Metode de integrare cu ajutorul formulelor de recurență

Sergiu Port, dr., conf. univ.

Anatolie Covalschi, lector asistent

Summary

In this article are applied recurrent formulas for definite and indefinite integration. Recurrent formulas have a quite fruit-ful application in case of under integral functions including enough large powers.

1. Soluționați integrala

$$\int_0^1 x^n \cdot e^{x-1} dx = ? \qquad (1)$$

$$\int_0^1 x^n \cdot e^{x-1} dx = \int_0^1 x^n \cdot \frac{e^x}{e} dx = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n \cdot e^x dx$$

Se reduce la rezolvarea integralei:

$$\int_0^1 x^n \cdot e^x dx \qquad (2)$$

Rezolvăm:

$$\int x^n \cdot e^x dx$$

Fie $n = 1$ și utilizăm integrarea prin părți:

$$\int x \cdot e^x dx = \int x d(e^x) = xe^x - \int e^x d(x) = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

Fie $n = 2$ și observam că, după ce se aplica o data integrarea prin parți, obținem integrala pentru cazul $n = 1$:

$$\int x^2 \cdot e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) = x^2 e^x - 2 \int x \cdot e^x dx$$
$$= x^2 e^x - 2 \cdot \boldsymbol{e^x(x-1)} + C = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$
$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Fie $n = 3$ și observăm că, dupa ce se aplica o data integrarea prin parți, obținem integrala pentru cazul $n = 2$:

$$\int x^3 \cdot e^x dx = \int x^3 d(e^x) = x^3 e^x - \int e^x d(x^3) = x^3 e^x - 3 \int x^2 \cdot e^x dx$$
$$= x^3 e^x - 3 \cdot \boldsymbol{e^x(x^2 - 2x + 2)} + C = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x + C$$
$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x) + C$$

Pentru $n = 4$, obținem:

$$\int x^4 \cdot e^x dx = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$$

Pentru $n = 5$, obținem:

$\int x^5 \cdot e^x dx = e^x(x^5 - 5x^5 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + C$În concluzie se ajunge la:

$\int x^n \cdot e^x dx = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}\right] e^x + C.$

Revenim la calcularea integralei (1)

$$\int_0^1 x^n \cdot e^{x-1} dx = \left(\left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}\right] e^x \cdot \frac{1}{e}\right)\Bigg|_0^1 + C$$

$$= (-1)^n n!\,(e^1 - 1) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \cdot 1^k e^1$$

2. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx,\, n$ - numar întreg pozitiv

Fie

$$dv = sinxdx,\, u = \sin^{n-1} x$$
$$v = -\cos x,\, du = (n-1)\sin^{n-2} cosxdx$$

atunci

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

Prima parte a expresiei de sus este egală cu 0; înlocuind în a doua parte a expresiei $\cos^2 x$ prin $1 - \sin^2 x$, obținem:

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$$
$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

În final

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Așadar, se ajunge la o formula recurentă. Cu ajutorul ei se reușește să se scadă indicele puterii până la 1, dacă n este număr impar, sau până la 0, dacă n este număr par.

Dar integralele I_1 și I_0 sunt cunoscute:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\, xdx = 1,\, I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

și astfel integrala este rezolvată până la sfârșit. De exemplu:

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3},\, I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 xdx = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{16}\pi$$

3. $I_n = \int \cos^n x\, dx$

Fie

$$dv = cosxdx, u = \cos^{n-1} x$$
$$v = sinx, du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x\, dx$$
$$I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\, dx =$$
$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \cos^n x\, dx$$

obținem:

$$nI_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2}$$
$$I_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Bibliografie

1. Bivol, Leon, Bulat, Mihai, Lecții la analiza matematică. Volumul I, Chișinău, Evrica, 2002.
2. Nicolescu, Miron, Analiza Matematică. Vol. II, Editura Tehnică, București, 1958.

3. Roşculeţ, Marcel N., Manual de Analiză matematică. Vol. II, Calcul integral. Ecuaţii diferenţiale, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.
4. СМИРНОВ, В., И., КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. ТОМ I, Издательство НАУКА, МОСКВА, 1965.