Hilbert şi algebrele graduate Sibirschi a comitanţilor şi invarianţilor obţinem:

Teoremă. *Numărul maximal de pseudo-mărimi focale generalizate algebric independente în Problema Centrului şi Focarului pentru sistemul diferenţial* $s(1,2)$ *nu întrece* 9.

Corolar. *Numărul maximal de pseudo-mărimi focale generalizate algebric independente, ce participă la rezolvarea Problemei Centrului şi Focarului pentru sistemul diferenţial* $s(1,2)$ *pe varietatea invariantă a centrului şi focarului nu întrece* 9.

Teoremă. *Numărul maximal de pseudo-mărimi focale generalizate algebric independente în Problema Centrului şi Focarului pentru sistemul diferenţial* $s(1,3)$ *nu întrece* 11.

Corolar. *Numărul maximal de pseudo-mărimi focale generalizate algebric independente, ce participă la rezolvarea Problemei Centrului şi Focarului pentru sistemul diferenţial* $s(1,3)$ *pe varietatea invariantă a centrului şi focarului nu întrece* 11.

Teoremă. *Numărul maximal de pseudo-mărimi focale generalizate algebric independente în Problema Centrului şi Focarului pentru sistemul diferenţial* $s(1,4)$ *nu întrece* 13.

Corolar. *Numărul maximal de pseudo-mărimi focale generalizate algebric independente, ce participă la rezolvarea Problemei Centrului şi Focarului pentru sistemul diferenţial* $s(1,4)$ *pe varietatea invariantă a centrului şi focarului nu întrece* 13.

Teoremă. *Numărul maximal de pseudo-mărimi focale generalizate algebric independente în Problema Centrului şi Focarului pentru sistemul diferenţial* $s(1,5)$ *nu întrece* 15.

Corolar. *Numărul maximal de pseudo-mărimi focale generalizate algebric independente, ce participă la rezolvarea Problemei Centrului şi Focarului pentru sistemul diferenţial* $s(1,5)$ *pe varietatea invariantă a centrului şi focarului nu întrece* 15.

Teoremă. *Numărul maximal de pseudo-mărimi focale generalizate algebric independente în Problema Centrului şi Focarului pentru sistemul diferenţial* $s(1,2,3)$ *nu întrece* 17.

Corolar. *Numărul maximal de pseudo-mărimi focale generalizate algebric independente, ce participă la rezolvarea Problemei Centrului şi Focarului pentru sistemul diferenţial* $s(1,2,3)$ *pe varietatea invariantă a centrului şi focarului nu întrece* 17.

Bibliografie

1. Ciobanu, M., Rotaru, T., 130 *de ani de zbucium pentru soluţionarea problemei lui Poincaré despre centru şi focar*, Akademos, No 3(30), 2013, p. 13-21.
2. Gherştega, N., Popa, M., Pricop, V., *About characteristics of graded algebras* $S_{1,4}$ *and* $SI_{1,4}$. BASM, Matematica, 1(62), (2010), p. 23-32.
3. Gherştega, N., N., Popa, M. N., Pricop, V. V., *Generators of the algebras of invariants for differential systems with homogeneous nonlinearities of odd degree*. BASM, Matematica, 2(69), (2012), p. 43-58.
4. Popa, M., N., Pricop, V., V., *Applications of algebras to the center-focus problem*, Preprint, Chişinău, ASM, IMI, No. 0007, 2011.
5. Popa, M., N., *Metode cu algebre la sisteme diferenţiale*, Editura the Flower Power, Universitatea din Piteşti, Seria Matematică Aplicată şi Industrială, 15, 2004.
6. Popa, M., N., Pricop, V., V., *Applications of algebraic methods in solving the center-focus problem*, BASM, Matematica, 1(71), (2013), p. 45-71.
7. Ufnarovski, V., A., *Combinatorial and Asymptotic Methods in Algebra*. Encyclopedia of Mathematical Sciences VI, Springer, 1995.
8. Спрингер, Т., А., Теория инвариантов. Новое в зарубежной науке, 1981, Т. 24, Математика, Москва, Мир.