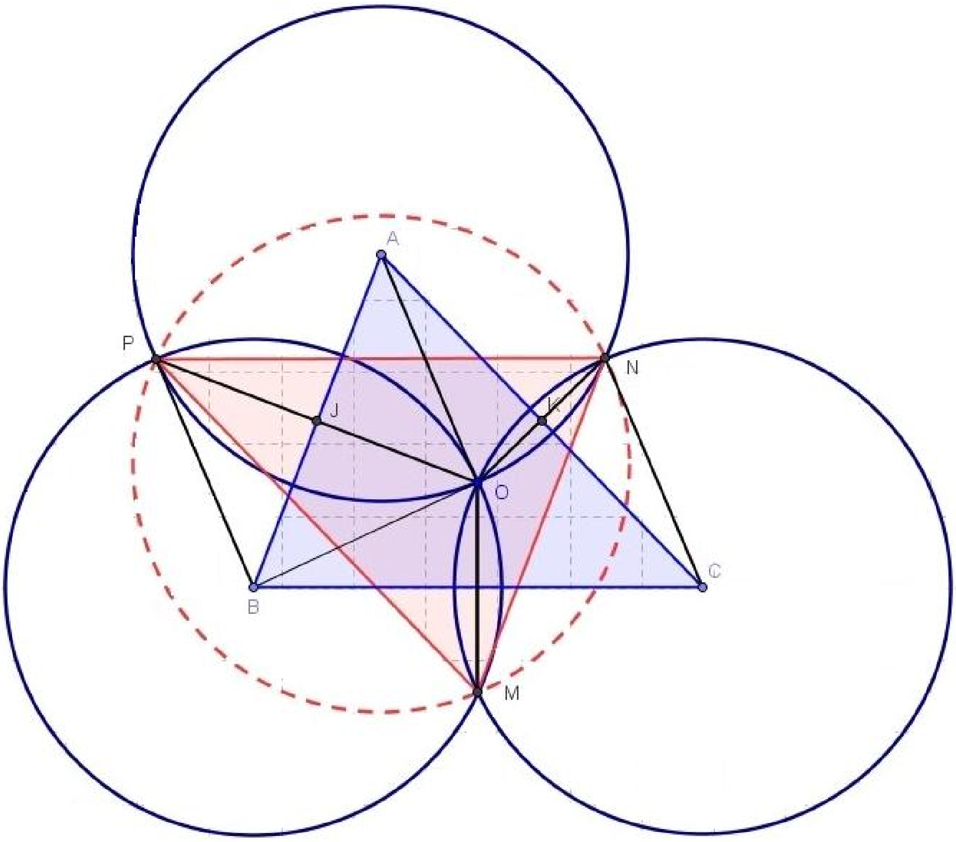
SALI LARISA

# BAZELE METODOLOGICE ALE ACTIVITĂŢII EXTRACURRICULARE LA MATEMATICĂ




CHIŞINĂU 2012

*CZU* ***37.016.046:51***

*Rcenzenţi:*
***Mitorfan Cioban, academician,***
***Ilie Lupu, doctor habilitat în pedagogie, profesor universitar,***
***Catedra Didactica Matematicii, Fizicii şi Informaticii, UST.***

*Recomndată spre publicare de Senatul Universităţii de Stat din Tiraspol*

**DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII**

**Sali, Larisa.**
Bazele metodologice ale activităţii extracurriculare la matematică / Larisa Sali. – Ch.: UST, 2012. – 240 p.: fig.
100 ex.
ISBN 978-9975-76-092-8.
37.016.046:51
S 16

ISBN 978-9975-76-092-8

S 16

**CUPRINS:**

## INTRODUCERE

Activitatea extracurriculară oferă posibilităţi de realizare a principiilor învăţământului individualizat şi diferenţiat, de motivare intrinsecă şi cointeresare a elevilor pentru studierea conştientă a matematicii. Antrenarea maselor largi de copii în activitatea extracurriculară sporeşte şansele pentru promovarea unui învăţământ de calitate. Activitatea exracurriculară este adesea considerată a fi fundamentată pe principiile activităţilor de divertisment în care preponderent sunt implicaţi elevii cu rezultate înalte la învăţătură. Studiul practicii şcolare demonstrează că activităţile extracurriculare nu se organizează sistematic, de multe ori sunt aferente unor „date importante din calendar”, nu sunt orientate spre atragerea tuturor categoriilor de elevi, nu este realizată o corelare între activitatea curriculară şi cea extracurriculară. Activităţile extracurriculare sunt parte a sistemului de educaţie nonformală care reprezintă, după G. Văideanu, “o punte între cunoştinţele asimilate la lecţii şi informaţiile acumulate informal” [30, p.11]. Activitatea de educaţie nonformală are câteva note specifice: proiectarea pedagogică neformalizată, cu programe deschise spre interdisciplinaritate şi educaţie; organizarea facultativă, neformalizată, cu profilare dependentă de opţiunile elevilor şi ale comunităţilor şcolare şi locale, cu deschideri speciale spre experiment şi inovaţie. Obiectivele specifice educaţiei nonformale vizează ridicarea nivelului general al educaţiei, creşterea nivelului de pregătire a cadrelor didactice, extinderea proceselor de învăţare sistematică.

În prezent se constată necesitatea regândirii sistemului de pregătire psihopedagogică a cadrelor didactice pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică, ca un sistem integru, în continuă schimbare, capabil de autoreglare. Astfel, se cer soluţionate următoarele contradicţii:

- între cerinţele crescânde faţă de personalitatea profesorului şi inadaptarea sistemului de învăţământ universitar pentru asigurarea formării şi dezvoltării acestei personalităţi;
- între caracterul integru al conţinutului activităţii profesionale a cadrului didactic şi procesul de pregătire iniţială şi continuă a sa prin intermediul unei multitudini de domenii şi discipline;
- între cerinţele faţă pregătirea profesională a viitorilor profesori de matematică şi imperfecţiunea sistemului de formare universitară a lor;
- între caracterul standardizat al cunoştinţelor predate la disciplinele de matematică şi caracterul non-standard al conţinuturilor predării-învăţării în cadrul activităţilor extracurriculare.

Reieşind din cele expuse, se constată necesitatea elaborării bazelor teoretice ale unui sistem integrat de mecanisme de formare a competenţelor profesionale ale viitorilor profesori de matematică solicitate în procesul de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare.

**În capitolul 1** *“Analiza sistemică a procesului de pregătire a viitorilor profesori de matematică pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică”* sunt descrise: particularităţile analizei sistemice a procesului de organizare şi desfăşurare a activităţii extarcurriculare la matematică. În acelaşi sens sunt examinate: fundamentele psihopedagogice ce asigură realizarea finalităţilor procesului de pregătire a viitorilor profesori de matematică pentru organizare şi desfăşurare a activităţii extracurriculare; mijloacele de învăţământ, metodele şi formele de organizare a activităţii extracurriculare, conţinuturile activităţii extracurriculare la matematică; strategiile şi practica educaţională acceptată; factorii de structură, coerenţa, accesibilitatea, centrarea pe subiectul învăţării, încurajarea independenţei de învăţare, legătura cu cercetarea şi practica, dezvoltarea pe bază de feed-back şi evaluare. Capitolul dezvoltă o serie de repere de natură istorică şi conceptuală asupra problemei abordate, modele de proiectare curriculară a diferitor resurse. În a treia parte a capitolului sunt descrise finalităţile macro- şi microstructurale ale procesului de pregătire a cadrelor didactice şi este realizată o prezentare a aspectului particular al acestora referitor la activitatea extracurriculară.

**În capitolul 2** „Principii şi criterii de elaborare a modelului pregătirii viitorilor profesori de matematică pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică”, după structurarea unui Model Integrator de pregătire a cadrelor didactice pentru organizarea şi desfăşurarea activităţii extarcurriculare la matematică, sunt prezentate principalele resurse integratoare prin intermediul cărora se soluţionează problema dezvoltării competenţelor specifice ale profesorului şi modalităţile de implicare a elevilor în activitatea extracurriculară. Un rol deosebit este atribuit activităţii investigaţionale a studenţilor matematicieni şi particularităţilor pregătirii lor pentru coordonarea activităţii de cercetare cu elevii în cadrul diferitor activităţi extracurriculare la matematică.

**În capitolul trei** “Asigurarea metodologico-experimentală a cercetării” sunt descrise particularităţile de utilizare a analizei calitative în practica investigaţională în domeniul ştiinţelor educaţiei şi sunt expuse principalele concluzii cu privire la fenomenele cu impact deosebit asupra procesului de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică în sistemul preuniversitar de învăţământ şi factorii care contribuie la eficientizarea procesului de pregătire a studenţilor pentru realizarea cu succes a acestui proces.

# 1. ANALIZA SISTEMICĂ A PROCESULUI DE PREGĂTIRE A VIITORILOR PROFESORI DE MATEMATICĂ PENTRU ORGANIZAREA ŞI DESFĂŞURAREA ACTIVITĂŢILOR EXTRACURRICULARE LA MATEMATICĂ

## 1.1. Analiza sistemică a procesului de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică

Esenţa noţiunii de sistem constă în următoarele: este un complex integru de elemente care se află într-o anumită subordonare ierarhică, interacţionează între ele, se dezvoltă şi formează un tot unic cu mediul înconjurător. Sistemele pot fi clasificate în: închise şi deschise; dinamice şi stohastice; naturale şi artificiale; moarte – vii – sociale; sisteme care se autoorganizează – administrabile. Cea mai importantă caracteristică a sistemului este integritatea – prezenţa unor proprietăţi pe care nu le posedă nici unul din elementele constitutive, dar care apar în rezultatul interacţiunii lor în cadrul organizării structurale date.

Procesul de instruire în pedagogie este considerat drept sistem, care se constituie din relaţii integrative ce asigură unitatea lui şi reflectă natura profundă a interacţiunii profesorului, elevului şi a obiectului de studiu. Sistemele pedagogice sunt naturale (după provenienţă), deschise (după caracterul interacţiunii cu mediul înconjurător), dinamice (din punctul de vedere al schimbării), se autoorganizează (după criteriul de dirijabilitate), probabilistice (după modul de determinare). Analiza sistemică permite perfecţionarea procedurii de modelare a fenomenului studiat, la baza căruia stă evidenţierea principalelor componente ale structurilor didactice (din punctul de vedere al obiectivelor investigaţiei) şi extinde sfera de aplicare a metodelor analizei calitative [158, p.6]

În literatura pedagogică esenţa abordării sistemice este descrisă de V. Zagveazinschi. Ea este desemnată în următoarele teze: integritatea sistemului în raport cu mediul înconjurător nu presupune să nu fie studiat în unitate cu mediul înconjurător (problemele învăţământului formează un bloc separat, dar ele se examinează în strânsă legătură cu problemele societăţii şi cu cerinţele societăţii); descompunerea întregului şi evidenţierea elementelor nu presupune reducerea proprietăţilor sistemului la proprietăţile elementelor lui componente; totalitatea elementelor şi relaţiilor dintre ele permit evidenţierea structurii şi modului de organizare a elementelor, care exprimă o anumită ordonare a sistemului de categorii în pedagogie: obiective → conţinuturi → condiţii → mijloace → finalităţi; modul de dirijare a funcţionării părţilor sistemului, deci şi a schimbării lui, se bazează pe stabilirea obiectivelor, alegerea conţinuturilor şi mijloacelor, crearea condiţiilor, controlul şi corecţia, analiza rezultatelor [115].

Problema abordării generale, metodologice a cercetării fenomenelor pedagogice este obiect de studiu în lucrările [117, 120, 175, 159]. Noţiunile „sistem” şi „structură” sunt indisolubil legate. În sens general „structura” reprezintă modul de organizare interioară a unui sistem integru, relaţia dintre elementele lui. Sistemul apare atunci, când o totalitate arbitrară de obiecte sunt examinate din punctul de vedere al corelaţiei existente între ele.

În literatura psihopedagogică noţiunea de structură se abordează în diverse sensuri: componenţa, construcţia din elemente a fenomenului sau relaţiile reciproce esenţiale dintre ele; mulţimea relaţiilor între elemente sau mulţimea elementelor corelate reciproc; un sistem de elemente corelate reciproc [166]. Abordarea sistemică deschide posibilităţi de structurare complexă a procesului educaţional [156], de obţinere a unor indici calitativi cu referire la structurile sale şi de modelare a acestuia. Danilova E. [104] descrie structura sistemelor didactice ca pe o totalitate de legături interne stabile ale obiectului de studiu, care asigură integritatea şi identitatea sa în condiţiile diverselor schimbări exterioare. Autoarea consideră că în rezultatul structurării procesului educaţional se produc schimbări calitative, care determină capacităţile funcţionale ale acestuia.

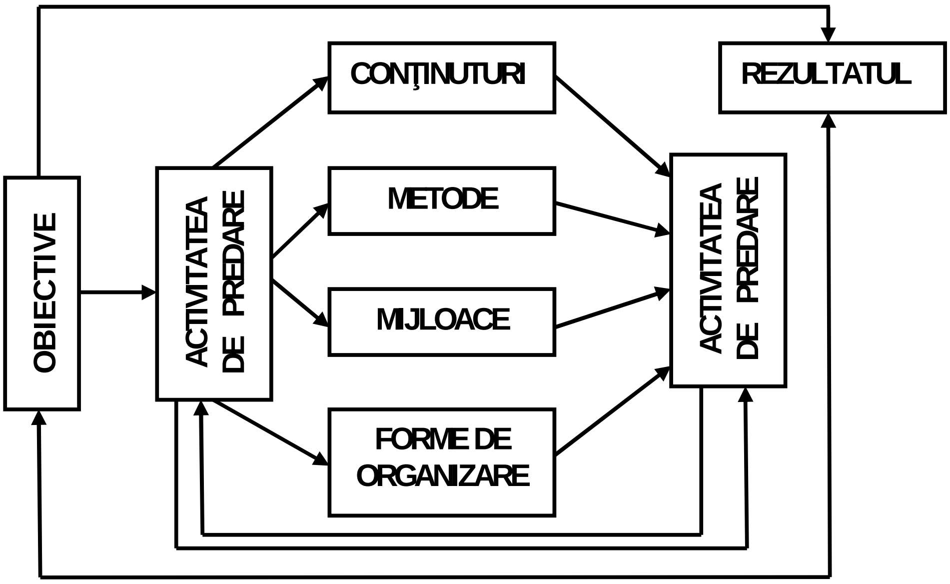



Fig.1. 1. Modelul structurii procesului de învăţământ

Cercetătorii contemporani în domeniul didacticii examinează procesul de instruire la patru niveluri: teoretic (modelul generalizat); al disciplinelor de studiu; al proiectelor concrete de realizare a procesului de instruire pentru fiecare lecţie sau modul; real, în care decurg cele trei niveluri [161, p. 217]. În interesul nostru, vom aborda modelul teoretic al procesului de instruire în care sunt evidenţiate componentele: subiecţii procesului de instruire; obiectivele; componentele stimulativ-motivaţionale; conţinuturile; componenta ce ţine de operare şi activitate (metode, mijloace de instruire); evaluarea şi corecţia; reflexia [174, p.163]. Aceste componente sunt prezente în activitatea elevului şi a profesorului. Felul în care are loc structurarea lor în formele de organizare a instruirii ordonează şi raţionalizează activitatea cognitivă şi conduce la sporirea eficienţei ei.

Altă abordare a analizei structurii procesului de instruire ţine de descrierea integră a corelaţiilor dintre componentele acestui proces. Structura activităţii profesor-elev din punct de vedere didactic şi relaţiile între elemente sunt reflectate în Fig. 1.1. [154, p. 15].

O abordare puţin diferită este expusă în [57]. Autoarea evocă subiectele ce ţin de terminologia utilizată în ştiinţele educaţiei. Tehnologia didactică cumulează ansamblul metodelor, mijloacelor, al formelor de instruire şi organizare şcolară, modalităţile de structurare a obiectivelor şi conţinutului învăţământului, tehnicile de evaluare a eficienţei sale constituite în lumina normelor pedagogice prefigurate de teoria instruirii. Tehnologia instruirii sau didactică prezintă caracteristici integrative. Astfel, elemente diferite ale domeniului didacticii sunt corelate într-o unitate funcţională. Investigarea caracteristicilor raporturilor din cadrul sistemului „Tehnologia instruirii” relevă o mare diversitate a intercondiţionării între componentele sale. Modelul simplificat al sistemului „Tehnologia instruirii” propus în [57, pag. 8] este reprezentat în Figura 1.2. Abordând problema pregătirii viitorilor pedagogi pentru activitatea extracurriculară vom urma această reţea de componente.

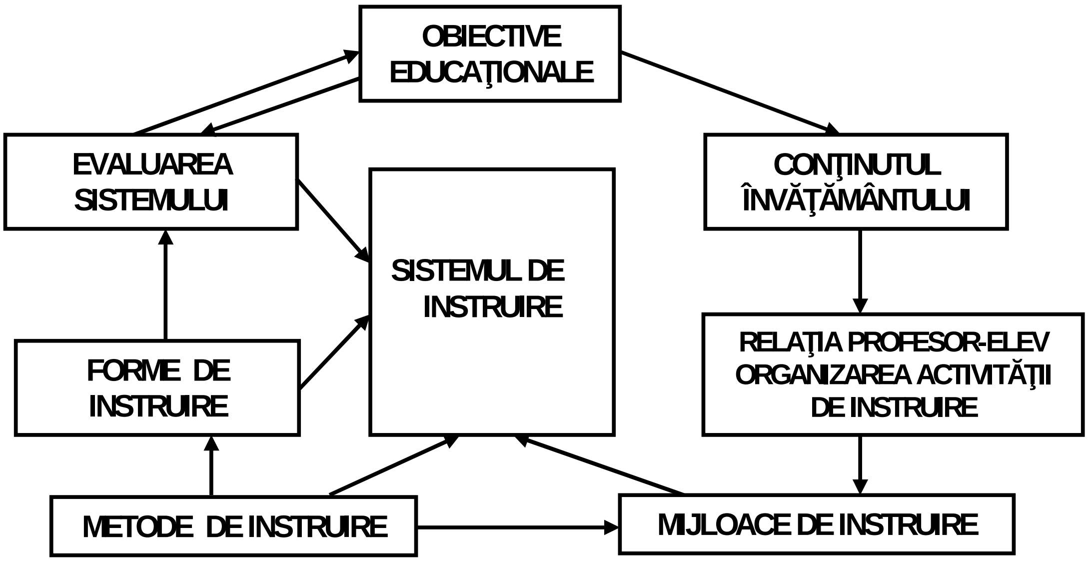



Fig.1. 2. Modelul simplificat al „Tehnologiei didactice”

În lucrarea [44, p.75] este făcută o sinteză bibliografică cu referire la instruirea şcolară din perspectivele teoretică şi aplicativă, fiind enumerate următoarele modele ale procesului de învăţământ: modelul interactiv; modelul sistemic; modelul informaţional; modelul cibernetic; modelul comunicaţional; modelul câmpului educaţional; modelul situaţiilor de instruire.

În cheia cercetării noastre vom analiza proprietăţile unui model sistemic. Modelul sistemic al procesului de învăţământ introduce în ansamblul de elemente educaţionale (*aflate într-o strânsă interacţiune, astfel încât perturbarea unui element poate duce la dezechilibrarea întregului sistem*) rigoarea analizei, precum şi viziunea de ansamblu pe care o oferă sinteza, privilegind astfel proiectarea didactică [44, p. 92]. Calitatea sistemului rezultă din forţa, fineţea şi amplitudinea interacţiunii dintre componentele sistemului.

Analiza multiaspectuală a sistemului permite să evidenţiem caracteristicile lui specifice: complexitatea; dinamismul; delimitarea spaţio-temporală; deschiderea (interacţiunea cu mediul instrucţional); reglarea/autoreglarea; existenţa stărilor optimale; conexiunea inversă.

Avantajele analizei sistemice constau în faptul că ea redă o perspectivă analitico-sintetică (bivalentă) şi perspectiva integrativă asupra procesului.

Termenul „extracurricular" este explicat în context educaţional ca ceva în afara curriculum-ului uzual al unei instituţii de învăţământ [202]. În conformitate cu Planul-cadru pentru învăţământul primar, gimnazial şi liceal pentru anul de învăţământ 2012-2013 [1], aprobat prin ordinul ministrului educaţiei nr. 179 din 29 martie 2012, în lista activităţilor extracurriculare sunt incluse: corul, cercul de dans, orchestra, arta decorativă aplicată, design-ul, ikebana, artizanatul, pictura, grafica, cercul la disciplina de studii etc. Astfel, constatăm că activităţile extracurriculare sunt parte a sistemului de educaţie nonformală, care completează educaţia formală într-un cadru instituţionalizat situat în afara sistemului de învăţământ, dar şi în interiorul acestuia, activat prin "organisme şcolare conexe", extradidactice sau extraşcolare. Ea constituie, după G. Văideanu, "o punte între cunoştinţele asimilate la lecţii şi informaţiile acumulate informal" [30, p.11]. În acelaşi manual este stipulat că educaţia nonformală sprijină, direct şi indirect, acţiunile şi influenţele sistemului de învăţământ, pe două circuite pedagogice principale: a) un circuit pedagogic situat în afara clasei (cercuri pe discipline de învăţământ, cercuri interdisciplinare, cercuri tematice / transdisciplinare; competiţii, concursuri, olimpiade şcolare / universitare); b) un circuit pedagogic situat în afara şcolii (activităţi *perişcolare* cum sunt excursiile, vizitele, taberele, cluburile, universităţile populare cu reţele de programe nonformale, utilizând resurse tradiţionale şi moderne; activităţi *paraşcolare* organizate în mediul socioprofesional cu programe speciale de educaţie permanentă). Activităţile de educaţie nonformală probează - în comparaţie cu activităţile de educaţie formală - câteva note specifice: proiectarea pedagogică neformalizată, cu programe deschise spre interdisciplinaritate şi educaţie permanentă - la nivel general-uman, profesional, sportiv, estetic civic, etc.; organizarea facultativă, neformalizată, cu profilare dependentă de opţiunile elevilor şi ale comunităţilor şcolare şi locale, cu deschideri speciale spre experiment şi inovaţie. Obiectivele specifice educaţiei nonformale vizează ridicarea nivelului general al educaţiei, creşterea nivelului de pregătire a cadrelor didactice, extinderea proceselor de învăţare sistematică.

Cercetările ştiinţifice în domeniul didacticii, în particular, şi a pedagogiei, în general, demonstrează multiaspectualitatea şi complexitatea problemelor legate de activitatea extracurriculară cu elevii. Analiza situaţiei privind investigaţiile în domeniu demonstrează că majoritatea savanţilor tratează această problemă unilateral, reflectând unele aspecte ale procesului de organizare şi metodologia activităţii extracurriculare la matematică. E. Acopean, G. Balk, M. Balk, Ă. Bazarova, V. Dalingher, I. Dîrcenco, H. Freudenthal, V. Gusev, A. Jafearov, V. Kazarencov, A. Kolmogorov, Iu. Koleaghin, G. Lukankin, B. Kordemschii, V. Kroleveţ, V. Medvedev, S. Nikolski, I. Şarîghin, Z. Şvarţman ş.a. au studiat legătura reciprocă dintre activităţile curriculare şi cele extracurriculare în şcoala generală [85, 90, 89, 111, 120, 128,132, 146, 178 etc.]. A. Şirkevici [179] a definit această relaţie drept un mijloc de sporire a calităţii cunoştinţelor elevilor. V.Volcov [81] a studiat bazele pedagogice şi manageriale de dezvoltare a instituţiilor de învăţământ complementar în Republica Moldova. Potenţialul didactic al activităţilor extracurriculare la matematică este determinat în lucrările matematicienilor N. Agahanov, T.Andreescu, I. Achiri, M. Cioban, I. Cuculescu, G. Dorofeev, A. Egorov, A. Enghel, V. Firsov, L. Fridman, M. Gardner, V. Gusev, A. Hariton, A. Kolmogorov, Iu. Koliaghin, B. Kordemschi, G. Levitas, S. Lloid, L.Lopovoc, I. Lupu, A. Markuşevici, A. Mordkovici, P. Perelman, I. Petrakov, G. Polya, Z. Scopeţ, A. Şerşevschii, I. Smirnova, S. Şvarţburd, M. Teleucă, B. Veiţ, N. Vilenkin, A. Zemleakov [103, 124, 129, 156, 125, 126]. Unele lucrări din ultimii ani [88, 112, 183, 137] dezvăluie aspecte ale modernizării activităţii extracurriculare la matematică prin utilizarea TIC. În particular, se afirmă că activităţile extracurriculare la matematică cu utilizarea TIC sunt mai rezultative de cât cele tradiţionale, ele permit dezvoltarea mai eficientă a gândirii logice şi a componentei creative, sporesc interesul elevilor pentru matematică ş.a.

V. Kazarencov [120] defineşte noţiunea de sistem de activităţi curriculare şi extracurriculare ale elevilor ca un set de tipuri de activităţi de acest fel, care interacţionează şi sunt legate prin unitatea obiectivelor didactice, educative, formative, exprimată printr-o autonomie relativă a lor în procesul educaţional. În opinia autorului interacţiunea activităţilor curriculare şi extracurriculare este caracterizată de o multitudine de parametri, cum ar fi: orientarea către un scop, stabilitate, versatilitate, administrabilitate etc. Gestionarea acestei interacţiuni este realizată de cadrul didactic la diferite niveluri calitative: nivel scăzut, nivel mediu şi nivel înalt. Autorul constată un impact pozitiv al activităţilor extracurriculare atât asupra elevilor, cât şi asupra profesorilor care organizează şi desfăşoară aceste activităţi. Activitatea extracurriculară „deschide” şcoala, creează condiţii pentru cooperarea creativă pozitivă în procesul pedagogic a profesorilor, elevilor şi părinţilor lor, savanţilor din universităţi şi instituţii de cercetare, pedagogilor din instituţiile de învăţământ complementar. O schemă care ilustrează structura procesului educaţional este reprezentată în Figura 1.3.

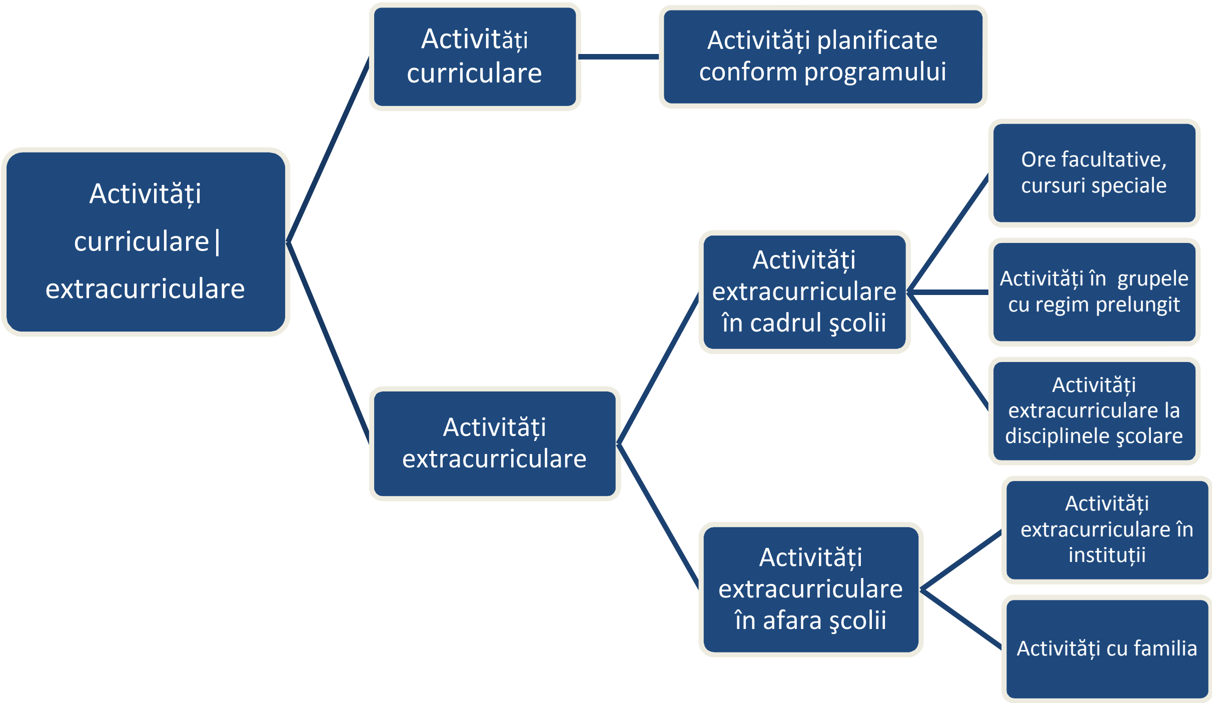



Fig.1. 3. Interrelaţia dintre activitatea curriculară şi extracurriculară (Kazarenkov)

Corelaţia între activităţile curriculare şi extracurriculare este asigurată în trei aspecte de bază: interacţiunea acestor tipuri de activităţi; organizarea activităţilor; gestionarea sistemului. Interacţiunea activităţilor curriculare şi extracurriculare se realizează în planul relaţiilor informaţionale şi în planul dezvoltării personalităţii. Relaţiile informaţionale între activităţi se realizează prin primirea, transmiterea şi schimbul de informaţie între participanţii la procesul educaţional în cadrul activităţii în comun. Această informaţie poate avea caracter instructiv, ştiinţific, aplicativ, comunicaţional sau etic. Interrelaţia activităţilor curriculare şi extracurriculare poate fi intradisciplinară sau interdisciplinară. Acest sistem trebuie construit împreună cu alţi actori ai procesului educaţional: elevii, părinţii lor, alte cadre didactice din şcoală, personalul instituţiilor de învăţământ extraşcolar. Principiile de bază ale constituirii sistemului sunt cele expuse de M. Setrov [165].

În manualul Metodica predării matematicii în învăţământul primar [25] în capitolul X este examinat sistemul activităţilor matematice în afara clasei. Autorii expun obiectivele generale ale capitolului care le putem privi drept obiective ale pregătirii viitoarelor cadre didactice: cunoaşterea obiectivelor urmărite prin activităţile matematice în afara clasei; familiarizarea cu formele de activitate matematică ce se desfăşoară cu elevii claselor I-IV în afara clasei; formarea capacităţii de a organiza şi desfăşura o activitate în afara clasei.

Este propusă şi o tălmăcire a ceea ce reprezintă activităţile în afara clasei: seturi de acţiuni desfăşurate de elevi în afara orelor de clasă sub îndrumarea învăţătorului, având ca scop completarea şi consolidarea pregătirii realizate în timpul lecţiilor, dezvoltarea intereselor elevilor pentru ştiinţă şi tehnică, aplicarea în practică a cunoştinţelor, deprinderilor şi priceperilor dobândite. Aceste activităţi permit profesorului să descopere elevii cu înclinaţii şi preferinţe în sfera matematicii şi dau posibilitatea pregătirii suplimentare diferenţiate şi individualizate a acestor elevi [25, pag. 299].

În manualul [51, p. 260] este examinată activitatea în afară de clasă şi extraşcolară. Aceasta se divide în: activitatea în afară de clasă; activitatea extraşcolară; activitatea prin corespondenţă. Obiectivele pregătirii la acest capitol a viitoarelor cadre didactice pot fi distinse din sarcinile didactice expuse la sfârşitul capitolului. Ele cuprind aspecte de formare a competenţelor de proiectare didactică şi de consolidare a cunoştinţelor matematice.

*Obiectivele educaţionale ale activităţii extracurriculare* la matematică selectate din diverse surse se rezumă la următoarele: trezirea interesului constant al elevilor pentru matematică şi aplicaţiile ei; identificarea copiilor dotaţi la matematică; extinderea şi aprofundarea cunoştinţelor curriculare ale elevilor; dezvoltarea optimă a capacităţilor matematice ale elevilor şi formarea unor deprinderi cu caracter investigaţional; educarea unei culturi înalte a gândirii matematice; dezvoltarea la elevi a priceperilor de a lucra cu manualul şi cu literatura ştiinţifico-populară; extinderea şi aprofundarea reprezentărilor elevilor despre însemnătatea practică a matematicii; cunoaşterea noilor descoperiri în matematică; pregătirea elevilor către continuarea studiilor; extinderea şi aprofundarea reprezentărilor elevilor despre valoarea cultural-istorică a matematicii; formarea priceperilor de redactare a unor comunicări şi a unor publicaţii la matematică pentru presa şcolară, conferinţe de divers rang şi reviste de specialitate; formarea competenţelor comunicaţionale şi a priceperilor de a îmbina activitatea în grup şi cea individuală în procesul studierii matematicii; dezvoltarea, încurajarea şi menţinerea spiritului competiţional de echipă şi individual. Se presupune că aceste obiective parţial se realizează la orele de matematică, dar realizarea deplină este plasată pentru activitatea extracurriculară [182].

*Formele de activitate extracurriculară* se împart în episodice şi permanente. Formele tradiţionale de activitate extracurriculară permanentă în spaţiul ex-sovietic au fost cercul (clubul), activitatea societăţii matematice a şcolii sau clasei şi activitatea micilor academii matematice şcolare [51, p. 261]. Activităţile episodice la matematică sunt foarte diverse şi lista de nominalizări se completează mereu prin adaptarea jocurilor intelectuale sau celor cu caracter recreaţional difuzate prin mijloace media. În manualul [51, p. 260] sunt enumerate următoarele forme episodice: 1)matineuri, serate matematice şi şedinţe ale CVI (clubul celor veseli şi isteţi); 2)victorine şi competiţii matematice; 3)olimpiade matematice şcolare; 4)editarea presei matematice; 5)conferinţe matematice; 6)referate şi compuneri matematice; 7)confecţionarea materialelor didactice şi a modelelor matematice; 8)excursii; 9)săptămâna, decada sau luna matematică; 10)concursuri şi jocuri didactice. Autorii menţionează că activităţile episodice sunt adesea parte componentă a activităţilor permanente sau unele forme se integrează în procesul desfăşurării altor forme.

Considerăm acceptabilă examinarea în contextul cercetării şi a activităţii şcolilor şi claselor speciale cu studierea aprofundată a matematicii. În spaţiul ex-sovietic a fost acumulată de-a lungul anilor o experienţă bogată în acest domeniu. Posibilitatea de a aprofunda cunoştinţele matematice era oferită de clasele şi şcolile cu profil matematic sau mixt (matematică-fizică, matematică-informatică etc.) şi de orele facultative prevăzute în planul de învăţământ începând cu clasa a VII-a. Formele de organizare a învăţământului matematic aprofundat sunt mai apropiate de cele din învăţământul universitar: prelegeri, seminarii matematice, pregătirea referatelor, studierea independentă a literaturii suplimentare şi rezolvarea de probleme etc.

În literatura de specialitate este descrisă activitatea şcolilor speciale pentru copii dotaţi. Funcţionarea lor a evidenţiat o serie de avantaje: asigurarea unei culturi generale superioare; dezvoltarea aptitudinilor speciale; interstimularea; nivel ridicat al moralului de grup; angajarea personalului superior calificat; clase mai puţin numeroase; dotare materială superioară; sprijinul şi colaborarea părinţilor şi a autorităţilor locale. Unele aspecte negative ale funcţionării şcolilor specializate invocate de critici sunt: „segregarea” copiilor cu aptitudini supramedii, ca pericol social în sine; suprasolicitarea elevilor; adaptarea socială scăzută a copiilor capabili de performanţe înalte; pericole de educare a unor trăsături morale negative (meritocraţie, snobism etc.); reducerea ocaziilor, pentru mulţi copii, de a se manifesta ca lideri, în comparaţie cu posibilităţile corespunzătoare din mediul normal; privarea copiilor medii de stimularea intelectuală favorizată de contactul cu copii dotaţi.

Printre exemplele de prestigiu putem nota Şcoala secundară de la Akademgorodok de pe lângă Universitatea din Novosibirsk, Şcoala internat independentă Millfield şi Şcoala „Yehudi Menuhin” din Anglia, Cademuir

International School din Scoţia, Şcoala de pe lângă Colegiul Hanter din New York. În Republica Moldova din anul 2008 funcţionează Liceul Academic a cărui experienţă urmează a fi generalizată.

Mai populare şi mai numeroase sunt clasele speciale, bazate pe selectarea elevilor cu aptitudini omogene, cu predarea la un nivel avansat a unei sau câtorva discipline, sau a tuturor disciplinelor. Clasele speciale au mai multe avantaje decât şcolile speciale dar şi mai multe inconveniente de diferit ordin. Avantajele claselor speciale în raport cu şcolile speciale sunt cu aspect economic (mai puţine cheltuieli) şi cu aspect psihologic („segregarea" mai puţin severă de generaţia de vârstă).

I. Şarîghin în una din notele critice cu privire la reformele din învăţământul rusesc sublinia: „Dacă prin conţinuturile sale programa sovietică la matematică se dezvolta în albia tradiţiilor formate în decursul ultimelor două secole, atunci la capitolul noilor forme de lucru cu elevii, matematicienii sovietici nu aveau egali. În primul rând este vorba despre lucrul în afara clasei cu copiii dotaţi. Cercuri, olimpiade, serate, conferinţe, şcoli specializate, şcoli de vară şi multe altele – toate nu le vei enumera – acestea sunt etapele, pe care măcar parţial le-a parcurs orice absolvent al unei facultăţi matematice, de ştiinţe reale sau al oricărui institut politehnic în jumătatea a doua a secolului XX. Aici trebuie amintită şi numeroasa literatură de popularizare a ştiinţei şi cea suplimentară la matematică pentru elevi. Este interesant, că sistemul sovietic de lucru cu copiii dotaţi la matematică, creat dezinteresat de entuziaşti şi perfecţionat, cât nu e de straniu, până la „know haw", s-a dovedit a fi aproape unicul produs competitiv pe piaţă internaţională…"[176]

În Rusia începând cu anul 2004 a demarat un experiment de implementare a învăţământului de profil în clasele superioare, iar din 2006 aceste prevederi s-au introdus în întreg sistemul [170]. Sistemul actual autohton de învăţământ preuniversitar este divizat abia la treapta liceală în două profiluri. Această divizare presupune activităţi de adaptare de către profesor a curriculum-ului, ţinând cont de specificul profilului, dar oferă mai puţine şanse elevilor capabili de performanţe înalte.

Abordarea diferenţiată şi individualizată a procesului educaţional a generat elaborarea unor forme originale de activitate extracurriculară. În practica educaţională se aplică câteva forme ale accelerării studiilor: admiterea devansată în clasa I, telescoparea claselor, interpătrunderea claselor, progresul continuu [20, 156].

În SUA este cunoscut programul SEM (The Schoolwide Enrichment Model – Modelul de Îmbogăţire Şcolară) fundamentat teoretic de J. Renzulli în 1977, de amplificare sau îmbogăţire şcolară, care a început să fie implementat în 1978 şi se bucură de mare succes. După A.H.Passow, sensul iniţial al conceptului de amplificare sau îmbogăţire şcolară era de "selecţie şi organizare a exigenţelor de învăţare corespunzător personalităţii individuale”. În unele surse termenul desemnează activităţile extraşcolare în general. Iniţial J. Renzulli a elaborat Modelul triadic de îmbogăţire reprezentat în Figura 1.4. Tipurile de îmbogăţire se aplică unitar, în continuitate progresivă. Tipul I se referă la activităţi exploratorii generale prin care se oferă elevilor şansa de a-şi identifica cât mai clar aria de interese. Tipul II se referă la activităţi de antrenament în grup care includ formarea deprinderilor de gândire critică şi creativă, metacogniţie, dezvoltarea afectivă, exersarea unor tehnici de comunicare orală, scrisă şi vizuală. Tipul III include investigaţii individuale sau pe grupuri mici şi prevede realizarea sau crearea unor produse ştiinţifice, artistice etc. Tipul III este cel mai avansat şi se adresează numai elevilor care pe parcursul activităţilor anterioare au obţinut scoruri, rezultate şi calificative superioare.

Rezultatele implementării programului SEM au fost sintetizate într-o lucrare comună scrisă de J. Renzulli şi S. Reis în anul 1994. Acest studiu descrie elementele de originalitate ale programului: integrarea sa în programul şcolii obişnuite prin „compactizarea curriculum-ului”; combinarea modelului teoretic iniţial cu o strategie flexibilă de identificare a predispoziţiilor aptitudinale. Modelul SEM perfecţionat, acceptat actualmente în cadrul Programului de învăţare „Renzulli Learning” [238] este descris în paragraful 1.2. al prezentei lucrări.

În China înviorarea din 1978 a condus la schimbarea atitudinii faţă de copiii dotaţi. Începând cu 1985 şi-a început activitatea Grupul Cooperativ de Cercetări a Copiilor Supranormali din China (Cooperative Research Group of Supernormal Children of China - CRGSCC) care a adaptat testele de identificare a copiilor dotaţi din Vest pentru a testa în deosebi memoria, gândirea logica, personalitatea. Clase speciale pentru copii avansaţi au fost deschise în diverse universităţi. Sistemul de selecţie s-a bazat pe dorinţa copiilor şi nu pe recomandările profesorilor. Au fost deschise Şcoli Olimpice care pregătesc copiii pentru olimpiadele internaţionale, iar începând cu 1988 acest scop îl au şi şcolile speciale pentru copii dotaţi şi talentaţi, afiliate instituţiilor universitare. Aici se fac cursuri suplimentare curriculumului obişnuit circa 10 ore pe săptămână.

În practica mondială sunt descrise numeroase exemple de activitate extracurriculară la matematică în cadrul taberelor. De exemplu, tabăra reprezintă etapa finală a concursului organizat pe site-ul ViitoriOlimpici.ro şi de Gazeta Matematică din România. Concursul are ca scop pregătirea, promovarea şi premierea copiilor care obţin performanţe în matematică.

Şcoala de iarnă din Puşcino, Rusia, la disciplinele exacte şi cele umaniste a fost instituită în anul 1990. Organizatorii sunt, de regulă, cercetătorii ştiinţifici ai Centrului ştiinţific din Puşcino, doctoranzi şi studenţi MGU, MFTI, ai altor instituţii din Moscova. Şcoala este constituită din 3 departamente: Fizică-Matematică-Informatică, Biologie-Chimie şi Umanist. Programul este alcătuit astfel, încât fiecare elev îşi poate alege cursurile interesante pentru el. Pe parcursul activităţii acestei Şcoli profesorii ţin cursuri pe teme ştiinţifico-populare, seminare şi activităţi practice pe o anumită tematică, sunt organizate diverse concursuri şi turnamente. Fiecare curs are circa 5 activităţi la care este abordată una din temele programei şcolare, dar la un nivel mult mai aprofundat. La sfârşit este organizată o conferinţă ştiinţifică şi o expoziţie a materialelor cursurilor [185].

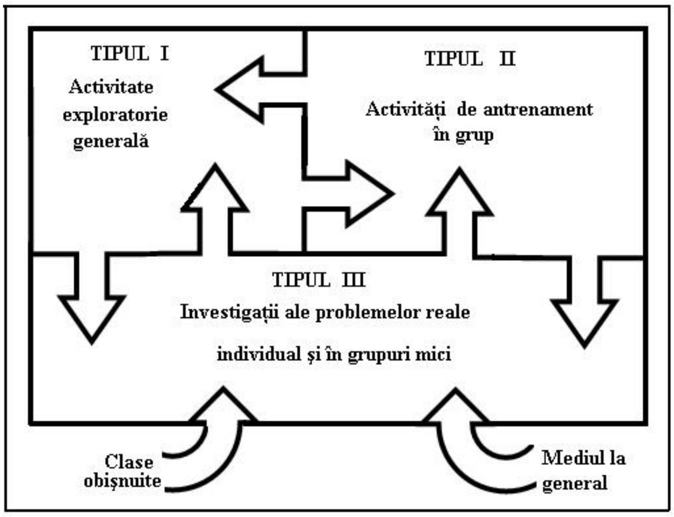



Fig.1. 4. Modelul triadic de îmbogăţire (The Enrichment Triad Model, J. Renzulli)

Şcoala de vară de studii intensive „Intelectual” din or. Moscova, organizată în baza şcolii private cu acelaşi nume a fost formată în anul 2005. Zilnic sunt organizate cursuri de matematică comune pentru toţi, dar în fiecare zi este invitat alt lector. Apoi urmează două cursuri de fizică şi matematică. Pentru cursurile de fizică şi matematică elevii sunt repartizaţi în 4 grupe, în funcţie de nivelul manifestat la olimpiada de admitere. La sfârşitul activităţii Şcolii fiecare participant primeşte o diplomă (de excelenţă sau nu), un disc cu materialele cursurilor şi fotografii. Această şcoală oferă şanse de promovare şi elevilor de la periferie [185].

În SUA este organizat anual un Program de vară la matematică (MOSP) [41], având drept obiective: a oferi un program de matematica pentru un grup select de studenţi foarte promiţători, care s-au clasat în top la Concursul American de Matematică; a extinde viziunea matematică a elevilor, a le oferi şansa să se pregătească mai bine pentru posibila participare la Olimpiada Internaţională de Matematică (OIM) în echipa; a oferi o îmbogăţire în profunzime la subiecte importante matematice pentru a stimula interesul continuu şi de a-i ajuta pe elevi la pregătirea lor pentru studiul în viitor a matematicii; a antrena echipa de elevi, selectată pe baza Concursului American de Matematică şi a testării de tip OIM, pentru a obţine cel mai înalt nivel de performanţă în cadrul OIM.

În Germania două programe independente de identificare a talentelor sunt inspirate din Modelul American Stanley: Modelul din Hamburg şi Academiile Copiilor. Modelul din Hamburg este destinat identificării talentelor în matematică în baza examinării la compartimentul de matematică al testului american SAT (American Scholastic Aptitude Test) şi un test de rezolvare de probleme. În Universitatea din Hamburg, mai mult de 20 de ani în urmă, psihologii şi matematicienii au demarat un program de cercetare pentru descoperirea copiilor dotaţi de 12 ani. Elevii care obţin cel mai înalt scor sunt invitaţi la un program de matematică în fiecare sâmbătă pe care îl pot frecventa câţiva ani la rând. În calitate de profesori sunt cooptaţi profesori de gimnaziu, studenţi matematicieni, profesori universitari.

Pentru cele 7 Academii ale Copiilor anual sunt solicitate 105 persoane: câte un director şi un asistent, un coordonator pentru activităţi culturale (muzicale), instructori la cursuri. Instructorii trebuie să fie experţi în domeniu, să aibă talente şi abilităţi, interese adiţionale (hobby), să posede talent pedagogic, să fie cooperanţi, idealişti, şi predispuşi pentru o activitate intensă, istovitoare pe parcursul a 16 zile [247].

De pe poziţii pragmatice se conturează întrebarea privind eficienţa includerii în activităţi extracurriculare la matematică a cât mai multor elevi. Este recunoscut impactul pregătirii aprofundate a elevilor în domeniul ştiinţelor exacte asupra progresului economiei unui stat. Exemplele de politici educative orientate spre succesul în domeniul „gifted education” demonstrează că intervenţia statului şi a comunităţii în acest proces este benefică în plan economic pentru ţară şi pentru indivizi aparte, dar şi în plan moral - prin dobândirea unor performanţe înalte individuale şi de grup la concursurile internaţionale. Profesorul I. Cuculescu a efectuat în anul 1984 o cercetare foarte amplă cu privire la olimpiadele internaţionale de matematică (OIM) ale elevilor [22] şi rolul lor. Este importantă activitatea Federaţiei Mondiale a Competiţiilor Naţionale Matematice (WFNMC World Federation of National Mathematical Competitions), care în anul 2011 a convocat la Riga deja al VI-lea Congres pentru a reuni matematicieni din toată lumea cu scopul schimbului de experienţă în domeniul pregătirii elevilor către diverse competiţii matematice. În particular, preşedintele WFNMC, Maria Falk de Lossada, a specificat rolul important al competiţiilor matematice considerând că ele reprezintă „un domeniu vibrant al activităţii matematice, cu toate că rămân preponderent de natură extracurriculară”. În acelaşi discurs este remarcat că membrii WFNMC sunt vital interesaţi pentru contextul de a relaţiona activitatea educativă şi matematica şcolară de matematica contemporană. Natura matematicii şi a gândirii matematice orientează spre necesitatea unei societăţi a cunoaşterii, şi cu adevărat iau în considerare implicaţiile şi impactul noilor tehnologii.

Stimularea activităţii creative la matematică a elevilor, a profesorilor de matematică, dar şi provocarea lor pentru atingerea de noi performanţe se efectuează prin intermediul diversificării concursurilor. Spectrul de concursuri la matematică organizate în diverse ţări este destul de extins. De exemplu, în Rusia în ultimii ani sunt organizate: Turnirul lui Arhimede; Regata matematică moscovită; Olimpiada la geometrie în numele lui I.F.Şarîghin; Olimpiada Universităţii de Stat din Moscova „Покори Воробьевы горы”; Olimpiada de matematică „Царицыно”; Olimpiada „Lomonosov”; Cupa în memoria lui A.N.Kolmogorov; Olimpiada interregională a elevilor la matematică şi criptografie; Olimpiada interregională prin corespondenţă la matematică „Avangard”; Turnirul Oraşelor etc. În România se organizează: Concursul individual şi pe echipe la matematică „Gheorghe Ţiţeică”; concursurile interjudeţene „Micul Arhimede”, „Dan Barbilian”, „Cristian Calude”, „Florica T.Câmpan”, „Ştefan Dârţu”, „Louis Funar”, „Cezar Ivănescu”, „La şcoala cu ceas”, „Gheorghe Lazăr”, „Jose Marti”, „Grigore Moisil”, „Sandală Nicoliţă”, „Simon Petru”, „Rado Ferenc”, „Sorin Simion”, „Viitorii matematicieni”, „Mihai Viteazul”; Concursul Gazetei Matematice; Concursul judeţean interdisciplinar „Urmașii lui Moisil”; Concursul Naţional de Matematică "Euclid"; Concursul Internaţional „Arhimede” etc. În Republica Moldova sunt organizate olimpiadele pe etape care finalizează anual cu olimpiada republicană şi olimpiadele Liceului teoretic „Orizont”. O forma de activitate extracurriculară la matematică on-line este oferită pe pagina web http://www.artofproblemsolving.com. Elevii care se înscriu la acest curs îşi dezvoltă competenţe avansate de rezolvare a problemelor, interacţionează cu elevi care au abilităţi similare, învaţă de la instructori care au câştigat competiţii naţionale la matematică, descoperă instrumentele necesare pentru atingerea performanţelor în competiţiile matematice [210].

Asigurarea calităţii instruirii diferenţiate prin adecvarea ofertei educaţionale la nevoile şi interesele individuale ale tinerilor dotaţi impune elaborarea/validarea de programe educative în domeniul învăţământului preuniversitar de excelenţă, realizarea de programe pilot şi trasee curriculare diferenţiate, focalizate pe stimularea creativităţii şi pe valorizarea potenţialului tinerilor prin intermediul unor experienţe de învăţare diferenţiate în volum şi profunzime, în raport cu experienţele de învăţare vizate de curriculumul naţional. Se impune implementarea unor programe speciale de studii integrate în ştiinţe şi tehnologii, care să stimuleze interesul elevilor pentru aceste domenii şi să îi motiveze pentru a opta pentru cariere în ştiinţe şi/sau în tehnologii.

*Conţinuturile activităţii extracurriculare* la matematică sunt selectate în diverse ţări reieşind din tradiţiile locale şi sunt foarte variate. Pentru pregătirea maselor largi de elevi la un nivel mai avansat în comparaţie cu cerinţele curriculum-ului formal, de regulă, în sistemul educaţional se respectă tradiţiile autohtone. În spaţiul ex-sovietic se profilează, la general, aceleaşi compartimente, expuse în reviste şi ediţii speciale de popularizare a ştiinţei. Sunt remarcabile colecţiile seriilor „Biblioteca şcolarului", „Kvant", „Популярные лекции по математике", „Математическое просвещение", revistele „Gazeta matematică", „Kvant", „Arhimede", „Математика в школе", „Foaie matematică", „Delta" etc. Un program detaliat al conţinuturilor activităţilor extracurriculare la matematică este expus de către M. Balk şi G. Balk în lucrarea [81] având la bază analiza literaturii şi experienţa cadrelor didactice din sistemul sovietic de învăţământ.

În majoritatea ţărilor sunt aprobate programe pentru pregătirea de concursurile naţionale, care constituie o bază pentru orientarea conţinuturilor matematice ale activităţilor extracurriculare cu caracter permanent. În Republica Moldova aceste programe au fost elaborate în anul de studii 2008-2009 pentru clasele VII-XII (clase în care se organizează olimpiadele de nivel republican) şi au fost plasate pe pagina web a Ministerului Educaţie. Pentru fiecare clasă, în programa de olimpiadă sunt incluse conţinuturile curriculum-ului standard şi al programelor de olimpiadă din clasele anterioare. Conţinuturile suplimentare faţă de programa şcolară, pot fi folosite în rezolvarea problemelor de olimpiadă. Până la momentul actual programele nu au fost modificate, cu toate că a fost aprobat curriculum-ul modernizat care diferă mult de cel valabil în 2008-2009.

În contextul activităţii extracurriculare vom remarca şi importanţa cursurilor opţionale pentru formarea competenţelor elevilor. Planul cadru pentru învăţământul primar, gimnazial şi liceal pentru anul 2012-2013 prevede că disciplinele opţionale sunt orientate spre formarea la elevi a unor competenţe, care „nu pot fi atinse doar prin intermediul unei discipline de studii", „vor contribui la aprofundarea cunoaşterii în cadrul ariei curriculare, la orientarea treptată a profesorilor spre realizarea principiilor interdisciplinarităţii" şi „nu pot fi folosite pentru extindere la disciplinele obligatorii". Pentru clasele I-IX la matematică sunt recomandate următoarele discipline opţionale: Matematica distractivă; Geometria distractivă; Structuri algebrice; Matematică aplicată; Istoria matematicii. Pentru clasele X-XII la matematică sunt recomandate: Metode de rezolvare a problemelor de geometrie; Metode de rezolvare a problemelor de analiză matematică; Structuri algebrice; Vectori în spaţiu; Istoria matematicii. Nu considerăm că disciplinele enunţate sunt bine selectate în conformitate cu capacităţile respective ale elevilor din categoriile de vârstă corespunzătoare, dar nici că ele corespund rigorilor formulate pentru cursurile opţionale în acelaşi document.

În multe ţări şcolile şi taberele organizate în vacanţe au un program bine structurat şi foarte aprofundat. Tematica propusă la Universitatea din Hamburg ţine de interesele copiilor şi de aplicaţiile matematicii moderne: teoria grafurilor, combinatorică, teoria măsurii, teoria numerelor, geometrie, teoria jocurilor. Problemele sunt selectate astfel ca în jurul lor să poată fi descoperită o mică teorie matematică, astfel elevii fiind puşi să efectueze o cercetare ştiinţifică. Metodele aplicate în activitate sunt informale, în grupuri mici, perechi, individual. În Academiile Copiilor din Germania elevii ascultă 6 cursuri care acoperă un spectru de discipline variat. Un accent special este pus pe antrenarea şi perfecţionarea abilităţilor de a formula clar şi de a prezenta rezultatele cercetării în formă scrisă şi oral. Extrase ale rapoartelor prezentate sunt publicate, fiecare Academie publică circa 150 pagini cu comunicări.

Curriculum-ul riguros şi activitatea de zi cu zi ale MOSP (Programul Olimpiadei de Vară la Matematică) din SUA este conceput pentru a oferi tuturor participanţilor, inclusiv celor şase membri ai echipei OIM şi celor doi supleanţi, experienţă vastă în rezolvarea problemelor matematice, care necesită o analiză mai profundă decât cea demonstrată de elevii chiar şi din cele mai bune licee americane. Zile întregi de ore de matematică şi seturi extinse de probleme oferite elevilor servesc la pregătirea temeinică în mai multe compartimente importante ale matematicii, care sunt evidenţiate în mod tradiţional în diverse ţări. Aceste subiecte includ combinatorica, demonstrarea identităţilor, teoria grafurilor, probabilitate, teoria numerelor, polinoame, numere complexe şi combinatorică în geometrie, geometrie avansată, ecuaţii funcţionale şi inegalităţile clasice.

I. Şarîghin [175, pag. 6-8] a formulat pentru profesori şi elevi un şir de principii metodologice care vizează activitatea în cadrul orelor facultative la matematică şi conţinuturile acceptate: principiul regularităţii; principiul paralelismului; principiul anticipării gradului de complexitate; principiul schimbării priorităţilor; principiul de variabilitate; principiul auto-controlului; principiul de recapitulare rapidă; principiul lucrului cu textul; principiul modelării situaţiilor. Pentru cercurile de matematică s-a dovedit a fi eficientă folosirea manualului [157]. Un adevărat *vademecum* al celor interesaţi de matematică îl constituie lucrarea matematicianului german Arthur Engel „Problem-Solving Strategies”[204]. Cartea sintetizează principalele teme prezente la OIM; conţine întrebări care, chiar dacă nu sunt întâlnite la concursuri, reprezintă probleme interesante de matematică. „Valoarea cărţii originale rezidă şi în faptul că ea conţine rezolvări, de multe ori spectaculoase, ale majorităţii problemelor” – precizează M. Balună, autorul traducerii acestei lucrări în limba română [321, p. 5].

Problemele din lucrare constituie o provocare pentru orice împătimit de matematică, novice, avansat sau expert. Investigaţia efectuată de D. Mamedearov [144] se referă la organizarea orelor facultative la matematică prin intermediul unui „frame” sau, în traducere din engleză, cadru. Autorul a preluat termenul din engleză, subînţelegând consolidarea informaţiei diverse în jurul unui nucleu care poate fi o situaţie reală, o acţiune, eveniment, situaţie percepute de psihic într-un anumit cadru spaţio-temporal. Forma aceasta de instruire constă în colectarea şi structurarea informaţiei despre obiectul central şi noţiunile aferente. Principala sarcină a organizării activităţii este implicarea elevilor într-un proces de explorare şi dobândire independentă a cunoştinţelor noi. Un element important în acest proces este formarea priceperilor de a formula probleme, a înainta ipoteze, a alege calea de cercetare. În Figura 1.5. este reprezentată forma de instruire prin „frame”, având drept nucleu noţiunea „număr triunghiular”.

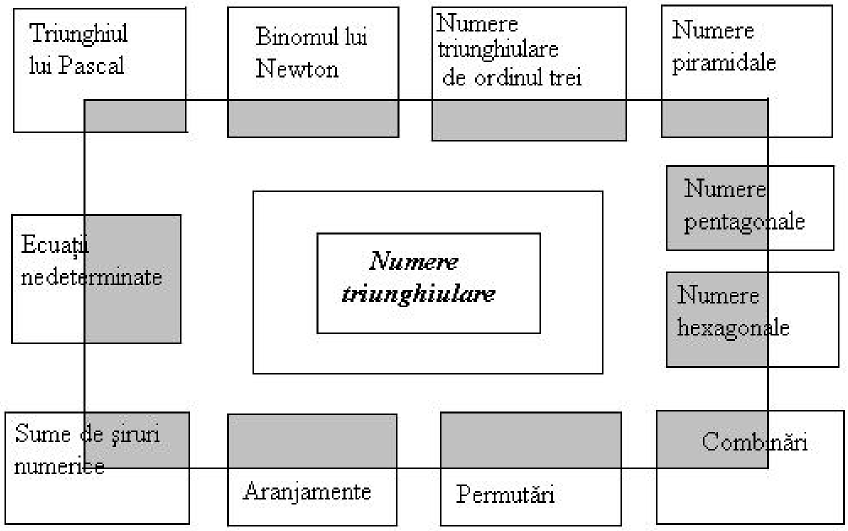


Fig.1. 5. Schema de instruire prin „frame”

Partea haşurată indică interferenţa subiectelor periferice cu cel central. Reuşita instruirii depinde de disponibilitatea profesorului de a organiza şi a ghida activitatea cognitivă a elevilor. Activismul cognitiv şi creativ al elevilor depinde de factori obiectivi şi subiectivi, care sunt condiţionaţi de pregătirea profesională a cadrului didactic, de imaginea morală şi intelectuală a lui, capacitatea de a reacţiona şi a se adapta la schimbare, la cerinţele realităţii şi a ştiinţei mereu în dezvoltare.

Pentru organizarea activităţilor extracurriculare sunt valoroase cărţile în care autorii gândesc structura expunerii orientându-se la subiectul care învaţă, conducându-l pe un traseu cu probleme provocatoare, oferindu-i posibilitatea să contempleze asupra propriului mod de raţionament, dar şi ademenindu-l cu expresii din limbajul caracteristic timpului. Astfel de lucrări au servit multor generaţii şi sunt reeditate ani la rând. Nominalizăm lucrările în expunerea autorilor Ia. Perelman, M. Gardner, S. Lloid, G. Polya, R. Curant, G. Robbins, G.Rademaher şi O. Tepliţ, Z. Scopeţ, I. Nicoliskaia etc. Recent, în limba română au fost publicate două volume cu genericul „Matematica, de drag” scrise de Ion A. Cindrea, pe care autorul o consideră „partitura unui dascăl de matematică într-o dezbatere liberă privind metoda, o dezbatere la care sunt invitaţi elevii şi profesorii care au ceva de cules sau de semănat pe tărâmul, considerat arid, al matematicii” [15, p. 9].

*Metodele didactice* utilizate în activităţile extracurriculare sunt extrem de diferite: povestirea; descrierea; explicaţia; prelegerea; conversaţia; exerciţiul; dezbaterea; modelarea; experimentul; studiul de caz; proiectul; observarea sistematică şi independentă, lucrarea practică; instruirea programată etc. Se pretează orice metodă, dacă ea trezeşte curiozitatea elevului, dezvoltă gândirea creativă, sistematizează şi integrează cunoştinţele etc. M. Minder subliniază, că „a preda, într-o optică funcţională, nu înseamnă niciodată a distribui – chiar cu abilitate – cunoştinţe, ci a aranja contingenţele de învăţare astfel, încât elevul să poată integra cunoştinţele” [52, p.164]. Confuzia legată de alegerea strategiei adecvate de predare autorul recomandă să fie înlăturată prin consultarea psihologiei. Ipotezele fructuoase în materie de eficientizare a predării ţin de conceptul „soluţionare a problemei” şi patru direcţii de cercetare: încercare-eroare, insight, condiţionare operantă, învăţarea verbală semnificativă.

Abordarea diferenţiată a procesului educaţional presupune axarea pe „subiectul” care învaţă. Relaţia subiect-subiect, fiind primordială în activitatea extracurriculară, poate fi descrisă în baza principiului personalităţii conceput de M. Bahtin. Personalitatea, în opinia filosofului nominalizat, poate fi cunoscută doar în dialog cu altă personalitate, ea nu poate fi tratată nici ca un „obiect” analizat fără implicarea personală a sa, nici prin empatie [133].

Cercetătorii recomandă ca în activitatea extracurriculară centrată pe subiect să fie folosite: metode în care predomină acţiunea de comunicare [99, 100, 101]; lectura – dirijată, explicativă, independentă etc. [15, p. 8]; reflecţia personală, introspecţia [61]; metode în care predomină acţiunea practică (reală sau simulată) [164]; metode în care predomină acţiunea de programare specială a instruirii (paşi mici, comportament activ, întărirea pozitivă sau negativă a comportamentului, respectarea ritmului individual de învăţare) [33, 20, 190]; metoda instruirii asistată de calculator [225, 215, 219, 195].

Metoda inductivă perfectă este utilizată în procesul de organizare a activităţii extracurriculare prin forma „frame” în trei etape: observarea şi experimentul; formularea ipotezei; argumentarea (demonstrarea) ipotezei [144]. Pentru determinarea legităţilor particulare autorul utilizează metodele: codarea selectivă a informaţiei, combinarea selectivă, compararea selectivă şi recombinarea, inducţia, deducţia, generalizarea. O pondere din ce în ce mai mare o are organizarea instruirii pe bază de proiecte. Rolul proiectelor în studierea matematicii este descris foarte original în lucrările lui A.Sghibnev [163].

*Mijloacele didactice utilizate în activităţile extracurriculare* sunt foarte variate. Caracterul deschis al acestor activităţi educaţionale permite experimentarea celor mai noi mijloace tehnice, instrumente, softuri, manuale, materiale didactice, culegeri de probleme etc. Tipul de mijloace selectate pentru activitatea extracurriculară se cere a fi racordat la stilul de învăţare - mod preferenţial de învăţare, definit în termeni de dimensiuni ale personalităţii, de comportament, de proces cognitiv, respectiv, de reprezentare a situaţiei de învăţare. În 1978, Dunn şi Dunn au identificat trei stiluri de învăţare: vizual, auditiv şi chinestezic [203]. Didactica modernă sugerează o clasificare a mijloacelor didactice bazată pe mutaţiile tehnice înregistrate în acest domeniu, dar şi pe raporturile complexe de integrare metodologică a metodelor, procedeelor şi mijloacelor [11, p. 202 - 209].

Sistemele educaţionale progresiste se raliază la exigenţele timpului introducând Tehnologiile Informaţionale şi Comunicaţionale (TIC) în procesul educaţional. În culegerea [193] sunt descrise experienţele de implementare a rezultatelor proiectului „InnoMathEd – Innovations in Mathematics Education on European Level” care s-a desfăşurat pe parcursul anilor 2008-2010 în cadrul Programului „Life Long Learning” cu suportul Comisiei Europene. Mediile digitale sunt considerate catalizatori pentru inovaţiile din domeniul educaţiei matematice, dar implementarea TIC nu este suficientă pentru schimbarea sistemului „Educaţia Matematică”, care este voluminos, stabil şi complex [236, p.22]. Procesele inovative trebuie să acţioneze la meta-nivelul atitudinilor faţă de matematică şi convingerilor educaţiei matematice.

În continuare nu putem să facem abstracţie de la rolul lucrărilor metodice editate pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare. Vom sublinia că în Republica Moldova în ultimii ani au fost editate prea puţine cărţi de acest fel. În această listă predomină culegerile de probleme pentru pregătirea de concursuri [40, 7, 24, 43, 55], excepţie fiind lucrările [64, 168, 13].

Orice activitate extracurriculară la matematică la fel ca şi activitatea curriculară este evaluată şi apreciată. Activităţile episodice, de regulă, se finalizează cu debifarea obiectivelor şi evaluarea muncii elevilor. Activităţile cu caracter competiţional de acest tip, de regulă, implică un juriu care dă apreciere atât corectitudinii răspunsurilor, cât şi aspectelor psihopedagogice ale comportamentului elevilor.

Pentru activităţile extracurriculare permanente cea mai valoroasa apreciere o constituie schimbarea calitativă în timp a comportamentului elevilor. Procesul de rezolvare a problemelor dificile este considerat de N. Kostrikina [131] „podul de trecere" de la activitatea în clasă la cea extracurriculară. „Realizarea consecventă a conexiunii organice între activitatea de învăţare la ore şi în afara lor îi va permite profesorului să obţină succese mari", conchide autoarea [131, p. 11]. În culegerea de probleme [134], destinată şi activităţii extracurriculare la matematică, autorii evaluează impactul rezolvării problemelor cu caracter exploratoriu asupra formării competenţelor matematice ale elevilor. Un aport important în sprijinul profesorilor şi elevilor interesaţi de studiul matematicii au culegerile de probleme de la olimpiadele de matematică editate în RM cu completări în câteva ediţii [55, 56]. În baza acestor lucrări poate fi analizată evoluţia curriculum-ului la matematică, dar şi dinamica tematicii şi a gradului de dificultate a problemelor propuse.

În lucrarea [91, p. 105] autorii recomandă ca cercul de matematică să aibă o agendă, în care este fixat ce se întâmplă la fiecare şedinţă. Această agendă permite să fie acumulat conţinutul unui îndrumar pentru membrii cercului, dar şi anumite sugestii evaluative a activităţii. Elaborarea agendei este un lucru colectiv al elevilor împreună cu profesorul.

Evaluarea situaţiei în domeniul educaţiei matematice pe ţară, în general, şi a activităţii extracurriculare la matematică, în particular, este reflectată în rezultatele obţinute de elevi la olimpiadele internaţionale de matematică (OIM) [211]. O trecere în revistă a rezultatelor obţinute de elevi la olimpiadele internaţionale pe discipline în primii 15 ani de independenţă a Republicii Moldova a fost făcută de Ministerul Educaţiei şi Tineretului în anul 2006 [23]. La olimpiadele internaţionale juriul are misiunea de a evalua gradul de dificultate al problemelor, însă baremul de apreciere foarte des nu corespunde realităţii de rezolvare a problemelor de către elevi [214].

Problemele actuale ale învăţământului matematic formal şi nonformal sunt dezbătute în cadrul unor foruri organizate la diverse niveluri. Drept exemplu pot servi Congresul Federaţiei Mondiale a Competiţiilor Matematice Naţionale, Congresul Internaţional în Educaţia Matematică, The UNESCO World Conference on Special Needs Education ş.a. Evaluarea impactului activităţilor extracurriculare la matematică asupra formării elevilor la nivel de sistem educaţional în Republica Moldova nu a fost făcută vreo dată.

### 1.2. Fundamente psihopedagogice ce asigură realizarea finalităţilor procesului de pregătire a viitorilor profesori de matematică pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică

Procesul de pregătire a cadrelor didactice a fost studiat din diverse aspecte: bazele axiologice ale învăţământului pedagogic (M. Boguslavskii, I. Isaev, V. Karakovskii, Z. Ravkin, V. Slastenin, E. Şianov ş.a.); abordarea subiect-acţiune în formarea profesională a cadrelor didactice (G. Axenova, E. Andrienco, D. Anufrieva, E. Bondarevskaia, Iu. Vardanean, L. Kolesnikov, Iu. Povarencov, E. Rogov, V. Slastenin, V. Şadrikov, I.Şalaev, A.Şutenko ş.a.); rolul tehnologiilor didactice în pregătirea profesorilor (V. Bespaliko, M. Klarin, M. Levina, A. Mişcenco, V. Serikov, V. Slastenin, P. Tretiakov, T. Şamova, N. Şciurkova ş.a.) legităţile akmeologice ale formării profesionale şi personale a cadrelor didactice (O. Anisimov, A. Bodalev, A. Derkaci, N. Kuzmina, A. Markova, L. Mitina, M. Rojkov, I. Semionov ş.a.); modelul personalităţii profesorului (R. Burns, A. Clark, A. Combs ş.a.); particularităţile psihologiei cognitive, ale psihopedagogiei (R.Solso, E. Stones ş.a.); principiile teleologice (B. Bloom, R. Barrow, R. Mager, T. Husen, E. Eisner ş.a.); calităţile profesorului (P. Kapterev); structura capacităţilor pedagogice generale (V. Kruteţkii); structura capacităţilor pedagogice (N. Kuzmina); diferenţierea capacităţilor pedagogice (N. Aminov) [210, 197, 234]. Problemele pregătirii profesionale a profesorilor de matematică în instituţiile pedagogice sunt analizate în lucrările autorilor V. Afanasiev, V. Matrosov, A. Nijnicov, Iu. Povarencov, E. Smirnov, V. Şadricov; T. Voronov; O. Ivanov; V. Kuzneţov, N. Merlin, Z. Şvarţman ş.a..

Sistemul de activitate ca obiectiv comun care ghidează analiza pe domenii multidisciplinare este obiectul de studiu pentru Engestrom, Barab, Ho, Zevenbergen, Lerman, Hardman, Goodchild şi Jaworski, Fitz Simons, Roth, Williams, Venkat, Adler, Beswick, Flavell, Lim, Hang ş.a. [203, 190].

Operaţionalizarea componentelor sistemului de activitate în educaţia matematică este examinată în [220, 167, 230, 216, 210].

M. Litvinţeva a examinat aspectele formării abilităţilor de explorare în procesul de pregătire matematică a studenţilor [140]. Autoarea a evidenţiat condiţiile didactice de formare a acestor abilităţi: un sistem de probleme care satisfac cerinţe speciale cu caracter exploratoriu; includerea contextului personal în procesul de instruire; reproducerea de către profesor a fragmentului de activitate instructivă, preponderent la nivel de reflecţie; disponibilitatea cadrului didactic universitar să activeze în regim de „explorare” a cunoştinţelor de către studenţi. Inclusiv, a stabilit principiile formării abilităţilor de explorare în procesul de pregătire matematică a studenţilor: corespunderea obiectivelor formării profesionale la disciplina de profil şi pedagogice; sistematicitatea şi consecvenţa; tehnologizarea; cooperarea; caracterul deschis al sistemului metodic; axarea pe experienţa subiectului şi pe reflecţie.

Din punct de vedere psihopedagogic categoria de vârstă a tinerilor între 19 şi 24 ani este una de tranziţie, pe durată căreia se manifestă atât caracteristici ale adolescenţei cât şi caracteristici noi ale tinereţii, ale stării de adult tinăr [71, pag. 129]. Particularităţile psihosociale fundamentale ale perioadei studenţeşti sunt reflectate în cercetările psihologilor I. Kon [125], E. Erikson [153], E.Elkonin [148], I. Drăgan

[28], A. Maslow [143] etc. În perioada de studenţie sensul vieţii este pus în legătură directă cu planificarea şi realizarea scopurilor legate de procesul de studii.

Aspectele psihopedagogice ale activităţii practice curriculare şi extracurriculare a studenţilor viitori-profesori sunt dezvăluite în lucrarea [118]. Autorul constată că studenţii realizează cu succes activităţile curriculare şi extracurriculare cu elevii. Interesul elevilor pentru studenţi - viitori profesori este caracterizat de exigenţa celor dintâi faţă de competenţa profesională şi erudiţia ultimilor. O atenţie deosebită din partea elevilor este acordată calităţilor personale ale tinerilor studenţi, pentru a dezvolta relaţiile între ei. În activităţile extracurriculare în comun ale studenţilor şi elevilor se observă intensitatea de interacţiune nu numai în problemele educaţionale şi cognitive, dar, de asemenea, pe o gamă largă de alte probleme de interes pentru elevi. Relaţiile informale, atmosfera intensă intelectuală si emoţională a activităţilor extracurriculare a elevilor şi a viitorilor profesionişti, generează o sursă de inspiraţie la elevi, un sentiment de auto-importanţă, starea de satisfacţie de viaţă, necesitatea de a comunica şi de a lucra. O astfel de transformare în sfera psihică se observă la elevi în prezenţa studenţilor-practicanţi care aduc spiritul de noutate şi de optimism, de acţiune dinamica şi de potenţial succes. Studenţii, de regulă, nu acordă prea mare atenţie experienţelor negative din trecut ale elevilor şi pentru elevi apar perspective noi de autoafirmare în cadrul activităţii comune cu un matur. În plus, studenţii, în procesul de desfăşurarea a activităţilor extracurriculare, au posibilitatea de a detecta şi de a evalua calităţi pozitive ale unor elevi şi ale activităţilor lor, care, din păcate, adesea nu sunt sesizate de cadrele didactice şi chiar de către părinţi. O astfel de atitudine a studenţilor pare a fi destul de atractivă pentru elevi (pentru unii - cel puţin la început).

Un model al procesului educaţional privind formarea profesional-metodică a studenţilor matematicieni este construit în baza cercetărilor efectuate de N. Kuciugurova. Modelul cuprinde componentele: aspectele metodologice; vectorii dezvoltării metodico-profesionale a viitorului specialist; pedagogia integrativă şi formativă; tehnologiile şi complexele instructiv-metodice; „scările dezvoltării profesionale” a studenţilor şi profesorilor; spirala dezvoltării subiecţilor instruirii; diagnosticul „noului” în structura experienţei personale a studentului şi monitorizarea calităţii activităţii profesorilor [133]. Investigaţiile [147, 85] dezvăluie rolul aspectului umanitar în formarea profesorilor de matematică şi aspectul umanitar al matematicii în formarea profesorilor. Însă aceste investigaţii nu ating subiectul privind bazele metodologice ale formării competenţelor specifice organizării şi desfăşurării activităţilor extracurriculare la matematică.

Investigaţiile efectuate de E. Demisenova au condus la formularea unor cerinţe faţă de pregătirea viitorilor profesori de matematică pentru activitatea extracurriculară

[103]. Un set de indici normativ-euristici care caracterizează creativitatea activităţii didactice au fost elaboraţi de N. Nicandrov şi M. Potaşnic [149].

Dezvoltarea creativităţii este un obiectiv al învăţământului superior. Gândirea creativă, după cum este definită de G. Lindsei şi R. Tompson, este gândirea, în rezultatul căreia se obţine o soluţie principial nouă sau o soluţie perfecţionată a unei probleme. Gândirea creativă este orientată spre descoperirea de noi idei, de aceea omul trebuie să înveţe să dea frâu liber gândurilor sale şi să nu încerce a le canaliza pe un anumit făgaş [138]. Pentru ca sistemul educaţional să încurajeze activităţile creative, un prim pas îl reprezintă identificarea blocajelor psihologice. În literatura de specialitate există mai multe inventarieri ale blocajelor creativităţii. G. Lindsei şi R. Tompson consideră că dezvoltarea gândirii creatoare întâlneşte cinci tipuri de blocaje: conformismul, cenzura internă şi cea externă, rigiditatea, dorinţa de a obţine rezultatele imediat, lipsa atitudinii critice. Pentru creşterea productivităţii gândirii, trebuie să demonstrezi capacităţi de analiză critică pentru sortarea ideilor. Aceasta contribuie la formarea aptitudinilor de autoevaluare obiectivă şi implementarea ideilor [138 , p. 151]. Mai mulţi autori (A.I. Osborn, A. Simberg, S. Shore) fac distincţie între blocajele perceptive, emoţionale şi culturale [63, p.111]. La aceste tipuri de blocaje, E. Landau [46, p.86] adaugă obstacole de natură intelectuală: fixitate (rigiditate) funcţională, lipsa de supleţe a categoriilor datorată excesului de informaţii, persistenţa tendinţelor habituale. Gândirea creativă trebuie să sfărâme în mod obligatoriu graniţele impuse de acest set habitual. Printre dezavantajele sistemului actual de învăţământ în spaţiul ex-sovietic practicienii găsesc lipsa investiţiilor majore în dotarea instituţiilor de învăţământ şi în perfecţionarea cadrelor didactice [184].

Pentru realizarea educaţiei diferenţiate la matematică este necesară înarmarea cadrelor didactice cu instrumente speciale de analiză didactică. Concepţia de analiza didactică elaborată de W. Klafki vizând instruirea ca nucleu al pregătirii profesionale a profesorului, a fost publicată pentru prima oară în 1958 [214]. Autorul consideră didactica la general atât pentru reflectarea dimensiunii privind obiectivele şi conţinutul, dar şi a dimensiunii ce ţine de metode, luând în considerare precondiţiile atât la nivel de personalitate cât şi la nivel instituţional. În timp, concepţia lui W. Klafki a fost actualizată în mod critic constructiv [206]. Analiza didactică este actualmente legată şi de noţiuni de instruire categorială şi de didactică instructiv-teoretică.

Pregătirea cadrelor didactice pentru abordarea diferenţiată a activităţii educaţionale în funcţie de nivel este obiect de studiu în lucrările autorilor V.Gusev, I. Smirnova, E. Petrova etc. În concepţia lui V.Gusev pentru asigurarea instruirii diferenţiate în toate formele şi tipurile posibile este necesară o informare deplină asupra conţinutului instruirii. În acest scop a fost introdusă noţiunea de „lanţ de noi informaţii”, care le ajută elevilor să urmărească consecutivitatea în care se studiază careva noţiuni, metodele de reprezentare a faptelor studiate în probleme sau comunică informaţie suplimentară, care asigură motivarea pentru studierea matematicii. Rolul esenţial în organizarea instruirii diferenţiate îl au lanţurile de probleme, purtătoare de informaţii noi [100]. Problema pregătirii profesorilor de matematică în domeniul istoriei matematicii este abordată în lucrările cercetătorilor G. Gleizer, M. Bavrin, Iu. Drobîşev [106].

În lucrarea [182] sunt formulate principii de bază pentru selectarea profesorilor pentru lucrul cu copiii dotaţi, profesorul fiind nominalizat ca factor determinant în sistemul de instruire a copiilor dotaţi. Formarea competenţelor praxiologice ale cadrelor didactice pentru activităţile curriculare şi extracurriculare se recomandă a fi efectuată în cadrul lucrărilor de laborator. Procesul de transpunere didactică a conţinuturilor pentru abordarea diferenţiată a educaţiei matematice de către cadrele didactice poate fi facilitat prin analiza logico-didactică a definiţiilor, axiomelor, teoremelor, algoritmilor şi regulilor propusă de E. Leaşcenco, P. Grudenov, A. Farcov ş.a. [134].

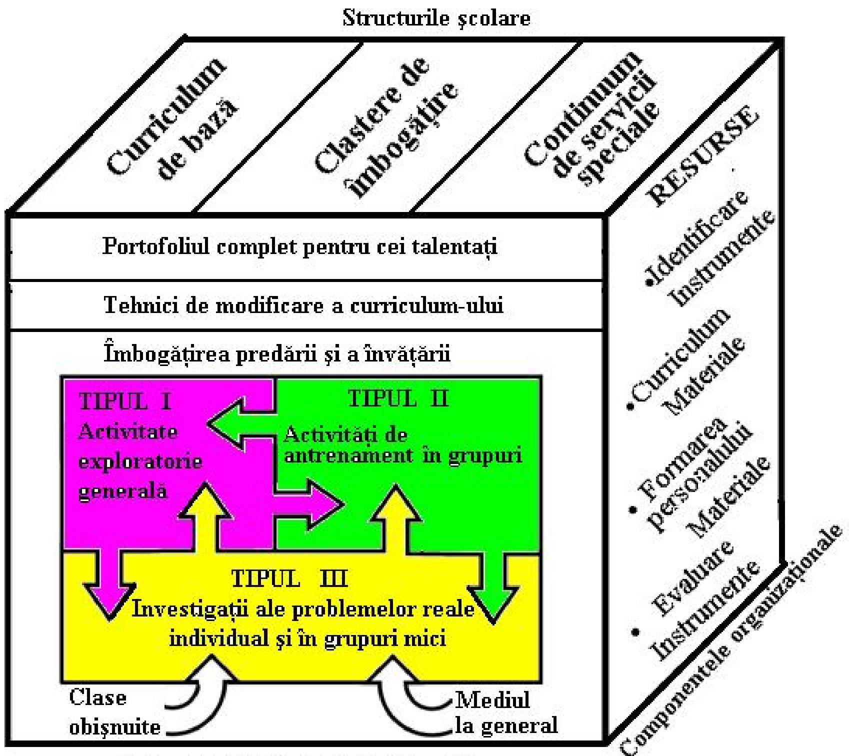



Fig.1. 6. Modelul SEM (The Schoolwide Enrichment Model, J. Renzulli, S.Reis)

Pe parcursul ultimilor 35 de ani Universitatea din Conecticut (SUA) organizează ateliere de formare a cadrelor didactice pentru lucrul cu copiii dotaţi în „Institutele de vară CONFRATUTE”. Aceste ateliere sunt orientate spre furnizarea de strategii bazate pe cercetare şi activitatea practică educatorilor care şi-au asumat angajamentul de a îmbogăţi activităţile de învăţare a tuturor elevilor, precum şi satisfacerea nevoilor elevilor supradotaţi şi talentaţi, utilizând metoda compactării curriculum-ulu. Autorii Programului „Renzulli Learning” [237] destinat copiilor dotaţi, dar şi profesorilor care lucrează cu ei, sunt mereu preocupaţi de modernizarea Modelului SEM (The Schoolwide Enrichment Model). Varianta perfecţionată implementată actualmente include şi resursele destinate educatorilor (Figura 1.6.).

Problema aptitudinilor matematice este abordată în lucrările savanţilor R. Atahanov, M. Bejat, A. Binet, V. V. Davâdov, Z. P. Dieneş, P. I. Galperin, J. P. Guilford, R. Gullasch, V. Gusev, J. Hadamard, A. Kolmogorov, V.Kruteţkii, A.F. Lazurski, K. Lowell, N.A. Mencinskaia, D. Morduhai- Boltovski, M.I. Moro, E. Petrova, J.Piaget, H. Poincaré, A.L. Rogers, S.R. Rubinstein, A. Ruthe, C. Spearman, S.I.Şapiro, L.L. Thurstone, E.L. Thorndike, G. Pippig, B. Zörgö ş.a.

Recomandări metodice privind pregătirea cadrelor didactice pentru diagnosticarea la elevi a aptitudinilor matematice şi dezvoltarea lor oferă I. Berar, B. Gnedenko, A. Hincin, A. Kolmogorov, A. Markuşevici, G. Polya, S. Şvarţburd ş.a. Lucrările savanţilor I. Lerner, A. Mîşkis, I. Iakimanskaia se referă la dezvoltarea imaginaţiei spaţiale a indivizilor în procesul educaţional de formare profesională. Dezvoltarea gândirii matematice în procesul de rezolvare a problemelor este obiect de studiu în investigaţiile cercetătorilor E. Ghingulis, Z. Kalmîkova, N. Mencinskaia, M. Moro, N. Talîzina, P. Şevarev. Cercetările nominalizate au o contribuţie esenţială în formarea cadrului didactic, dar faptul că programele de pregătire a studenţilor - viitori profesori de matematică nu includ subiecte la această temă, ne-a condus la formularea unui *obiectiv* care se referă la determinarea *bazelor metodologice de formare profesională iniţială a profesorilor de matematică* în concordanţă cu cerinţele actuale ale societăţii şi de pregătire a lor pentru activitatea extracurriculară şi lucrul cu copiii dotaţi capabili de performanţe înalte la matematică.

### 1.3. Finalităţile macro- şi microstructurale ale procesului de pregătire a viitorilor profesori de matematică pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică

Finalităţile macrostructurale ţin de realizarea obiectivelor pedagogice ce angajează intenţionalitatea activităţi de formare-dezvoltare a personalităţii proiectată la nivel de sistem, iar finalităţile microstructurale sunt aşteptate la nivel de proces şi ţin de realizarea obiectivelor generale şi a obiectivelor specifice.

Finalităţile macrostructurale angajează evoluţia sistemului de educaţie şi de învăţământ, pe termen lung şi mediu, reflectă direcţiile fundamentale de dezvoltare a societăţii la nivel global, în plan economic, politic, cultural, comunitar. S. Cristea propune două categorii de finalităţi macrostructurale, valabile la nivelul întregului sistem de educaţie: a) idealul educaţiei / pedagogic; b) scopurile educaţiei / pedagogice. Primul reprezintă finalitatea de maximă generalitate care defineşte un prototip determinat, în mod obiectiv, de tendinţele de evoluţie ascendentă a societăţii. El are un caracter istoric, abstract, prospectiv, strategic şi politic. Idealul Epocii Moderne reflectă în plan pedagogic transformările înregistrate la nivel social global. Idealul educaţional este instituţionalizat la nivel de politică a statului.

Idealul educaţional al şcolii româneşti este formulat în Legea educaţiei naţionale [49]. Cu referire la problema pregătirii cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară constatăm că în România Legea educaţiei naţionale prevede în structura sistemului naţional de învăţământ preuniversitar secţiunile Învăţământul pentru copiii şi tinerii capabili de performanţe înalte (Art. 57) şi Programul „Şcoala după şcoală" (Art. 58). Statul sprijină copiii şi tinerii capabili de performanţe înalte atât în unităţi de învăţământ, cât şi în centre de excelenţă. Copiii şi tinerii capabili de performanţe înalte beneficiază, indiferent de vârstă, de programe educative care le respectă particularităţile de învăţare şi de orientare a performanţei. Aceste programe sunt de aprofundare a învăţării, de grupare pe abilităţi, de îmbogăţire a curriculumului cu noi domenii, de mentorat şi transfer de competenţă, de accelerare a promovării conform ritmului individual de învăţare. Prin programul „Şcoala după şcoală" unităţile de învăţământ oferă activităţi educative, recreative, de timp liber, pentru consolidarea competenţelor dobândite sau de accelerare a învăţării, precum şi activităţi de învăţare remedială. Sistemul prevede funcţia de instructor de educaţie extraşcolară (Art. 250).

În varianta din 2011 a proiectului Codului educaţie a Republicii Moldova este stipulat că idealul educaţional constă în formarea şi dezvoltarea integrală a personalităţii din perspectiva exigenţelor culturale, axiologice, social-economice, ştiinţifice şi politice ale societăţii democratice pentru asumarea unui ansamblu de valori necesare propriei dezvoltări, realizării personale şi integrării sociale şi profesionale într-o societate a cunoaşterii, în contextul valorilor europene.

Printre alte tipuri de instituţii de învăţământ, autorii proiectului nominalizează instituţiile de învăţămînt extraşcolar – centre de creaţie, cluburi sau instituţii de profil, taberele şcolare. Învăţămîntul general include şi componente cu funcţii complementare, printre care şi învăţămîntul extraşcolar. Învățămîntul liceal se prevede a fi organizat pe câteva filiere cu diverse profiluri. În cadrul acestor profiluri se pot organiza, cu aprobarea Ministerului Educaţiei, clase cu specializări mai restrînse şi clase speciale pentru elevi cu aptitudini şi performanţe speciale.

Persoanele capabile de performanţă înaltă sunt clasificate drept persoane cu cerinţe educaţionale speciale.

Scopurile educaţiei reprezintă finalităţile macrostructurale determinate de ideal care angajează realizarea prin elaborarea direcţiilor generale de acţiune, instituţionalizate la nivel de politică a educaţiei. Obiectivul major al pregătirii iniţiale a profesorilor de matematică din perspectiva axării pe competenţe poate fi definit ca formarea bazelor competenţei sale profesional-pedagogice, consideră M. Şaşkina [177]. Structura activităţii instructiv-cognitive a studenţilor a fost propusă de L. Şkerina [180]. Autorul consideră că activitatea instructiv-cognitivă a studenţilor este un proces orientat spre soluţionarea diferitor sarcini instructive, în rezultatul căruia studentul stăpâneşte un anumit sistem de cunoştinţe, priceperi, deprinderi şi procedee de acţiune. În acelaşi timp, activitatea contribuie la formarea unui complex de calităţi personale ale viitorului specialist, care vor servi în viitor drept bază pentru manifestarea disponibilităţii şi capacităţii de aplicare sistemică şi conştientă a cunoştinţelor obţinute, pentru autoformarea şi autoperfecţionarea personală şi profesională.

Implementarea învăţământului pe profiluri în sistemul educaţional din Rusia a evidenţiat o contradicţie existentă şi mai înainte dintre cerinţele crescânde faţă de activitatea profesională a cadrelor didactice, a managerilor şcolari şi gradul lor de pregătire pentru soluţionarea problemelor pe care le înaintează societatea modernă. Şcoala axată pe diferenţierea în funcţie de profil are nevoie de organizatori cu un potenţial intelectual înalt, cu competenţe manageriale şi antreprenoriale, apţi de a genera idei.

Finalităţile microstructurale definesc orientările valorice care asigură proiectarea şi realizarea activităţii de formare-dezvoltare a personalităţii la nivelul procesului de învăţământ şi vizează dimensiunile structurală şi operaţională ale procesului de învăţămînt. Cadrul de pregătire iniţială şi continuă trebuie să-i ofere viitorului specialist instrumente pentru realizarea cu succes a activităţii pe dimensiunea operaţională prin intermediul asigurării unui nivel satisfăcător al resurselor dimensiunii structurale. Orientările conceptuale ale evaluării cadrelor didactice din învăţământul autohton sunt studiate în lucrările autorilor C. Platon, V. Pîslaru, A. Răileanu, I. Achiri, M. Hadîrcă, I. Spinei, M. Călin, I. Cerghit, C. Cucoş, N. Oprescu, I.T. Radu, C. Bîrzea, S.Cristea, R.Niculescu, T.Cozma, C.Moise, problema evaluării rezultatelor şcolare este reflectată de I. Achiri, A. Bolboceanu, E. Istrate, I. Jinga, M. Manolescu, S. Musteaţă, I. Neacşu, V. Pîslaru, A. Răileanu, A. Spinei, A. Stoica, aspectele psiho-sociale ale activităţii profesionale a cadrelor didactice sunt examinate în lucrările autorilor C.Narly, A.Neculau, V. Pavelcu. L. Gliga a elaborat standardele profesionale în învăţămînt, E. Păun şi G.Văideanu au studiat alinierea evaluării profesorilor la standardele mondiale în domeniu, iar atestarea cadrelor didactice a fost obiect de studiu pentru Gh. Rudic, Vl. Guţu, T.Callo, Al. Crişan, A. Cara, E. Coroi, M. Miclea, D. Oprea. Tascovici D. a stabilit o intercorelare intre trei aspecte importante ale evaluării cadrelor didactice din învăţămîntul preuniversitar: structural, procedural şi procesual pe care le-a inclus într-un model ajustabil de evaluare axat pe profesionalism, respectînd autonomia, responsabilitatea împărţită, comunicarea şi deschiderea vizavi de evaluare şi autoevaluare [76].

În investigaţiile sale A. Andrienco [86] defineşte competenţele speciale ale profesorului de matematică ca o sinteză a competenţelor matematice şi a celor pedagogice, care permite profesorului relativ repede şi uşor să obţină succes în predarea disciplinei. A. Andrienco a elaborat structura competenţelor pedagogice speciale ale profesorului de matematică, care are 12 componente, repartizate în 3 blocuri. Blocul întâi permite profesorului să dezvolte la elevi interesul pentru studierea matematicii, cel de al doilea bloc asigură posibilitatea de a dezvolta la elevi gândirea activă independentă la studierea matematicii şi al treilea bloc include capacităţile auxiliare, care permit profesorului să realizeze activitatea profesională. T. Hrustaleva a stabilit că competenţele profesorului formează un sistem complex, integru, compus din mai multe elemente, ordonate pe două niveluri, care este determinat de un simptomo-complex de calităţi individuale ierarhizate [171]. Structura psihologică a competenţelor speciale este formată din componente ale două niveluri de organizare calitativ distincte: competenţele pedagogice şi competenţele la disciplină.

Pregătirea cadrelor didactice pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare în diverse ţări se realizează diferit. Proiectul de metodologie cu privire la pregătirea cadrelor didactice pentru definitivarea în învăţământ prin raportarea la standarde elaborate în România sub coordonarea L. Gliga [36, p. 117] propunea forma de stagiatură - un interval de doi ani de activitate desfăşurată direct în instituţie, timp în care cadrul didactic începător exercită profesia didactică şi se dezvoltă profesional, sub asistenţă şi îndrumare. Mentorul este cel care serveşte drept model, consilier, animator şi evaluator pentru stagiar în activităţile curriculare şi extracurriculare. În conformitate cu Legea educaţiei naţionale acest stagiu este de un an, dar pentru cadrele didactice este impusă condiţia obligatorie de a obţine un master educaţional de doi ani. Tot în România în liceele din filiera vocaţională la Profilul pedagogic se pot obţine calificările de Instructor animator şi Instructor pentru activităţi extraşcolare.

V. Crudu, examinând criteriile şi scalele de evaluare a cadrului didactic din Republica Moldova, propune printre altele şi criteriul „Aprecierea rezultatelor obţinute de elevi”. În legătură cu aceasta se prevede evaluarea conform indicilor:

*rezultatele obţinute la olimpiade şi concursuri*; *rezultatele obţinute la cercurile ştiinţifice, tehnico-aplicative,* cultural-artistice şi sportive care se aplică profesorilor din învăţământul gimnazial / liceal [21].

Harta creditară şi metodologia cuantificării, acumulării şi recunoaşterii creditelor profesionale, care sunt stipulate în Regulamentul de atestare a cadrelor didactice din învăţământul preşcolar, primar, secundar, special, complementar, secundar profesional şi mediu de specialitate din Republica Moldova, aprobat prin ordinul nr. 453 din 31.05.2012 semnat de ministrul educaţiei, prevăd că profesorii candidaţi pentru conferirea gradelor didactice şi confirmarea în funcție vor fi eligibili pentru aceste evaluări, dacă vor obţine calificativele „foarte bine” sau „bine” în rezultatul evaluării a două activităţi extraşcolare cu obiectivul de integrare profesională şi socială la nivel de unitate de învăţământ. Confirmarea în funcție în învățământ semnifică recunoașterea competențelor minime acceptabile dobândite de către persoana care a optat pentru cariera didactică și care demonstrează, în acest fel, că dispune de pregătirea necesară pentru exercitarea profesiei didactice. Cadrele didactice vor acumula credite pentru atestarea sistematică în baza activităţilor didactice evaluate, a activităţii ştiinţifico-metodice, comunitare, de mentorat. Reieşind din aceste cerinţe conchidem că este necesară *elaborarea unui model conceptual integru* care ar include toate componentele procesului educaţional centrat pe subiectul învăţării, orientat spre optimizarea traiectoriilor individuale de pregătire a cadrelor didactice şi eficientizarea procesului de asimilare a conţinuturilor, spre dobîndirea competenţelor de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică.

În Republica Moldova activitatea de mentorat încă nu este legiferată prin acte normative. În acest context vom menţiona existenţa standardelor pentru ocupaţia de mentor în România (Standard aprobat COSA la data de 07-01-1999), includerea cerinţei de a îndruma tinerii specialişti în Standardele profesionale pentru profesorii excelenţi din Anglia ş.a. La etapa actuală se conturează necesitatea de *a elabora unele recomandări privind monitorizarea procesului de formare, devenire, dezvoltare şi perfecţionare a calităţilor profesionale ale viitorilor profesori de matematică prin sistemul de mentorat sau coaching* şi pregătirea lor pentru lucrul cu copiii capabili de performanţe înalte la matematică (în baza generalizării experienţei empirice şi a tendinţelor moderne în evoluţia teoriilor pedagogice).

Un loc aparte îl are pregătirea cadrelor didactice pentru lucrul cu copiii dotaţi şi supradotaţi. În lucrarea [5, pag. 134] Yolanda Benito face o sinteză cu privire la practicile internaţionale în domeniul acesta şi constată, că „se observă o frecvenţă relativ scăzută a programelor „de formare iniţială” a cadrelor didactice care acordă gradul de licenţiat sau gradul de expert în acest domeniu. În majoritatea ţărilor studiate se organizează cursuri de formare pentru profesori şi specialiştii în domeniu la nivel naţional.” De exemplu, în Portugalia este cunoscută iniţiativa Institutului Politehnic din Porto de a crea un Centru de studii pentru educarea supradotaţilor (CEES).

Carmen Creţu susţine necesitatea unei viziuni globale asupra programului de asistenţă educaţională a copiilor cu aptitudini înalte şi consideră că formării formatorilor trebuie să i se confere un rol de componentă integrantă. „Promovarea talentelor pe continuumul *identificare-cultivare-afirmare* se realizează în rezonanţă nu numai cu o concepţie generală asupra genezei şi evoluţiei aptitudinilor înalte, ci şi cu promovarea competenţelor promovatorilor, pe un continuum similar în structură: identificarea resurselor umane pentru aplicarea unui program educaţional specific dotaţilor, a capitalului de aptitudini, creativitate şi motivaţie al educatorilor, cultivarea acestui capital şi afirmarea lui atît prin recunoaştere profesională, cît şi prin multiplicare, prin generare la alţii” [20, pag. 198]. Autoarea consideră drept aspect major de eficacitate a promovării talentelor interacţiunea comunicaţională a trei categorii de promovatori: şcoala, familia şi comunitatea. Strategia de formare a formatorilor trebuie efectuată prin patru niveluri intercorelate de programe, cu obiective, tipuri de activităţi, metodologii, calendare şi costuri financiare diferite: formarea coordonatorilor de proiecte curriculare pentru dotaţi; formarea educatorilor practicieni; conştientizarea şi pregătirea părinţilor, a familiei în general, cu privirea la caracteristicile psihocomportamentale ale copiilor cu aptitudini înalte şi a modalităţilor de promovare a aptitudinilor acestora în contextul familial; sensibilizarea comunităţii la toate nivelurile. Cadrele referenţiale ale formării iniţiale şi continue a formatorilor accentuate de autoare se referă la filosofia schimbării de rol-set profesional al cadrului didactic, la tipurile de activităţi de formare şi principiile aplicării programelor de formare a profesorilor [20, 199-200].

Programul de dezvoltare strategică al Ministerului Educaţiei pentru anii 2012-2014, aprobat prin hotărîrea Colegiului Ministerului Educaţiei nr. 3.1 din 23. 12.2011, prevede asigurarea accesului la educaţia extraşcolară de calitate prin antrenarea în activitatea instituţiilor respective a cel puţin 20% din efectivul general de elevi, ceea ce este insuficient pentru realizarea cu o oarecare aproximare a idealului educaţiei pretins. Actualmente în programele de pregătire iniţială şi continuă a cadrelor didactice din Republica Moldova se constată lipsa unor recomandări privind crearea condiţiilor optime pentru *formarea competenţelor de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică* la viitoarele cadre didactice. În sistemul de învăţământ preuniversitar este organizată activitatea extracurriculară la matematică, dar profesorii care desfăşoară această activitate sunt autodidacţi. Lipsesc oportunităţile de pregătire pentru astfel de activităţi la matematică atât la etapa de pregătire iniţială cât şi în instruirea continuă. Procesul de evaluare a cadrelor didactice se referă şi la aspectul desfăşurării cu succes a activităţii extracurriculare, dar sistemul nu oferă resurse adecvate de ordin material şi moral la nivel satisfăcător. Prin urmare se conturează *problema elaborării bazelor metodologice ale unui sistem integrat de mecanisme de formare a competenţelor profesionale* ale cadrelor didactice pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică.

### 1.4. Concluzii la capitolul 1

Analiza literaturii psihopedagogice, didactice şi filosofice cu referire la problema cercetării permite să constatăm că activitatea extracurriculară la matematică are o importanţă majoră în motivarea elevilor pentru studierea matematicii şi formarea elevilor dotaţi la matematică. Este recunoscut impactul pregătirii aprofundate a elevilor în domeniul ştiinţelor exacte asupra progresului economiei unui stat. Acest obiectiv poate fi realizat cu succes, dacă în cadrul fiecărei instituţii de învăţământ activitatea extracurriculară va fi organizată de personal înarmat cu competenţe profesionale specifice pentru abordarea diferenţiată a procesului educaţional în funcţie de nivel şi profil. Diferiţi cercetători enumeră un şir de calităţi care sunt necesare tuturor profesorilor de matematică şi trebuie luate în considerare la pregătirea specialiştilor, dar care sunt absolut vitale pentru profesorul care lucrează cu copii dotaţi la matematică: gândire „structurată matematic"; pregătire matematică specială; abilitatea de reacţiona matematic, adică a pune întrebări şi a da răspunsuri tipice şi caracteristice matematicii; vigilenţă şi receptivitate la observaţii şi comentarii neaşteptate şi neobişnuite ale elevilor; interesul pentru identificarea şi cultivarea elevilor dotaţi; familiaritatea cu programele extracurriculare şi alte oportunităţi pentru dezvoltarea talentului elevilor dotaţi la matematică; abilitatea de a coordona şi dezvolta programe pentru elevii dotaţi la matematică.

Legislaţia educaţională în majoritatea ţărilor promovează şi garantează dreptul la o educaţie diferenţiata, asigură cadrul legislativ şi tehnico-logistic pentru formarea de elite profesionale în toate domeniile de activitate, prin intermediul:

a) educaţiei diferenţiate, ca ansamblu de programe educaţionale formale, nonformale şi informale;

b) educării tinerilor dotaţi şi supradotaţi în centre specializate, publice sau private, prin intermediul claselor specializate, al şcolilor de weekend, al taberelor de instruire, al şcolilor de vară, al programelor de învăţământ la distanţă sau prin alte forme;

c) curriculumului diferenţiat, ca modalitate de adaptare a obiectivelor, conţinuturilor, a strategiilor didactice de predare, învăţare şi evaluare la posibilităţile aptitudinale, la nivelul posibilităţilor cognitive, afective şi motrice, la ritmul şi la stilul de învăţare ale tinerilor supradotaţi, capabili de performanţă înaltă;

d) parteneriatelor public-private între instituţiile publice şi organizaţiile care au competenţă în domeniul educaţiei tinerilor supradotaţi, capabili de performanţe înalte;

e) alocarea de resurse bazată pe o abordare reactiva, sursele să fie alocate la solicitare acolo unde comunitatea este interesată;

f) identificarea supradotaţilor ţinând cont de diversitatea dotării şi realizarea unor studii integrate bazate pe interdisciplinaritate.

Analiza sistemică a procesului de pregătire a viitorilor profesori de matematică, a unei serii de lucrări ce descriu cercetări cu privire la pregătirea cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică, precum şi observarea calitativă a procesului de organizare şi desfăşurare a activităţilor în instituţiile de învăţământ preuniversitar sau complementar a permis să constatăm următoarele:

1.În sistemul de învăţământ preuniversitar este organizată activitatea extracurriculară la matematică, dar profesorii care desfăşoară această activitate sunt autodidacţi. Lipsesc oportunităţile de pregătire pentru astfel de activităţi la matematică atât la etapa de pregătire iniţială cât şi în instruirea continuă. Procesul de evaluare a cadrelor didactice se referă şi la aspectul desfăşurării cu succes a activităţii extracurriculare, dar sistemul nu oferă resurse adecvate de ordin material şi moral la nivel satisfăcător. Prin urmare, se conturează problema elaborării bazelor metodologice ale unui sistem integrat de mecanisme de formare a competenţelor profesionale ale cadrelor didactice pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică.

2.Reieşind din versatilitatea competenţelor profesionale solicitate pentru desfăşurarea activităţii extarcurriculare la matematică, concluzionăm că este necesar *de elaborat un model conceptual integru* care ar include toate componentele procesului educaţional centrat pe subiectul învăţării, orientat spre optimizarea traiectoriilor individuale de pregătire a studenţilor, spre eficientizarea procesului de asimilare a conţinuturilor şi dobândirea competenţelor de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică.

3.Analiza programelor şi a conţinuturilor procesului de pregătire matematică, didactică şi psihopedagogică iniţială a studenţilor matematicieni – viitori profesori, dezvăluie lipsa *unor baze metodologice de formare profesională iniţială* corelate cu cerinţele actuale ale societăţii şi de pregătire a lor pentru activitatea extracurriculară, inclusiv pentru lucrul cu copiii capabili de performanţe înalte la matematică.

Se cere elaborarea unor recomandări privind crearea condiţiilor optime, în sistemul de pregătire iniţială a matematicienilor - viitoare cadre didactice, pentru autoinstruire şi autoreglarea demersului propriu în formarea competenţelor de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică.

4.La nivel de sistem nu există bază legală, recomandări metodice şi mijloace de stimulare pentru monitorizarea procesului de formare, devenire, dezvoltare şi perfecţionare a calităţilor profesionale ale viitorilor profesori de matematică prin sistemul de mentorat sau coaching în pregătirea lor pentru activitatea extracurriculară, inclusiv pentru lucrul cu copiii dotaţi şi cei capabili de performanţe înalte la matematică.

5. Se impune cercetarea impactului implementării resurselor integratoare de natură teoretică şi praxiologică din matematică, didactica matematicii şi psihopedagogie în procesul de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică şi validarea experimentală a unui Model Integrator de pregătire a lor pentru această activitate.

# 2. PRINCIPII ŞI CRITERII DE ELABORARE A MODELULUI PREGĂTIRII VIITORILOR PROFESORI DE MATEMATICĂ PENTRU ORGANIZAREA ŞI DESFĂŞURAREA ACTIVITĂŢILOR EXTRACURRICULARE

## 2.1. Dimensiunile procesului de pregătire iniţială a studenţilor matematicieni pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la disciplina de profil

Cadrul didactic, exercitându-şi funcţia, îndeplineşte următoarele roluri interdependente: elaborator de politici educaţionale, factor de decizie, controlor, evaluator, planificator, organizator, mobilizator, participant, resursă, supraveghetor / tutor / educator / regulator / coordonator, facilitator, negociator, cercetător, comunicator, lider [58, p. 60-62].

În literatura psihopedagogică se consideră că principala modalitate de operaţionalizare a conţinutului personalităţii profesorului şi unul din principalii factori de succes în procesul instructiv-educativ este aptitudinea pedagogică. N. Mitrofan stabileşte că aptitudinea pedagogică are trei componente: competenţa ştiinţifică, competenţa psihopedagogică şi competenţa psihosocială, care nu acţionează izolat, ci sunt integrate în structura personalităţii profesorului [66, p.152]. Autorul consideră că în privinţa competenţei ştiinţifice lucrurile sunt destul de clare, pentru că ea presupune o solidă pregătire de specialitate. Însă, acest fapt nu este suficient abordat de psihologi din lipsa instrumentelor de evaluare sau a cunoştinţelor în domeniu ale psihologilor. Dar nu este inutil să fie examinat în detalii.

Competenţa psihopedagogică cuprinde mai multe capacităţi ce ţin de formarea personalităţii elevului: capacitatea de a înţelege elevul, de a pătrunde în lumea lui interioară; capacitatea de a determina gradul de dificultate al materialului de învăţare pentru elevi; capacitatea de a face materialul de învăţare accesibil prin găsirea celor mai adecvate metode şi mijloace; capacitatea de a crea noi modele de influenţare instructiv-educativă, în funcţie de cerinţele fiecărei situaţii educaţionale.

Competenţa psihosocială cuprinde ansamblul de capacităţi necesare optimizării relaţiilor interumane: capacitatea de a adopta un rol diferit, capacitatea de a stabili uşor şi adecvat relaţii cu ceilalţi, capacitatea de a influenţa grupul de elevi, precum şi indivizii izolaţi, capacitatea de a comunica uşor şi eficient cu elevii, capacitatea de a utiliza adecvat puterea şi autoritatea, capacitatea de a adopta diferite stiluri de conducere.

S. Marcus [50] corelează conceptul de aptitudine pedagogică cu cel de competenţă didactică. Când se vorbeşte despre competenţa profesorului, se pune problema eficienţei predării şi a stabilirii unor criterii de eficienţă, accentul punându-se pe competenţa de a produce modificări observabile ale comportamentului elevilor.

Competenţa didactică, la rândul ei, este operaţionalizată într-un set de 5 competenţe specifice:

- competenţa cognitivă (abilităţi intelectuale, cunoştinţe);
- competenţa afectivă (atitudini);
- competenţa exploratorie (abilităţi praxiologice);
- competenţa legată de performanţă (savoir-dire, savoir-faire);
- competenţa de a produce modificări observabile ale elevilor [35, p.21].

Obiectivul major al învăţământului universitar este pregătirea specialiştilor de înaltă calificare, dar simultan în cadrul acestui sistem are loc educarea personalităţii, formarea profesioniştilor cu performanţe deosebite. De la cadrele didactice universitare se cere nu numai cunoaşterea disciplinei de predare ci şi pregătire managerială excelentă, deschidere spre schimbare, cunoaşterea psihologiei predării – învăţării – evaluării.

În ultimele decenii evoluţia cunoaşterii a devenit extrem de rapidă şi imprevizibilă şi multe clasificări sunt repuse în chestiune, iar frontierele tradiţionale dintre discipline sunt supuse la procese de transgresare. Din acest unghi de vedere va fi privit viitorul învăţământului pedagogic universitar.

La elaborarea standardelor educaţionale universitare, tradiţional, se ţine cont de succesiunea elementelor pe verticala: PROFIL – SPECIALITATE – SPECIALIZARE - DISCIPLINE DE STUDIU. Această formulă este corectă şi aplicabilă în procesul de pregătire a specialiştilor pentru economia naţională: a inginerilor, economiştilor, matematicienilor, fizicienilor, biologilor, etc. Însă această structură nu este eficientă la pregătirea specialiştilor care activează în sfera spirituală: cadre didactice, muzicieni, artişti plastici, diplomaţi, etc.

Specializarea, în cazul pregătirii cadrelor didactice, ţine de două aspecte: viitorul pedagog studiază bazele teoretice ale disciplinelor de predare în cadrul cursurilor şcolare şi disciplinele psihopedagogice. În instituţiile cu profil pedagogic rămâne necesară pregătirea atât a cadrelor didactice cât şi a cadrelor pentru instituţiile de cercetări ştiinţifice, numai astfel aceste specialităţi vor rămâne o provocare pentru persoane capabile de performanţe înalte. În acest proces interacţionează următoarele componente cu caracter specific: ştiinţele academice (savante) de profil; disciplinele de specialitate; didactica disciplinelor de specialitate; disciplinele psihopedagogice; disciplinele şcolare. Interacţiunea acestor componente poate fi modelată după cum este reprezentată în Fig. 2.1. [16, p. 7]:

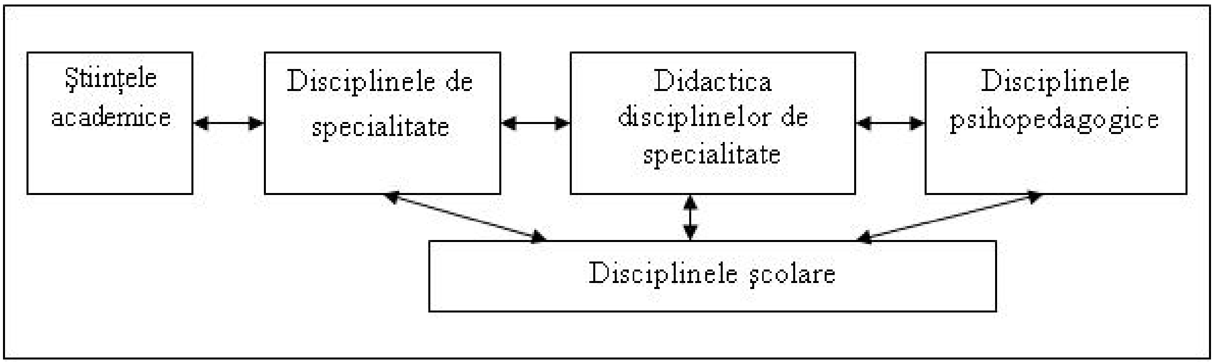



Fig. 2. 1. Interacţiunea componentelor procesului de pregătire a cadrelor didactice

Fenomenul de interferenţă şi transgresare în acest model se manifestă multidimensional. Disciplinele de specialitate în permanenţă se îmbogăţesc pe baza descoperirilor ştiinţifice în domeniu. Cadrele didactice universitare urmăresc sistematic schimbările din domeniu şi posibilităţile de aplicare practică a noilor descoperiri ştiinţifice, precum şi evoluţia în timp a curriculum-ului şcolar, conexiunea dintre ele fiind mereu la ordinea zilei în procesul de predare. Disciplinele de specialitate servesc drept bază teoretică pentru cursurile preuniversitare, ultimele treptat asimilând de aici conceptele moderne necesare şi accesibile contingentului din sistemul preuniversitar. Didactica disciplinei de studii este menită să abordeze diverse metode de tratare a conţinuturilor prin prisma respectării prevederilor legităţilor şi principiilor de predare–învăţare–evaluare într-un sistem concret de învăţământ. Disciplinele şcolare nu sunt direct deductibile din ştiinţele academice. „Ele se deduc din cunoştinţele universitare printr-un dublu proces de axiologizare şi didacticizare. Astfel, cunoştinţele şcolare sunt cunoştinţe în întregime reconstruite, specifice învăţământului." [242, p. ]

Disciplinele psihopedagogice sunt implicate în transpunerea didactică externă şi internă, în formarea competenţelor şi stabilirea performanţelor educaţionale.

Procesul de pregătire a cadrelor didactice la disciplinele de specialitate are un rol deosebit pentru proiectarea şi realizarea unor obiective educaţionale care nu întotdeauna sunt formulate în termeni de comportament observabil al studentului, dar sunt componente ale unui curriculum educaţional ascuns. Ele sunt în mare măsură intuitive, dar presupun un nivel înalt de conştientizare a fenomenelor şi faptelor şi facilitează realizarea prevederilor curriculum-ului manifest. Toate disciplinele descrise mai sus în mod necesar trebuie să funcţioneze simultan pentru ca pedagogul în devenire să demonstreze la finele studiilor prezenţa componentelor (savoir-dire, savoir-faire şi savoir-être) competenţelor profesionale şi a capacităţilor personale pentru demonstrarea performanţelor.

Din punct de vedere psihopedagogic organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică se bazează pe principiile educaţiei umaniste. Faptul că activităţile extracurriculare sunt organizate pe principiul alegerii proprii, permite să concluzionăm că educatorul va accepta majoritatea criteriilor educaţiei umaniste. „Decalogul” educaţiei umaniste după C. Rogers [53, p. 122] constă din următoarele teze:

1. Fiinţele umane au un potenţial înnăscut pentru învăţare.
2. Învăţarea semnificativă se realizează atunci când materia respectivă este percepută de student (elev) ca având o anumită relevanţă pentru scopurile sale.
3. Învăţarea care implică o schimbare în organizarea fiecăruia – în perceperea sinelui – este ameninţătoare şi tinde să fie respinsă.
4. Acele învăţări care ameninţă sinele sunt percepute şi asimilate mult mai uşor când ameninţările externe sunt minime.
5. Când ameninţarea sinelui este scăzută, experienţa poate fi percepută în mod diferit, iar învăţarea poate începe.
6. O mare parte a învăţării semnificative se dobândeşte prin acţiune.
7. Învăţarea este uşurată când elevul participă efectiv la proces.
8. Învăţarea voluntară, care implică întreaga persoană a celui care învaţă – sentimentele şi intelectul, - este cea mai durabilă şi cuprinzătoare.
9. Interdependenţa, creativitatea şi încrederea în sine sunt toate facilitate când autocritica şi evaluarea primează, iar evaluarea altora are o importanţă secundară.
10. Cel mai folositor tip de învăţare din punct de vedere social, în lumea modernă, îl constituie învăţarea procesului de învăţare („learning of the process of learning”), continua deschidere către experienţă şi acceptarea procesului de schimbare a sinelui.

Organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică necesită dezvoltarea competenţelor profesionale psihopedagogice de înaltă calitate a cadrelor didactice. Sistemul universitar de pregătire a cadrelor didactice trebuie examinat din perspectiva integrării componentelor de formare profesională centrată pe subiectul învăţării şi optimizarea căilor de alegere a traseelor proprii de instruire. În acest context este recomandată crearea condiţiilor pentru învăţarea independentă autoreglată şi dezvoltarea personalităţii studentului în condiţiile unui sistem deschis, care permite corecţia traseului individual ales de pregătire profesională. Derularea acestui proces va fi monitorizată în toate aspectele ce ţin de dezvoltarea competenţelor profesionale (conţinutul şi structura competenţelor) şi la toate etapele de devenire a profesorului de matematică. Bază metodologică pentru analiza procesului de pregătire a cadrelor didactice pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică au servit orientările axiologică, umanistică, sinergetică, acmeologică, tehnologică, centrarea pe subiect şi tehnologică.

1. ***Dimensiunea procesului din perspectiva academică a ştiinţei Matematica***

Disciplinele matematice au menirea să formeze la studenţi conceptele teoretice de bază pentru asigurarea înţelegerii fundamentelor ştiinţifice ale matematicii elementare. Noţiunea de „matematică elementară” este relativă. Felix Klein considera elementare conţinuturile accesibile elevilor [122 , p.11]. Acelaşi autor şi-a adus aportul în a-l face pe profesor să privească matematica şcolară de la înălţimea intereselor ştiinţifice fundamentale şi aplicative, argumentând că: „În procesul de comunicare cu elevii profesorul se ciocneşte adesea cu manifestarea nedumeririi din partea elevilor în ce priveşte necesitatea ca autorii de manuale să utilizeze un aparat matematic masiv, raţionamente destul de sofisticate, fără a descrie calea de a ajunge logic la aceste raţionamente”. În studiile sale Klein s-a străduit să dezvăluie ideile matematice în lumina evoluţiei lor istorice, să explice problemele din perspectiva încercărilor matematicienilor de a le rezolva, să îmbine interpretările geometrice cu formulele exacte, care în procesul de predare a matematicii stau alături. Klein afirma că expunerea matematicii în cursul şcolar trebuie să fie *psihologică*, dar nu *sistematică.* De aceea, în cursurile pentru profesori savantul a urmărit scopul să realizeze interconexiunea dintre cursul şcolar şi cel universitar, iar ascultătorilor acestor cursuri le sugera: „mai târziu, în procesul dumneavoastră propriu de predare, să păstraţi o legătură vie cu acea ştiinţă, care vi se predă aici din abundenţă”. În opinia sa, profesorul trebuie să fie diplomat, să ţină cont de aspiraţiile spirituale ale tinerilor, să poată trezi interesul elevilor, dar aceasta îi va reuşi, dacă el va expune lucrurile într-o formă expozitivă, accesibilă.

Procesul de pregătire a studenţilor pentru activitatea extracurriculară trebuie să aibă un caracter continuu. În activitatea de cercetare ştiinţifică la matematică se realizează în mare măsură acest proces. Pornind de la ideea că un bun profesor de matematică este şi un bun matematician, studentul, absolvent al specialităţii Matematica *va cunoaşte:*

- principalele metode de expunere a teoriilor matematice;
- principalele metode de raţionament matematic;
- structura logică a principalelor compartimente ale matematicii;
- elemente din istoria dezvoltării principalelor compartimente ale matematicii;
- particularităţile de aplicare a matematicii în diverse domenii.

*Studentul va fi capabil să:*

- adapteze pentru expunere la diverse niveluri conţinuturile matematice;
- depisteze greşeli de raţionament (logică) matematic;

- stabilească corelaţii între diverse compartimente ale matematicii pentru realizarea obiectivelor interdisciplinare şi transdisciplinare;
- modeleze matematic situaţii din diverse domenii;
- aplice soft-uri în rezolvarea problemelor matematice etc.

Lista de mai jos care nu pretinde a fi exhaustivă conţine un şir de competenţe specifice pentru activitatea în calitate de cercetător-matematician aşteptate la ieşire de la absolvenţii ciclului de licenţă la specialitatea Matematica:

1. Competenţe cognitive în matematica fundamentală.
2. Competenţe cognitive în matematica aplicată.
3. Competenţe în lecturarea textelor matematice.
4. Competenţe investigaţionale caracteristice domeniului matematicii.
5. Competenţe în asumarea responsabilităţilor.
6. Competenţe de ordin cultural.

Aceste competenţe sunt deduse parţial din lista competenţelor cheie caracteristice pentru o persoană dispusă să înveţe de-a lungul întregii vieţi propusă de UE.

În opinia noastră, abilităţile cognitive specifice matematice ale absolventului ciclului I al specialităţilor matematice presupun [226, p. 164]:

a) Capacitatea de sinteză şi interpretare a informaţiei;

b) Capacitatea de aplicare a conceptelor, teoriilor şi metodelor fundamentale de cercetare în elaborarea proiectelor;

c) Capacitatea de rezolvare a unor probleme-tip şi evaluarea concluziilor;

d) Analiza independentă a unor probleme matematice şi capacitatea de a expune şi a prezenta soluţiile găsite;

e) Capacitatea de a evalua probleme complexe şi de a expune demonstrarea şi rezultatele propriilor evaluări;

f) Iniţiativă în analiza şi rezolvarea problemelor.

Indubitabil, în activitatea creativă extracurriculară la matematică sunt necesare deschiderea pentru schimbare personală continuă, disponibilitatea pentru autoinstruire, capacitatea de a lectura literatura matematică.

***2. Dimensiunea procesului din perspectiva Didacticii Matematicii***

Într-un model al didacticii ştiinţei rolul teoriilor psihologice este unul de importanţă majoră. Teoriile învăţării sunt teorii psihologice, teorii ale dezvoltării personalităţii elevului şi ele stau la baza modelelor de instruire. Prin urmare în didactică sunt aplicate atât conţinuturile cât şi metodele teoriilor psihologice. Caracterul descriptiv al metodelor teoriilor psihologice permite să constatăm care este starea de lucruri în anumite momente ale procesului de instruire.

Pornim de la principalele *probleme de care se preocupă didactica* [54, p. 270-271]:

a) *Conţinutul procesului de învăţământ* (volumul şi calitatea cunoştinţelor):

- didactica priveşte criteriile pe baza cărora se efectuează selectarea şi ordonarea cunoştinţelor, astfel încât să fie în concordanţă cu cerinţele sociale şi să asigure integrarea individului în viaţa socială;

- didactica se concentrează asupra elaborării metodologiei necesare întocmirii planurilor de învăţământ, a programelor şi manualelor şcolare.

b) *Tehnologia desfăşurării procesului de învăţământ* (ansamblul principiilor, metodelor, procedeelor, mijloacelor şi formelor de organizare folosite în vederea transmiterii şi asimilării cunoştinţelor):

- didactica se centrează asupra problemei: cum poate fi transmisă o cantitate de informaţii pentru a putea fi învăţătă mai uşor şi mai eficient şi cum ar putea fi structurat un corp de cunoştinţe pentru a putea fi înţeles de către cel care învaţă?

c) *Asigurarea unui echilibru funcţional între predare şi învăţare*

- didactica este interesată de eficientizarea predării în vederea asigurării învăţării la elev; "îmbogăţită prin punctul de vedere social, didactica obligă profesorii să utilizeze forţe sociale susceptibile de a completa şi întări efectele comunicării pedagogice" (G. Leroy, 1974).

d) *Evaluarea randamentului procesului de învăţământ:*

- didactica priveşte eficienţa pedagogică a procesului de învăţământ, urmărind surprinderea corelaţiei dintre obiective, metodologie şi consecinţele asupra dezvoltării personalităţii, preconizând totodată măsuri de ordin pedagogic pentru sporirea randamentului acestui proces.

e) *Conducerea acţiunii didactice. Relaţia profesor – elev:*

- didactica se orientează spre cunoaşterea cât mai detaliată a rolurilor profesorului şi elevului, astfel încât să existe cooperare şi să se producă progres în învăţare.

Astfel, pentru a realiza cu succes activităţile extracurricluare la matematică, studentul *va cunoaşte:*

- metodologia formării noţiunilor matematice, a studierii afirmaţiilor matematice, rezolvării problemelor matematice de diverse tipuri;
- istoria, scopurile, problemele şi principiile de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică;
- formele, metodele şi particularităţile de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică;
- tematica şi principalele metode de abordare a conţinuturilor matematice cu caracter competitiv pentru diferite trepte, niveluri, profiluri;

- forme, metode şi particularităţile de pregătire a elevilor pentru competiţiile matematice: concursuri, turnire, olimpiade etc.
- specificul activităţii didactice în cazul studiului aprofundat al matematicii (dezvoltarea gândirii matematice, formarea competenţelor investigaţionale cu caracter teoretic şi aplicativ);

*Studentul va fi capabil să:*

- proiecteze diverse activităţi extracurriculare la matematică;
- organizeze diverse activităţi extracurriculare la matematică;
- să evalueze şi să autoevalueze activităţile extracurriculare la matematică;
- transpună conţinuturile matematice pentru examinarea în cadrul diferitor tipuri de activităţi extracurriculare la matematică;
- identifice gradul de complexitate a materiei pentru examinarea diferenţiată în cadrul activităţilor extracurriculare la matematică;
- utilizeze adecvat diverse mijloace pentru eficientizarea procesului educaţional extracurricular la matematică (mijloace multimedia, soft-uri, mijloace tehnice etc.).

Studierea anticipativă a procesului de pregătire a cadrelor didactice permite să afirmăm, în aspect prospectiv, obţinerea la finalizarea studiilor de specialişti care vor poseda următoarele competenţe:

1. Competenţe în transpunerea didactică a conţinuturilor matematice.
2. Competenţe în lecturarea textelor matematice.
3. Competenţe psihopedagogice referitoare la organizarea procesului de învăţare a matematicii de către persoane din diverse categorii de vârstă.
4. Competenţe de utilizare a tehnologiilor şi tehnicilor moderne de facilitare a învăţării matematicii, de cointeresare a elevilor în studierea matematicii.
5. Competenţe de comunicare cu copiii şi abilitatea de a motiva elevii pentru studierea matematicii.
6. Competenţe inovative.
7. Competenţe în proiectarea activităţilor educaţionale.
8. Competenţe în asumarea responsabilităţilor.
9. Competenţe în evaluarea activităţilor educaţionale.
10. Competenţe în evaluarea rezultatelor şcolare şi identificarea nivelului capacităţilor matematice ale elevilor.

***3. Dimensiunea procesului din perspectiva Psihopedagogiei***

Caracterul prescriptiv al teoriilor pedagogice constă în faptul că se enunţă reguli privind modul cel mai eficient de realizare a unui anumit nivel de cunoştinţe sau deprinderi şi este oferită o unitate pentru aprecierea critică sau pentru evaluare a oricărui mod particular de predare-învăţare. Caracterul normativ al acestor teorii denotă că se fixează criterii cu un înalt nivel de generalitate şi se dau algoritmi pentru realizarea lor. Evaluarea curriculum-ului disciplinelor psihopedagogice privind metodologia procesului de organizare şi desfăşurare activităţilor extracurriculare la matematică ne-a permis să distingem ca fiind necesară atingerea următoarelor niveluri de competenţe:

*la nivel de cunoaştere:*

- aplicarea limbajului specific psihopedagogiei şi utilizarea lui adecvată în acţiuni de caracterizare şi autocaracterizare;
- identificarea proceselor psihice de bază şi distingerea interacţiunilor dintre ele;
- evidenţierea componentelor structurale ale personalităţii şi descrierea modului lor de relaţionare;
- determinarea rolului particularităţilor individuale şi de vârstă în stabilirea profilului de personalitate;
- identificarea lumii interioare a elevilor, a nivelului dezvoltării intelectuale, a formelor de pronosticare şi diagnosticare justă a propriilor acţiuni care să le orienteze comportamentul;
- abordarea procesului din perspectiva centrării pe subiect.

*la nivel de aplicare:*

- utilizarea corectă a conceptelor de bază ale cunoaşterii psihologice;
- stabilirea importanţei proceselor, stărilor şi însuşirilor psihice pentru organizarea activităţii umane;
- aplicarea corectă a termenilor specifici limbajului psihologic prin distingerea sensului lor de cel din limbajul comun;
- folosirea cunoştinţelor de psihologie în reglarea comportamentului propriu şi a altor oameni;
- elaborarea diferitor modele de investigare psihologică a persoanelor;
- determinarea elementelor de unitate şi diversitate psihologică a personalităţii;

*la nivel de integrare:*

- evaluarea contribuţiei psihologiei în procesul propriei formări şi în special în pregătirea profesională;
- manifestarea respectului faţă de alte persoane, a empatiei, a receptivităţii şi abilităţilor în cunoaşterea psihologică şi stabilirea relaţiilor interpersonale;
- realizarea judecăţilor de valoare asupra unor enunţuri cu conţinut psihologic;
- elaborarea sintezelor tematice, evidenţiind domenii de aplicare practică a psihologiei;
- stabilirea relaţiilor de cooperare şi soluţionare a conflictelor dintre elevi;

- coordonare şi încurajare a elevilor în luarea deciziilor şi asumarea responsabilităţii;
- competenţe de ordin cultural;
- competenţe de ordin socio-moral.

Dintre competenţele specifice preconizate a fi atinse pentru asigurarea succesului procesului de organizare şi desfăşurare activităţilor extracurriculare la matematică le putem nominaliza pe cele cu referire la:

- particularităţile de vârstă ale elevilor cu referire la asimilarea cunoştinţelor matematice;
- specificul organizării şi desfăşurării activităţilor matematice la diverse profiluri, niveluri de aprofundare etc.;
- diverse stiluri de învăţare a matematicii;
- particularităţile de formare şi dezvoltare a gândirii matematice;
- particularităţile de formare şi dezvoltare a competenţelor creative;
- particularităţile de formarea a competenţelor de autoinstruire;
- particularităţile formării şi dezvoltării interesului faţă de matematică;
- bazele psihopedagogice ale motivaţiei elevilor pentru studierea matematicii.

În domeniul afectiv, motivaţional, atitudinal şi caracterial în învăţământul matematic s*tudentul va fi capabil să:*

- testeze elevii privind determinarea: stilurilor de învăţare; gradul de dezvoltare a gândirii matematice şi a competenţelor creative;
- creeze situaţii de învăţare ţinând cont de particularităţile sistemului nervos al elevilor şi care să contribuie la sporirea interesului, motivarea intrinsecă, dezvoltarea competenţelor creative etc.;
- formeze la elevi competenţe de autoinstruire şi autocontrol;
- să asigure decurgerea favorabilă a comunicării pedagogice în cadrul activităţilor extracurriculare la matematică;
- să realizeze adecvarea stilului didactic pentru vizual-spaţiali şi auditor-secvenţiali, în caz particular, pentru tipul de inteligenţă dominant.

Aceleaşi dimensiuni pe domenii pot fi distinse în abordarea procesului de instruire continuă a cadrelor didactice din perspectiva pregătirii şi implicării în organizarea şi desfăşurarea activităţii extarcurriculare la matematică. Aceste finalităţi, însă vor fi completate reieşind din anumiţi indicatori, pasibili de a fi incluşi în lista indicatorilor de evaluare a performanţelor profesionale ale cadrelor didactice şi manageriale din domeniul învăţământului preuniversitar.

## 2.2. Modelul Integrator de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică

Reformele procesului educaţional din ultimii 40 de ani au generat diverse abordări ale pregătirii cadrelor didactice. În acelaşi context a fost supusă schimbării şi didactica, care a început să-şi piardă accepţia tradiţională de fundament teoretic şi practic al procesului de predare-învăţare, primind un nou sens (dezvoltat în contextul educaţional din SUA), acela de abilitare a cadrului didactic de a pune în aplicare legile şi normele predării în consonanţă cu conţinuturile şi strategiile acesteia [44, p. 10], o interpretare din perspectiva unei discipline pedagogice, care se ocupă de studiul procesului de învăţământ într-un context educaţional deliberat şi organizat. Prestaţia unui cadru didactic este abordată multifactorial şi multicriterial. Diversitatea analitică a fenomenului de pregătire a unui profesor la disciplină susţine interpretarea de tip didactic a realităţii procesului de învăţământ. Din punct de vedere teoretic, este unanim recunoscut faptul că didacticele prezintă atât aspectul normativ cât şi aspectul descriptiv ale procesului de predare-învăţare. Perspectiva normativă are în vizor principiile şi procedurile de stabilire a scopurilor, stabileşte metodele de predare-învăţare, identifică problemele subiectului. Sarcina principală din punct de vedere normativ este realizarea planificării procesului educaţional. Aspectul descriptiv include analiza procesului real de predare-învăţare, a contextelor în care se realizează acesta, a experienţelor de învăţare ale studenţilor şi se bazează pe constatări, depistarea a ceea ce „este”, aspectul normativ - începe cu „ar trebui”.

Având în vedere delimitările conceptuale oferite de literatura de specialitate cu referire la noţiunile de paradigmă, teorie şi model, am optat la început pentru crearea unui model de instruire a viitoarelor cadre didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică, care ar reprezenta situaţia la etapa actuală.

În lucrarea [44, p.75] se afirmă că modelul sistemic al procesului de învăţământ introduce în ansamblul de elemente educaţionale (*aflate într-o strânsă interacţiune, astfel încât perturbarea unui element poate duce la dezechilibrarea întregului sistem*) rigoarea analizei, precum şi viziunea de ansamblu pe care o oferă sinteza, privilegind astfel proiectarea didactică [44, p. 92]. Calitatea sistemului rezultă din forţa, fineţea şi amplitudinea interacţiunii dintre componentele sistemului.

Analiza multiaspectuală a sistemului permite să evidenţiem caracteristicile lui specifice:

- Complexitatea;
- Dinamismul;
- Delimitarea spaţio-temporală;
- Deschiderea (interacţiunea cu mediul instrucţional);

- Reglarea/autoreglarea;
- Existenţa stărilor optimale;
- Conexiunea inversă.

Avantajele analizei sistemice constau în faptul că ea redă o perspectivă analitico-sintetică (bivalentă) şi perspectiva integrativă asupra procesului.

Componentele procesului de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară sunt cele caracteristice pentru un proces de învăţământ. În analiza acestui proces am ţinut cont de ce două abordări generale ale procesului de învăţământ propuse de Dan Potolea: abordarea structurală şi abordarea procesuală [62].

În *abordarea structurală* se configurează un model static de analiză a procesului de învăţământ, componentele fiind: finalităţi; conţinuturi; subiecţii procesului (profesor – elev/student: $S \leftrightarrow O$); metode, mijloace, strategii; forme de organizare; relaţiile dintre subiecţii procesului de învăţământ.

*Abordarea procesuală* realizează analiza dinamicii procesului de învăţământ la nivel de *faze* şi *procese*. *Fazele* ţin de consecutivitatea etapelor de realizare a procesului de învăţământ şi sunt următoarele: proiectare; implementare; evaluare. *Procesele* nominalizate în acest tip de analiză ţin de activitatea subiecţilor implicaţi în procesul de învăţământ: predare; învăţare; evaluare.

*Reprezentarea procesului* de învăţământ este o imagine mentală, o structură cognitivă, care marchează decisiv în plan acţional proiectarea, organizarea şi desfăşurarea activităţilor educaţionale.

Pregătirea pentru activitatea extracurriculară va fi un *modul integrator* în pregătirea cadrului didactic. În demersul nostru investigaţional am elaborat următorul Model Integrator de pregătire a cadrelor didactice pentru Activitatea Extracurriculară (MIAE):

Analizând situaţia actuală şi reieşind din scopurile activităţii extracurriculare, cadrul didactic trebuie:

1. să cunoască la un nivel satisfăcător matematica şi bazele moderne ale matematicii şcolare;
2. să fie capabil să efectueze cercetări în domeniul matematicii şi să coordoneze activitatea de cercetare a elevilor;
3. să proiecteze şi să implementeze proiecte ale activităţilor extracurriculare;
4. să selecteze şi să adapteze conţinuturi pentru activităţile extracurriculare;
5. să formeze şi să dezvolte motivaţia, atitudini şi aptitudini pentru studierea matematicii în concordanţă cu ajunsurile ştiinţelor psihopedagogice moderne.

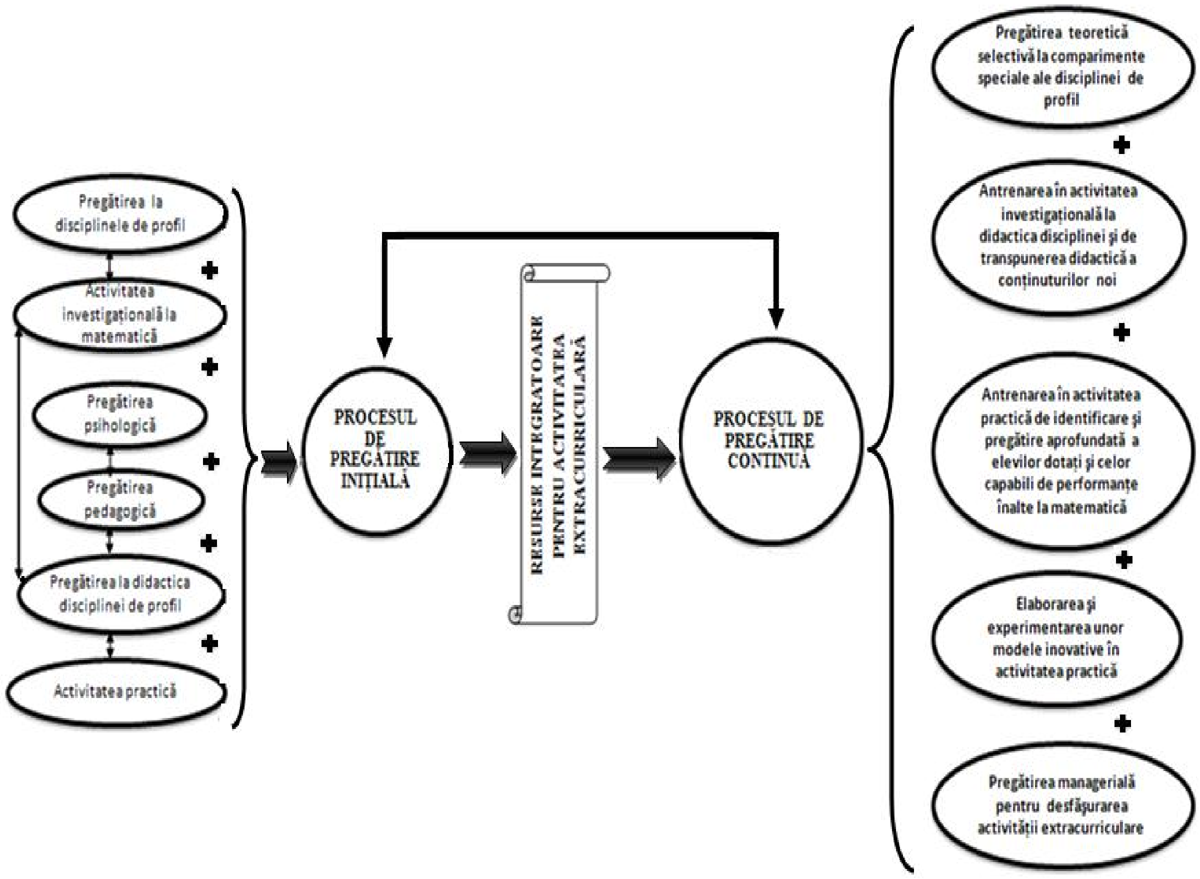



Fig. 2. 2. Modelul Integrator de pregătire a cadrelor didactice pentru AE (MAIE)

În realizarea acestor scopuri pregătirea matematică a cadrului didactic va fi pusă în acţiune de necesitatea de a adapta (transpune didactic) subiecte de matematică fundamentală pentru cursul preuniversitar de matematică. Transpunerea didactică a conţinuturilor este studiată în didactica matematicii. La transpunerea didactică şi proiectarea activităţilor extracurriculare se va ţine cont de particularităţile de vârsta ale elevilor, dar şi de particularităţile psihologice de formare a noţiunilor matematice cu diferit grad de abstractizare. Este evidentă în acest context necesitatea elucidării aplicabilităţii noilor cunoştinţe atât în matematică, cât şi în alte domenii. Astfel, apare necesitatea de a crea modele matematice ale realităţii descrise în probleme cu caracter practic sau teoretic din diverse arii curriculare, a studia relaţii şi dependenţe dintre parametrii unor fenomene, prin urmare, se cere efectuarea unor investigaţii, dar şi proiectarea unor scenarii de organizare a activităţii de cercetare efectuate de elevi. În acelaşi timp, noţiunile noi introduse vor fi descrise utilizând un context epistemologic şi istoric corespunzător. Pentru noţiunile şi teoriile noi introduse şi pentru cazurile de extindere sau aprofundare a cunoştinţelor curriculare se cere un context adecvat al situaţiilor de învăţare, reieşind din cerinţele pedagogice actuale.

Pentru cercetarea noastră am considerat esenţial faptul că didactica are o bază în filozofie, ea se centrează în special pe ceea ce ţine de individ şi se referă la componenta psihologică şi la metodica predării.

Modelul Integrator al procesului de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică conţine două componente: modulul ce ţine de pregătirea iniţială a cadrelor didactice şi modului de pregătire continuă. Aceste module sunt legate printr-o relaţie spaţio-temporală şi depind de factori sociali externi. Competenţele necesare pentru realizarea activităţii extracurriculare au un caracter integrator, reies din cererea pieţii muncii şi pot fi realizate în domeniile de interferenţă a disciplinelor prin implicarea în activitatea de cercetare ştiinţifico-didactică. Vectorii de dezvoltare a competenţelor în Modelul Integrator pot fi ilustraţi într-un model tridimensional de tip spirală, pe verticală orientând axa timpului. Nivelurile de cotitură pentru instruirea continuă vor fi determinate de spirala dezvoltării subiecţilor implicaţi în activitatea extracurriculară, de progresul în dezvoltarea tehnologiilor didactice, de identificarea unor noi componente structurale ale sistemului de învăţământ.

Analiza multiaspectuală a sistemului permite să evidenţiem caracteristicile lui specifice:

**Complexitatea**

Sistemul de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică este un sistem complex, deoarece se bazează pe un şir de componente vaste ca volum şi care ţin de domenii ştiinţifice diferite (matematică fundamentală; psihologie; pedagogie; didactica matematicii). Gradul de complexitate sporeşte reieşind şi din faptul că studentul trebuie să fie pregătit în toate aceste domenii atât din punct de vedere teoretic, cât şi practic - să cunoască metodologia cercetării şi să posede abilităţi de aplicare a metodelor de cercetare caracteristice pentru fiecare domeniu.

**Dinamismul**

Modelul propus caracterizează o mişcare evolutivă a sistemului, la bază fiind cererea societăţii pentru îmbunătăţirea continuă a sistemului de învăţământ matematic, dezvoltarea iminentă a matematicii, creşterea gradului de complexitate a domeniilor care solicită cunoştinţe matematice, pătrunderea matematicii în majoritatea domeniile de cercetare.

**Delimitarea spaţio-temporală**

Modelul Integrator de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică propus descrie o secvenţă care spaţial trebuie să se desfăşoare în universităţile care pregătesc cadre didactice. Temporal, modelul se referă la componentele procesului caracteristice pentru etapa actuală. Pregătirea la acest capitol nu este organizată în mod special la nivel de sistem. Se atestă disponibilitatea unor studenţi matematicieni de a-şi proiecta un traseu propriu de activitate independentă, care presupune pregătirea suplimentară la toate disciplinele enumerate în model în scopul dobândirii unor cunoştinţe cu caracter aplicativ, pentru a fi utilizate la clasă în perioada practicii pedagogice, pentru a proiecta o cercetare şi a desfăşura un experiment pedagogic de implementare a prevederilor proiectului şi a elabora o teză de licenţă sau de master. De regulă, această activitate a studenţilor se derulează începând cu semestrul V. Către această perioadă studenţii au studiat compartimentele de matematică fundamentală mai apropiate de cursul preuniversitar, au studiat pedagogia şi psihologia generală şi abia încep studierea cursului de didactica matematicii. Se conturează un sistem de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică în cadrul unui curs opţional. Cursul opţional este una din componentele prin care se realizează integrarea competenţelor profesionale pedagogice şi cele speciale matematice. Dar cursului trebuie să-i preceadă o implicare nemijlocită a studenţilor în activităţi extracurriculare începând cu primul an de studii pe parcursul urmării studiilor la ciclul de licenţă. În acest fel se va reuşi depăşirea anxietăţii ce ţine de comunicarea cu elevii dotaţi.

**Deschiderea (interacţiunea cu mediul instrucţional)**

Modelul Integrator constituie o parte componentă a modelului sistemic de instruire. Realizarea pregătirii cadrelor didactice în concordanţă cu Modelul Integrator (MIAE) propus va avea impact direct asupra eficientizării procesului de formare iniţială şi continuă.

Prezenţa resurselor integratoare ale MIAE în planul de studii presupune din partea studenţilor autoevaluarea competenţelor cognitive la matematica fundamentală, aprofundarea cunoştinţelor teoretice la pedagogie, la psihologie şi didactica matematicii, punându-se accentul pe specificul lucrului cu copii dotaţi la matematică, pe stilurile de predare-învăţare evaluare reieşind din abordarea diferenţiată şi individualizată a procesului instructiv, pe formele de organizare a activităţii nonformale. Un rol important în pregătirea cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică îl poate avea activitatea de mentorat.

**Reglarea/autoreglarea**

Sistemul de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică presupune mecanisme de reglare şi autoreglare similare celor de reglare şi autoreglare a sistemului de învăţământ. Reglarea din exterior va fi subordonată schimbărilor la nivel de sistem de învăţământ sau reieşind din cerinţele societăţii. Autoreglarea va fi dictată de noile descoperiri în matematică, de integrarea disciplinelor curriculare, de noile tehnologii educaţionale survenite din experienţa avansată a profesorilor practicieni.

**Existenţa stărilor optimale**

Starea optimală de existenţă a sistemului la ora actuală se conturează în jurul ideii oferirii unui curs opţional studenţilor matematicieni începând cu anul III de studii. Cursul va trebui să prevadă pregătirea teoretică, pregătirea practică şi implicarea proprie în simularea activităţilor extracurriculare de fiecare gen. Într-o variantă mai aprofundată poate fi abordată problema formării cadrelor didactice prin masterat şi/sau doctorat. Formarea competenţelor transdisciplinare şi a celor specifice disciplinei Matematica necesită realizarea integrării disciplinelor şcolare matematica, fizica, chimia, informatica, biologia. Asumarea de către şcoală a principiului integralizării implică şi reconstituirea sistemului de AE la matematică. Aceste reconsiderări duc la o integrare funcţională a procesului educaţional, astfel încât sunt redimensionate nivelurile performanţelor elevilor, dar şi spectrul de competenţe profesionale ale cadrelor didactice. Baza autoreglării o reprezintă microdeciziile instrucţionale proprii ale studentului, cele oferite de cadrele didactice universitare sau de mentori, şi vor purta caracter interactiv sau retroactiv. Centrarea pe subiectul învăţării în procesul educaţional va contribui la optimizarea procesului reglator, luând în considerare aspectele psihologice ale personalităţii de tip emoţional şi motivaţional. Mecanismele de reglare se vor baza pe faptul că subiecţii procesului educaţional pot găsi soluţii eficiente pentru fiecare individ implicat în procesul de formare, fără a fi influenţaţi ceilalţi, pe calea adaptărilor, reajustărilor, ameliorărilor.

**Conexiunea inversă**

La nivel de sistem este necesară receptivitatea cadrelor didactice universitare la semnalele verbale şi nonverbale venite din partea studenţilor şi a profesorilor practicieni pentru a obţine feedback, dar şi a structurilor responsabile de politicile educaţionale. Funcţiile principale ale feedback-ului sunt: funcţia de diagnostic, informativă şi evaluativă; funcţia de întărire imediată a rezultatelor pozitive; funcţia de identificare şi depăşire a unor dificultăţi. Existenţa unei strategii de dezvoltare a sistemului de activităţi extracurriculare la nivel de sistem de învăţământ ar ghida transformările în conformitate cu cerinţele moderne al sistemului, ar supraveghea sistemul şi ar optimiza utilizarea resurselor, ar încuraja încercările spontane de inovare. Nivelul cel mai înalt al performanţelor atinse de elevii dotaţi la concursurile organizate în mase largi constituie hârtia de turnesol a calităţii sistemului educaţional la disciplina în cauză. Caracteristicile de funcţionalitate şi deschidere ale Modelului Integrator presupun sensibilitatea la schimbarile din sistemul de învăţământ şi la inovaţiile cu caracter de tip teoretic şi praxiologic.

Reflecţiile practicienilor referitoare la funcţionarea sistemului şi la experienţele de succes în activitatea extracurriculară oferă şi ele material valoros pentru îmbunătăţirea lucrurilor. În acest sens este importantă editarea unei reviste specializate.

Într-un sistem se stabilesc diverse tipuri de relaţii între componente: cauză-efect; ierarhie; de corespondenţă; de compatibilitate; de compensare; de complementaritate; funcţionale. Analiza relaţiilor de funcţionare a sistemului de activitate extracurriculară la matematică a permis să constatăm diverse relaţii între componente: relaţii cauză-efect între pregătirea cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară şi realizarea sistematică a acestei activităţi în practică; relaţii cauză-efect între gradul de implicare al studenţilor în activitatea extracurriculară aflându-se pe băncile şcolii şi disponibilitatea lor de a se pregăti pentru realizarea acestei activităţi în calitate de cadre didactice; relaţii de ierarhizare se stabilesc între componentele sistemului de pregătire iniţială a studenţilor; între componentele ce ţin de disciplinele de studiu la pregătirea iniţială se stabilesc relaţii de complementaritate; didactica matematicii şi matematica fundamentală sunt în relaţii de compensare; relaţiile de compatibilitate între componenta ce ţine de pregătirea psihologică şi cea în domeniul didacticii matematicii are impact deosebit asupra realizării predării-învăţării centrate pe subiect, în acest context considerăm efectivă o relaţie funcţională la acest nivel şi anume – pregătirea în domeniul didacticii matematicii este dependentă funcţional de pregătirea matematică şi de pregătirea psihologică axată pe studierea proceselor psihice care contribuie la facilitarea studierii matematicii. Reieşind din specificul componentelor ce ţin de pregătirea pedagogică şi pregătirea în domeniul didacticii matematicii, între ele se stabilesc relaţii multiple cu caracter diferit, iar efectul lor este surprins în perioada practicii pedagogice a studenţilor şi în activitatea profesională a cadrelor didactice.

La fiecare dintre disciplinele incluse în calitate de componente de profil proiectate pentru etapa de finalizare a studiilor de licenţă se evidenţiază anumite :

I. Finalităţi;
II. Conţinuturi;
III. Subiecţii procesului (profesor – elev/student: $S \leftrightarrow O$);
IV. Metode, mijloace, strategii;
V. Forme de organizare;
VI. Relaţiile dintre subiecţii procesului de învăţământ.

Pregătirea cadrelor didactice pentru activitatea investigaţională este de o importanţă deosebită în sistemul de pregătire către AE, astfel, descrierea experienţei de dezvoltare a competenţelor ivestigaţionale la studenţii matematicieni şi a pregătirii lor pentru coordonarea activităţii investigaţionale a elevilor la disciplina matematica, a fost inclusă ca un compartiment separat al capitolului doi al prezentei lucrări.

Resursele integratoare vor fi cele care implică demonstrarea competenţelor specifice formate în cadrul pregătirii la compartimentele enumerate în calitate de componente ale MIAE. Modernizarea sistemului de învăţământ va conduce la schimbări în sistemul de pregătire a cadrelor didactice pentru AE. În opinia noastră resursele integratoare potenţiale sunt: elaborarea tezelor de licenţă şi de master; activitatea investigaţională în domeniu; cursuri opţionale; practica pedagogică; traseul individual de pregătire; elaborarea lucrărilor ştiinţifico-didactice; mentoratul; cursurile de perfecţionare în cadrul instruirii continue; masteratul specializat; studii de doctorat etc. .

Descrierea unor surse din resursele integratoare enumerate este dată în paragraful 2.3. Unele resurse nu au fost obiectul studiului nostru din motiv că ele necesită schimbări la nivel de sistem de învăţământ şi vor fi accesate treptat, odată cu modernizarea şi perfecţionarea procesului educaţional. Aceste resurse dispun de un potenţial înalt şi pot să contribuie la îmbunătăţirea calităţii învăţământului matematic la nivel de sistem.

## 2.3. Resursele integratoare ale procesului de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică

Valorile sociale şi culturale influenţează finalităţile educaţionale. Opţiunile pedagogice generale rezultate din axiologizare au o utilitate incontestabilă. În sistemele democratice este promovată atât excelenţa cât şi egalitarismul, indiferent de apartenenţa de rasă, gen, sau de statutul socio-economic.

În demersul de armonizare a intereselor societăţii şi a intereselor şi motivelor personale ale activităţii studenţilor viitori pedagogi se conturează următoarele obiective:

- Asigurarea pregătirii profesorului de matematică la un nivel înalt la disciplina de bază, în plan pedagogic, metodic şi general uman pentru a fi capabil să activeze în instituţii de divers profil.

- Asigurarea continuităţii în formarea personală a viitorului profesor de matematică: gândirea matematică; mecanismele funcţionale ale psihicii (percepţie, vorbire, memorie, mecanisme psihomotorii, autoreflecţia), voinţă, caracter, temperament, capacităţi.

- Formarea şi dezvoltarea personalităţii profesorului de matematică, adaptat social la profesia de pedagog: capabil să se autoaprecieze profesional; competent să comunice eficient; motivat şi interesat în autoperfecţionarea profesională.

- Formarea şi dezvoltarea abilităţilor metacognitive, a laturii active-creative a personalităţii profesorului de matematică, a măiestriei pedagogice.

Dintre resursele care s-au dovedit a fi eficiente în condiţiile actuale la formarea competenţelor de organizare şi desfăşurare a activităţii extraurriculare la matematică vom nominaliza: elaborarea tezelor de licenţă cu tematica dedicată activităţilor extracurriculare; parcurgerea cursului opţional "*Bazele metodologice ale activităţii extracurriculare la matematică*"; desfăşurarea activităţilor practice de proiectare şi organizare a activităţilor exatrcurriculare; simularea activităţilor exatrcurriculare; implicarea în activitatea investigaţională; participarea în tabere specializate; participarea la organizarea olimpiadelor.

Necesitatea de valorificare a resurselor integratoare ale activităţii extracurriculare la matematică a condus la orientarea studenţilor spre construirea propriului sistem de cunoştinţe. Aceasta presupune că studentul se bazează pe propriile cunoştinţe şi relaţionează informaţia deja existentă cu cea potenţială în felul său inedit, într-un mod unic, semnificativ pentru el. Studentul nu receptează pasiv informaţia, ci execută diverse sarcini academice pentru a asimila conştient cunoştinţele. Studentul se implică în activităţi de simulare sau aplică cunoştinţele asimilate anterior fără aportul profesorului, îşi organizează în baza celor studiate un nou sistem de cunoştinţe. În orice învăţare este importantă profunzimea cu care studentul îşi construieşte propriul sistem de cunoştinţe. Într-o învăţare profundă studentul se concentrează pe ceea ce este semnificativ, face legătura între cunoştinţele vechi şi cele noi, stabileşte relaţii dintre teoria studiată şi realitatea de zi cu zi, distinge diferenţe şi particularităţi ale fenomenelor, argumentează, organizează conţinuturi după anumite scheme logice. Există diferenţe în ce priveşte comportamentul studenţilor care îşi asumă un anumit grad de profunzime în construirea propriului sistem de cunoştinţe. La o învăţare profundă studenţii acceptă sarcinile de învăţare ca oportunităţi şi se concentrează asupra înţelegerii materiei şi a găsirii semnificaţiei celor studiate. Ei sunt motivaţi intrinsec, învaţă din interes pentru disciplină, învăţarea le aduce satisfacţie şi cred că materia studiată este potenţialmente utilă. Studierea profundă presupune reflectarea asupra informaţiei, formularea de ipoteze privind relaţionarea cu alte teme, lecturi suplimentare, elucidarea influenţei celor studiate asupra propriei persoane, implicarea activă în discuţii la subiectul studiat. Pentru formarea competenţelor de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare este important să nu admitem superficialitatea în învăţare. Mai puţin este preferabil şi comportamentul studenţilor care se axează pe învăţarea pentru performanţă [33, p.19].

Procesul de antrenare a studenţilor în pregătirea pentru activitatea extracurriculară, de regulă, demarează din dorinţa proprie a celor vizaţi şi se bazează pe explorarea zonei proprii de interes – a compartimentelor preferate de matematică.

Reieşind din alegerea făcută se recomandă să fie studiată literatura care se referă la informaţia de natură psihopedagogică aferentă tematicii. Pornim de la faptul că pentru a dezvolta subiecte specifice didacticii matematicii este necesară explorarea a cel puţin trei aspecte primordiale: conţinuturile matematice, aspectul filosofic (epistemologic) al noţiunilor şi conceptelor matematice respective, particularităţile psihologice de formare a cunoştinţelor, priceperilor şi deprinderilor la elevii din categoria de vărstă nominalizată în cercetare. Învăţarea eficientă tinde a fi autoreglată. Autoreglarea învăţării antrenează studenţii să-şi formuleze un ţel, să se angajeze în acţiuni de orientare spre realizarea scopului, să-şi monitorizeze comportamentele de învăţare, ajustându-le pentru a-şi asigura succesul. O învăţare eficientă este caracterizată de prezenţa unui model strategic, care se axează pe abilităţile studentului de a învăţa, pe motivaţia (dorinţa) intrinsecă şi pe capacitatea de autoreglare.

Observările asupra studenţilor matematicieni şi sondajul organizat special printre studenţii anilor I şi II de studii la specialităţile Facultăţii FMTI arată că doar circa 10% din numărul de studenţi posedă competenţă matematică. (Prin competenţă matematică avem în vedere proprietatea sistemică a subiectului, care se caracterizează prin: cunoaşterea profundă a disciplinei, experienţă personală orientată spre activitatea în domeniu, deschidere către îmbogăţirea permanentă, capacitatea de a obţine rezultate matematice însemnate şi de calitate.) Concluzia a venit şi în rezultatul examinării documentelor referitoare la rezultatele studenţilor matematicieni în cadrul sesiunilor I-IV la disciplinele de profil în ultimii 5 ani.

Realizarea pregătirii cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică este eficientă la aplicarea tehnologiei didactice care cumulează ansamblul metodelor, mijloacelor, al formelor de instruire şi organizare şcolară, modalităţile de structurare a obiectivelor şi conţinutului învăţământului, tehnicile de evaluare a eficienţei sale constituite în lumina normelor pedagogice prefigurate de teoria instruirii. La elaborarea proiectului de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară am reieşit din abordarea postmodernă a curriculum-ului, cu sensul de proiect pedagogic organizat pe baza unor principii care evidenţiază importanţa prioritară a competenţelor din care derivă obiectivele, care determină alegerea anumitor experienţe de învăţare, strategii de organizare a învăţării, mijloace de evaluare. În această abordare am definit obiectivul terminal al secvenţei educative a cărei realizare am urmărit-o „Formarea la studenţi (cadre didactice) a competenţei de organizare şi desfăşurare a activităţii extracurriculare la matematică”, pentru a ajunge mai apoi la programa din care au fost extrase elementele susceptibile să promoveze comportamentele selecţionate în prealabil.

Pornind de la perspectiva centrării pe cerinţele societăţii, am adoptat abordarea curriculară bazată pe transdisciplinaritate.

Adoptarea de tip transdisciplinar tinde progresiv către o ,,decompartimentare” completă a obiectelor de studiu implicate. Am pledat pentru abordarea integrată a curriculum-ului specifică trandiscilpinarităţii, care este centrată pe ,,viaţa reală”, pe problemele importante, semnificative, aşa cum apar ele în context cotidian şi aşa cum afectează vieţile diverselor categorii de oameni.

Conţinuturile şi competenţele se integrează în jurul unor probleme. În cazul nostru problema a fost: *Cum îi putem pregăti pe studenţi să devină profesionişti şi să fie apţi să dezvolte competenţele matematice ale elevilor la orice nivel?* Achiziţiile învăţării au sens doar prin contribuţia lor la succesul personal şi social al tinerilor în contexte culturale şi sociale concrete. Ca instrument pentru determinarea cadrului conceptual, este propusă *reţeaua transdisciplinară: matematica – didactica matematicii – psihologia – pedagogia.*

Argumentele de ordin teoretic în favoarea axării pe abordarea integrată au fost următoarele. Disciplinele formale clasice fuzionează şi îşi pierd capacitatea de a *dicta* modul de derulare a instruirii şi modelul de proiectare curriculară. Cunoaşterea pe care o dobândeşte individul este situată în contextul social, economic, politic şi cultural actual. Curriculum-ul integrat îi ajută pe studenţi să-şi aplice competenţele. Baza integrată a cunoaşterii conduce către o reconfigurare mai rapidă a informaţiilor în funcţie de nevoi. Perspectivele multiple conduc către o arie mai extinsă a cunoaşterii. Curriculum-ul integrat încurajează profunzimea învăţării şi o sferă mai largă de exprimare a acestui proces, promovează valori şi atitudini pozitive la studenţi.

La ora actuală, pregătirea teoretică integrată a studenţilor pentru activitatea extracurriculară la matematică se conturează în cursul opţional "*Bazele metodologice ale activităţii extracurriculare la matematică*", expus în Anexa 1. Acest curs are drept scop însuşirea de către studenţi a unui volum de cunoştinţe necesare pentru formarea unei concepţii integrate despre activităţile extracurriculare la matematică. Cursul opţional este funcţional şi flexibil, iar proprietăţile lui se încadrează în caracteristiceile enumerate pentru MIAE: complexitate; dinamism; delimitare spaţio-temporală; deschidere (interacţionează cu mediul instrucţional); stări optimale. În anexa 1 este prezentată una din variantele posibile ale acestui curs, care poate fi modificat în conformitate cu condiţiile concrete la etapa implementării lui.

Sistemul de activităţi extracurriculare întruneşte în sine recomandări generale privind organizarea, desfăşurarea, conţinutul activităţilor extracurriculare şi anume: conştientizarea importanţei şi necesităţii organizării şi desfăşurării activităţilor extracurriculare de rînd cu activităţile curriculare; studiul schimbărilor procesului instructiv şi adaptarea formelor de organizare a activităţilor extracurriculare la condiţiile actualităţii; analiza bunelor practici educaţionale de realizare a activităţii extracurriculare la matematică; implementarea noilor tehnologii didactice şi inovative în practica organizării activităţilor extracurriculare la matematică.

Cursul opţional *"Bazele metodologice ale activităţii extracurriculare la matematică"* este recomandabil de a fi organizat în formă de ore practice, traininguri şi seminare pentru a oferi posibilităţi mai largi pentru discuţii şi întrebări de ordin teoretic şi practic. Un rol important îl are activitatea individuală autoreglată a studenţilor, deoarece astfel este depăşit formalismul, se realizează o deschidere pentru comunicare pedagogică, se oferă studenţilor posibilitatea să manifeste independenţă şi activism în asimilarea conţinuturilor cursului. Expunem în Tabelul 1 principalele compartimente ale programului analitic corespunzător cursului opţional.

Tabelul 1. Tematica şi repartizarea orientativă a orelor cursului opţional *"Bazele metodologice ale activităţii extracurriculare la matematică"*

| ***Nr. d/o*** | ***Tematica orientativă*** | ***Curs*** | ***Seminar*** | ***Activitate individuală*** |
|---|---|---|---|---|
| 1. | *Psihopedagogia centrată pe cel ce învaţă: abordare conceptuală. Strategii de predare-învăţare-evaluare centrate pe cel ce învaţă.* | | *2* | *2* |
| 2. | *Educaţia diferenţiată. Premise psihopedagogice ale abordării diferenţiate a procesului educaţional la matematică.* | *2* | *2* | *2* |
| 3. | *Abordarea diferenţiată a procesului educaţional la matematică în funcţie de profil. Abordarea integrată a curriculumului la matematică. Valorificarea teoriei inteligenţelor multiple în educaţia matematică.* | | *2* | *4* |
| 4. | *Abordarea diferenţiată a procesului educaţional la matematică în funcţie de nivel.* | | *2* | *4* |
| 5. | *Bazele psihopedagogice ale lucrului cu elevii capabili de performanţe înalte la matematică.* | *2* | *2* | *2* |
| 6. | *Motivarea elevilor pentru însuşirea aprofundată a matematicii. Strategii de activare a potenţialului creativ al elevilor în cadrul orelor de matematică.* | | *2* | *2* |
| 7. | *Activitatea extracurriculară la matematică. Noţiuni generale. Rolul şi locul activităţii extracurriculare la matematică în procesul educaţional. Scopul şi sarcinile activităţii* | *2* | *2* | *2* |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *extracurriculare la matematică. Particularităţi de organizare a activităţii extracurriculare la matematică la diferite trepte ale învăţământului preuniversitar.* | | | |
| 8. | *Principii de organizare şi proiectare a activităţii extracurriculare la matematică. Forme de organizare activităţii extracurriculare la matematică. Metodologia organizării şi desfăşurării activităţilor extracurriculare la matematică.* | *2* | *2* | *2*<br><br>*4 ore training* |
| 9. | *Instituţiile de învăţământ complementar. Şcolile matematice şi centrele cu frecvenţa la zi şi frecvenţă redusă, taberele de matematică. Bazele psihopedagogice şi manageriale de funcţionare.* | | *2* | *2* |
| 10 | *Lectura matematică. Învăţarea autoreglată. Transpunerea didactică a conţinuturilor matematice.* | | *2* | *2* |
| 11 | *Dezvoltarea competenţelor investigaţionale ale elevilor în cadrul activităţilor curriculare şi extracurriculare la matematică. Metoda proiectelor în învăţământul extracurricular la matematică.* | *2* | *2* | *4* |
| 12 | *Competiţiile matematice. Concursuri nonstandard la matematică. Olimpiadele. Aspecte psihologo-pedagogice ale pregătirii elevilor către olimpiadele de matematică.* | | *2* | *4* |
| 13 | *Principalele tipuri de probleme de olimpiadă la matematică. Cerinţe faţă de sistemul de probleme pentru olimpiadele de matematică la diverse etape. Cerinţe faţă de rezolvarea problemelor de olimpiadă. Evaluarea lucrărilor participanţilor la olimpiadă.* | *2* | *2* | *2* |
| 14 | *Particularităţile de utilizare a TIC la organizarea activităţii extracurriculare la matematică. Învăţământul extracurricular matematic la distanţă. Presa matematică.* | | *2* | *4* |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | *Jocul ca formă de organizare activităţii extracurriculare la matematică. Rolul elementelor de matematica distractivă în dezvoltarea competenţelor matematice ale elevilor.* | | *2* | *2* |
| 16 | *Rolul elementelor de istoria matematicii în dezvoltarea competenţelor matematice ale elevilor.* | | *2* | *2* |
| | ***Total*** | ***12*** | ***32*** | ***46*** |

Competenţele profesionale care urmează a fi formate poartă un caracter transdisciplinar, prin urmare, la baza proiectării cursului au stat obiective cu caracter trans- şi interdisciplinar, domeniile şi ramurile conectate fiind matematica - didactica matematicii – pedagogia – psihologia. La alegerea formelor de instruire am pledat predominant pentru forma individuală de pregătire. Conexiunea inversă va avea rolul de diagnosticare a eficienţei, evaluarea parametrilor, întărirea imediată a rezultatelor pozitive, identificarea şi depăşirea dificultăţilor. Referitor la instruirea continuă şi lucrul cu elevii cursul opţional are impact cognitiv pe de o parte, iar pe de altă parte permite feedback-ul şi determină relaţiile cu mediul educaţional.

Studenţii motivaţi să se pregătească pentru activitatea extracurriculară sunt ghidaţi să-şi elaboreze un traseu didactic propriu pentru a acumula priceperile necesare. Activitatea individuală la acest capitol are scopul final elaborarea unei lucrări: referat, teză de an, teză de licenţă etc. Dificultăţile cu care se întâlnesc studenţii la elaborarea acesor tipuri de lucrări ţin de lipsa unor abilităţi, precum: transpunerea didactică a conţintutrilor; selectarea materialelor pentru aboradrea diferenţiată a predării în funcţie de nivel şi de profil; motivarea elevilor pentru studiul matematicii; stabilirea corelaţiei dintre conţinturile curriculare şi conţinuturile pasibile de a fi propuse pentru studiere în anumită clasă în cadrul activităţilor extracurriculare etc.

Problema selectării conţinuturilor învăţării de către profesor a devenit majoră la etapa contemporană, deoarece s-a produs răsturnarea priorităţilor în sistemul de finalităţi educaţionale. Repoziţionarea atitudinilor în capul listei de finalităţi conduce la necesitatea centrării procesului educaţional pe subiectul ce învaţă, astfel, cadrul didactic este impus mereu să ţină cont de caracteristicile psihocomportamentale ale elevilor, deci, să aleagă manuale de alternativă, ghiduri, materiale didactice adecvate, să elaboreze şi să implementeze curriculum-ul la decizia şcolii. Prin urmare, profesorul prelucrează şi adaptează permanent elemente de cunoaştere din ştiinţa fundamentalâ la posibilităţile, aptitudinile şi interesele elevilor, adică se ocupă de transpunerea didactică a conţinuturilor selectate, filtrate, reinterpretate.

Transpunerea didactică a informaţiei ştiinţifice într-un ansamblu de elemente de cunoaştere prelucrate şi adaptate la stadiile de vârstă ontogenetică a elevilor este preponderent prerogativa autorilor de manuale, profesorului revenindu-i misiunea de a proiecta metodologiile didactice şi de a armoniza mediul predării cu mediul învăţării. Procesul de transpunere didactică a conţinuturilor poate fi examinat din perspective psihopedagogice şi ale teoriei informaţiei. Evaluarea competenţei de prelucrare a informaţiei se va face ţinând cont de aspectele statistic, semantic, sintactic şi pragmatic, iar aprecierea competenţelor didactice va fi abordată reieşind din funcţiile profesorului în procesul de transpunere didactică.

Un set de competenţe specifice ce vizează transpunerea didactică a conţinuturilor matematice care urmează a fi format la viitorii profesori de matematică va consta din următoarele:

✓ Competenţa de evaluare a conţinuturilor ştiinţifice matematice, reieşind din criteriile de pertinenţă, în aspect cantitativ şi din perspectivele utilităţii, accesibilităţii, integralităţii.

✓ Competenţa de decodificare a semnificaţiei informaţiei ştiinţifice pentru expunerea logică corectă a ei.

✓ Competenţa de organizare a informaţiei din perspectiva unităţii dintre conţinut şi forma de prezentare.

✓ Competenţa de a concretiza competenţele, performanţele pe care trebuie să le demonstreze elevii şi standardele de evaluare a acestora.

✓ Competenţa de proiectare a metodologiei de predare-învăţare-evaluare.

Aceste competenţe sunt extrem de necesare în activitatea cu copii dotaţi la matematică, deoarece în procesul de pregătire a lor profesorul este nevoit să elaboreze strategii de studiere a celor mai diverse conţinuturi care se conturează în jururl unei probleme de concurs, a unor descoperiri recente în matematică, a unor aplicaţii ale matematicii în diverse domenii etc. [228].

Elaborarea tezelor de licenţă cu tematica legată de activitatea extracurriculară la matematică are aspecte generale, dar şi particularităţi. În procesul de ghidare a studenţilor pentru elaborarea tezelor de licenţă am găsit foarte utilă lucrarea lui Umberto Eco „Cum se face o teză de licenţă?”[31].

Autorul afirmă că a face o teză înseamnă: (1) a identifica un subiect precis; (2) a culege documente despre acel subiect; (3) a ordona aceste documente; (4) a reexamina la prima mână subiectul în lumina documentelor adunate, (5) a da o formă organică tuturor reflecţiilor precedente; (6) a face astfel încât cine citeşte să înţeleagă ce s-a voit a spune şi să fie capabil, la nevoie, să ajungă la aceleaşi documente spre a relua subiectul pe cont propriu.

Alegerea subiectului tezei de licenţă este de importanţă majoră. În opinia lui U. Eco patru reguli sunt evidente în cazurile în care se presupune existenţa unui candidat motivat pentru alegerea subiectului:

1) *Ca argumentul să răspundă intereselor candidatului* (să fie legat de tipul de examene date, de lecturile sale, de lumea sa politică, culturală sau religioasă);

2) *Ca sursele la care se recurge să fie reperabile*, adică accesibile material candidatului;

3) *Ca sursele la care recurge să fie manevrabile*, adică accesibile cultural candidatului;

4) *Ca tabloul metodologic al cercetării să fie accesibil experienţei candidatului.*

Autorul avertizează studentul să-şi aleagă o temă de o ţinută medie, acceptabilă de către toţi, pentru a nu nimeri în una din extremele: a realiza o teză panoramică sau una riguros monografică.

Alt pas important este alcătuirea sumarului tezei. Sumarul ca ipoteză de lucru permite a defini imediat ambianţa tezei. Pe măsură ce lucrarea va înainta, acest sumar ipotetic va fi constrâns să se restructureze de mai multe ori şi poate să asume o formă cu totul diferită. Umberto Eco recomanda sumarul să fie scris pe o mare coală de hârtie în căsuţe cu stiloul, însemnând titlurile cu creionul şi, încet-încet, ştergând şi înlocuindu-le cu altele, astfel încât să poată fi controlate diversele faze de restructurare. Un alt mod de a face sumarul-ipoteză este structura în arbore. În definitiv un sumar-ipoteză ar trebui să aibă următoarea structură:

1. Punerea problemei
2. Cercetările precedente
3. Ipoteza proprie
4. Datele pe care suntem în măsură să le propunem
5. Analiza lor
6. Demonstraţia ipotezei
7. Concluzii şi trimiteri la o lucrare succesivă.

Următoarea fază a planului de lucru este o schiţă de introducere. Ea nu-i altceva decât comentariul analitic al sumarului.

Elaborarea tezei se face *corelând mereu cu diversele puncte ale sumarului literatura ştiinţifică şi alte tipuri de documentare studiate.* Aceste corelări trebuie să fie clare încă de la început şi bine expuse. De fapt, vor trebui să fie de folos pentru a organiza referinţele interne. Referinţele interne folosesc şi la a arăta coeziunea întregii teze. O teză bine organizată ar trebui să abunde în referinţe interne. Dacă ele nu există, atunci înseamnă că fiecare capitol înaintează pe cont propriu ca şi când tot ceea ce s-a spus în capitolele precedente nu ar fi contat deloc.

O bună teză trebuie să fie discutată pas cu pas cu conducătorul ştiinţific, în limitele posibilului. Şi nu atât pentru a mitiza pe profesor, ci fiindcă a scrie o teză este ca şi cum ai scrie o carte, este un exerciţiu de comunicare care presupune existenţa unui public: iar conducătorul ştiinţific este unicul eşantion de public competent de care dispune studentul pe parcursul propriei lucrări.

Temele tezelor de licenţă consacrate activităţii extracurriculare la matematică pot fi formulate axându-ne pe ariile de interes ale studentului. Recomandările de bază pentru alegerea tematicii tezei de licenţă se referă la necesitatea de a-l îndruma pe student să se aprofundeze în formarea sa profesională. Din acest motiv se propune studenţilor să selecteze un subiect cu caracter formativ psihopedagogic care îl interesează, şi se pune scopul să valorifice ideile psihopedagogice prin intermediul conţinuturilor matematice adecvate. O listă de teme formulate de comun acord cu studenţii este expusă în capitolul 3 al prezentei lucrări.

Pe lângă faptul că subiectele pentru tezele de licenţă pot fi selectate la intersecţie de subdomenii (algebră – geometrie; geometrie – analiză matematică; aritmetică – algebră etc.) sau domenii ştiinţifice care utilizează aparatul matematic (fizică, chimie, informatică, astronomie, economie etc.) ele pot aborda subiecte legate de artă, sport, literatură, artă culinară, sociologie, biologie etc.

*Practica pedagogică* în instituţiile de învăţământ este o activitate prin care sunt testate calităţile profesionale ale viitoarelor cadre didactice. Investigaţia noastră are drept scop determinarea disponibilităţii studenţilor – viitori profesori de matematică de a se implica în elaborarea şi organizare activităţilor extracurriculare în cadrul practicii pedagogice şi în activitatea practică ulterioară. Investigaţiile au demonstrat că activitatea de proiectare, organizare şi desfăşurarea a activităţilor extracurriculare cu elevii are impact educaţional şi formativ asupra studentului-practicant. Parametrii evaluaţi în cadrul practicii pedagogice sunt:

Cunoştinţe factuale – informaţii de bază**:** cunoştinţe legate de terminologie; cunoştinţe legate de detalii şi elemente specifice procesului de proiectare, organizare şi desfăşurare a activităţii extracurriculare la matematică.

Cunoştinţe conceptuale (relaţiile dintre părţile unei structuri mai mari care fac ca acestea să funcţioneze împreună) îmbinarea psihologie-matematică-dm-pedagogie.

Cunoştinţe procedurale – cum să faci ceva: cunoştinţe despre abilităţi şi algoritmi specifice disciplinei; cunoştinţe despre tehnici şi metode specifice disciplinei; cunoştinţe despre criteriile de determinare a procedeelor adecvate.

Cunoştinţe metacognitive – cunoştinţe despre gândire în general şi gândirea personală în special: cunoştinţe strategice; cunoştinţe despre sarcinile cognitive, inclusiv cunoştinţe contextuale şi despre condiţionare adecvate; cunoştinţe despre sine (auto-cunoaştere).

La începutul practicii pedagogice, de fiecare dată, ne-am pus scopul de a stabili nivelul de performanţă în fiecare dintre domeniile vizate în modelul de pregătire a cadrelor didactice: am analizat capacităţile studenţilor la nivel de reproducere, înţelegere, aplicare, analiză a fenomenelor ce ţin de desfăşurarea activităţilor extracurriculare. Etapa de proiectare a activităţii extracurriculare a presupus demonstrarea capacităţilor de sinteză, folosirea ideilor pentru a elabora noi scenarii în conformitate cu categoria de elevi din clasa unde se desfăşoară practica pedagogică. Procesul de sinteză a constat în clasificarea tipurilor de activităţi extracurriculare practicate de profesorii din liceul dat, generalizarea unor principii de selectare a materialelor, de proiectare a secvenţelor activităţilor, reconstruirea unor scenarii luând la bază alte criterii de selectare a materialelor, alte conţinuturi, adaptarea lor pentru alte categorii de vârstă. Un rol important în transferul de idei şi proceduri de proiectare şi organizarea a activităţilor l-a avut reconstruirea scenariilor-model aplicate la alte discipline (fizica, informatica, chimia, biologia) şi a celor care abordează probleme la interferenţa domeniilor înrudite în cazul când studenţii îşi fac studiile la specialităţi duble.

Descriptorii elaboraţi pentru evaluarea nivelului de performanţă pe fiecare dimensiune au fost clasificaţi pe trei subnivele: subnivel elementar, subnivel mediu şi subnivel superior.

La etapa de constatare studenţii, de regulă, au demonstrat performanţe de subnivel elementar la compartimentele ce ţin de cunoştinţe factuale şi cunoştinţe procedurale. Scopul intervenţiei noastre în procesul de formare a competenţelor de organizare şi desfăşurare a activităţii extracurriculare a fost de a-i determina pe studenţi să purceadă la studierea profundă a tuturor particularităţilor acestei activităţi la matematică.

Urmărind studenţii-practicanţi în activitatea de proiectare a strategiei de organizare a propriei învăţări, am ajuns la concluzia, că studenţii au necesitatea de a se autocunoaşte. S-a depistat că un rol important în acest context îl are parcurgerea unor teste de determinare a stilului propriu de învăţare [33]. Parcurgerea unui traseu personal de învăţare la o disciplină va fi bazată pe cunoaşterea proceselor cognitive şi a elementelor de metacogniţie. La proiectarea scenariilor activităţilor extracurriculare în baza unei tematici stabilite, inclusiv în baza conţinuturilor unui compartiment recent studiat, a fost utilă examinarea minuţioasă a dimensiunii proceselor cognitive a taxonomiei lui Bloom revizuită care, ca şi cea originală, are şase capacităţi. Acestea sunt de la cea mai simplă până la cea mai complexă: (a) amintirea, (b) înţelegerea, (c) aplicarea, (d) analiza, (e) evaluarea şi (f) creaţia. În procesul studierii acestor materiale a fost completat următorul tabel:

Tabelul 2. Dimensiunea proceselor cognitive

| **Procese cognitive** | **Exemple** |
|---|---|
| **Amintirea – Producerea informaţiilor exacte din memorie** | |
| Recunoaşterea | |
| Reamintire | |
| **Înţelegerea – Formarea înţelesului pe baza materialelor educaţionale sau a experienţelor** | |
| Interpretarea | |
| Exemplificarea | |
| Clasificarea | |
| Rezumare | |
| Deducere | |
| Comparare | |
| Explicarea | |
| **Aplicarea – Folosirea unui procedeu** | |
| Execuţia | |
| Implementarea | |
| **Analiza – Descompunerea unui concept în părţi şi descrierea relaţiei dintre aceste părţi şi întreg** | |
| Diferenţierea | |
| Organizarea | |
| Atribuirea | |
| **Evaluarea – Emiterea de judecăţi pe baza unor criterii şi standarde** | |
| Verificarea | |
| Criticarea | |
| **Crearea – Combinarea mai multor elemente pentru a forma ceva nou sau recunoaşterea componentelor unei noi structuri** | |
| Generarea | |
| Planificarea | |
| Producerea | |

Ulterior aceste sarcini au fost aplicate la compunerea unor probe incluse în scenariile competiţiilor matematice. Includerea condiţiilor suplimentare legate de executarea rapidă şi fără erori a sarcinilor le-a oferit un caracter recreaţional, captivant, emoţional.

Un rol important în organizarea şi desfăşurarea activităţii extracurriculare la matematică îl are abordarea diferenţiată a predării-învăţării-evalurării. În Republica Moldova învăţământul este diferenţiat după profiluri abia la treapta liceală. Însă, în activitatea sa de zi cu zi profesorul de matematică este obligat să menţină interesul faţă de disciplină a tuturor elevilor. Din multitudinea de factori ce influenţează motivarea intrinsecă pentru studierea matematicii a elevilor mai puţin predispuşi pentru acest domeniu nu devin relevanţi decât o mică parte şi doar episodic. Este evident că nivelul competenţelor de care dau dovadă aceşti elevi, care ulterior aderă la profilul umanist, nu le permite să-şi orienteze interesele spre domenii legate de matematică. Învăţarea matematicii necesită un efort considerabil, reieşind din acestea, se cere perseverenţă şi disponibilitatea de a cheltui o cantitate enormă de energie. Sugestii referitoare la unele procedee de selectare a conţinturilor pentru diverse profiluri sunt oferite în lucrarea [69, p.202].

Canalizând studenţii în albia preferinţelor unor elevi pentru disciplinele umaniste, s-au căutat soluţii de motivare intrinsecă prin efectuarea cercetărilor istorico-lingvistice. În acest context a fost întreprins un demers metodic de a familiariza elevii cu unele probleme de ordin conceptual în teoria matematică. În scopul sporirii interesului este binevenită examinarea unor concepte cu caracter contradictoriu. În această ordine de idei este acceptabilă abordarea subiectelor privind structura logică a unor cursuri teoretice, paradoxurile teoriei mulţimilor, proprietăţile infiniţilor mari şi ale infiniţilor mici, etc.

Axarea pe aceste subiecte a condus la concluzia că la etapa de evocare este bine ca elevii să fie implicaţi în examinarea unor detalii privind subiectul dat, în scopul determinării punctului de plecare reieşind din propriile cunoştinţe. Contextul din care au fost sustrase informaţii referitoare la proprietăţile infiniţilor mari şi ale infiniţilor mici a fost următorul. Istoria omenirii este penetrată de ideea infinitului. Filozofia greacă încerca să explice problemele legate de noţiunile „infinit”, „continuitate”, „mulţime discretă” încă în secolul VI î.e.n. Aceste probleme i-au preocupat pe reprezentanţii şcolii din Milet. Anaximandr (610 – 546 î.e.n.) scrie despre aceste probleme în lucrarea „Apeiron” - „apeiron” simbolizând nemărginirea, materia primară, infinită în spaţiu şi timp, care posedă o infinitate de proprietăţi. Anaximen (588), fiind astronom şi urmărind mişcarea periodică a aştrilor cereşti, în tratatul său „Despre natură”, ajunge la ideea că infinitul este legat de mişcarea ciclică, de eterna mişcare a materiei. Anaxagor (500 – 428 î.e.n.) - în tratatul cu aceiaşi denumire scria: ”Printre mărimile mici nu există cea mai mică, dar micşorarea are loc permanent. ... La fel, întotdeauna există ceva mai mare decât ceva mare.” Aceste afirmaţii au permis matematicienilor să considere că Anaxagor a introdus noţiunile de infiniţi mici şi infiniţi mari potenţiali. Astfel, conchidem că Anaxagor consideră spaţiul posedând proprietăţi de continuitate. Faptul că şirul numerelor naturale este infinit a fost relatat de către Arhimede în tratatul său „Numărul grăunţelor de nisip”. Reprezentarea spaţiului ca mulţime de puncte, care sunt indivizibile a fost susţinută de şcoala pitagoreiană, ce a ţinut mereu să extindă concepţia mistică despre numerele întregi pentru a crea baza teoriei proprii despre lume. Descoperirea incomensurabilităţii mărimilor a demonstrat existenţa unor deosebiri esenţiale între natura discretă a numerelor raţionale şi cea de continuitate a mărimilor geometrice. Această descoperire a condus la o criză în fundamentarea noţiunilor matematice. Aceste dificultăţi au fost foarte bine ilustrate în „aporiile” (paradoxurile) lui Zenon (sec.V î.e.n.). Din cele 45 de formulări până în timpurile noastre au ajuns doar 9, care au fost reproduse în „Fizica” lui Aristotel. Iată unele dintre ele:

<u>Dihotomia (împărţirea în două).</u> În acest paradox Zenon afirmă că mişcarea este imposibilă, deoarece pentru ca un corp să parcurgă distanţa de la A la B corpul trebuie să parcurgă ½ din această distanţă, apoi - $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$, dar şirul acesta este infinit, prin urmare nu se poate ajunge la punctul B nicicând. Acest paradox prezentat ca o capcană logică, constă în faptul că suma unui şir infinit de termeni este finită.

<u>Săgeata.</u> Zenon demonstrează că este imposibilă mişcarea unei săgeţi lansate de un arc, deoarece se consideră că în fiecare moment de timp nedivizat, săgeata este în stare nemişcată. Deoarece mişcarea este suma unui şir infinit de momente indivizibile, în care săgeata nu se mişcă, rezultă starea de repaos a săgeţii.

<u>Ahilles şi broasca ţestoasă.</u> Curajosul şi rapidul Ahilles nu va ajunge nici odată o broască ţestoasă, care se află înaintea lui chiar şi la o distanţă mică, afirmă Zenon. Demonstraţia se rezumă la faptul că în timp ce Ahilles parcurge distanţa iniţială *d* dintre el şi broască, ultima reuşeşte să se departajeze de acest punct la o distanţă egală cu raportul *d/n*, unde *n* exprimă de câte ori viteza lui Ahilles este mai mare decât viteza broaştei. Până Ahilles parcurge distanţa *d/n*, broasca reuşeşte să parcurgă încă $d/n^2$, astfel oricât nu s-ar apropia Ahilles, între el şi broască mereu va rămâne o oarecare distanţă.

Situaţia descrisă în paradoxul despre Ahilles şi broasca ţestoasă este formulată în culegerea de probleme pentru clasa 5, autor V.Raischi [65], în calitate de problemă şi denumită „Sofismul lui Zenon”. Reproducem acest text: „La un concurs din antichitate participă Ahilles supranumit „cel iute de picior” şi greoaia broască ţestoasă. Ahilles a dat un avans de 1km broaştei, care se mişcă de 10 ori mai lent decât el. După Zenon, Ahilles nu poate ajunge broasca ţestoasă deoarece până Ahilles parcurge 1km, broasca parcurge 1hm; apoi până Ahilles parcurge 1hm, broasca parcurge 1dam ş.a.m.d. În felul acesta broasca ar fi mereu înaintea lui Ahilles. Din experienţa noastră însă, noi ştim că Ahilles ajunge şi chiar întrece broasca. La ce distanţă de la punctul de plecare Ahilles ajunge broasca?”

Paradoxurile de acest tip sunt depăşite cu uşurinţă în modelul matematic contemporan al mişcării continue. La depăşirea lui rolul principal îl are axioma lui Arhimede care se îndeplineşte în câmpul numerelor reale: pentru orice numere reale *a,b>0* există un număr natural *n* astfel încât *an>b.*

Această proprietate este o consecinţă din şirul de proprietăţi ale mulţimilor Q şi R, studiate în cursul de analiză matematică. Rezumatul privind extinderea mulţimii numerice Q este următorul. Din proprietăţile algebrice şi de ordine ale mulţimilor Q şi R se deduc toate regulile calculului algebric şi cu inegalităţi. Se mai spune că mulţimile Q şi R sînt *corpuri comutative total ordonate*. Ceea ce deosebeşte mulţimea R de mulţimea Q este *axioma lui Cantor a marginii superioare*, care stă la baza obţinerii tuturor rezultatelor profunde ale analizei matematice: *Orice submulţime nevidă majorată* $C \subset R$ *admite un cel mai mic majorant.* Acest element este un număr real unic, numit margine superioară a lui C, şi este notat *sup C.* (O submulţime $C \subset R$ se numeşte majorată (sau mărginită superior) dacă există cel puţin un număr *k* astfel încît pentru orice $x \in C$ să avem $x \le k$. Un astfel de număr k se numeşte majorant al lui C.)

Un exemplu elocvent este următorul. Fie date două mulţimi: $A = \{x \in Q | x^2 \le 3\}$ şi $B = \{x \in R | x^2 \le 3\}$. Ambele mulţimi sunt majorate de numărul 2, dar şi de 1,8; 1,74; 1,733 etc. Luînd succesiv aproximaţiile prin adaos ale numărului $\sqrt{3}$ vom găsi majoranţi din ce în ce mai mici ai mulţimilor A şi B. Se poate arăta că $\sup A = \sqrt{3}, \sup B = \sqrt{3}$. Deoarece A este submulţime a mulţimii Q iar B – a mulţimii R, rezultă că $\sqrt{3} \notin A$, dar $\sqrt{3} \in B$, adică $\sup A \notin A$, iar $\sup B \in B$.

Cu axioma lui Cantor este încheiată definiţia axiomatică a mulţimii numerelor reale: mulţimea R cu operaţiile şi relaţiile de ordine definite pe ea constituie un corp comutativ total ordonat, în care orice submulţime nevidă majorată are margine superioară, aparţinînd lui R. Se pun în mod natural două întrebări: Există o mulţime R care posedă aceste proprietăţi? Pot exista mai multe mulţimi satisfăcînd proprietăţile descrise? La prima întrebare se răspunde prin extinderea mulţimii Q. În acest sens se cunosc construcţia zecimală a lui Weierstrass, construcţia lui Dedekind şi construcţia lui Cantor.

Rezultatul numit proprietatea (axioma) lui Arhimede (287-212 î.e.n.), este formulat în unele manuale şi astfel: Pentru orice $x \in R$ există un număr întreg unic *n* astfel încît $n \le x$<n+1 . Acest număr este numit partea întreagă a lui *x* şi este notat $[x]$. [37]

Subiectul referitor la paradoxurile teoriei mulţimilor a fost abordat în modul descris în continuare.

Matematica îşi are începuturile în lucrările scrise aproximativ 25 de secole în urmă. Posibilitatea de a prezenta numeroase rezultate într-o formă strict deductivă având la bază un număr extrem de mic de propoziţii a fost realizată în decurs de veacuri. Acest proces a fost însoţit de dezbateri atât în cercurile matematicienilor cât şi cel al filozofilor. Problemele mai des discutate ţin de obiectul de studiu al matematicii, de apariţia noţiunilor matematice, de rolul limbajului matematic, de relaţia cu practica cotidiană, de potenţialul metodelor abstracte în soluţionarea chestiunilor din ştiinţele naturale şi cele tehnice. În procesul de căutare a adevărului Aristotel apelează la aşa numitele „universalii” – calităţi generale, abstracţii de la obiectele reale. Conform spuselor sale „... în ştiinţele despre natură este necesar să fie determinate elementele iniţiale, fundamentale. Calea firească este, de la ceva bine înţeles şi evident pentru noi, la ceva şi mai evident şi clar de la natură.” Considerând proprietăţile sesizate cu ajutorul organelor de simţ, Aristotel le acordă un statut independent şi le înalţă în grad de noţiuni ideale. În particular, după părerea sa, Pământul este situat în centrul lumii şi conţine toată apa, el este înconjurat de spaţiul ocupat de aer; mai sus, până la Lună, domină spaţiul umplut cu o substanţă numită foc, care, de fapt este un amestec de aer şi foc. Aceste substanţe există datorită celor patru elemente fundamentale: rece, cald, uscat şi umed. Elementele se îmbină în perechi în şase moduri diferite, dar două dintre perechi (rece-cald, uscat-umed) nu sunt compatibile. Celelalte patru perechi dau naştere altor patru elemente: Pământul – combinaţie a uscatului cu rece, apa – umed şi rece, aer – cald şi umed, focul – cald şi uscat. Elementele nu sunt veşnice – materia în permanenţă se schimbă şi trece dintr-o formă în alta. Adevărata cunoaştere apare din experienţa senzorială prin intermediul intuiţiei şi a abstracţiei. Ideile abstracte nu există în afara minţii omeneşti. Matematica reprezintă o ştiinţă abstractă cu legităţile şi particularităţile ei. De-a lungul anilor matematica a suferit trei crize esenţiale. Încercări de a soluţiona problemele apărute au întreprins atât matematicienii cât şi filozofii.

Crizele au fost provocate de *antinomii* (din greacă άντινομία – contrazicere în legislaţie) sau paradoxuri, situaţii când într-o teorie sunt demonstrate două propoziţii ce se exclud reciproc. Spre deosebire de sofisme, care reprezintă nişte raţionamente false care se ascund după o greşeală bine mascată, antinomiile mărturisesc despre neajunsuri profunde în teoria examinată. Depistarea antinomiilor conduce la restructurarea întregii teorii şi serveşte drept stimulent pentru noi descoperiri.

Cu introducerea în ştiinţă a noţiunii de mulţime infinită „actuală” au fost necesare schimbări esenţiale în logica matematică. Această noţiune a stat la baza crizei legate de teoria mulţimilor.

Primul paradox a fost depistat de însăşi Cantor, întemeietorul teoriei mulţimilor, în 1895 şi acest fapt l-a comunicat într-o scrisoare lui Hilbert. Independent de Cantor acest paradox a fost descoperit de matematicianul italian Buralino-Forti (1861- 1931), astfel paradoxul a ajuns să-i poarte numele. Acest paradox este formulat în teoria lui Cantor în felul următor: o mulţime complet ordonată a tuturor numerelor ordinare conţine un număr ordinar, care este mai mare decât oricare din numerele ordinare, care alcătuiesc această mulţime, deci mai mare decât orice număr ordinar. Introducând acest număr în mulţimea tuturor numerelor ordinare, obţinem o nouă mulţime a tuturor numerelor ordinare, care include în sine şi mulţimea creată anterior. Acest procedeu poate fi aplicat de un număr infinit de ori. Dar aceasta conduce la concluzia că nu există nici un număr ordinar.

Paradoxul Rassel este un *paradox logic*. Cercetăm proprietatea D a mulţimilor: mulţimea X posedă proprietatea D atunci şi numai atunci, când $X \notin X$, adică X nu se conţine în sine însăşi ca element. Prin T notăm mulţimea tuturor mulţimilor X, pentru care rae loc proprietatea D. Vom clarifica acum care dintre afirmaţii este justă : $T \in T$ sau $T \notin T$ . Fie $T \in T$ , dar conform definiţiei pentru T se îndeplineşte proprietatea D, adică $T \notin T$ . Prin urmare este necesar ca $T \notin T$ . De aici rezultă că mulţimea T posedă proprietatea D, deci $T \in T$ .

Pentru a evita acest paradox se poate consideră că astfel de mulţime nu există, dar în acest mod se iveşte o contradicţie nouă: de pe poziţiile teoriei „naive” a mulţimilor orice proprietate B a unui grup de obiecte determină o mulţime C, a obiectelor care posedă proprietatea dată. Prin urmare în exemplul de mai sus nu este exact descrisă proprietatea D. Dar atunci care sunt criteriile de descriere exactă a proprietăţilor? Care proprietăţi definesc o mulţime şi care nu? Problema descrierii exacte a proprietăţilor a fost rezolvată satisfăcător prin crearea unui limbaj logico-matematic strict determinat. În ce priveşte criteriile de utilizate la evidenţierea claselor de proprietăţi ce definesc mulţimile, la etapa actuală problema este departe de a fi rezolvată. Una din căile de evitare a paradoxurilor teoriei mulţimilor este abordarea axiomatică, în particular mai efectiv s-a dovedit a fi sistemul axiomatic Zermelo – Fraenkel.

Un subiect foarte interesant, capabil să stârnească curiozitatea elevilor, se conţine în problema despre taurii lui Helios, pomeniţi în „Odiseea” lui Homer: ,,Calculează-mi, prietene, numărul vitelor cornute ale lui Helios, dar sa te gîndeşti serios, daca ai pretenţie de om de ştiinţa. Cîte pasc în câmpiile Siciliei, insula cu 3 unghiuri? Ele se împart în 4 cirezi de culori diferite. Unele sunt albe ca laptele, altele de un negru strălucitor, altele roşii, iar ultimele bălţate. Fiecare cireada are un număr mare de tauri şi sunt unii faţă de alţii în acest raport:

1. Cei albi sunt atâţia cât $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{3}$ împreună din cei negri, plus toţi cei roşii;

2. Cei negri sunt cât $\frac{1}{4}$ şi $\frac{1}{5}$ din cei bălţaţi, plus toţi cei roşii;

3. Cei bălţaţi sunt $\frac{1}{6}$ şi $\frac{1}{7}$ din taurii albi, plus numărul total al celor roşii;

4. Vacile cele albe sunt $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ din întreaga cireadă neagră;

5. Cele negre $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ din toata cireada bălţată, cînd vacile pasc la un loc cu taurii;

6. Cele bălţate fac $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ din cireada vitelor roşii;

7. Cele roşii fac cit $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ din toata turma albă.

Dacă-mi spui numărul cornutelor Soarelui, separat numărul taurilor bine hrăniţi şi pe cel al vacilor, şi cîte din fiecare culoare, nu vei fi considerat nepriceput sau neiscusit în calcule, dar nu vei fi socotit nici printre învăţaţi. Căci iată ce se mai ştie despre aceste vite ale lui Helios:

8. Atunci cînd mulţimea taurilor albi se uneşte cu aceea a celor negri, ei formează împreuna o figura pătrată, iar marea lor întindere umple toata suprafaţa insulei cu trei unghiuri.

9. În fine, dacă taurii roşii se aşează pe rânduri, împreună cu cei bălţaţi, începând cu unu şi crescând succesiv cu cîte unu, ei formează o figură de forma unui triunghi, fără să fie printre ei tauri de altă culoare şi fără să se remarce absenţa acestora. Dacă vei afla şi vei putea arăta care sunt aceste numere atunci înaintează glorios şi triumfător, prietene, convins fiind că eşti un om desăvârşit în această ştiinţă.” [10]

Problema, probabil, a fost formulată de Arhimede. Ea a fost scrisă ulterior în versuri greceşti. Cuprinde 22 de distihuri, hexametri alternînd cu pentametri. În antologia greacă problemele scrise în versuri sunt numite epigrame. Problema a fost descoperită de celebrul scriitor şi dramaturg Gotthold E.Lessing în 1773 într-un manuscris şi era însoţită de cuvintele: ”Problema pe care a propus-o Arhimede într-o scrisoare către Eratosthene din Cyrene, acelora din Alexandria care se ocupă cu asemenea lucruri!”. Problema se încheia cu o „scolie” – o notă care urma după text în care se arăta rezultatul: 4031126560, dacă lăsăm la o parte ultimele două condiţii. Subiectul descris poate conduce la discuţii privind: scrierea numerelor fracţionare la greci (fracţii alicote); numerele poligonale (figurate); tipurile de sisteme de ecuaţii şi metodele de rezolvare; ecuaţia lui Pell, etc.[95]. Vom menţiona că este impunător numărul savanţilor care au fost cointeresaţi de a soluţiona problema dată: Struve – tatăl şi fiul, G.Hermann, J.Fr.Wurm, A.Amthor, G.H.N.F.Nesselman, A.J.H.Vincent, J.L.Heiberg, etc. [26, 78, 121, 160].

Acumularea experienţei profesionale pedagogice are loc prin asimilarea de procedee noi şi depăşirea situaţiilor dificile. Cercetătorii susţin că lipsa dinamicii în valorificarea de către subiecţi a situaţiilor pedagogice noi este un indicator al conservării (stagnării) experienţei profesionale [167].

Activitatea îndelungată lasă amprente asupra activităţii profesionale de zi cu zi şi îl poate conduce pe profesor la starea de oscilare între anxietate şi plictiseală. Gradul de angajare a fiecăruia în şlefuirea propriului talent, capacitatea de a accepta schimbarea, de a percepe noi alternative, îl poate încuraja sau descuraja. Valorificarea continuă a unor idei şi procedee didactice prin prisma propriei experienţe şi reflexia vizavi de impactul lor asupra elevilor constituie un act creator pentru pedagogi, indiferent de experienţa lor profesională. Adoptarea şi personalizarea strategiei de creare şi implementare sistematică a situaţiilor pedagogice cu caracter captivant permit profesorului să remodeleze procesul instructiv prin intervenţii imediate în momentele derulării evenimentelor nefavorabile asimilării cunoştinţelor de către elevi.

O activitate didactică are caracter captivant, dacă ea conţine elemente neobişnuite, neaşteptate, comice, surprinzătoare care trezesc interesul elevilor, contribuie la crearea unei atmosfere emoţionale pozitive de învăţare. Renumitul pedagog Constantin Uşinski clasifica elementele cu caracter captivant în „interne” şi „externe”. În primul caz este vorba despre utilizarea rezervelor interne ale disciplinei, în cazul al doilea - despre intervenţia din exterior (elementul captivant nu are legătură nemijlocită cu tema lecţiei).

Materialele pot fi captivante: după formă; după conţinut; după formă şi conţinut. Se solicită ca în cadrul lecţiei materialele cu caracter captivant să se refere la tema studiată şi să fie orientate spre activizarea procesului de gândire al elevilor.

În Tabelul 3 sunt expuse tipuri de procedee cu caracter captivant utilizabile la lecţiile de matematică şi în cadrul activităţilor extracurricualre [71, pag. 22].

În continuare este expus un set de instrucţiuni pentru studenţi şi profesori elaborat cu scopul de „a învăţa creativitatea prin compunerea de sarcini cu caracter captivant:

1. Selectaţi un capitol sau o temă din manual.
2. Scrieţi o listă cu sarcini obişnuite, care sunt propuse în manual.
3. Luaţi prima sarcină din lista alcătuită şi încercaţi să formulaţi pentru fiecare sarcină obişnuită la această temă câte o sarcină captivantă de primul tip.

Tabelul 3. Procedee cu caracter captivant utilizate în studierea matematicii

| **Procedee de captivare prin formularea sau prezentarea sarcinii** | **Procedee de captivare prin structura sarcinii** | **Procedee de captivare legate de organizarea şi structura procesului de executare a sarcinii** |
|---|---|---|
| Introducerea unui erou „matematician” care propune probleme, rezolvă probleme, inventează trucuri, scamatorii, sau a unui „nematematician”, care comite greşeli, ajunge la paradoxuri. | Inversarea sarcinii – avînd componentele şi rezultatul, să se restabilească operaţiile. | Compunerea unor propoziţii false în baza propoziţiilor adevărate cunoscute (folosind operaţiile mintale: analogia, inducţia, deducţia, compararea, generalizarea, specificarea, trecerea la limită, etc.) |
| Expunerea unor istorioare ce conduc la formularea independentă a unei afirmaţii matematice. | Contradicţie – într-o afirmaţie sunt prezente proprietăţi contradictorii. | Întrebări fulger. |
| Aplicarea analogiei pentru studiul simultan al unor noţiuni şi a proprietăţilor lor. | Interdicţii – la rezolvarea problemelor sau demonstrarea afirmaţiilor se introduc restricţii. | Codarea informaţiei. |
| Prezentarea unor scheme, desene, formulări neobişnuite. | Modificarea imaginii. | Stabilirea adevărului propoziţiei „dintr-o privire”. |
| Alegerea, selectarea unor obiecte sau afirmaţii. | Stabilirea greşelilor într-un lanţ de raţionamente. | „Inventează!” |
| Carcasă logică. | Studiul cazurilor deosebite (general, particular, cazuri limită). | Reconstituirea obiectelor. |
| Sarcină cu puncte de suspensie. | Provocarea greşelilor. | Săgeata (iteraţiile, recurenţa). |
| Corespondenţă. | Distrugerea stereotipurilor. | Utilizarea momentelor de joc: situaţii de joc, jocuri matematice, aflarea strategiei câştigătorului. |
| Clasificarea obiectelor după diverse principii, formularea ipotezelor şi stabilirea valorii lor de adevăr. | Utilizarea unor metode noi de raţionament, necunoscute până la moment. | Rezolvarea problemelor dintr-un domeniu, prin metode din alt domeniu, demonstrarea unei afirmaţii prin mai multe metode. |

4. Scrieţi sarcinile formulate.

5. Luaţi a doua sarcină din lista cu tipurile sarcinilor captivante şi alcătuiţi la această temă pentru fiecare sarcină obişnuită o sarcină de tipul al doilea.

6. Scrieţi sarcinile formulate.

7. Continuaţi până epuizaţi toate tipurile de sarcini captivante pentru fiecare dintre sarcinile obişnuite.

8. Dacă nu aţi reuşit să compuneţi sarcini captivante de fiecare tip, nu disperaţi, cu siguranţă aţi acumulat un set de procedee utile.

9. Păstraţi aceste materiale, probaţi-le în clasă, îmbunătăţiţi-le, acceptaţi modificările propuse de elevi sau de colegi.

10. Puteţi modifica algoritmul: pentru prima sarcina obişnuită alcătuiţi toate tipurile de sarcini captivante, apoi treceţi la cea de a doua sarcină obişnuită şi alcătuiţi toate tipurile de sarcini captivante, continuând până se epuizează sarcinile.

11. Dacă aţi reuşit să completaţi, într-o măsură oarecare, tema cu sarcini captivante, încercaţi să formulaţi sarcini noi îmbinînd procedeele câte 2-3 într-o idee.”

Modul de organizare a procesului instructiv devine captivant în cazurile când: elevii participă la dirijarea procesului instructiv jucând un anumit rol (de exemplu, Toma necredinciosul); elevii semnalizează starea lor emoţională cu ajutorul unor „mutrişoare” stilizate; elevii îşi exprimă în scris părerea vizavi de o activitate, lecţie sau disciplină, despre personalitatea profesorului sau despre sine, răspunzând la un şir de întrebări sau completând o anchetă.

Sarcinile cu caracter captivant pot fi prezentate sub formă de întrebări, probleme, exerciţii cu caracter captivant. Caracterul captivant al problemelor poate fi în modul de prezentare a problemei, în enunţul ei, în metoda de rezolvare, în răspunsul neobişnuit, în posibilitatea de a introduce elemente de joc în procesul de rezolvare.

Pentru studenţi, dar şi pentru cadrele didactice sunt recomandate cîteva sugestii utilizate cu scopul de a conferi un caracter captivant activităţilor la matematică:

1. Prezentarea informaţiei captivante cu caracter istoric sau epistemologic;

2. Prezentarea neobişnuită a problemei;

3. Prezentarea neobişnuită a metodei de rezolvare a problemei;

4. Rezolvarea problemelor dintr-un domeniu, prin metode din câteva domenii pentru realizarea legăturilor inter- şi transdisciplinare;

5. Clasificarea obiectelor după anumite principii, formularea ipotezelor şi stabilirea valorii lor de adevăr;

6. Căutarea greşelilor în raţionamente;

7. Probleme remarcabile;

8. Demonstrarea afirmaţiilor prin diverse metode;

9. Codarea informaţiei;

10. Efectuarea lucrărilor practice cu caracter captivant.

Practica demonstrează că umorul poate fi considerat un mijloc de activare a procesului educaţional.

Simtul umorului este o particularitate a stilului individual al unui profesor. Utilizarea umorului în procesul de învăţământ permite profesorului să îmbunătăţească climatul psihologic în clasă, să atragă atenţia elevilor de la unele teme de învăţare, pentru ai motiva să studieze matematica Oamenii de ştiinţă consideră binevenită introducerea elementelor de umor în manuale, sub formă de poveşti, desene vesele, glume, umoresce şi bancuri. Cercetările efectuate demonstrează că mulţi profesori au frică de a aplica la o lecţie secvenţe de umor. În activitatea pedagogică umorul are caracter multifuncţional. Funcţiile utilizării umorului în activitatea pedagogică sunt următoarele: informativ-cognitive, emoţionale, motivaţionale, comunicative, de dezvoltare, de diagnostic şi de reglementare. Umorul matematic are unele particularităţi specifice. Dezvoltarea simţului umorului şi formarea competenţelor de utilizare a umorului ca un mijloc de activare a procesului de asimilare a competenţelor matematice au o contribuţie directă în motivaţia intrinsecă a elevilor pentru activităţile matematice extracurriculare. Simtul umorului este o particularitate individuală a unei persoane, dar în aspect didactic, putem indica anumite condiţii, care să contribuie la îmbunătăţirea procesului de predare-învăţare a matematicii. Se recomandă studenţilor practicanţi să colecţioneze materiale la rubricile "Matematicienii zâmbesc", epigrame despre matematiceni, aforisme, istorii amuzante privind descoperirea unor fapte cu caracter matematic etc. [227]

*Astfel s-a stabilit că structura traseului de formare a competenţelor necesare pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică depinde de pregătirea matematică a studentului şi de implicarea sa în edificarea propriului sistem de cunoştinţe (teoretice şi practice) matematice, psihopedagogice şi didactice.*

Practica pedagogică oferă prilej de a iniţia studenţii în teoria şi practica de diagnosticare a dotării elevilor la matematică. Aprecierea nivelului de dotare a subiectului este complexă: nivelul de dezvoltare a capacităţilor intelectuale; aptitudinile creative; dezvoltarea psihosocială şi fizică; alte talente; corelaţia dintre anumite funcţii şi capacităţi în structura psihicului subiectului concret. Printre subiectele recomandate pentru a fi studiate la nivel de informare factologică putem enumera: teste de inteligenţă pentru copii; modalităţi de investigare a gîndirii şi a limbajului; **s**tudiul procesului gîndirii: creativitate, productivitate, ingeniozitate, gîndire critică; probe pentru investigare de tip performanţă; metode de investigare a funcţiei mnezice; cauzele care provoacă atenţia involuntară; stimuli pentru atenţia involuntară (intensitatea, schimbarea şi intermitenţa, caracterul neobişnuit, neaşteptat, stimulii care au o anumită importanţă (fie pozitivă, fie negativă) pentru pentru activitatea, preocupările, starea generală a organismului şi a scoarţei cerebrale); atenţia voluntară etc.

Uneori subiect de investigaţie servesc compartimentele ale matematicii, care adesea au fost studiate superficial de actualii studenţi şi sunt tabu în cadrul practicii pedagogice, alteori poate demara o cercetare privind predarea unor compartimente la nivel propedeutic pentru a semnala prin exemple fapte şi concepte mai dificile, şi a facilita studierea lor sistematică.

De exemplu, atenţia mai scăzută faţă de studierea poziţiei reciproce a dreptelor, dreptelor şi planelor şi a planelor în cursul liceal de matematică a condus la evidenţierea unor conţinuturi care pot fi studiate la nivel intuitiv în clasele mici de gimnaziu. Stereometria are un rol deosebit de important în formarea imaginaţiei, a reprezentărilor spaţiale, a gândirii logice la elevi. În geometrie logica strictă este în strânsă corelare cu reprezentările intuitive. Adesea fapte evidente, percepute intuitiv, necesită raţionamente sofisticate la demonstrare. A.D. Alexandrov considera că în predarea geometriei este necesară prezenţa a trei elemente: logica, imaginaţia şi realitatea. În conformitate cu prevederile Curriculum-ului la matematică în clasa a VI-a (în Republica Moldova) se studiază cele mai simple corpuri geometrice şi unele proprietăţi ale lor la nivel de recunoaştere. Ulterior se revine la elemente de stereometrie în clasa a IX-a şi în clasele de liceu, urmând să fie introdusă axiomatica geometriei, cunoştinţe despre poziţia reciprocă a dreptelor şi planelor în spaţiu, despre poliedre, corpuri rotunde şi transformări geometrice în spaţiu.

Din experienţa de predare în grupele de studenţi admişi la studii universitare în baza şcolii medii de cultură generală (pregătirea către examenul de bacalaureat la matematică) şi din analiza literaturii referitoare la diagnosticarea nivelului de formare a reprezentărilor spaţiale la absolvenţii gimnaziilor şi liceelor am constatat prezenţa unor lacune foarte serioase la acest capitol. Situaţia este departe de a fi perfectă chiar şi în rândurile studenţilor specialităţilor matematice la toate cursurile. Problemele de stereometrie nu sunt un „punct forte” şi pentru mulţi dintre elevii participanţi la olimpiadele republicane, dovadă sunt rezultatele foarte joase la problemele de stereometrie la olimpiada republicană de matematică în clasa a IX-a în anul 2008.

Reieşind din aceste constatări am întreprins o activitate de elaborare şi implementare a unor proiecte didactice pentru activităţi practice în clasa a VI-a, care prevedea formarea cunoştinţelor elementare despre poziţia reciprocă a dreptelor şi planelor în spaţiu, despre măsurarea unghiurilor şi distanţelor dintre drepte, drepte şi plane, plane, utilizând în calitate de modele poliedrele regulate simple. În elaborarea acestor lucrări au fost atraşi studenţii matematicieni de la anul trei în perioada practicii de iniţiere în specialitate. Implementarea acestor lucrări a avut loc în grupa de elevi ai clasei a VI-a din cadrul Centrului de instruire a copiilor dotaţi la matematică „ICAR” din municipiul Chişinău. Lucrările practice conţineau sarcini ce ţin de utilizarea obiectelor real existente, precum şi confecţionarea unor corpuri spaţiale, a unor machete ce permit ilustrarea şi măsurarea unghiurilor şi distanţelor dintre drepte, dintre drepte şi plane, dintre plane.

Olimpiadele la matematică organizate pe etape constituie un prilej pentru a iniţia studenţii în lucrul cu copiii dotaţi. Atragerea studenţilor în observarea pasivă a activităţii de pregătire a elevilor către olimpiade, în selectarea materialelor pentru diverse etape ale acestor competiţii, le permite să cunoască şi să probeze diverse aspecte ale tehnologiilor didactice aplicate în procesul de organizare şi desfăşurare a olimpiadelor. Conţinutul programului de pregătire pentru olimpiadele de matematică din Republica Moldova este adus la cunoştinţa studenţilor la începutul primului stagiu de practică pedagogică. Unele teme care sunt incluse în programul de pregătire către olimpiade pot deveni subiecte pentru tezele de licenţă. Programul de pregătire pentru olimpiadele de matematică din Republica Moldova, elaborat la comanda Ministerului Educaţiei pentru anul de studii 2008-2009, este prezentat în Anexa 2. Studenţii vor face cunoştinţă în perioada practicii pedagogice şi cu unele principii generale de selectare a problemelor pentru olimpiadele la matematică. Drept exemplu pot servi principiile formulate de liderul lotului olimpic al Rusiei N.Agahanov [84], adaptate şi pentru desfăşurarea olimpiadelor la noi în ţară:

1. Ierarhizarea problemelor se va face în ordinea creşterii gradului de dificultate: prima problemă trebuie să fie accesibilă pentru circa 70% din participanţi, problema a doua – pentru mai mult de 50%, problema a treia - pentru circa 20%, iar problema a patra – pentru cei mai buni dintre participanţii olimpiadei.

2. Diversitatea tematică a problemelor: în setul de probleme vor fi incluse probleme de geometrie, algebră şi combinatorică; în clasele primare în mod obligatoriu vor fi probleme de aritmetică şi probleme „de logică”; în clasele superioare este preferabilă includerea problemelor din stereometrie, teoria numerelor, trigonometrie, analiza matematică. Sunt acceptate şi chiar recomandate problemele cu caracter interdisciplinar.

3. Este obligatoriu ca problemele să fie absolut noi pentru participanţi. În cazul când problemele sunt selectate din ediţii tipărite sau din reţeaua Internet, comisia metodică trebuie să utilizeze resurse necunoscute participanţilor.

4. Nu se admite includerea problemelor corespunzătoare unor capitole care nu au fost studiate până la momentul desfăşurării olimpiadei în clasa respectivă conform curriculumului.

Criteriile de apreciere a lucrărilor elevilor sunt:

1. Problemele de olimpiadă poartă un caracter creativ şi admit câteva metode de rezolvare diferite. La evaluare vor fi apreciate şi avansarea parţială în găsirea soluţiilor (de exemplu, cercetarea unui caz particular printr-o metodă care permite rezolvarea integrală a problemei, demonstrarea unei leme utilizate în rezolvare, aflarea unui exemplu doveditor etc.). Sunt posibile erori esenţiale sau neesenţiale, care nu influenţează corectitudinea structurii logice a raţionamentelor, sau greşeli de calcul. Punctajul final va fi acordat ţinând cont de aceste erori.

2. În corespundere cu regulamentul de desfăşurare a olimpiadelor la matematică la etapa republicană fiecare problemă se apreciază cu 7 puncte. Punctajul se oferă conform prevederilor expuse în Tabelul 4.

Tabelul 4. Evaluarea lucrărilor elevilor participanţi la olimpiadă de matematică

| ***Punctajul*** | ***Corectitudinea rezolvării*** |
|---|---|
| 7 | Rezolvare completă corectă. |
| 6-7 | Rezolvare corectă. Sunt erori nesemnificative care nu influenţează corectitudinea rezolvării. |
| 5-6 | Rezolvarea este corectă în ansamblu, cu erori neesenţiale sau lipseşte cercetarea unor cazuri particulare. |
| 4 | Este corect soluţionat unul din două cazuri, cel mai dificil. |
| 2-3 | Sunt demonstrate afirmaţiile auxiliare, care contribuie la soluţionarea problemei. |
| 0-1 | Sunt cercetate cazuri particulare, dar lipseşte rezolvarea sau rezolvarea este greşită. |
| 0 | Rezolvare incorectă. |
| 0 | Lipseşte rezolvarea. |

Orice rezolvare corectă este apreciată cu 7 puncte. Nu vor fi scăzute puncte pentru faptul că rezolvarea este prea lungă sau pentru faptul că ea diferă de rezolvările din culegerile de probleme sau de alte rezolvări cunoscute juriului. Corecţiile sau tăieturile din rezolvare nu sunt motiv pentru coborârea punctajului.

Orice text al rezolvării, oricât de voluminos, care nu demonstrează avansarea în rezolvarea problemei va fi apreciat cu 0 puncte.

La etapele pe şcoală, de sector, raională este preferenţial sistemul de apreciere cu 10 puncte.

3. Învingătorii vor fi determinaţi în baza rezultatelor în ordinea descreşterii punctajului. Lista învingătorilor este stabilită de organizatorii etapei respective a olimpiadei. Numărul învingătorilor nu va depăşi 45% din numărul total de participanţi. Învingători vor fi toţi participanţii care au acumulat punctajul maxim. Juriul poate stabili pentru fiecare clasă mai mult de un învingător.

Ordinea desfăşurării etapei şcolare a olimpiadei din Rusia este:

Etapa şcolară a olimpiadei are loc în luna octombrie pentru elevii claselor a 5-11 şi se desfăşoară într-o singură zi. Timpul rezervat rezolvării problemelor va fi: pentru elevii claselor 5-6 – două ore academice; pentru elevii claselor 7-8 – trei ore academice; pentru elevii claselor 9-11 – patru ore academice.

Setul de probleme va consta din 4-6 probleme cu diferit grad de dificultate. Este preferabil ca problemele să cuprindă conţinuturi din majoritatea compartimentelor matematicii, studiate de elevi la momentul desfăşurării olimpiadei. Problemele mai dificile incluse se vor referi la conţinuturile studiate la orele facultative.

Se recomandă ca problemele pentru etapa şcolară să fie selectate de comisia metodică raională sau municipală.

Ordinea desfăşurării etapei municipale (raionale) a olimpiadei:

Etapa municipală a olimpiadei are loc în noiembrie-decembrie pentru elevii claselor a 6-11 şi se desfăşoară într-o singură zi. Timpul rezervat rezolvării problemelor este patru ore astronomice.

Setul de probleme va consta din 4 probleme cu diferit grad de dificultate. Este obligatoriu ca setul de probleme să conţină exemple din temele deja studiate conform curriculumului. Primele două probleme trebuie să fie accesibile majorităţii elevilor.

Se recomandă ca problemele pentru etapa municipală să fie selectate de comisia metodică regională.

Problemele pentru etapele şcolară şi municipală sunt alcătuite în conformitate cu prevederile curriculumului. Se admite includerea problemelor la tematica prevăzută de programele cercurilor şi facultativelor.

Taberele specializate de matematică reprezintă etape finale ale activităţii extracurriculare la sfârşit de semestru sau de an de studii. În mod ideal studenţii trebuie să aibă posibilitatea să participe la cel puţin o tabără specilaizată pe parcursul anilor de studii. Aceste tabere oferă posibilitatea de a cunoaşte mai bine elevii, de a aprofunda cunoştinţele lor la matematică, de a explora etc.

Cadrul didactic implicat în organizarea taberei specializate (inclusiv studentul practicant) trebuie să se manifeste ca manager, profesor de matematică, psiholog, educator, animator etc.

### 2.4. Formarea competenţelor de cercetare ştiinţifică în cadrul activităţilor extracurriculare la matematică

Esenţa fenomenului competenţei investigaţionale este caracterizată de totalitatea cunoştinţelor, priceperilor, deprinderilor şi modurilor de activitate, care permit persoanei să se poziţioneze în rolul de cercetător în raport cu mediul înconjurător, orientate spre sporirea eficienţei de recunoaştere şi soluţionare a situaţiilor problemă referitoare la un obiect sau fenomen arbitrar din mediul înconjurător, utilizând în acest scop diverse surse teoretice şi empirice de informare. [83, p.10].

În opinia L. Abdulova modelul de formare a competenţei investigaţionale include scopul, etapele, componentele, metodele şi mijloacele de cercetare. Etapele cercetării sunt: pregătitoare; de transformare; de autorealizare. Metodele investigaţionale sunt: observarea directă; proiectele; reflecţia etc. Mijloacele utilizate într-un demers de cercetare pot fi: testare; referinţe; ancheta; dezbateri; rezolvare de probleme; jocuri de rol; conferinţe.

Nivelurile de formare a competenţei investigaţionale în opinia aceluiaşi autor sunt: imitare pasivă; explorare activă; intensiv-creativ.

Autoarea evidenţiază condiţiile de formare a competenţei investigaţionale la studenţii colegiului din perspectiva sinergetică: a examina procesului educaţional ca un sistem neechilibrat, cu caracter probabilistic din punctul de vedere al rezultatului activităţii şi care include propria sursă de dezvoltare; a considera drept obiectiv al pregătirii profesionale a studenţilor dezvoltarea competenţei investigaţionale; a exploata potenţialul formelor de organizare a activităţii independente ţinînd cont de particularităţile autodezvoltării personalităţii; implicarea studenţilor în procesul investigaţional; dezvoltarea şi aplicarea competenţelor generice formate în activitatea practică; utilizarea metodei de moderaţie a activităţii grupului de studenţi pentru obţinerea efectului sinergetic al activităţii în grup; implicarea studenţilor în rezolvarea problemelor cu caracter investigaţional cu diferit grad de complexitate; asigurarea continuităţii etapelor modelului de formare a competenţei investigaţionale.

Organizarea activităţii de cercetare în procesul educaţional presupune apropierea cunoaşterii didactice de cunoaşterea ştiinţifică. M. Minder consideră că soluţionarea problemelor este procedura regală a educaţiei funcţionale, întrucît corespunde cel mai bine demersurilor naturale pe care le efectuează individul în condiţiile de învăţare spontană: va trebui atins un scop, dominând obstacolele care se opun realizării acestuia (Goanac'h, 1995), vor trebui propuse activităţi de efectuat pentru a putea rezolva problema (Meirieu, 1997a), vor trebui activate cunoştinţele şi reprezentările, transformarea lor fiind cea care duce la soluţie (Develay, 1992) [52, p.165]. Problema poate apărea în mod spontan, poate fi suscitată sau construită, poate fi reală, plauzibilă sau „trucată”, poate fi voluminoasă sau de dimensiuni reduse, dar va satisface criteriul de a fi judicioasă (nu va duce la eroare), credibilă (va provoca interesul şi adeziunea de spirit) şi eficace (va permite atingerea obiectivului şi realizarea unei adaptări mai bune). Strategiile de apropiere a cunoaşterii didactice de cunoaşterea ştiinţifică examinate în [52, p.163] sunt:

- Situaţii-problemă cu structură soluţie complexă: căutarea răspunsului prin încercare-eroare;
- Situaţii-problemă cu structură soluţie facilitată: descoperirea răspunsului prin *insight;*
- Situaţii-problemă cu structură soluţie dirijată: emiterea răspunsului prin condiţionare operantă;
- Situaţii-problemă cu structură soluţie dată: achiziţionarea răspunsului prin învăţare verbală semnificativă.

Schema intervenţiei pedagogice propuse pentru realizarea strategiei de apropiere conţine următoarele etape:

1. Definirea obiectivelor şi a componentelor sale: competenţă, capacitate, performanţă.
2. Apariţia unei probleme care concretizează o dezadaptare, conţine obiectivul-obstacol şi generează interesul pentru căutarea unei soluţii readaptante.
3. Explorarea situaţiei-problemă.
4. Căutarea şi descoperirea soluţiei.
5. Emiterea răspunsului.
6. Reorganizarea repertoriului comportamental.

Mileniului trei îi este caracteristic fenomenul de politica ştiinţifică care se manifestă prin transpunerea unor valori sociale şi obiective politice în problematica ştiinţifică. In noile condiţii, formarea competenţei de cercetare devine o prioritate educaţională, ceea ce explică preocuparea cercetătorilor pentru acest subiect.

*Comportamentul de cercetare* orientat şi constructiv, conştient, adică în baza analizei acţiunilor proprii, sintezei, aprecierii, prognozei logice se pretează ca o *activitate de cercetare*, un tip de activitate intelectual-creativă apărută în rezultatul funcţionării mecanismului de căutare.

Sistemul de pregătire a cadrelor în conformitate cu exigenţele Procesului Bologna a redus perioada de pregătire a profesorului de matematică, dar prelungirea termenului de studii în învăţământul preuniversitar presupune preluarea sarcinii de a dezvolta competenţe investigaţionale la elevii de liceu de către cadrele didactice respective. Rolul profesorului modern se asociază cu pretenţia de a construi procesul de învăţare din perspectivele tehnologiei de cercetare, accesibilă celor care trăiesc o practică investigaţională zilnică (B. Gherşunski). Analiza literaturii de specialitate şi a programelor de studii la disciplinele matematice demonstrează că în general cadrele didactice universitare se concentrează asupra conţinuturilor disciplinelor şi contează pe studentul motivat, capabil să-şi formeze independent capacităţile de cercetare ştiinţifică în domeniu. Dar în cazul lipsei acestor competenţe la studenţi şi al lipsei unui proces organizat de implicare a lor în procesul de cercetare ştiinţifică în perioada studiilor se ajunge la formarea unui cerc vicios.

O diagramă de sinteză a acţiunilor ce urmează a fi efectuate în cadrul unei cercetări ştiinţifice în domeniul matematicii este reprezentată în Figura 2.3.

Cercetarea, în conformitate cu schema propusă, se extinde de la identificarea noţiunilor, termenilor, proprietăţilor elementare ale unei teorii, spre generaliazare şi integrare de domenii prin procese de investigaţie precum: observarea; clasificarea; structurarea datelor; modelare; argumentare; demonstraţie, compararea rezultatelor; evaluarea şi interpretarea rezultatelor, etc.

În opinia noastră, studenţii specialităţilor matematice trebuie implicaţi în activitatea de cercetare încă din primul an de studii. Matematicienii - profesori universitari cu experienţă în conducerea investigaţiilor ştiinţifice ale studenţilor, masteranzilor, doctoranzilor consideră „scufundarea” studentului-cercetător în activitatea de cercetare mai utilă de cât familiarizarea lui cu metodele de investigaţie practicate în domeniu prin intermediul cursurilor de cercetologie.

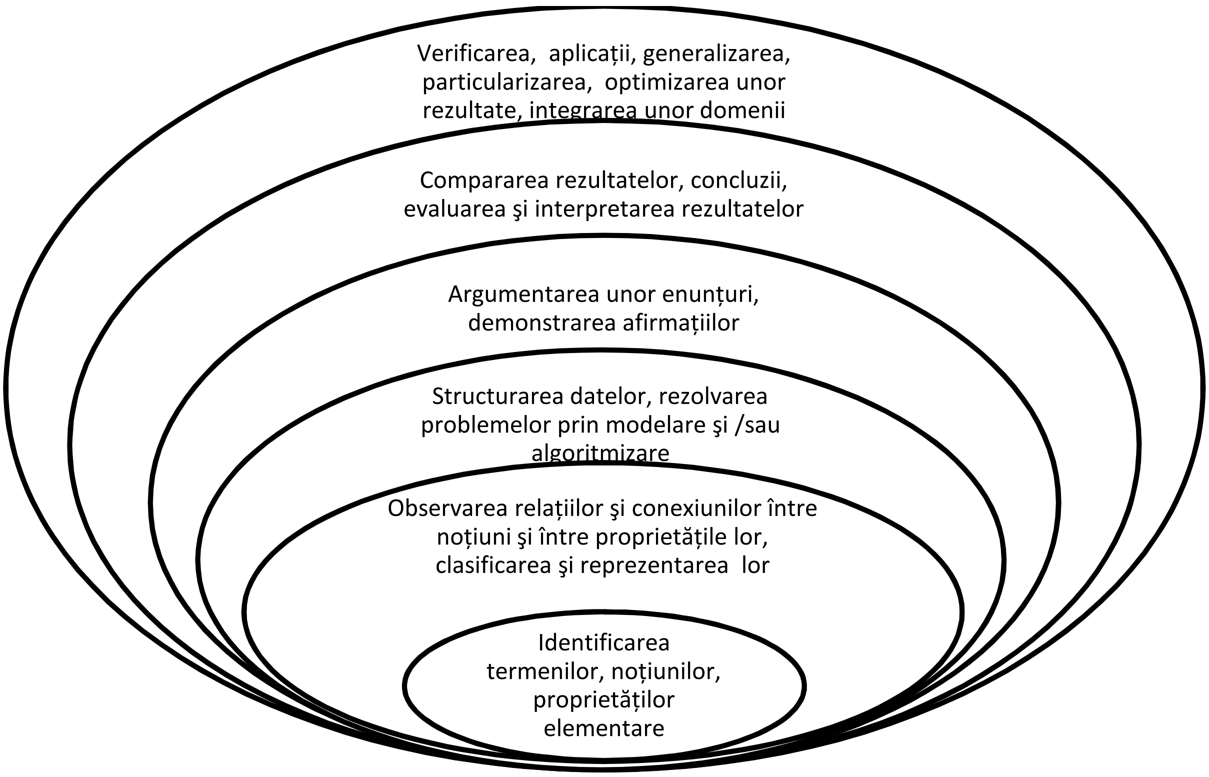



Fig. 2. 3. Acţiuni recomandate la desfăşurarea cercetărilor ştiinţifice în domeniul matematicii

Prin similitudine cu activitatea de învăţare a teoriilor matematice, se examinează desfăşurarea procesului de cercetare din două aspecte:

I. Analiza cantitativă a teoriilor: stabilirea elementelor de bază care figurează în teoria dată; familiarizarea cu noţiunile iniţiale referitoare la teoria dată, cu definiţiile şi proprietăţile elementare ale acestora, prin care se conturează scopul cercetării, obiectele supuse cercetării.

II. Analiza calitativă: modelarea unui carcas logic al capitolului examinat (un anumit compartiment); stabilirea structurii ierarhice a sistemului de afirmaţii cunoscute cu referire la tematica abordată; urmărirea lanţului logic al dezvoltării teoriei şi a apariţiei informaţiei noi; stabilirea corelaţiei între noţiuni; examinarea unor probleme care apar (existenţă, unicitate, relaţii fundamentale, dependenţe, diversitatea mulţimii de obiecte de acest fel etc.). Analiza calitativă va conduce la procesul de creare a unor obiecte noi prin sinteză, la descoperirea unor adevăruri, la formularea şi demonstrarea unor ipoteze cu caracter general sau la respingerea lor, la stabilirea unor condiţii-limită de existenţă a obiectelor cu anumite proprietăţi, la cercetarea comportamentului unor obiecte în cazul restricţionării unor operaţii, dependenţe, la modelarea unor situaţii reale în diverse contexte şi stabilirea corelaţiei dintre erorile de măsurare şi erorile de sistem.

În lucrarea [172, p.5] autorii caracterizează metodologia construirii unei microteorii matematice în felul următor: "În orice teorie matematică noţiunile de bază se introduc cu ajutorul unor definiţii generale, dar datorită aplicării a diverse restricţii, care îngustează domeniul de cercetare, este posibilă avansarea în construirea teoriei. Atunci este natural să dezvoltăm teoria generală luînd în considerare următoarele:

- să examinăm definiţiile iniţiale şi să extragem din ele toate consecinţele interesante, păstrând, pe cât este posibil, caracterul lor general;
- să examinăm rolul restricţiilor utilizate;
- să găsim legităţile interne comune care dirijază obiectele teoriei date."

Etape de bază în demararea unor activităţi de cercetare cu grupul de studenţi sunt:

1. Motivarea studenţilor pentru implicarea în procesul de cercetare ştiinţiciă.
2. Informarea, pregătirea teoretică şi exersarea practică a unor metode şi procedee de cercetare.
3. Realizarea unor cercetări proprii.
4. Evaluarea şi autoevaluarea cercetării.

Recomandările selectate şi sistematizate pentru a provoca demararea unei investigaţii la matematică sunt:

- A selecţiona contraexemple.
- A concepe şi a evalua ipoteze.
- A analiza propoziţii contradictorii.

- A duce raţionamentul până la contradicţie.
- A modifica definiţia obiectului de bază al teoriei
- A face să varieze un singur parametru.
- A pune autoritatea în discuţie.
- A valorifica potenţialul problemelor matematice în formarea competenţelor investigaţionale: problema ca obiect al cercetării; problema ca mijloc de organizare a cercetării. Modurile de construire a problemelor de cercetare sunt: analogie, generalizare, concretizare, substituirea din enunţuri a expresiei „demonstraţi, că …” cu expresia „e posibil oare, ca …”, a modifica careva dintre elementele problemei: ipoteza sau concluzia, metoda de rezolvare; concluzie – răspuns, inversarea problemei etc.
- A efectua experimente pentru testarea adevărului unor afirmaţii.

Dacă activitatea de instruire şi explorare a studenţilor matematicieni este organizată în baza concepţiei de orientare profesional-pedagogică a pregătirii matematice şi este suplimentată de modelarea condiţiilor activităţii pedagogice reale, atunci ea devine un factor efectiv al formării competenţelor profesionale ale viitorilor profesori de matematică [106].

Modelul şi modul de utilizare DiPHTeRIC propus de Cariou în anul 2002 este recomandat într-un demers de cercetare. Modelul DiPHTeRIC simplificat descrie aproximativ calea ipotetico-deductivă care se bazează atât pe epistemologie cât şi pe analiza lucrului ştiinţific în laborator, fără a pretinde să descrie realitatea complexă a drumului cercetătorilor. Datele iniţiale (**Di**) reprezintă teorii, observaţii, reprezentări, credinţe, obstacole, achiziţii anterioare, modele, experienţe, idei şi fapte. O problemă (**P**) survine când se contrazic ideile şi faptele (mai des ideile vechi şi faptele noi). Problema este de natură să conducă la diverse ipoteze (H), fiecare dintre care poate duce la proiectarea mai multor testări (Te), care nu sunt neapărat experimentale (observare, simulare, modelare ...). Paşii următori sunt: analiza rezultatelor, interpretarea şi concluziile. Instrucţiunile pentru acest model constituie un instrument proiectat pentru profesori. Rolul lor este, odată formulată problema pentru clasa, de a asigura o cale care se bazează pe propunerile elevilor (ipotezele, apoi propunerile de testare), de a-i încuraja pe aceştea, dacă este necesar, de a formula întrebări de stimulare a gândirii. Ca instrument DiPHTeRIC este corespunzător cu "Canavaua", definită pentru predarea ştiinţelor şi tehnologiei în ciclul primar (2002), extinsă apoi pentru Colegiu (investigaţii în Matematică şi Ştiinţe experimentale: Introducere comună pentru toate disciplinele ştiinţifice, BO # 5 din 25 august 2005) şi apoi în liceu (în biologie, BO Raportul nr 4 din 29 aprilie 2010). Acest model este prezentat în Anexa 3.

Subiectele descrise în continuare, care au stat la baza organizării cercului de matematică în clasa a VI-a, servesc drept sursă de orientare în organizarea unor activităţi desfăşurate de către studenţi în timpul practicii pedagogice. Prin acest material am oferit studenţilor sugestii pentru aboradarea unei întrebări semnificative în problematica didacticii teoretice şi anume, umanizarea educaţiei. Acestei probleme sunt dedicate o mulţime de publicaţii metodice, în care se discută nu numai conţinuturile de program, dar, de asemenea, analiza rezultatelor experimentelor. În procesul de punere în aplicare a principiului umanizării în instruire este utilizată îmbinarea diferitor tipuri de tehnici pentru a realiza activitatea de formare, care implică selectarea conţinuturilor dintr-o gamă largă de domenii: cultural, din istoria matematicii, utilizarea şi construcţia a diverse modele matematice. Probabil, utilizarea consecventă în predare a tehnicilor similare, poate face realizabil obiectivul de "descătuşare" a gândirii elevilor şi, de asemenea, să le arate obiectul matematica, nu numai ca un aparat sintactic, dar, de asemenea, ca pe un element util al culturii. În timpul desfăşurării experimentului specificat, am fost surprinşi să aflăm că la această vârstă elevii sunt capabili să genereze elemente ale sistemelor de cunoştinţe teoretice, care sunt în concordanţă cu implementarea lor, care necesită o cantitate semnificativă de timp şi un nivel intelectual foarte înalt. Desigur, obiectele teoretice construite nu pot fi considerare pe deplin asimilate, cu toate acestea, în opinia noastră, formarea lor este de o valoare, deoarece în acest caz, elevii şi-au extins foarte mult sfera de aplicare a acestor cunoştinţe, obişnuindu-se cu faptul de a trata multe situaţii din punct de vedere matematic, în ciuda faptului că subiectele iniţiale nu au avut o relaţie vizibilă cu matematica.

Activitatea a fost concepută ca un cerc de matematică. Acest lucru înseamnă că nu am căutat să colectăm materialul prezentat, pentru a-l constitui într-o anumită succesiune logică. Scopul nostru didactic, aşa cum este evident din descrierea de mai sus a fost altul, desi se poate spune că o parte din materialul care a fost examinat, a fost asimilat de către copii. Peste cîţiva ani de la desfăşurarea acestui experiment elevii încă îşi mai aminteau subiectele abordate şi absolut conştient se foloseau de metodele însuşite atunci, cu toate că scopul final nu fusese acesta.

În opinia noastră, învăţarea a avut loc sub influenţa interesului trezit de subiectele cu caracter de divertisment utilizate în procesul de implementare, şi, involuntar, de activismul propriu al elevilor.

Expunem în continuare cîteva subiecte abordate.

*Corespunderea reprezentărilor plane celor spaţiale*

Fiecare elev a primit o bucată de sârmă moale (40-50 cm). S-a propus elevilor să confecţioneze diferite obiecte - mese, scaune etc. În continuare sarcinile au devenit "mai mult" matematice: să confecţioneze un cadru de cub, tetraedru. După aceasta se cere ca obiectele să fie reprezentate pe hârtie. De fapt, am ajuns la problemele de perspectivă. Cele mai simple noţiuni în legătură cu proiectarea paralelă au fost explicate şi, în cele din urmă, a fost formulată problema inversă: în baza a trei proiecţii ale obiectului de a construi un cadru corespunzător. Prin acest exerciţiu, am constatat că marea majoritate a elevilor de doisprezece – treisprezece ani sunt capabili de a percepe nu doar formularea acestei probleme, dar şi să facă faţă sarcinilor de acest tip la un nivel complet satisfăcător. Succesul acestui experiment ne-a sugerat că propedeutica cursului de geometrie ar putea fi construită atât pe conţinuturi bazate pe analiza unor figuri plane, cât şi a celor spaţiale.

*Construirea poliedrelor regulate*

Ideea de lipire a figurilor de formă spaţială din desfăşuratele lor este atât de naturală, că ne-am decis să formulăm o sarcină destul de dificilă, care consta în lipirea unui dodecaedru. Acest lucru a fost precedat de o poveste despre poliedre regulate, despre istoria descoperirii lor, despre cristale etc. Apoi, am examinat un dodecaedru şi am stabilit sarcina, similară celei realizate anterior pentru cub: a reprezenta desfăşurata dodecaedrului, iar apoi de a lipi din ea un dodecaedru. Problema a fost rezolvată în două lecţii. La prima lecţie a fost examinată întrebarea: Ce reprezintă faţa unui dodecaedru? La acel moment elevii nu studiaseră poligoanele regulate: baza teoretică pe care se poate construi un pentagon, nu era disponibilă. Cu toate acestea, am fost capabili de a depăşi dificultăţile. În primul rând s-a stabilit că laturile pentagonului sunt egale. Acest lucru a putut fi observat direct. Cu toate acestea, după laturi nu este posibil de a construi un pentagon regulat, este necesar să se cunoască, de asemenea, valoarea unghiurilor sale. Cu ce este egal unghiul interior al unui pentagon? Ideea, desigur, a fost comunicată de profesor, dar elevii au făcut calculele sinestătător. După ce a fost explicată procedura generală de construire a unui poligon regulat, problema a apărut de a construi un pentagon regulat. Au fost discutate două posibilităţi: a) de la o extremitate a unui segment dat se depun consecutiv de patru ori segmente egale cu primul, sub un unghi de 108°; b) de la extremităţile unui segment dat se depun în ambele părţi segmente egale cu primul, sub un unghi de 108°. Aici a apărut un moment de cercetare: care dintre aceste metode în practică are mai mult succes? În mod evident, a doua metodă oferă mai puţine oportunităţi de a acumula erori.

Elevii au fost capabili să argumenteze corect răspunsul la această întrebare. În cele din urmă, desenul a fost construit şi am continuat cu ideea centrală - construcţia dodecaedrului cu ajutorul modelului pentagonului. Această sarcină a fost foarte dificilă, deoarece acest model este destul de complicat. A mai apărut o altă problemă extrem de interesantă: cum să plasezi desfăşurata pe o bucată limitată de hârtie? Următoarea problemă apărută a fost prevederea unor "aripioare" pentru lipirea marginilor, de aceea elevii au utilizat fie o reprezentare spaţială, fie au rezolvat o problemă pur combinatorie destul de dificilă. Iar ultima problemă - realizarea reală a modelului din desfăşurată, a fost, de asemenea, dificilă, dar a fost efectuată cu succes. În îndeplinirea acestei sarcini copiii au trebuit să utilizeze într-o unitate organică diverse activităţi - discursivă, instrumental-grafică, de orientare, motrică, astfel că, în acest proces, s-au convins uşor de "utilitatea" matematicii.

*Forme rectilinii şi curbilinii*

Cursul de matematică şcolară este construit în aşa fel, încât figurile plane studiate se împart în două clase foarte puţin evidenţiate: figuri rectilinii şi curbilinii. Aceste clase sunt atât de diferite unele de altele prin principiile de studiu, încât se creează unele dificultăţi serioase în asimilarea disciplinei. Scopul nostru a fost de a arăta modul în care se poate trece de la studiul figurilor rectilinii la cele curbilinii. Pentru a face acest lucru, am examinat bine-cunoscutul concept din geometria diferenţială a curbei de nivel. Concret, sarcină formulată a fost: "Avem două drepte intersectate, şi pe fiecare dintre acestea este luat câte un punct. Imaginaţi-vă că aceste puncte încep să se mişte uniform pe linii drepte. Ce parte a planul vor acoperi dreptele care unesc aceste puncte?" După mai multe experimente, elevii au văzut un lucru curios: apare o linie de formă ovală. Dar ovalul are o formă curbată, şi, de fapt, s-a obţinut cu ajutorul unor linii drepte.

În această lecţie, nu am dezvoltat în continuare această idee, dar ea a fost utilă mai târziu. A fost considerat şi cazul degenerat: mişcarea punctelor în direcţii opuse pe linii paralele cu aceeaşi viteză. Elevii au văzut că, în acest caz, toate dreptele trec prin acelaşi punct. A fost propunerea ca elevii să demonstreze acest lucru şi aceasta a fost, probabil, una dintre primele teoreme, extrase de elevi din experiment. În plus, am propus problema faimoasa despre pisoiul ce şade în mijlocul scării care alunecă. Astfel a apărut necesitatea de a construi un model matematic adecvat unei situaţii reale.

*Iteraţii*

Există multe probleme matematice, unele cu caracter de divertisment, care se bazează pe repetarea în mod consistent a aceluaiaşi tip de transformări. Asimilarea ideilor relevante este necesară pentru a depăşi dificultăţile, deoarece metoda este adesea pusă în aplicare în matematică, dar este puţin înţeleasă de către elevi. Probleme specifice pentru a atinge acest obiectiv pot fi găsite în multe culegeri.

*De la simplu la complex*

La această etapă am stabilit scopul de a-i ajuta pe elevi să conştientizeze structura logică a cursului şcolar de matematică. Au fost cercetate două exemple care au o idee comună: dacă vrei să studiezi un domeniu complex, este necesar de a alege cele mai simple obiecte, iar pe cele compuse să le corelezi cu cele simple.

Exemplul 1. Graficul funcţiei liniare. Acest conţinut era, mai mult sau mai puţin, cunoscut elevilor şi schema simplă "de la graficul proporţionalităţii directe la graficul funcţiei liniare generale" a fost perceput de ei natural.

Exemplul 2. Aria poligonului. În acest exemplu, idea structurală evidenţiată are o posibilitate reală de implementare, care, în plus, utilizează o proprieteate importantă geometrică - aditivitatea ariei. Cu participarea activă a elevilor a fost construită secvenţa standard: aria dreptunghiului - aria triunghiului dreptunghic - aria triunghiului scalen - aria paralelogramului - aria trapezului – relaţiile de echivalenţă şi echicompunere - triangulare. Aceste idei au fost completate în continuare cu sensul geometric al anumitor inegalităţi, de exemplu, $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

*Oglinzile şi simetria axială*

În dezvăluirea temei important a fost să arătăm copiilor procesul de construire a modelelor matematice ale diferitor situaţii care aveau conţinut matematic comun. Au fost utilizate pe larg informaţii din istoria tehnicii şi din matematica grecilor antici, observarea şi experimentarea. La această temă am planificat trei ore. Am început cu faptul că copiii au fost rugaţi să aducă câte o oglindă, o lanternă şi câteva caleidoscoape. Au fost formulate următoarele întrebări: "Ce este o oglindă? Cum sunt reproduse exact obiectele? Discuţia acestor întrebări a condus la formarea conceptul de simetrie în oglindă. Apoi, a fost efectuat următorul experiment: pe masă a fost pusă o mică oglindă care era iluminată de raza înclinată de lumină de la o lanternă. Fasciculul reflectat a fost înregistrat pe o foaie de hârtie. Copiii au măsurat cu un raportor unghiurile de incidenţă şi de reflecţie şi a fost stabilită cu anumită precizie de măsurare egalitatea acestor unghiuri. Această proprietate a fost formulată în continuare ca o proprietate fundamentală a simetriei oglinzii şi, folosind modelul matematic construit, elevii au demonstrat-o cu uşurinţă. Apoi a urmat subiectul: "Unde şi cum se foloseşte proprietatea de simetrie în oglindă?". Întâi de toate, am apelat la caleidoscop, elevii au aflat motivele pentru care imaginea se extinde la infinit în toate direcţiile, în acelaşi timp, însă, în zonele îndepărtate, domeniul de vedere al unui caleidoscop este foarte întunecat. Am atras atenţia elevilor la acest lucru şi le-am propus ca mai târziu să explice efectul care cauzează apariţia zonei mai întunecate. După ce băieţii "au privit" într-un caleidoscop, ei au rezolvat câteva probleme de construire a imaginilor unor obiecte bazându-se pe fenomenul de reflecţie în caleidoscop. Apoi, s-a discutat despre dispozitivul numit reflector unghiular, care este compus dintr-un set de trei oglinzi plane aşezate unul faţă de altul sub unghi drept şi care are o proprietate foarte interesanta: din orice direcţie ai trimite o rază de lumină spre reflector, fasciculul reflectat va fi orientat exact în direcţia opusă. Această proprietate este adesea utilizată în practică, în cazurile în care este nevoie de a vedea clar obstacolele de pe drum, de exemplu, sticla reflectorizantă a felinarelor roşii de la automobile şi motociclete este fabricată cu nişte crestături care formează mici reflectoare unghiulare pe toată suprafaţă.

Cel mai celebru reflector unghiular din istoria tehnologiilor, a fost făcut de ingineri francezi şi trimis pe Luna. Acesta a fost folosit pentru a măsura cu exactitate distanţa de la Pământ la Lună.

După aceasta, am încercat să construim un reflector unghiular. Acesta nu s-a dovedit a fi destul de convingător, dar sistemul de două oglinzi a dat o reflecţie suficient de clară. Le-am spus elevilor că proprietatea matematică de bază a reflectorului unghiular va putea fi demonstrată în clasele superioare, dar proprietatea corespunzătoare a unui reflector plat, constând din două oglinzi, se poate dovedi acum. A fost construit modelul matematic, a fost formulată proprietatea şi ea a fost demonstrată de elevi. apoi a fost examinat cazul în care oglinzile formează un unghi ascuţit. A fost stabilit că orice unghi nu ar forma oglinzile, fluxul de lumină se va reflecta înapoi, dar după un număr oarecare de reflecţii. Dacă suprafaţa oglinzilor este prăfuită, raza reflectată este mai puţin strălucitoare. Acest efect a fost demonstrat cu ajutorul unei plăci subţiri de plastic pe care a fost construit unghiul dintre oglinzi şi traiectoria razei de lumină. Placa a fost îndoită după laturile unghiului şi a fost privită prin ea imaginea fluxului de lumină reflectat de la oglinzile prăfuite. Astfel a fost vizibilă scăderea intensităţii luminii după reflectare. Această explicaţie stă şi la baza fenomenului de slabă reflecţie a luminii de la blana animalelor: firele de blană formează reflectoare unghiulare în care se pierd razele de lumină.

Tot ce a fost expus anterior, a fost aplicat pe oglinzi plane. Am analizat cazul şi unor oglinzi curbate, dar numai pe un exemplu. A servit ca baza legenda despre modul în care Arhimede a fost capabil să aprindă navele lui Marcellus în timpul asediului de la Siracuza în jurul anului 212 î.Hr. Arhimede a făcut acest lucru prin plasarea soldaţilor cu scuturi din bronz sau cupru, astfel încât lumina soarelui reflectată de placi să conveargă în acelaşi timp într-un punct pe nava inamicului (la acest moment, temperatura a crescut brusc şi nava s-a aprins).

La elaborarea modelului matematic al acestei situaţii, am spus elevilor că, din punct de vedere tehnic, următoarea problemă este importantă: "Fie că razele de lumină formează un fascicul paralel de orientat de-a lungul axei Oy. Printr-un punct dat A construiţi o linie dreaptă astfel, încât fasciculul de lumină, căzând în punctul A să se reflecte de la această dreaptă şi raza reflectată să treacă prin originea sistemului de coordonate. Folosind acest rezultat, putem determina cu uşurinţă modul cum trebuia să fie pus scutul pentru ca raza de lumină reflectată de la el să nimerească pe navă. Dacă examinăm un număr suficient de mare de puncte şi prin fiecare dintre ele câte un segment de dreaptă (reprezentând un scut), plasat în modul descris, se obţine o imagine. Atunci când se analizează această figură, putem vedea că direcţia segmentelor variază uşor de la un punct la altul. În plus, se poate specifica chiar o linie de-a lungul căreia aceste segmente se distribuie. Apoi am spus copiilor că aceste linii le sunt bine cunoscute. Ele sunt parabole. Astfel, experimental s-a obţinut următoarea proprietate: razele de lumină care vin de-a lungul axei oglinzii parabolice, reflectându-se de suprafaţa oglinzii, sunt colectate într-un punct - focarul oglinzii parabolice. Aceasta proprietate stă la baza funcţionării mai multor dispozitive, inclusiv a diferitor antene receptoare. Se poate observa şi efectul invers, în cazul în care în focarul unei oglinzi parabolice se pune un bec, razele de lumină după reflecţie din aceasta se vor întâlni într-un fascicul puternic, nu ar dispersa. Această proprietate este, de asemenea, utilizată în tehnică, de exemplu, în aparatele de încălzire, la proiectoare, în lanterne electrice, la farurile automobilelor. De altfel, cuvântul "far" este derivat din denumirea insulei Pharos, care blochează intrarea în portul din Alexandria. Pe această insulă, cuceritorii greci ai Egiptului, au construit unul dintre cele mai mari faruri din lumea antică.

Seria de studii descrisă mai sus a fost cea mai intensă dintre toate. Într-un sens, am dori să o considerăm ca un exemplu tipic de expunere a unor teme şi implementare a unor tendinţe, cel mai bun mod focalizat pe organizarea activităţii creatoare a copiilor. Aici am reuşit să îmbinăm activitatea motrică, cu acţiuni de vizualizare, grafice şi discursive ale elevilor, incluşi în realizarea unei activităţi diverse ca subiect, atât din punct de vedere practic cât şi teoretic. Anume dezvoltarea abilităţilor creative a fost relevantă pentru cursul electiv, aşa că nu am încercat să creăm impresia că subiectele s-au epuizat. Pe de altă parte, am încercat, pe cât a fost posibil, să construim activităţile, astfel, încât copii să folosească, şi, în unele cazuri, în mod deliberat, metode diferite de activitate intelectuală. În special, am dat o anumită importanţă situaţiilor în care ar fi posibilă formarea abilităţilor de analiză şi proiectare a diferitelor structuri, în care se utilizează diferite procedee combinatorii. În general, nu s-a pus accentul pe formarea competenţelor de a efectua operaţii combinatorii. În termeni teoretici, ne-am bazat în principal pe conceptul de construire logică. Acest concept este analizat în publicaţiile destinate activităţilor extracurriculare la matematică, şi noi credem că există posibilităţi pentru formarea acestuia şi în cursul de bază la matematică, modul de punere în aplicare, se pare, va avea anumite caracteristici comune cu cele descrise. Pentru a ilustra acest fapt propunem un exemplu care a fost utilizat în cadrul orelor de geometrie în clasa a şaptea. In cadrul studiului asemănării figurilor a fost propusă următoarea problemă: "Determină unghiurile triunghiului isoscel, dacă bisectoarea unghiului de la baza triunghiului taie din el un triunghi asemenea cu triunghiul dat.". Soluţia la această problemă este un triunghi cu unghiul de la vârf de $36^o$. Problema poate fi considerată rezolvată, dar rolul său în matematică, precum şi poziţia reală în geometria elementară poate fi înţeles de către elevi (cu reale beneficii pentru dezvoltarea culturii elevilor) numai atunci, când este clarificată relaţia sa cu sarcina de a construi un pentagon regulat. Folosind metodele algebrei geometrice, putem arăta o metodă de a construi un pentagon regulat cu compasul şi riglă, şi prin modelarea geometrică, va fi găsit un algoritm adecvat pentru rezolvarea ecuaţiei algebrice corespunzătoare. Această problemă este util să se compare cu problema secţiunii de aur cu două scenarii. Primul dintre acestea se poate referi la ideile estetice ale grecilor antici despre simţul armoniei pe care le-a moştenit cultura europeană, al doilea poate fi asociat cu o scurtă prezentare a problemei de construire a poligoanelor regulate cu rigla si compasul.

Desigur, în cadrul cursului de matematică, nu este posibil, foarte adesea să se facă digresiuni detaliate care implică istoria, estetica, utilizarea noţiunilor matematice care nu au fost studiate. Se pare, totuşi, că astfel de scenarii ar trebui să fie prezente sistematic şi într-un curs de matematică ca unul dintre elementele esenţiale ale metodelor de predare.

Iată câteva subiecte abordate în cursurile facultative.

*Recunoaşterea reprezentărilor*

Problema recunoaşterii reprezentărilor a devenit foarte populară mai ales în legătură cu aceea că sunt elaborate şi continuă să se diversifice sistemele automate de recunoaştere. Acesta a fost motivul pentru interesul crescut în această problemă a elevilor. A fost important să explicăm că această problemă este una din operaţiile psihice cu care ei se confruntă în mod regulat în viaţă şi în sala de clasă. Am început cu informaţia despre descoperirea făcută de către inginerul francez Toma. Ca adult, el a devenit orb din cauza unei boli severe. Şase luni mai târziu, vederea s-a restabilit, dar amintirile despre experienţele sale l-au determinat să se gândească la posibilitatea de a dezvolta un astfel de dispozitiv, care ar putea recunoaşte literele de text tipărit şi le-ar converti în aşa-numitul "alfabet Braille", cu care orbul poate citi prin atingere. El a făcut faţă cu succes acestei sarcini. Ideea soluţiei sale a constat în aceia că literele textului tipărit apăreau pe un ecran special, care era divizat în câteva câmpuri. În fiecare câmp erau plasate fotoelemente (recent descoperite la acea vreme), cu care a fost posibil să se facă distincţie între zona puternic iluminată şi zona mai întunecată. Fiecare literă a fost codată printr-o combinaţie de pete albe şi negre. Prin supunerea acestei secvenţe unei prelucrări speciale Toma a izbutit să determine literele cu acest dispozitiv fără a greşi.

După această secvenţă au fost rezolvate o serie de probleme de recunoaştere, şi apoi s-a purces la cea mai importantă activitate – rezolvarea problemelor matematice, la care recunoaşterea structurii datelor joacă un rol major în procesul de căutare a soluţiei. Am luat în considerare două exemple cu privire la metoda de "calculare geometrică a sumei" $(1+3+5+...+(2n+1)=n^2$ şi $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$.

Exemple de acest tip permit formularea unor presupuneri rezonabile despre formula generală şi găsirea răspunsului la problema generalizată. Subliniem, că formularea generalizată a problemei era propusă de către elevi, care erau angajaţi în activitatea de recunoaştere a similitudinii structurale a exemplelor specifice. De altfel, profesorii, atunci când analizează astfel de subiecte pot încerca (am încercat, cel puţin) să explice copiilor ce înseamnă "conştientizare".

În cele ce urmează, am examinat câteva metode de codare. Un exemplu este asociat cu codul, folosit de prizonierii cetăţii Petropavlovsk. Toate literele alfabetului rus au fost aranjate într-un tabel de dimensiune 5x6. Fiecare literă era reprezentată de către două grupuri de bătăi: primul este numărul rândului şi a doua - numărul coloanei. Un alt exemplu foarte popular - notaţia codurilor pe tabla de şah şi un exemplu similar matematic – planul de coordonate pe care punctul este marcat de o pereche de numere. Apoi, am explorat o serie de probleme legate de codul Morse şi Fano. Una din problemele specifice a fost: "Utilizând secvenţe de puncte şi linii trebuie să se acorde etichete diferite pentru paisprezece obiecte. Care este lungimea minimă necesară pentru etichete?" Răspunsul depinde de faptul, dacă etichetele trebuie să aibă aceeaşi lungime, sau pot fi utilizate şi secvenţe de diferite lungimi. Este evident că în primul caz, răspunsul este 4, iar în al doilea - 3.

Următoarea problemă are o importanţă fundamentală în teoria mulţimilor finite, "În câte moduri puteţi alege câteva prăjituri (de la 1 la 5), în cazul în care pe un platou sunt prăjituri de cinci tipuri diferite?" Cu ajutorul codificării această problemă poate fi rezolvată aducând argumente relativ simple. Elaborăm un tip de "paşapoarte" pentru mulţimile posibile de prăjituri. Sunt 5 poziţii. În prima poziţie punem "+" dacă este luată prăjitura de tipul întâi şi "-", în cazul în care nu am luat prăjitură de tipul întâi. În mod similar completăm şi poziţiile II, III, IV, V. Grupuri diferite pot fi la fel de multe câte linii diverse de lungime 5 din semne "+" şi "-"putem completa, dar cu o condiţie: linia trebuie să conţină cel puţin un "+". În rezolvarea acestei probleme, am organizat cu atenţie activitatea de reflecţie utilizată în folosirea tehnicilor de codificare. În următorul grup de probleme, această metodă a fost folosită ca fundamentală.

În continuare am stabilit cu elevii că numere întregi sunt la fel de multe câte sunt şi naturale: elementele mulţimii numerelor întregi pot fi numerotate, folosind toate numerele naturale, fiecare - o singură dată. (Nu au fost introduse noţiuni referitoare la teoria mulţimilor, şi nu pentru că am considerat nepotrivit, dar nu am vrut să ne aprofundăm în aspectele pur tehnice legate de formarea noţiunii de cardinal, algebra mulţimilor etc. Am vrut să arătam modul de apariţie a ideilor matematice din subiecte cu diferit conţinut. Parţial, ideea unei astfel de abordări este caracteristică activităţii extracurriculare în clasele a 4-5, scopul nostru a fost să creăm "un pod" de la aplicaţii la matematica şcolară.)

Apoi au fost rezolvate probleme şi mai neaşteptate, în care principiul codificării a avut un rol foarte important:

- Familia de ecuaţii liniare de forma $ax+b=0$ este numerabilă.
- Familia de ecuaţii pătratice de forma $ax^2+bx+c=0$ este numerabilă.

Mai târziu în această secţiune a fost cercetată problema: Mulţimea numerelor raţionale este numerabilă. Metoda de rezolvare a fost bazată pe faptul că cifrele (în scrierea zecimală), au fost codificate cu o pereche de două cifre, $0 \to 10$, $1 \to 11$ $2 \to 12$, etc., iar celelalte semne - cu ajutorul altor perechi de numere, cum ar fi "+" poate fi codat cu perechea 20, "="- cu perechea 21 etc.

În afară de subiectele enumerate am discutat şi alte teme, cum ar fi "Aritmetica binară", "Clase de resturi modulo", "Cele mai simple probleme de combinatorică", "Probleme elementare de logica" etc.

Menţionăm, că acestea şi multe alte subiecte oferă posibilităţi aproape nelimitate în a descoperi nu numai frumuseţea matematicii, dar de asemenea, eficacitatea sa în rezolvarea problemelor cu caracter aplicativ. De exemplu, conceptul de "medie aritmetică" este foarte uşor să se asocieze cu un model matematic simplu de propagare a căldurii. În acest caz, am formulat problema despre modul în care se încălzeşte un cuptor, în care ard lemne, şi cum apoi se încălzeşte camera.

Desigur, matematica ca disciplină necesită dezvoltarea la nivel înalt a unor competenţe şi abilităţi standard. Suntem conştienţi de importanţa acestor realizări, astfel încât în mod constant am subliniat în sala de clasă: "Elevi, este adevărat că ceea ce facem noi aici este foarte interesant? Va fi mult mai interesant, dacă veţi studia materialul de program, veţi învăţa bine cum se fac calcule, cum se rezolvă diverse ecuaţii, cum se demonstrează teoreme. Poate cineva dintre voi va fi interesat de aceste probleme şi va deveni matematician, dar matematica este necesară tuturor!"

Activitatea de cercetare necesită aptitudini şi atitudine creativă. Creativitatea poate fi educată. Pentru realizarea acestui scop este necesară atât însuşirea operaţiilor elementare, a algoritmilor, a diverselor euristici prin intermediul includerii în procesul de studii a unei varietăţi de modele a soluţionării creative a situaţiilor de diferită natură, cât şi crearea premiselor pentru desfăşurarea activităţii creative: atmosferă psihologică corespunzătoare, climat creativ, saturarea maximală a activităţii cu situaţii euristice, formarea competenţelor creative.

Printre factorii ce stimulează formarea competenţelor creative şi de cercetare la studenţi pot fi enumerate:

- abordarea instruirii centrată pe personalitate;
- adoptarea strategiei productive de instruire, problematizarea;

- organizarea euristică a procesului instructiv, saturarea lui cu situaţii creative, crearea condiţiilor optime pentru activitatea de cercetare şi creaţie;
- ierarhizarea conţinuturilor pentru îmbinarea optimă a problemelor cu caracter reproductiv şi a celor nonstandard;
- îmbinarea optimă a metodelor algoritmice şi euristice de rezolvare a problemelor creative;
- aplicarea formelor de dialog în procesul de studiu;
- crearea condiţiilor pentru activitatea productivă în grup;
- îmbinarea optimă a formelor colective şi individuale de activitate.

Generalizarea activităţii de organizare de către profesorii universitari a procesului instructiv şi de cercetare al studenţilor, permite să elucidăm unele tendinţe progresiste dar şi unele carenţe:

- includerea foarte tîrzie a studenţilor în activitatea de cercetare;
- motivarea insuficientă pentru o astfel de activitate;
- legătura aparent superficială a competenţelor creative şi de cercetare cu activitatea profesională ulterioară;
- formularea de către profesor a situaţiilor şi sarcinilor creative şi de cercetare, implicarea insuficientă a studenţilor în acest proces.

Realizarea obiectivului de formare a competenţelor de cercetare la viitorii profesori de matematică satisface necesităţile atît pentru activitatea de predare-evaluare cît şi ale procesului de organizare şi desfăşurare a activităţii de cercetare a elevilor.

Reieşind din faptul că pedagogia contemporană schimbă accentele de pe obiectivul de a informa pe cel de a forma specialistul, considerăm oportună introducerea în planul de studii a unor cursuri propedeutice „Bazele cercetologiei”, sau „Introducere în cercetarea ştiinţifică” (cu referire la domeniul pentru care optează studentul) chiar în primul an de studii universitare. Scopul acestui curs ar constitui însuşirea metodelor generale de cercetare şi a unor metode de cercetare specifice domeniilor ştiinţifice de profil. Formarea ulterioară a competenţelor de cercetare ar fi susţinută de fiecare dintre profesorii universitari în procesul de predare-învăţare-evaluare la cursuri, prin desfăşurarea seminarelor ştiinţifice ale studenţilor şi profesorilor în cadrul catedrelor, la elaborarea tezelor de licenţă şi master.

Specializarea psihopedagogică solicită formarea competenţelor corespunzătoare cercetării şi în acest domeniu. În acest cadru vom nominaliza trei parametri fundamentali ce determină pregătirea profesională pedagogică: motivaţional; cognitiv; praxiologic.

Parametrul cognitiv caracterizează cunoştinţele metodice necesare pentru a înfăptui activitatea de predare-învăţare-evaluare. Parametrul motivaţional exprimă atitudinea pozitivă a studentului faţă de cariera pedagogică, deţinerea unor trăsături de caracter specifice profesiei, prezenţa motivelor şi necesităţilor profesionale de a activa în sfera pedagogică.

Parametrul praxiologic este determinat de competenţele metodice necesare pentru desfăşurarea procesului de predare-învăţare-evaluare. Dintre ele menţionăm în mod deosebit următoarele competenţe:

- analiza logico-didactică a conţinuturilor;
- selectarea conţinuturilor şi proiectarea activităţii de predare-învăţare-evaluare;
- transferul cunoştinţelor;
- organizarea procesului de predare-învăţare-evaluare;
- prognozarea rezultatelor activităţii de învăţare a elevilor;
- analiza situaţiilor pedagogice;
- monitorizarea procesului de predare-învăţare-evaluare, luarea de decizii adecvate pe parcursul procesului;
- reflexia asupra procesului, evaluarea şi autoevaluarea activităţii didactice a profesorului şi a celei cognitive a elevului.

Analiza procesului de pregătire al cadrelor didactice conduce la necesitatea elaborării unei concepţii fundamentate ştiinţific privind formarea cadrelor didactice pentru instituţiile de învăţământ superior. Actualmente comunitatea internaţională susţine ideea că una din funcţiile de bază ale profesorului universitar constă în satisfacerea criteriului privind „avansarea dublă”, adică asigurarea caracterului avansat al pregătirii lor relativ cu pregătirea viitorilor specialişti, care la rîndul său necesită asigurarea caracterului avansat faţă de dezvoltarea societăţii.

Revenind la formarea profesorilor de matematică, presupunem că este utilă organizarea şi desfăşurarea practicii studenţilor privind pregătirea pentru dirijarea procesului de explorare şi cercetare al elevilor în diverse structuri menite să ofere studiul aprofundat al matematicii şi, drept alternativă, organizarea în cadrul facultăţilor specializate a unor şcoli de fizică, matematică şi informatică pentru elevi, cu forma de organizare a studiilor prin corespondenţă, în weekend, şcoli de vară şi de iarnă.

Printre obiectivele principale ale activităţii investigaţionale se regăsesc: perfecţionarea pregătirii psiho-pedagogice a studenţilor; dezvoltarea laturii creative a personalităţii; formarea profesorului-cercetător. [106]

Formele de învăţământ prin care studenţii vor fi implicaţi în cercetare pot fi:

1. Cursuri cu caracter problematizat.
2. Seminarii, lecţii practice: rezolvarea situaţiilor-problemă cu caracter teoretic şi a problemelor de cercetare; discuţia rezultatelor propriilor investigaţii privind problemele formulate la cursuri, a celor mai reuşite soluţii obţinute, a încercărilor de a

reprezenta fragmente de teorie prin blocuri de probleme; executarea independentă a unor sarcini ce necesită creativitate; construirea miniteoriilor în baza dezvoltării ideilor conţinute într-o problemă; selectarea problemelor pentru lecţii practice şi elaborarea scenariilor acestora; compunerea independentă a problemelor; analiza manualelor şcolare; elaborarea referatelor; analiza literaturii pe anumită tematică.

3. Activitatea practică de rezolvare a unor sisteme de probleme cu caracter propedeutic, anticipativ.

4. Expunerea fragmentelor de teorie cu ajutorul problemelor.

5. Compunerea de probleme, contraexemple, obiecte cu proprietăţi date, completarea golurilor în demonstraţii sau raţionamente diverse, dezvoltarea definiţiilor şi restrîngerea lor, demonstrarea echivalenţei definiţiilor, implicarea studenţilor în elaborarea cursurilor teoretice, a sarcinilor pentru colocvii şi examene.

6. Elaborarea rapoartelor asupra unor activităţi de cercetare întreprinse, a lucrărilor de curs şi de licenţă.

7. Formularea problemelor nonstandard la anumite compartimente, formarea motivaţiei pentru formularea acestor tipuri de probleme şi a priceperii de a le formula.

8. Utilizarea pe larg a situaţiei de comitere a erorilor ca factor instructiv.

9. Seminarul ştiinţific.

La selectarea conţinuturilor pentru activitatea de cercetare a studenţilor-matematiceni am ţinut cont de prevederile curriculum-ului la matematică pentru învăţământul preuniversitar precum şi de Planul-cadru.

Vom expune unele puncte de vedere ce ţin de organizarea activităţii de cercetare în grupele de studenţi-matematicieni la unele teme mai puţin elucidate din punct de vedere teoretic în sursul preuniversitar.

1. Luînd în considerare gradul de dezvăluire a noţiunii de măsură în cursul de matematică preuniversitară am formulat problema de a descrie procesul de investigaţie la acest compartiment, care poate fi urmărit şi urmat într-o activitate de simulare cu studenţii ciclurilor I şi II.

Problema măsurării distanţelor, lungimilor curbelor, ariilor figurilor plane, volumelor corpurilor spaţiale a apărut odată cu apariţia civilizaţiilor umane. În procesul de predare apar următoarele întrebări:

1. Ce este unitatea de măsură?
2. Ce se înţelege prin expresia „măsurarea mărimilor geometrice date”?
3. Cum depinde rezultatul măsurării de unitatea de măsură?
4. În ce mod pot fi măsurate mărimile unor figuri de o formă concretă?
5. Pentru care clasă de figuri există o măsură a mărimilor lor?

În cursul preuniversitar de matematică atenţia principală este orientată spre întrebarea a patra. Întrebarea a cincea, de regulă, nu se cercetează. Menţionăm că existenţa măsurii pentru anumite tipuri de figuri este o consecinţă din axiomele utilizate.

Detalii privind dezvăluirea conţinuturilor matematice la temă sunt expuse în Anexa 4.

2. Ca o continuare a teoriei, cu mai multe aplicaţii pentru învăţământul preuniversitar, poate servi şi următoarea descriere a procesului de cercetare a corelării între măsura şi forma figurilor geometrice. Vom începe cu aceea că studenţii vor determina lanţul de noţiuni legate de această tematică şi problemele de bază importante pentru a dezvolta idei mai complexe. Considerăm că este importantă să recapitulăm următoarele fapte.

Se cunoaşte că pentru orice segment *e* luat ca unitate de măsură se determină lungimile segmentelor, lungimile curbelor simple şi ariile poligoanelor. În această ordine de idei menţionăm că pentru orice figură plană *F* este determinat un număr nenegativ *A(F)* astfel încît:

(®) dacă *F* este un poligon, atunci *A(F)* este aria $A_F$ a acestui poligon;

(±) dacă figurile *F* şi *L* nu se intersectează, atunci $A(F \cup L) = A(F) + A(L);$

(©) dacă figurile *F* şi *L* sînt congruente, atunci $A(F) = A(L)$.

Funcţia *A(F)* se numeşte *măsură Banach* a figurilor plane [19]. Pentru unele figuri plane numărul *A(F)* poate fi egal cu infinit. Aşa tip de măsură există şi pentru figurile liniare, dar nu există pentru corpurile spaţiale. Considerăm că o măsură Banach a figurilor plane este fixată. În acest caz numărul *A(F)* se va numi aria generalizată a figurii *F*.

Două figuri plane se numesc *echivalente* dacă ariile lor sunt egale. Această noţiune ca şi noţiunea de congruenţă nu depinde de unitatea de măsură a lungimilor şi a ariilor.

O figură se numeşte *conexă* dacă oricare două puncte ale sale pot fi unite printr-o linie frîntă care în întregime se conţine în figura dată.

O figură plană se numeşte *convexă,* dacă ea conţine fiecare segment care uneşte două puncte ale sale.

Dacă figura este conexă şi mărginită de un număr finit de frînte închise, atunci ea se numeşte *poligon*.

Figura plană mărginită de o linie frîntă închisă simplă se numeşte *poligon simplu*.

Vom spune că figura *F* este o sumă a poligoanelor $P_1, P_2, \dots, P_n$, dacă $F = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ este reuniunea acestor poligoane şi pentru orice $1 \le i < j \le n$ poligoanele $P_i$ şi $P_j$ nu au puncte interioare comune. În acest caz notăm $F = P_1 + P_2 + ... + P_n$ sau $F = \sum_{i=1}^{n} P_i$. Se mai spune că figura $F$ este descompusă în suma poligoanelor $P_1, P_2,..., P_n$.

Menţionăm că suma este un caz special al reuniunii. Se cunoaşte că orice poligon se descompune în sumă de triunghiuri.

Vom numi *figură poligonală* figura care poate fi reprezentată ca o sumă de poligoane.

Din antichitate sînt cunoscute următoarele probleme legate de noţiunile de echivalenţă şi sumă a figurilor poligonale:

**Problema 1.** De construit un pătrat echivalent cu o figură poligonală dată.

**Problema 2.** De construit un poligon asemenea cu un poligon dat şi echivalent cu o figură poligonală dată.

Problemele de construcţie se rezolvă cu ajutorul riglei şi a compasului. La dorinţă, pot fi folosite şi alte mijloace de construcţie (rigla marcată, două unghiuri drepte, parabola, etc.).

Noţiunea de congruenţă permite să introducem o noţiune cu mult mai generală:

Problemele 1 şi 2 sînt rezolvabile cu ajutorul riglei şi a compasului.

**Definiţie.** Două figuri poligonale $P$ şi $Q$ se numesc *echicompuse* şi notăm $P \top Q$, dacă există un număr natural $n \geq 1$ şi astfel de poligoane $P_1, Q_1, P_2, Q_2,..., P_n, Q_n$, pentru care:

1. $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$ şi $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$.
2. Pentru orice $i \leq n$ figurile $P_i$ şi $Q_i$ sînt congruente.

Figurile $P_1, Q_1, P_2, Q_2,..., P_n, Q_n$ se numesc *echidescompuneri* ale figurilor $P$ şi $Q$, dacă ele satisfac condiţiile Definiţiei.

Figurile congruente sînt echicompuse. Dacă sînt date poligoanele $P_1, P_2,..., P_n$, unde $n \geq 2$, atunci putem construi o infinitate de figuri $F$ pentru care $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$ şi $P_i$ şi $F_i$ sînt congruente pentru orice $i \leq n$. Toate aceste figuri vor avea aceeaşi descompunere, dar forme diferite.

**Problema 3.** În ce condiţii două figuri poligonale echivalente sînt echicompuse?

Răspunsul la această întrebare este dat prin Teorema lui Wallace-Bolyai-Gerwien în care se afirmă că două figuri poligonale sînt echicompuse, dacă şi numai dacă ele sînt echivalente. Potrivit unor surse teorema a fost demonstrată de William Wallace (1768-1843) în 1807 şi, independent, de Farcaş Bolyai (1775-1856) (tatăl lui Ianoş Bolyai (1802 - 1860) – unul din fondatorii geometriei neeuclidiene) în anul 1833, iar de P.Gerwien în 1835. Adesea această teoremă se numeşte Teorema lui

Bolyai-Gerwien sau Teorema lui Bolyai. Probabil, această teoremă era cunoscută pentru cazuri concrete şi în antichitate. Acest fapt este confirmat de metodele de calcul ale ariilor figurilor poligonale.

Cu fiecare pereche de figuri poligonale echivalente sunt asociate probleme de tipul:

**Problema 4.** Pentru poligoanele echivalente $P$ şi $Q$ de construit descompunerile $P_1$, $Q_1$, $P_2$, $Q_2$,..., $P_n$, $Q_n$, ce satisfac condiţiile Definiţiei 0.3. De determinat cel mai mic număr $n$ pentru care există astfel de descompuneri.

Unele căi de dezvoltare în continuare a teoriei nominalizate sunt expuse în Anexa 5.

Informaţia despre *unele proprietăţi ale curbelor polinomiale* se referă la algebră, geometrie şi analiza matematică. Aspecte deosebite cu referire la noţiunea de tangentă maximală la curbă sunt expuse în lucrarea [173]. Toate faptele de bază incluse în această temă au interpretări geometrice şi algebrice specifice. Folosirea imaginilor grafice este un mijloc important de depăşire a formalismului în procesul de cunoaştere, de dezvoltare a intuiţiei geometrice.

Realizarea obiectivelor de operare activă cu modele grafice în procesul de învăţare poate fi atinsă prin utilizarea sistematică a unei varietăţi de sarcini cu conţinut grafic.

În opinia noastră, materialul de faţă poate fi foarte util în procesul de compunere a exemplelor de funcţii cu proprietăţi prestabilite. Cu ajutorul exerciţiilor prezentate în text, pot fi compuse diferite sarcini specifice.

Iată câteva tipuri de probleme.

A. Conceptul de tangentă maximă la parabola de ordinul al patrulea este uşor de folosit la construirea unor curbe cu axă de simetrie. În compunerea exemplelor se apelează la ecuaţia canonică a unei parabole de ordinul patru $y=a((x+c)^2+d)^2+kx+b$. (1)

Dreapta $y = kx + b$ este tangentă maximă a parabolei (1). Dacă $d[0$, dreapta aceasta este tangentă imaginară, şi dacă $d\leq 0$ – este reală. Numai atunci când $k=0$, parabola are o axa de simetrie. Ecuaţiile parabolei trebuie prezentate în formă extinsă, de exemplu, ecuaţia $y=((x+1)^2+1)^2+3$ va fi propusă în forma $y=x^4+4x^3+8x^2+8x+7$. Menţionăm, că noţiunea de „forma canonică a ecuaţiei”, în opinia noastră, este un element foarte util de cunoştinţe pentru cursul de analiză matematică şi geometrie analitică.

B. Este uşor a construi exemple de parabole care nu au centru de simetrie. În acest scop, considerăm ecuaţia de forma

$$y=a_{2n+1}(x-c)^{2n+1}+a_{2n}(x-c)^{2n}+...+a_2(x-c)^2+a_1x+a_0, \quad (2)$$

pentru $n\geq 2$ şi $a_{2n+1}\neq 0$.

Dacă $a_{2n}=a_{2n-2}$ $=...=a_2=0$, parabola (2) dispune de un centru de simetrie, cu abscisa $x=c$. Dacă $a_{2n}=0$ şi ∑ĪǀJ$a_{2i}$ǀJ$:i=1,2,...,n$Ļ÷$0$,  atunci parabola (2) nu are nici un centru de simetrie. După selectarea coeficienţilor $a_i$ şi a parametrului $c$ ecuaţia (2) o vom prezenta într-o formă extinsă.

De exemplu, parabola $y=3x^5+4x^3+7x^2-x+8$ nu are centru de simetrie.

C. Parabolă de ordinul al treilea are întotdeauna un centru de simetrie. Centrul de simetrie este un punct de inflexiune. Parabolă de ordinul trei:

- poate fi o funcţie monotonă;
- are cel puţin un punct maxim, şi nu mai mult de un punct de minim;
- are un punct maxim, dacă şi numai dacă un punct de minim.

Pentru a compune exemple ar trebui să pornim de la ecuaţia canonică

$$y=a(x-c)^3+k\,x+b, \qquad (3)$$

pentru $a\neq 0$. Notăm următoarele fapte:

- în cazul $a>0$ şi $k\geq 0$, funcţia descrisă în (3) creşte monoton si nu are puncte de maxim şi minim;
- în cazul în care $a<0$ şi $k\leq 0$, parabola (3) descreşte monoton şi nu are puncte de maxim şi de minim;
- în cazul în care $a<0$ şi $k\leq 0$, atunci parabola (3) are un punct de maxim şi un punct de minim. Aceste puncte au abscisele $x=c\pm(-k/3a)^{½}$;
- punctul parabolei cu abscisa $x=c$ este punctul de inflexiune şi centrul de simetrie al parabolei (3).

Utilizarea punctelor imaginare de intersecţie a curbelor poate fi cercetată numai după ce au fost studiate numerele complexe. Utilizarea lor poate fi atribuită sferei virtuale de gândire, care necesită o înţelegere destul de avansată a noţiunilor legate de varietăţi geometrice. Planul obişnuit cu punctele sale imaginare nu este o varietate bi-dimensională. Prin urmare, planul imaginar, nu poate fi reprezentat în spaţiul tri-dimensional obişnuit. De exemplu, parabolele $y=2x^2+x+1$ şi în planul obişnuit nu se intersectează, iar în planul imaginar, ele se intersectează în două puncte diferite.

Dezvăluirea particularităţilor metodologice, a posibilităţilor de utilizare practică şi a tehnologilor didactice de alcătuire a sistemelor de probleme corespunzătoare se va îndeplini cu respectarea cerinţelor de utilizare a modelelor matematice în instruire. Cicluri de probleme poate fi alcătuit reieşind din principiul că asimilarea completă, conştientă, presupune formarea de concepte şi competenţe de transfer reciproc: descriere verbală – descriere analitică – reprezentarea grafică a obiectelor matematice.

Evident că un elev de succes poate fi educat doar de un profesor de succes. Cadrele didactice competente în organizarea şi desfăşurarea activităţii extracurriculare, inevitabil, trebuie să fie gata pentru lucrul cu copiii dotaţi la matematică. Inspiraţi din definiţia copilului dotat după Renzulli, Thornton şi Peel [206] au formulat o definiţie a profesorilor de succes care lucrează cu copii dotaţi la matematică. În consecinţă, modelul profesorului perfecţionist de matematică se referă la trei clastere: posedă cunoştinţe şi iubeşte matematica, are abilităţi în ghidarea procesului de învăţare al elevilor şi are atitudine creativă faţă de predare, pe care o vede ca o artă. Karp a propus un portret mai detaliat al profesorului copiilor dotaţi [213, p.73]. Urmând lucrările lui Kruteţki cu privire la calităţile copiilor dotaţi în matematică, Karp enumeră următoarele calităţi ale profesorului care lucrează cu copii dotaţi la matematică:

- interesul pentru identificarea şi cultivarea elevilor dotaţi;
- o bază (fundal) matematică specială;
- abilitatea de reacţiona matematic, adică a pune întrebări şi a da răspunsuri tipice şi caracteristice matematicii;
- vigilenţă şi receptivitate la observaţii şi comentarii neaşteptate şi neobişnuite ale elevilor;
- familiaritatea cu programele extracurriculare şi alte oportunităţi pentru dezvoltarea talentului elevilor dotaţi la matematică;
- abilitatea de a coordona şi dezvolta programe pentru elevii dotaţi la matematică.

Karp accentuează că aceste calităţi sunt necesare tuturor profesorilor de matematică şi ele vor fi luate în considerare la pregătirea specialiştilor, dar profesorul care lucrează cu copii dotaţi la matematică va poseda o gândire „matematic structurată” şi o pregătire matematică specială.

Principii de bază care sunt considerate utile la selectarea profesorilor pentru lucrul cu copiii dotaţi sunt sistematizate în lucrarea [212]:

1) Profesorul este factorul determinant în sistemul de instruire a copiilor dotaţi.

2) Faţă de profesorii care lucrează cu copiii dotaţi sunt formulate cerinţe mai înalte.

3) Nu toţi profesorii sunt capabili să lucreze cu copii dotaţi de vîrstă mică. Administraţia şcolii trebuie să depisteze profesorii care nu pot sau nu vor să lucreze cu copiii dotaţi şi să facă aşa încît aceşti copii să nu nimerească la astfel de profesori.

4) Concepţia pozitivă a „Eu-lui” personal constituie una din cele mai importante caracteristici ale profesorului care lucrează cu copiii dotaţi. Profesorul care se caracterizează prin respect de sine scăzut, manifestă un sentiment de teamă în faţa discipolilor talentaţi şi, prin urmare, nu poate provoca respect din partea acestora. Pe lângă alte calităţi importante ale profesorului putem evidenţia maturitatea, experienţă pedagogică de succes, stabilitate emoţională, angajament şi spirit creativ.

5) Competenţa profesională a pedagogului care lucrează cu copii dotaţi este bazată pe pregătirea sa teoretică specială şi pe experienţa de lucru.

6) Instruirea teoretică şi practică a profesorilor ar trebui să includă activităţi de lucru cu diferite categorii de copii, sănătoşi (inclusiv talentaţi) şi copii cu dezabilități senzoriale sau fizice (inclusiv talentaţi), datorită faptului că, de obicei, copiii supradotaţi şi talentaţi sunt instruiţi în acelaşi grup, împreună cu ceilalţi copii, care au abilităţi şi caracteristici diferite.

7) Profesorii care lucrează cu copiii supradotaţi trebuie să cunoască diverse programe speciale pentru fiecare treaptă de învăţământ, inclusiv pentru cel preşcolar, precum şi să ţină cont de experienţa altor cadre didactice pentru îmbunătăţirea programelor lor.

8) Profesorii ar trebui să fie familiarizaţi cu modelele conceptuale relevante, care sunt utilizate în formarea copiilor supradotaţi de toate vîrstele şi să fie capabili să selecteze şi să aplice acele modele care sunt aproape de propriile principii pedagogice.

9) Pentru a dezvolta programe cadrele didactice trebuie să cunoască o varietate de discipline. Ei au, de asemenea, sarcina de a utiliza în mod eficient resursele şi mijloacele alocate pentru serviciile de formare.

10) Alegerea corectă a materialelor didactice, de asemenea caracterizează nivelul de pregătire al profesorilor care lucrează cu copiii supradotaţi.

11) În competenţele cadrelor didactice este necesară capacitatea de a evalua corect succesele copiilor. Este de dorit, în selectarea cadrelor didactice pentru lucrul cu copiii supradotaţi, să se ia în considerare nevoia de a aparţine unei culturi.

12) Având în vedere faptul că a convinge pe alţii de necesitatea dezvoltării programelor sociale pentru copiii supradotaţi este destul de dificil, profesorul trebuie să aibă capacitatea de a proteja interesele acestora şi de a găsi susţinători.

## 2.5. Concluzii la capitolul 2

Pornind de la abordarea de predare extinsă bazată pe ideea centrării procesului educaţional pe cel ce învaţă, studiul efectuat ne-a permis să constatăm că satisfacerea necesităţilor de armonizare a intereselor şi motivelor personale ale studenţilor – viitori pedagogi şi de valorificare a resurselor integratoare ale activităţii extracurriculare la matematică conduce la orientarea studenţilor spre construirea propriului sistem de cunoştinţe prin parcurgerea unui traseu individual de învăţare. Investigarea laturilor acestui proces ne-a oferit posibilitatea de a formula un punct de vedere general asupra pregătirii cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică.

Semnificaţia teoretică a cercetării constă în: analiza şi sinteza reperelor conceptuale psihopedagogice şi didactice care stau la baza Modelului Integrator de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică; analiza rezultatelor obţinute ca urmare a aplicării MIAE în procesul de pregătire individuală a studenţilor matematicieni pentru activitatea extracurriculară la matematică. Acestea au condus la obţinerea următoarelor rezultate:

1. A fost elaborat Modelul Integrator de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică, care include toate componentele procesului educaţional centrat pe subiectul învăţării, bazat pe responsabilitatea studentului pentru propriul proces de învăţare şi posibilitatea de a influenţă aspectele legate de ce anume urmează să înveţe şi de modul în care o va face. Modelul orientează studenţii spre optimizarea traiectoriilor individuale de pregătire, spre eficientizarea procesului de asimilare a conţinuturilor şi dobândirea competenţelor de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică.

2. A fost stabilit că metodologia de formare profesională iniţială a profesorilor de matematică în concordanţă cu cerinţele actuale ale societăţii şi de pregătire a lor pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică, inclusiv a lucrului cu copiii dotaţi capabili de performanţe înalte la matematică, trebuie fondată pe principiile învăţământului umanist şi ale abordării diferenţiate a procesului educaţional. În particular, au fost determinate bazele metodologice de formare profesională iniţială a profesorilor de matematică şi de pregătire a lor pentru activitatea extracurriculară, inclusiv pentru lucrul cu copiii dotaţi la matematică.

3. A fost completat şi sistematizat un set de competenţe specifice procesului de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică, care trebuie dezvoltate în perioada anilor de studenţie la viitorii profesori de matematică.

Obiectivul aplicativ de bază constă în determinarea resurselor integratoare pentru formarea competenţelor de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică, inclusiv a lucrului cu copiii dotaţi şi capabili de performanţe înalte la matematică.

S-a stabilit că:

- realizarea cu succes a procesului de pregătire iniţială a cadrelor didactice pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică, inclusiv pentru lucrul cu copiii dotaţi şi capabili de performanţe înalte, se bazează pe motivarea studenţilor şi includerea lor în activitatea investigaţională la matematică din primii ani de studenţie;
- structura traseului de formare a competenţelor necesare pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică depinde de pregătirea matematică a studentului şi de implicarea sa în edificarea propriului sistem de cunoştinţe (teoretice şi practice) matematice, psihopedagogice şi didactice.

4. Au fost descrise resursele integratoare ale sistemului de pregătire a studenţilor matematicieni pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică: elaborarea tezelor de licenţă la tematica abordată prin realizarea unor obiective transdisciplinare pe domeniile matematica, didactica matematicii, psihopedagogie; implicarea studenţilor în procesul de transpunere didactică a conţinuturilor matematice destinate elevilor din diferite categorii de vârstă ţinând cont de diferenţierea în funcţie de nivel şi de profil; elaborarea scenariilor diferitor activităţi extracurriculare cu aspect recreaţional, competitiv, precum şi a unor secvenţe curriculare cu caracter captivant pentru activitatea curriculară. A fost determinată dimensiunea cunoştinţelor şi proceselor cognitive corespunzătoare în baza taxonomiei revizuite a lui Bloom la tematica abordată.

5. Au fost elaborate recomandări privind crearea condiţiilor optime pentru autoinstruire şi autoreglarea demersului propriu în formarea competenţelor de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică.

6. Au fost formulate recomandări pentru studenţii matematicieni, dispuşi să se pregătească pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică, inclusiv pentru lucrul cu copiii dotaţi şi capabili de performanţe înalte la matematică, pornind de la ideea de creare a unor condiţii speciale pentru autoinstruire şi autoreglarea demersului propriu în formarea acestor competenţe:

- Cunoaşterea principiilor abordării diferenţiate a educaţiei;
- Familiaritatea cu programele extracurriculare şi alte oportunităţi pentru dezvoltarea talentului elevilor dotaţi la matematică;
- Implicarea proprie în activitatea extracurriculară la matematică;
- Exersarea acţiunilor de transpunere didactică a conţinuturilor matematice ţinând cont de particularităţile psihice şi de vârstă ale diverselor categorii de elevi;
- Cunoaşterea principiilor şi procedeelor de organizare a activităţii de cercetare a elevilor.

7. A fost argumentată ipoteza privind faptul că procesul de formare, devenire, dezvoltare şi perfecţionare a calităţilor profesionale ale viitorilor profesori de matematică în aspectul legat de activitatea extracurriculară poate fi eficientizat prin introducerea sistemului de mentorat, monitorizat şi susţinut din primii ani de studii la facultate.

# 3. ASIGURAREA METDODOLOGICO-EXPERIMENTALĂ A CERCETĂRII

În acest capitol sunt expuse principiile de organizare şi desfăşurare a experimentului pedagogic şi sunt descrise rezultatele obţinute în procesul investigaţional la tema cercetării.

## 3.1. Specificul metodologic al cercetării

În ştiinţele socioumane cercetarea calitativă şi cercetarea cantitativă se referă la două paradigme distincte. Compararea acestor paradigme se face de specialiştii în domeniu având în vedere trei planuri: cel epistemologic; cel al strategiei metodologice, al metodelor folosite; cel al operaţiilor concrete de culegere, prelucrare şi prezentare a datelor. Fiecare dintre acestea, dispune de metode şi tehnici proprii de cercetare.

Metodele cantitative sunt adesea utilizate pentru stabilirea unor date statistice (experimentul, ancheta cu chestionar standardizat, analiza cantitativă a documentelor, observaţia sistematică), pe când cele calitative sunt utilizate în cercetările de profunzime (observaţia participativă, interviul intensiv, autobiografiile, analiza calitativă a documentelor etc.). În ceea ce priveşte planul concret-operaţional, eşantionarea, prelucrarea datelor, cercetarea cantitativă face apel la statistică, raportul de cercetare luând forma unor tabele, grafice, cifre, comentarii în limbaj natural; cercetarea calitativă apelează la eşantionare teoretică sau la întreaga populaţie, limbajul utilizat fiind unul natural, metaforic, cu puţine date statistice şi reprezentări grafice, obţinându-se date complexe, bogate, de adâncime.

Dacă în abordarea cantitativă teoria este verificată prin cercetare, având un grup experimental şi altul de control, în cea calitativă teoria reiese, apare pe parcursul cercetării.

Putem spune deci, că cercetarea calitativă reprezintă orice tip de cercetare în măsură să producă rezultate care nu ajung la proceduri statistice sau alte mijloace de cuantificare. Fiind o „abordare naturalistă” [2, p. 9] are ca scop înţelegerea fenomenului studiat în contextul situaţiilor specifice. Cele mai cunoscute modalităţi de abordare în cercetarea calitativă sunt: ”naturalismul” (preferinţa pentru ieşirea pe teren pentru a face observaţii), etnometodologia (care împărtăşeşte grija naturalistului pentru detaliu dar îl localizează în interacţiune), emoţionalismul (doreşte contactul „apropiat” cu subiecţii studiaţi şi favorizează biografiile personale) şi postmodernismul (care caută deconstruirea conceptelor de „subiect” şi „teren de cercetare”) [75, p. 55].

Analiza calitativă în ştiinţele educaţiei s-a extins începând cu anii 80 ai secolului trecut odată cu primele cercetări efectuate de specialiştii în antropologie în acest domeniu. Lincoln şi Guba au sugerat că studiile trebuie făcute mai degrabă în mediul natural decât în laboratoare.

Au fost câteva motive pentru creşterea interesului în cercetări calitative. A crescut insatisfacţia faţă de faptul că erau promovate doar cercetările cantitative. Cercetările cantitative în ştiinţele educaţiei sugerau subiecte foarte vagi, greu de implementat, slab diseminate şi adese irelevante.

Comunităţile şcolare produceau decizii mult mai variate decât cele incluse în cercetări. Profesorii solicitau un rol mai larg în designul şi desfăşurarea cercetărilor şi, astfel, au fost elaborate mai multe proiecte de cercetare. Prima ediţie a publicaţiei Qualitative Research in Education a apărut în 1992, dar ea a fost scrisă dintr-un punct de vedere etnografic. În 1994 a apărut prima ediţie a *revistei* Hand Book of Qualitative Research, care în anul 2000 a fost complet restructurată. Următoarele ediţii au fost în 2005 şi 2011. Aceste reviste abordează domenii variate de aplicare a cercetărilor calitative, inclusiv în ştiinţele educaţiei şi în psihologie [209]. O lucrare de calitate la această temă „Qualitative research in education: a user's guide", care a apărut în anul 2011, a fost scrisă de Marilyn Lichtman. Publicaţiile recente promovează şi ideea realizării cercetărilor mixte: cantitative şi calitative [75, 197, 201]. Autorii manualelor de pedagogie şi psihologie recomandă utilizarea metodei calitative în cercetarea pedagogică [82, 45, 2, 59]. In cercetarea calitativă, observatorul (mai ales în postura participativă) şi interacţiunile sale cu membrii grupului observat sunt, practic, părţi ale obiectului cercetării. De aceea, este esenţială reflexivitatea. Acest concept se referă la capacitatea cercetătorului de a se observa pe sine, a observa relaţiile sale cu membrii grupului şi a formula judecăţi cu privire la consecinţele poziţiei sale faţă de un aspect sau altul al cercetării.

Opţiunea noastră pentru realizarea unei cercetări calitative, de tip exploratoriu, a vizat completarea datelor obţinute prin metaanaliza surselor bibliografice, cu datele culese prin intervievarea unui număr restrâns de persoane, din experţii domeniului, datele nefiind statistic reprezentative pentru populaţia studiată. Considerăm că didactica matematicii există şi rezistă, creşte şi se maturizează prin efortul susţinut al specialiştilor săi de a contribui la fundamentarea epistemică a ştiinţei respective, la dezvoltarea ei. Modernizarea compartimentului ce ţine de activităţile extracurriculare la matematică este posibilă prin aportul profesorilor practicieni, captivaţi de această muncă şi aportul savanţilor matematicieni dedicaţi domeniului Matematica.

## 3.2. Elaborarea instrumentelor utilizate în cercetare

Am ales să utilizăm observaţia calitativă pentru recoltarea datelor, deoarece am dorit să acumulăm informaţie privind bunele practici de organizare a activităţii extracurriculare la matematică în instituţiile de învăţământ preuniversitar in contextul lor natural. Am cercetat comportamente obişnuite, pe care profesorii de matematică le adoptă, fără a verbaliza acţiunile, bazîndu-se pe experienţă. Observarea calitativă a fost posibilă având acces în grupul respectiv în timpul practicii pedagogice a studenţilor în liceele din mun. Chişinău, în timpul coordonării cercetărilor pentru elaborarea tezelor de licenţă, în timpul propriei activităţi didactice la cursurile de instruire continuă, în cadrul Centrului municipal de excelenţă ICAR (Mun. Chişinău) şi în taberele specializate de matematică ALTAIR.

La momentul demarării cercetării dispuneam de antrenamentul necesar pentru a observa activitatea de organizare a activităţii extracurriculare de către profesorii de matematică şi de a gestiona relaţia cu subiecţii (a obţine şi menţine încrederea lor, a ne implica fără ca aceasta să conducă la distorsiuni ale datelor). Observaţiile calitative asupra profesorilor de matematică din diverse licee s-au desfăşurat pe durata unei perioade îndelungate (anii 1999-2005) şi au avut un caracter exploratoriu.

În calitate de unităţi de cercetare / analiză au fost aleşi indivizi – profesori de matematică, care ne puteau furniza date de primă mână, valide şi profunde cu privire la problema cercetată, precum şi la diferite etape ale procesului de desfăşurare a activităţii extracurriculare la matematică.

Am decis asupra cercetării pe mai multe cazuri abordând un demers inductiv, formulând ipoteze şi confirmându-le sau infirmându-le prin logica probei.

Planificarea observării calitative a presupus din start un grad mare de deschidere şi design slab, caracteristice şi utile pentru cercetător la evaluări de programe educative cu valoare formativă / educativă. Pentru observare am ales o postură flexibilă în care unii membri ştiau despre rolul de observator, alţii doar presupuneau. În final, fiind un membru al grupului, nu am avut dificultăţi care nu ar permite recoltarea unor date valide [224, pag.260].

Deoarece nu există proceduri standardizate de eşantionare în metodologia calitativă, am ales o strategie de eşantionare reieşind din accesul economic: cazuri la îndemână, oameni dornici să colaboreze sau suficient de deschişi / curioşi etc.

Eşantionarea a fost orientată de scopul urmărit: de a explora procesul de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică.

Am optat pentru eşantionarea cu maximum de variaţie, atît în funcţie de variabilele sociodemografice clasice (sex/gen, vârstă, etnie, mediu rezidenţial etc.), cît şi în funcţie de poziţia şi experienţa în raport cu problema cercetată, apoi cazurile au fost comparate, în scopul identificării patternurilor (modelelor, regularităţilor) şi diferenţelor specifice. În acelaşi timp am căutat şi cazuri atipice, care, în cazul cercetării noastre, au fost profesori de matematică implicaţi în pregătirea elevilor olimpici.

Eşantionarea calitativă este legată de noţiunea de relevanţă teoretică. Aceasta înseamnă că alegem o unitate de eşantionare sau alta în funcţie de dimensiunile teoretice ale obiectului cercetării (aşa cum le-am definit prin cadrul conceptual şi prin întrebările de cercetare) şi de ipotezele formulate eventual pe parcurs. Practic, trebuie să decidem în ce măsură un tip de unităţi de eşantionare ne oferă mai mult decât altul o informaţie care ne permite să răspundem adecvat unei întrebări de cercetare. Nu ne interesa reprezentativitatea statistică şi generalizarea în populaţia dată; concluziile nu se referă la o populaţie, ci la un pattern / model de acţiune. Vorbim aici despre reprezentativitate în raport cu scopul (nu cu populaţia) şi despre generalizabilitate teoretică – generalizăm la nivelul unui concept al acţiunii, îmbogăţind astfel conţinutul sau precizând sfera respectivului concept.

Întrucât într-o cercetare calitativă eşantionarea nu se realizează la începutul, ci pe parcursul cercetării, putem decide oricând fie să ne oprim, fie să continuăm.

Am decis să ne oprim atunci când:

- informaţia pe care o obţinusem se repeta, vorbim despre saturaţie a datelor (saturaţie empirică);
- am obţinut un model teoretic coerent şi consistent al acţiunii cercetate (saturaţie teoretică).

Am utilizat o observaţie „pâlnie”, începînd cu o etapă de observare globală a „terenului”, fără nici un fel de instrumentare, iar ulterior reducând progresiv aria de observaţie la acţiuni, grupuri, aspecte mai specifice, construind progresiv instrumente din ce in ce mai detaliate.

Instrumentele utilizate în cercetarea calitativă au avut un caracter deschis: pe de o parte, ne-au permis să observăm şi lucruri neaşteptate, la care nu ne-am gândit înainte; pe de altă parte, însă, ne-au focalizat atenţia asupra acelor aspecte care au cea mai mare relevanţă pentru tema cercetării.

La început am întocmit o listă orientativă de aspecte pe care ne-am propus să le observăm. Această listă nu conţine indicatori (comportamente precise, observabile şi măsurabile).

Pentru înregistrarea datelor au fost folosite notele de teren atît cu caracter descriptiv cît şi interpretative, experienţele personale ale observatorului, care constituie parte a datelor. Unul dintre scopurile pentru care ne aflam în teren şi ne apropiam de oamenii din teren a fost acela de a trăi ceea ce se întâmpla acolo.

Observaţia calitativă a condus la formularea unor ipoteze, care au stat la baza elaborării unor anchete aplicate în grupuri de profesori şi de studenţi la specialitatea Matematica.

Scopul nostru a mai constat şi în a completa demersul anterior de analiză calitativă a modelelor de organizare a activităţii de pregătirea a elevilor dotaţi cu informaţii autentice provenite din experienţa culturală şi personală a experţilor din domeniul matematicii. Acest demers solicită profunzime, deschidere, o înlănţuire intre subiectivitatea rezultată din experienţa personală şi obiectivitatea dată de statutul unui expert matematician. Din acest considerent o metodă eficientă a fost *interviul cu experţi*. Ţelul utilizării interviului în cadrul unei metodologii de cercetare calitativă este creionarea unei realităţi personale şi contextuale, îmbibată de experienţele reale, de opţiunile şi concepţiile respondenţilor; toate acestea din prisma contextului, precum şi al statutului celui intervievat.

Metodele aplicate ne-au permis elaborarea unui Model Integrator de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică.

### 3.3. Realizarea cercetării calitative a procesului de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică

Observaţia calitativă a demarat cu formularea unui set de întrebări de cercetare la care urma să se obţină răspunsuri de la profesorii care ghidau practica pedagogică a studenţilor matematicieni ai Universităţii de Stat din Tiraspol.

Pentru început am întocmit o listă orientativă de aspecte pe care ne-am propus să le observăm:

- Căile principale de abordare diferenţiată a procesului de studiere a matematicii în învăţământul preuniversitar;
- Posibilităţi de realizare a obiectivelor integrative la studierea matematicii;
- Dezvoltarea capacităţilor creative ale elevilor în cadrul activităţilor curriculare şi a celor extracurriculare la matematică;
- Utilizarea materialelor cu caracter recreativ în scopul trezirii interesului elevilor pentru studierea matematicii;
- Principiul unităţii dintre senzorial şi raţional în procesul de predare-învăţare a matematicii;
- Particularităţile psihopedagogice de organizare şi desfăşurare a activităţii extracurriculare la matematică;
- Strategii didactice moderne de organizare şi desfăşurare a activităţii curriculare şi extracurriculare la matematică;

- Condiţii de asigurare a eficienţei pregătirii studenţilor pentru activitatea extracurriculară la matematică;
- Aptitudinile (capacităţile) matematice;
- Instruirea copiilor dotaţi şi supradotaţi la matematică;
- Rolul competiţiilor în formarea elevilor dotaţi la matematică;
- Specificul organizării invaţamîntului matematic în şcolile, liceele şi clasele cu studierea aprofundata a matematicii;
- Calitatea învăţământului superior matematic în Republica Moldova.

Primele dialoguri şi observaţii au fost realizate cu profesorii de matematică din două licee, unde am coordonat practica pedagogică a studenţilor. Discuţiile au arătat că studenţii practicanţi au întâlnit diverse dificultăţi în organizarea activităţilor extracurriculare:

- La selectarea materialelor pentru asigurarea activităţii grupurilor de elevi cu diverse niveluri de cunoaştere a materiei;
- În aplicarea aparatului matematic la rezolvarea problemelor din diverse domenii;
- La utilizarea reprezentărilor în explicarea materiei noi şi la rezolvarea problemelor;
- La selectarea materialelor cu caracter recreativ pentru ore şi activităţi extracurriculare;
- În alegerea formelor de organizare şi desfăşurare a activităţii extracurriculare la matematică corespunzătoare diferitor categorii de vârstă;
- La utilizarea unor strategii didactice moderne de organizare şi desfăşurare a activităţii curriculare şi extracurriculare la matematică;
- În pregătirea elevilor pentru concursurile matematice.

În luna iulie 2000 am participat la un atelier de lucru cu un grup de profesori formatori locali, activitatea căruia a fost focalizată pe tema “Metode interactive de activitate la matematică”. Grupul a fost constituit din 15 persoane, recrutate pe baza de voluntariat, şi nu toţi se cunoşteau între ei: C1, BC2, AT3, AM4, EB5, EB6, AM7, AC8, AG9, AD10, ZR11, LT12, NL13, MT14, OC15.

Discuţia s-a axat şi pe problemele formelor de organizare a activităţilor extracurriculare. Printre întrebările lansate în dezbateri au fost şi unele care tangenţial se referă la scopul cercetării noastre:

- ✓ Care sunt formele de organizare şi desfăşurare a activităţii extracurriculare la matematică corespunzătoare diferitor categorii de vârstă?
- ✓ Care sunt cerinţele faţă de conţinuturile abordate la orele de matematică cu elevii în tabără?

- ✓ Care sunt tipurile de probleme care pot fi incluse pentru concursurile în echipă şi individuale?
- ✓ Care sunt criteriile de formare a echipelor pentru concursuri?
- ✓ Cum este apreciată participarea profesorului în calitate de membru în echipele de elevi şi participarea echipei de profesori în competiţie cu echipele elevilor din clasele superioare?
- ✓ Care sunt regulile de comunicare în grupurile mixte „profesor-elevi”?

Discuţiile au fost actuale, deoarece era prima zi de activitate în cadrul Taberei specializate de matematică „ALTAIR – 2000” şi urmau 7 zile de activităţi cu elevii: ore de matematică în prima jumătate a zilei, concursuri cu caracter competiţional la matematică pe categorii de vârstă ş.a. în cealaltă parte a zilei; concursul final de tip-olimpiadă de matematică „ABC – 2000”.

Condiţiile desfăşurării observării calitative au fost următoarele.

Itemi care se referă la obiectul propriu-zis al cercetării:

1. Caracteristici ale ambientului

Tabăra „Cozia” este situată pe Valea Oltului, în staţiunea balneoclimaterică Călimăneşti – Căciulata în imediata apropiere a Mănăstirii Cozia. Cazarea a fost în vile în camere cu 2-6 paturi. Numărul total de persoane cazate a fost de circa 140: profesori, elevi, medic, şoferii autocarelor cu care am călătorit. Tabăra a fost ocupată în întregime de echipa taberei specializate “Altair – 2000”.

2. Caracteristici temporale

Perioada de timp a fost 17-27 iunie 2000. De regulă, activitatea în tabără are un program prestabilit, care include în mod obligatoriu ore de matematică zilnic în grupuri formate pe clase. La clasele gimnaziale şi de liceu au fost implicaţi câte 2 profesori: ambii de matematică sau unul de matematică şi al doilea – de fizică sau limba română. Tabăra specializată “Altair” era la ediţia a V-a. A devenit o tradiţie să fie organizată o tabără specializată pe an, vara, în locuri pitoreşti, pentru a îmbina odihna, activitatea matematică, şi vizitarea obiectivelor turistice din zonă. În acest caz obiectivele turistice au fost: staţiunea Călimăneşti – Căciulata, Rezervaţia Cozia, Cascada Lotrişor, Defileul Oltului, Mănăstirea Cozia, Mănăstirea Turnu, Mănăstirea Stânisoara, Schitul Ostrov.

3. Actorii sociali aşteptaţi

Observaţia s-a facut asupra profesorilor de matematică antrenaţi în toate procesele de pregătire către tabără şi activitatea propriu-zisă a taberei. Toate persoanele erau deţinătoare de cel puţin gradul didactic II, cu experienţă de lucru în instituţiile de învăţământ preuniversitar ca profesori de matematică, inclusiv unii erau directori-adjuncţi pe studii în licee din mun. Chişinău şi cîteva persoane – actuali sau foşţi inspectori la matematică în diverse sectoare ale municipiului. Şase persoane au participat la ediţiile anterioare ale taberei.

Colateral au fost observaţi elevii care manifestau interes deosebit pentru matematică, dar şi ceilalţi.

4. Actori sociali neaşteptaţi

Episodic în activităţile organizate se implicau părinţii prezenţi în tabără datorită copiilor lor. Cauzele că erau prezenţi şi unii părinţi au fost diverse: copiii lor aveau probleme de sănătate, dar au fost selectaţi pentru plecarea la tabără în rezultatul concursurilor anuale; părinţii au dorit să-şi petreacă concediul împreună cu copilul în mod activ; părinţii au vrut să afle cum activiează o tabără de matematică etc. Uneori a fost interesant să observăm cum lucrătorii taberei (bucătari, paznici) se implică emoţional în activităţi.

5. Activităţile aşteptate

Conform programului, ore de matematică erau planificate în fiecare zi, cu excepţia zilei de duminică. În fiecare seară era prevăzut un concurs cu caracter sportiv, artistic sau de inteligenţă. Programul de după prânz prevedea drumeţii la mănăstirile din zonă sau la izvoarele termale din staţiunea balneară. Atelierele de lucru ale profesorilor de matematică erau planificate pentru a fi desfăşurate în perioadele când elevii erau implicaţi în activităţi sportive, cu profesorii de la alte discipline sau se odihneau. Materialele de care dispuneau profesorii erau: materialele didactice pentru orele de matematică extracurriculară, inclusiv pentru concursul final ABC, şi materiale necesare la elaborarea schiţelor de proiecte pentru activitatea ulterioară în calitate de formator local la modulul “Metode interactive de activitate la matematică”.

6. Ce nu se întâmplă din ceea ce ne-am aştepta să se întâmple

Profesorii de matematică nu aveau timp liber decât atunci, când copiii se duceau la culcare şi liniştea taberei putea fi supravegheată doar de profesorii de la alte discipline, medic şi de părinţii prezenţi în tabără.

7. Interacţiunile aşteptate între actorii respectivi. Cum se grupează persoanele observate?

Profesorii au ales clasele şi profesorul-partener cu care urmează să activeze la clasă. De regulă, profesorii îşi aleg la ce clasă vor preda încă în perioada pregătirii către tabără şi preiau elevii de la paralela respectivă care au venit în tabără. Elevii participă la orele organizate zilnic şi la concursul final de matematică corespunzător clasei, dar unii elevi aleg să participe la ore şi în alte clase. Aceasta este caracteristic pentru elevii interesaţi în mod deosebit de matematică şi, de regulă, ei aleg să meargă în clasele superioare. Pentru ei este convenabil să fie afişat programul tematic la fiecare clasă şi profesorii să respecte acest program.

Cum se petrec lucrurile de fapt? Profesorul este responsabil de anumită clasă, în realitate, însă, el este solicitat şi de elevii din alte clase, la care predă pe parcursul anului sau care vin din şcoala unde activează profesorul. Astfel se dizolvă graniţele de influenţă a unui profesor asupra unui grup sau a unei clase.

b. Ce tipuri de relaţii se stabilesc între diferite grupuri?

Profesorii nu sunt constituiţi în grupuri după careva criterii. Putem vorbi despre grupuri flexibile care se constituie pentru a participa la anumite concursuri sau grupuri formate în cadrul atelierelor de lucru. Adesea profesorii sunt membri ai grupului de elevi cu care lucrează şi îi consultă, încurajează, ajută în activităţi. Se promovează mereu competiţia sănătoasă şi respectarea valorilor tuturor membrilor şi grupurilor. Lucrurile de fapt se petrec într-o atmosferă binevoitoare, doar cu mici incidente, care se soluţionează la momentul producerii sau când se află despre ele.

c. Cine ia deciziile? Cum sunt înregistrate şi comunicate deciziile?

De regulă în tabără se iau decizii colective. Programul de activitate al taberei şi regulile generale care sunt aprobate până la plecarea de acasă sunt comunicate profesorilor, părinţilor şi elevilor la şedinţa generală dinaintea plecării. Modificările de program care sunt solicitate în perioada taberei se analizează seara de către grupul de profesori din tabără şi se aduc la cunoştinţă tuturor la careul de seară sau din dimineaţa zilei următoare.

d. Cum se raportează ceilalţi membri la deciziile luate?

Sunt ascultate părerile părinţilor şi ale elevilor, sunt discutate şi este stabilit consens pe întrebările unde apar divergenţe.

8. Limbajul folosit între profesori, profesori şi elevi, elevi este unul obişnuit mediului şcolar, atunci când se desfăşoară activităţile cu caracter matematic. Însă profesorul supraveghează absolut toate acţiunile elevilor grupului său, de aceea se discută atât despre comportament în timpul repaosului de la ore, cât şi în toate momentele ce ţin de igienă, somn, trezire etc. În mediul elevilor se aprobă şi anumite expresii codate pentru specificarea unor acţiuni, despre care nu ar trebui să ştie profesorii sau părinţii. Foarte des sunt utilizate fraze de încurajare, slogane ale suporterilor.

9. Comunicarea nonverbală: cine? ce mimică, gesturi? Cui sunt adresate? Unde? Când? Ce mesaj vrea cel în cauză să comunice?

Se observă o diferenţă de gender în comunicare nonverbală înafara activităţilor matematice. Profesorii bărbaţi au o abordare mai severă în cazul problemelor legate de disciplină, igienă, comportament în timpul activităţilor care solicită necesitatea de a depune efort mai mare.

Adesea elevii din clasele superioare îşi asumă rolul de prieten mai mare (şi se comportă ca atare) pentru copii din clasele mici care au dificultăţi de adaptare la mediul din tabără, la viaţa departe de părinţi, la stresul situaţiilor de competiţie şi concurenţă permanentă etc.

*Concluziile care am putut să le facem în rezultatul observărilor sunt următoarele.*

De regulă, profesorii vin în tabără cu proiectele lecţiilor elaborate. Se recomandă ca tematica propusă de profesor să îmbogăţească materia studiată de elevi pe parcursul anului de studii anterior. Contingentul grupelor este format din elevi din diverse şcoli, astfel elevii au diferită pregătire. Sunt profesori care nu acceptă să modifice proiectele elaborate acasă, şi toţi elevii se acomodează la nivelul de dificultate propus de profesor. La unele clase profesorii lucrează în perechi simultan, după acelaşi proiect, asumându-şi rolul de lider în anumite secvenţe şi completându-se reciproc în timpul activităţii.

Profesorii au anumite preferinţe:

- Predarea anumitor compartimente ale matematicii: algebră vs geometrie în clasele gimnaziale; analiză matematică vs algebră şi geometrie în clasele liceale.
- Teme concrete din extinderi: partea întreagă şi partea fracţionară; ecuaţii şi inecuaţii cu parametru; metoda coordonatelor, numere complexe în geometrie; inegalităţi; grafuri; invarianţi; vectori; polinoame şi aplicaţiile lor; aplicaţii ale matematicii în probleme practice cotidiene etc.
- Forme de organizare a activităţii: frontal; în grup; individual.
- Utilizarea modelelor, reprezentărilor pentru sporirea comprehensiunii.
- Utilizarea elementelor de istorism.
- Propedeutica unor noţiuni care vor fi studiate peste un an sau mai mulţi.

De exemplu, profesoara EB6 are peste 55 de ani şi un stagiu de muncă mai mare de 30 de ani. Mulţi ani la rând a condus cercul de elevi în diferite clase. Comunică foarte uşor cu elevii, cu părinţii lor şi cu profesorii, dar şi cu persoane necunoscute. La activităţi preferă să rezolve cu elevii probleme puţin mai complicate de cât nivelul mediu, dar activităţile sunt animate de intervenţiile sale, care au amprenta unui rol al actorului de comedie. Un rol foarte important în proiectele activităţilor este atribuit metodei de rezolvare în gând a problemelor şi expunerea verbală a rezolvării. În cadrul activităţilor în grup este o atmosferă descătuşată, dar elevii nu sunt lăsaţi să se distreze. Se lucrează cu majoritatea elevilor, elevii sunt implicaţi în formularea întrebărilor pentru a ajuta elevul care rezolvă problema la tablă sau pentru a-şi verbaliza sie însăşi calea de rezolvare a problemei. Se vorbeşte foarte mult la lecţie. Din comunicarea cu profesoara determin că dispune de materiale didactice diverse, acumulate de-a lungul anilor, păstrează proiectele didactice din anii anteriori şi le adaptează la programele noi. Este coautor la câteva lucrări metodice, preponderent destinate calculului oral, captării atenţiei, rezolvării problemelor de geometrie pe desene gata.

Profesoara EB5 are vârsta sub 40 de ani. Are experienţă pedagogică în calitate de profesor de matematică, dar şi experienţă managerială (inspector). Comunică uşor cu oricine. Este deschisă pentru modificarea programului prevăzut de proiectele elaborate. De fiecare dată adaptează scenariul activităţii, reieşind din contingentul de elevi prezenţi la ore. Are teme preferate din materia pentru lucrul cu elevii dotaţi la matematică şi explică elevilor cu meticulozitate nuanţele legate de noţiunile noi. Oferă elevilor libertatea de a explora soluţionarea problemelor prin diverse metode, nu are complexul de a se feri de problemele dificile descoperite împreună cu elevii sau ale căror rezolvare nu şi-a pregătit-o din timp. Dă elevilor posibilitatea de a cugeta împreună, de a greşi, a descoperi rezolvarea, de a lăsa problema deschisă pentru a se documenta în timpul cel mai apropiat şi a reveni. Pregăteşte zilnic câte o problemă distractivă pentru sfârşitul activităţii, care nu ţine de materia studiată şi nu contează ce cunoştinţe ai – poţi încerca să o rezolvi.

AT3 are vârsta sub 40 de ani. Are experienţă pedagogică în calitate de profesor de matematică, dar şi experienţă managerială (director adjunct, inspector). Preferă să lucreze cu elevii de gimnaziu. Nu este axată pe anumite compartimente ale matematicii sau clase. Pregăteşte cu minuţiozitate fiecare activitate. Are talent pentru confecţionarea materialelor didactice şi desen, de aceea rezolvările sunt însoţite de ilustraţii ale procesului de rezolvare sau ale datelor problemei. Având imaginaţia spaţială bine dezvoltată, reprezintă foarte bine figurile geometrice, evidenţiind aspectele valoroase care facilitează rezolvarea problemei. Este o fire poetică şi selectează adesea versuri sau fragmente din texte interesante care se referă tangenţial la tema studiată. Are experienţă în evaluarea şi aprecierea cunoştinţelor şi a gradului de implicare a elevilor în activităţi, de aceea pe parcursul activităţilor introduce scheme de notare şi contorizare a rezultatelor, astfel încât la sfârşitul orei toţi elevii ştiu ce punctaj au acumulat şi ce apreciere vor primi. Activităţile extracurriculare se finalizează, de regulă, cu un concurs pe echipe sau individual, rezultatele căruia permit să fie desemnat câştigătorul final care a acumulat cele mai multe puncte pe parcursul întregii activităţi.

TC1 este o autoritate incontestabilă pentru toţi participanţii la tabără. Are capacitatea de a mobiliza persoanele la munca colectivă. Foarte des participanţii la activităţi primesc sarcini pentru acasă, pe care nu ezită să le execute. De regulă, sarcinile sunt formulate pentru echipe, astfel elevii lucrează în parteneriat, discută modalităţile de realizare a ideilor, soluţiile. În cadrul activităţii prinde privirile elevilor şi anticipează neclarităţile, dar şi ideile interesante, oferă elevilor posibilitatea de a continua gândul altei persoane, de a raţionaliza rezolvarea deja obţinută. Este foarte dinamică în gândire şi în mişcare, explorează, oferindu-le elevilor suporturi diverse şi multă libertate pentru a lucra independent.

CB2 are circa 58 de ani, dar este într-o formă fizică foarte bună. Activităţile decurg în stil clasic, accentul punându-se pe predare şi verificarea cunoştinţelor, dar cu deosebită grijă sunt selectate problemele pentru fiecare activitate şi pentru concursurile finale. Problemele propuse pentru concursuri sunt alcătuite personal de către profesor. Este foarte exigent la evaluarea temelor pentru acasă, a lucrărilor prezentate. Consideră că matematica necesită cea mai mare seriozitate pentru a fi studiată, de aceea distracţiilor nu le este locul în cadrul activităţilor matematice.

AM7 are circa 35 de ani. Deţine gradul didactic I. Colaborează cu elevii. Preferă metodele activ-participative de predare-învăţare-evaluare. Este preocupată de dezvoltarea creativităţii la elevi. Consultă foarte multă literatură de specialitate şi aplică în practica educaţională tehnici noi, pentru a atrage elevii în activitate.

AM4 are circa 30 de ani. Are puţină experienţă didactică, dar lucrează foarte mult pentru a se pregăti pentru fiecare activitate. Selectează foarte minuţios problemele, le rezolvă singură prin diverse metode pentru a fi sigură că la ore nu va fi luată prin surprindere cu rezolvări neaşteptate din partea elevilor. Preferă să lucreze la clasele de gimnaziu. Este ea însăşi în proces de formare profesională. Nu ezită să întrebe profesorii cu experienţă cum să procedeze în diverse situaţii sau cum se rezolvă unele probleme mai dificile.

AC8 are circa 30 de ani. Nu a mai fost în tabere. Are puţină experienţă didactică şi a preferat să lucreze cu elevi din clasele primare, pentru care se cere mai puţină pregătire matematică. Preponderent lucrează la consolidarea cunoştinţelor elevilor, fără a spori prea mult gradul de dificultate al materiei abordate. În cadrul orelor se axează pe organizarea concursurilor de rezolvare rapidă a problemelor în grup sau individual.

AG9 are sub 40 de ani. Deţine gradul didactic II. Nu a mai fost în tabere. Lucrează la clasele gimnaziale. Preponderent lucrează la consolidarea cunoştinţelor elevilor, fără a spori prea mult gradul de dificultate al materiei abordate.

AD10 are circa 40 de ani. Deţine gradul didactic I. A fost în tabere de la prima ediţie. Lucrează la clasele liceale. A venit cu elevi din clasele în care predă şi aprofundează cunoştinţele elevilor în cunoştinţă de cauză, reieşind din lacunele pe care le au şi interesele depistate la şcoală. Este meticuloasă, preferă explicaţiile detaliate şi demonstrările riguroase din compartimentul de analiză matematică. Are un stil democratic de predare şi elevii din clasele în care lucrează manifestă foarte multă independenţă şi respect.

ZR11 are circa 40 de ani. Deţine gradul didactic I. A mai fost în tabere. Lucrează la clasele gimnaziale. Preferă să predea preponderent algebră. Este meticuloasă, preferă explicaţiile detaliate din partea elevilor. Mai puţin explică, dar formulează mai mult întrebări, solicitând răspunsuri de la elevi, uneori cu un ton ridicat. Are un stil puţin autoritar de predare şi unii elevi sunt cam stresaţi. Este foarte responsabilă, îşi planifică riguros programul şi nu se abate de la el, nici altora nu le permite să nu respecte cele planificate.

LŢ12 are circa 50 de ani. Predă matematica şi informatica şi este pasionată de ambele. Lucrează la clasele de liceu. Preferă să abordeze problemele interdisciplinar. Comunică foarte mult cu elevii, cunoaşte detalii biografice de la fiecare elev. Ştie punctele lor forte şi punctele slabe. Îi încurajează pe unii îi tempereazǎ pe alţii, găseşte cuvinte speciale pentru fiecare. Are calităţi de a forma şi a consolida echipele de elevi, este gata să lucreze cu elevii fără pauze, de dimineaţă până seara.

În rolul meu de observator nu am ştiut la ce clasă voi fi profesor, prin urmare nu am avut posibilitatea să elaborez din timp proiecte ale activităţilor. Dar am fost implicată la diferite clase în diferite zile, preponderent solicitându-mi-se să predau geometrie.

A fost o experienţă interesantă să predau cu cineva în pereche, de fiecare dată cu altă persoană sau să preiau pentru o zi una din grupe, care se acomodase la un profesor concret, sau care veniseră din aceeaşi clasă. Este utilă experienţa de a depista stiluri de predare prin intermediul celor care învaţă.

Observarea calitativă am mai avut posibilitatea să o realizez în continuare pe parcursul perioadei 2001-2011 în cadrul taberelor specializate de matematică. La această mişcare au aderat noi personaje, altele au plecat.

De exemplu, NL13 (vârsta – circa 50 ani) are experienţă de lucru cu copii dotaţi şi supradotaţi la matematică. Deţine grad didactic superior. La toate temele are o abordare proprie. Pentru diverse situaţii din cadrul activităţilor are un arsenal întreg de istorioare din viaţa matematicienilor, probleme-capcană, bancuri în care sunt eroi elevii pe care i-a învăţat cândva etc. Spuse la momentul potrivit, aceste istorioare descătuşează elevii, îi motivează să gândească, le creează buna dispoziţie. Predă disciplina la cel mai aprofundat nivel posibil, reuşind să mobilizeze elevii din clasele în care predă să se pregătească pentru concursuri în baza materialului predat doar în timpul lecţiilor obişnuite.

MT14 (vârsta – circa 35 ani) are experienţă de lucru cu copii dotaţi şi supradotaţi la matematică. A participat la câteva ediţii ale taberei ICAR. De regulă, aduce în tabără echipa de elevi cu care lucrează. Elevii nu sunt de la aceeaşi paralelă. La activităţile sale elevii studiază materialul pe module. Elevii din clasele mai mici sunt ghidaţi de elevii din clasele superioare. Elevii studiază foarte mult suplimentar independent. Activitatea în cadrul orei se axează pe rezolvarea problemelor cu grad sporit de dificultate. Este bine organizată activitatea de explorare. Se solicită argumentări detaliate cu referinţă la teoreme celebre studiate. Elevii mai mici sunt implicaţi în audierea metodelor de rezolvare a unor clase de probleme, în jurul cărora sunt create microteorii şi selectate seturi de probleme. Subiectele pentru microteorii sunt sugerate de diverse probleme, în particular cele de la olimpiade internaţionale. Elevii sunt implicaţi în elaborarea suporturilor didactice pentru studierea modulelor, dar şi la scrierea lucrărilor ştiinţifico-didactice: articole, paragrafe în culegeri de probleme, cărţi pe tematica problemelor propuse la olimpiade.

OC15 are circa 30 de ani. Are puţină experienţă didactică, dar este un pedagog înnăscut. Are capacităţi organizatorice deosebite şi implică elevii în activităţile de pregătire pentru ore şi concursuri. Selectează minuţios conţinuturile pentru ore, diversifică problemele pentru a oferi elevilor variante independente pentru antrenament. Preferă să lucreze la clasele de liceu. Este ea însăşi în proces de formare profesională. Colaborează cu profesorii cu experienţă, pe elevi îi tratează cu încredere.

Analiza observărilor calitative a activităţii extracurriculare desfăşurate de profesorii cu experienţă în acest domeniu a permis să formulăm unele ipoteze cu privire la posibilităţile de îmbogăţire a cursurilor universitare pentru o pregătire specială a viitorilor profesori de matematică.

Ipotezele sunt următoarele:

1. În activitatea extracurriculară vor avea succese profesorii care sunt pasionaţi de matematică şi au cunoştinţe trainice în domeniu.

2. Activitatea extracurriculară necesită cunoştinţe profunde în domeniul psihologiei şi abilităţi de comunicare bine dezvoltate.

3. Majoritatea elevilor sunt atraşi de activităţile extracurriculare cu caracter recreaţional, dar pentru elevii dotaţi şi supradotaţi aceste activităţi nu sunt suficiente, ei preferă soluţionarea de probleme dificile, subiecte din diverse domenii, formularea întrebărilor provocatoare pentru profesor.

4. Dacă profesorii au un compartiment preferat din matematică, în majoritatea cazurilor, ei „molipsesc” şi elevii de aceste conţinuturi, prin dezvăluirea tuturor aspectelor temei, accesibile elevilor din categoria de vârstă respectivă. Astfel, elevii ajung mici „experţi” în problemele de acest tip. Este bine ca profesorii să-şi acumuleze un arsenal cât mai bogat de astfel de compartimente, dar aceasta se obţine, dacă se purcede la studierea profundă cât mai timpurie a matematicii.

5. Procesul de organizare şi desfăşurare a activităţii extracurriculare la matematică necesită activitate creativă atât în domeniul didacticii cât şi în domeniul matematicii. Creativitatea în matematică se începe odată cu studierea matematicii, dar se conştientizează în anii de studenţie. Pentru ghidarea eficientă a activităţii creative a elevilor la matematică este necesar ca profesorul să fi „simţit” personal acest proces.

6. Este de dorit ca profesorul să cunoască şi alte domenii (sau să aibă un hobby) care să-l motiveze să realizeze obiective interdisciplinare, să cunoască aplicaţii practice ale matematicii.

7. Profesorul trebuie să experimenteze diverse tehnici de facilitare a învăţării matematicii, inclusiv dezvăluirea epistemologiei şi istoriei unor noţiuni şi teorii matematice în scopul cointeresării elevilor.

8. Activitatea de pregătire a elevilor către concursurile şi olimpiadele de matematică are o multitudine de aspecte. Formele practicate de profesor în această activitate trebuie să fie diverse şi să aibă în vedere particularităţile individuale ale fiecărui elev.

9. Elevii dotaţi sunt preponderent tentaţi să facă cercetări, să exploreze diverse situaţii la limită, iar profesorul trebuie să fie gata să-i provoace la investigaţii, dar şi să facă faţă provocărilor din partea elevilor.

10. Elevii dotaţi la matematică sunt adesea sensibili şi ei necesită atenţie din partea maturilor până la concursuri, în timpul concursurilor şi după concursuri.

În scopul confirmării ipotezelor a fost elaborată o anchetă care a fost aplicată pe un eşantion de circa 130 de profesori aflaţi la cursuri de perfecţionare. Profesorii implicaţi în studii au avut diferite vârste, cel mai tânăr având 24 de ani, iar cel mai în vârstă – 74 de ani. Ancheta este expusă în Anexa 6.

La elaborarea chestionarului s-a decis că va fi evaluată situaţia privind următoarele aspecte:

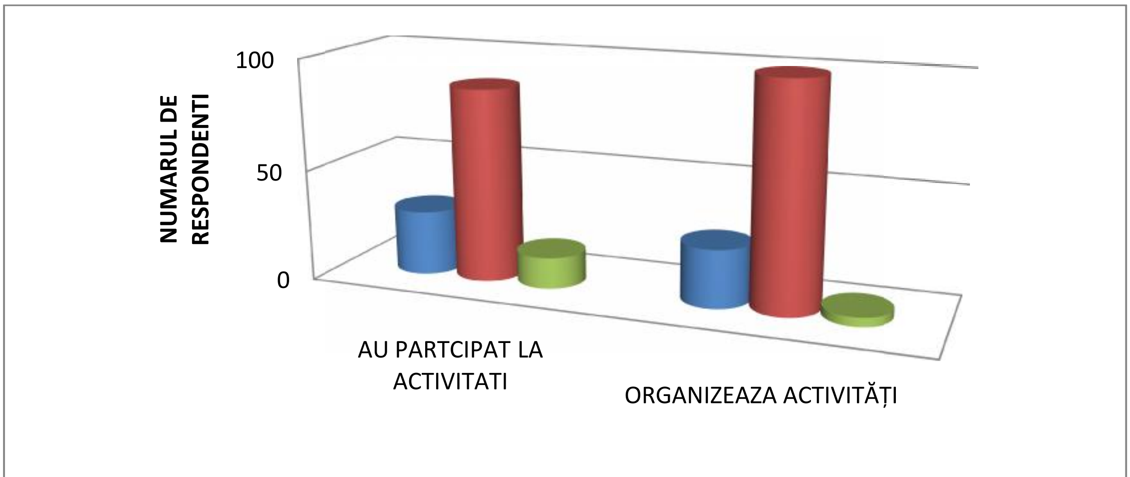
- Stabilirea unei corelări între participarea în activităţi extracurriculare în perioada studiilor şi practicarea activităţilor extracurriculare în activitatea profesională.
- Opinia profesorilor cu privire la pregătirea iniţială a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică.
- Care sunt factorii care trebuie să se îngrijească de dezvoltarea aptitudinilor copiilor dotaţi la matematică.
- Gradul de disponibilitate a profesorilor de a lucra cu copii dotaţi.
- Care sunt disciplinele şi conţinuturile pe care ar dori să le studieze mai profund pentru a obţine performanţe la clasă.
- Care este opinia profesorilor privind frecvenţa cursurilor de perfecţionare în instruirea continuă a cadrelor didactice, ce posibilităţi de formare li s-au mai oferit pe parcursul activităţii didactice.

Pentru corelarea informaţiilor obţinute între diferite grupuri au fost culese date demografice. Chestionarul a fost administrat în perioada 2008 – 2010. Contingentul celor intervievaţi poate fi clasificat după cum urmează: au fost intervievate persoane cu stagiu de muncă pedagogică cuprins între 2 şi 10 ani – 10% , între 10 şi 15 ani -

8%, între 15 şi 20 de ani – 11,8%, între 20 şi 30 de ani – 28,3 % mai mult de 30 de ani 41,9%.

Deţinători de grad didactic sunt repartizaţi în felul următor: gradul I şi grad superior – 8,7%, gradul II – 81,9%, nu deţin grad didactic – 9,4%.

Răspunsurile înregistrate la întrebările „Aţi fost implicat(ă) în activităţi extracurriculare la matematică fiind elev sau student (episodic sau permanent)?” şi „Preferaţi să organizaţi activităţi extracurriculare episodic sau permanent?” s-au repartizat în modul ilustrat în Figura 3.1.




| | AU PARTCIPAT LA ACTIVITATI | ORGANIZEAZA ACTIVITĂȚI |
|---|---|---|
| SISTEMATIC | 29 | 26 |
| EPISODIC | 87 | 100 |
| NU | 14 | 4 |

Fig.3. 1. Frecvenţa participării cadrelor didactice la activităţi extracurriculare în perioada studiilor şi a organizării activităţilor extracurriculare în practica profesională

Nu s-a observat o corelare între participarea sistematică la activităţi extracurriculare în timpul studiilor şi practicarea sistematică a acestor activităţi în calitate de profesor, dar există o corelare între cei care practică sistematic organizarea activităţilor extracurriculare şi şi-ar asuma responsabilitatea de a lucra cu copiii dotaţi la matematică. În acelaşi timp majoritatea profesorilor (89,8%) au participat la olimpiadele de matematică şcolare în perioada studiilor, fapt care ne permite să afirmăm că majoritatea cadrelor didactice au experienţă proprie de participare la concursuri de matematică de diferite niveluri.

La întrebarea „Consideraţi că aveţi suficiente cunoştinţe şi abilităţi pentru a organiza activităţi extradidactice la matematică?” numai 44,9% au răspuns „Da”.

Răspunsurile la cerinţa să aranjeze domeniile matematica, pedagogia, didactica matematicii şi psihologia în ordinea descreşterii importanţei lor în pregătirea profesională a cadrelor didactice pentru a organiza activităţi extracurriculare la matematică sunt prezentate în Figura 3.2.

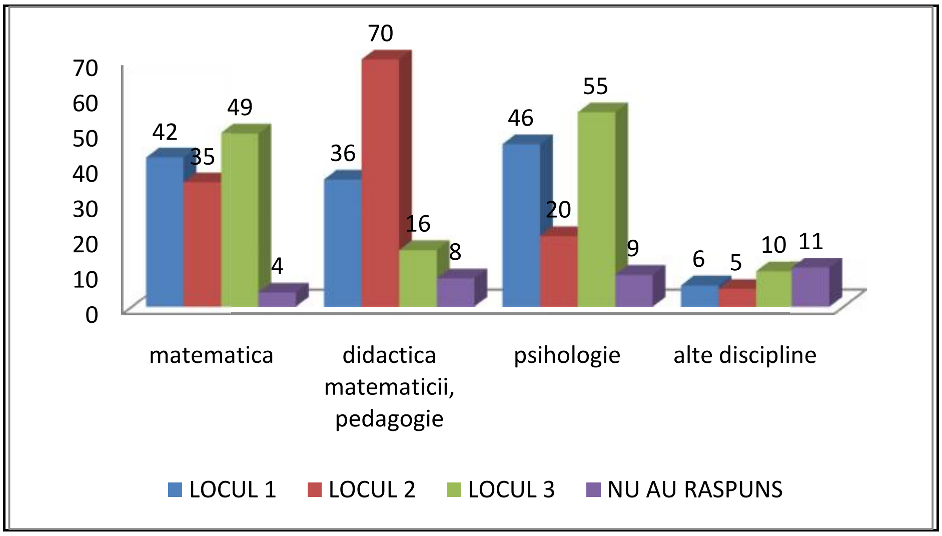



Fig.3. 2. Domenii prioritare pentru pregătirea către organizarea desfăşurarea activităţilor extracurriculare

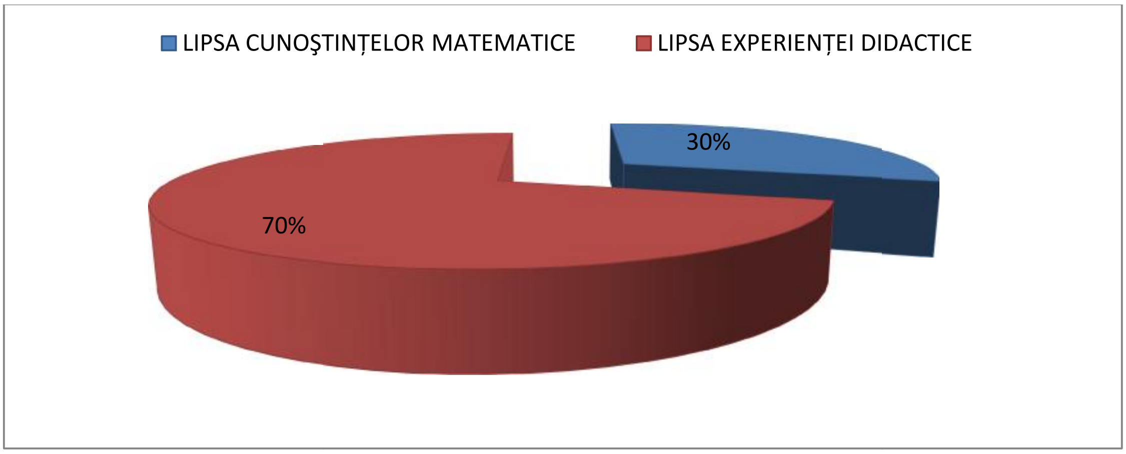



Fig.3. 3. Temeri exprimate de cadrele didactice referitor la disponibilitatea de a lucra cu copiii dotaţi la matematică

Din numărul total de respondenţi circa 43% au declarat că au suficiente cunoştinţe pentru a preda în grupe de copii dotaţi la matematică. Însă chiar dacă au cunoştinţe suficiente, ei au careva temeri referitor la desfăşurarea acestei activităţi. S-a constatat că circa 29,7% dintre respondenţii care au răspuns „Nu" la întrebarea privind disponibiltatea de a lucra cu copiii dotaţi consideră că au pregătire insuficientă la matematică pentru a preda copiilor dotaţi, iar circa 70,3% - că nu posedă experienţa necesară (tehnici, metode, forme) pentru a preda copiilor dotaţi (Figura 3.3.).

Opiniile cu privire la educaţia copiilor dotaţi s-au împărţit în felul următor:

64% din respondenţi consideră că sunt necesare şcoli şi centre speciale, 11% din respondenţi consideră că de instruirea copiilor dotaţi trebuie să se îngrijească părinţii acestor copii, 1% din respondenţi consideră că ei se descurcă singuri, ceilalţi au fost de alte păreri, pe care nu le-au nominalizat (Figura 3.4.).

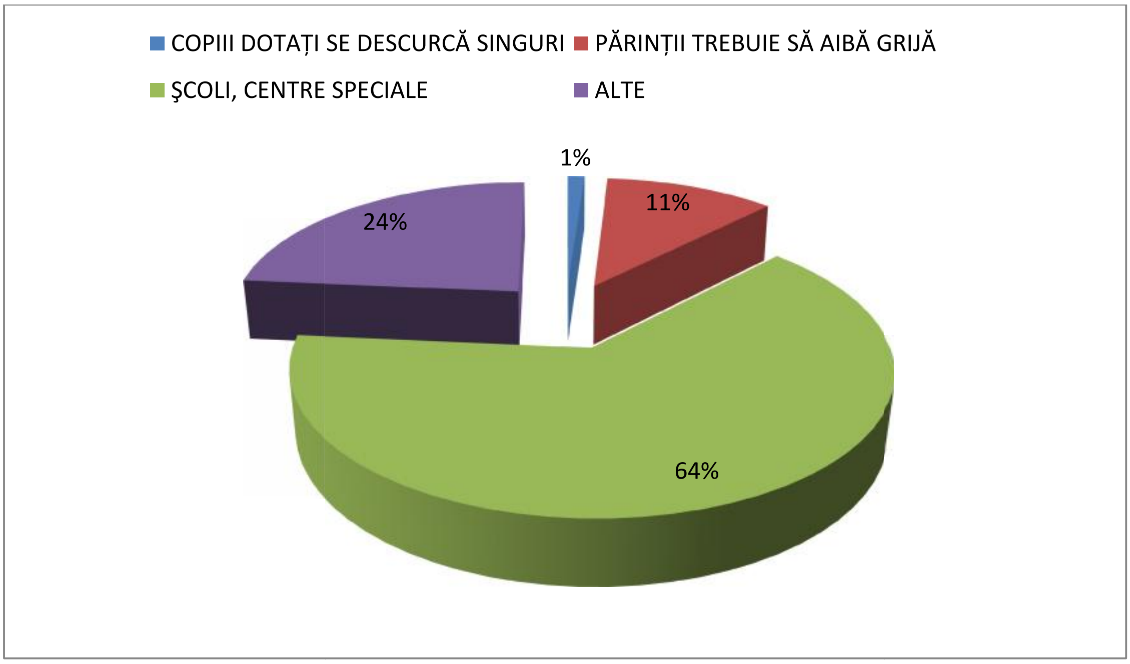



Fig.3. 4. Opinii ale cadrelor didactice cu privire la educaţia copiilor dotaţi

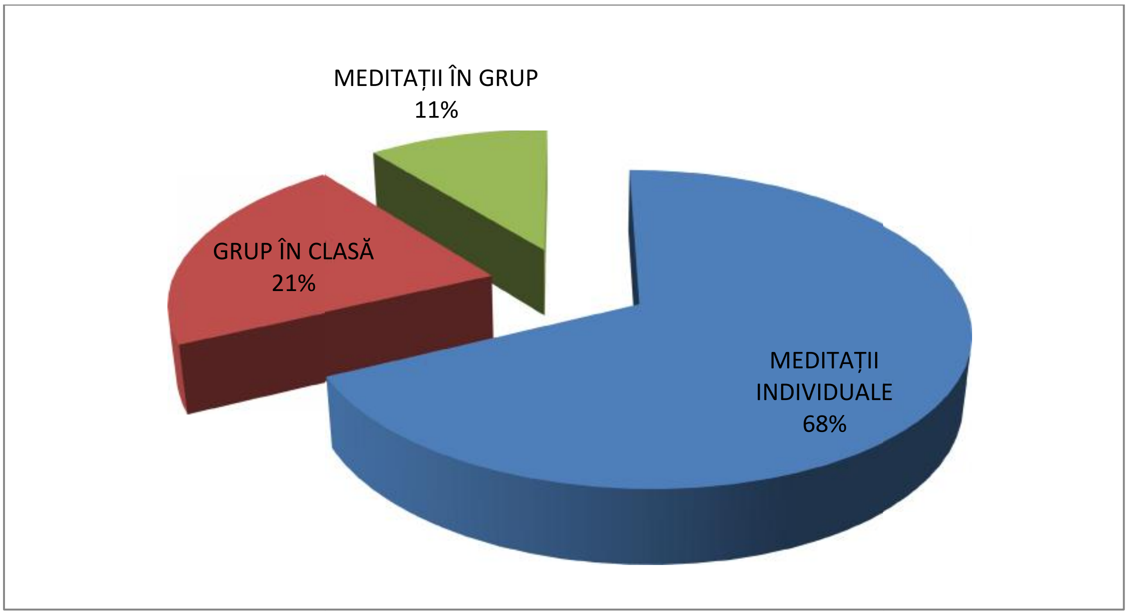



Fig.3. 5. Forme de activitate practicate de cadrele didactice în lucrul cu copii dotaţi la matematică

Rezultatele privind formele de lucru practicate cu copii dotaţi la matematică sunt: 68% au lucrat sau lucrează în particular cu astfel de elevi; 21% lucrează mai activ cu grupuri stabile de copii dotaţi din clasele în care predau; 11% predau în grupuri special formate pentru studierea matematicii la nivel aprofundat (cercuri, ore facultative sau opţionale). Datele sunt prezentate în Figura 3.5.

Circa 64% sunt de părere că de instruirea copiilor dotaţi trebuie să se îngrijească societatea, prin crearea unor centre speciale.

24% au avut alte opţiuni: clase specializate, mai multe profiluri pe discipline înrudite în licee, sau au presupus că se pot găsi alternative.

La întrebarea „Aţi dori să vă continuaţi studiile în domeniul didacticii matematicii? Dacă da, selectaţi cursurile pe care aţi dori să le ascultaţi.” S-au obţinut rezultatele reprezentate în Figura 3.6.

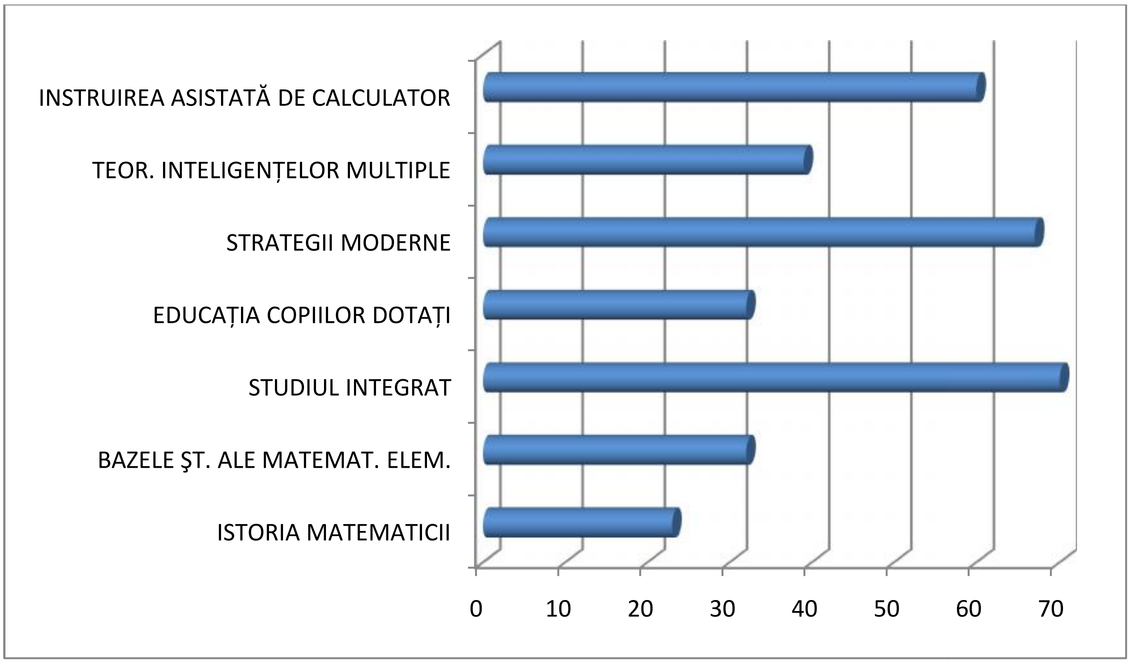



Fig.3. 6. Cursuri pentru formare continuă selectate de cadrele didactice

Aceasta listă de subiecte a fost luată în considerare în procesul de elaborare a conţinuturilor cursului opţional *„Bazele metodologice ale activităţii extracurriculare la matematică”*.

Paralel cu observarea calitativă a activităţii profesorilor practicieni la tematica abordată de noi în cercetare, am evaluat abilităţile şi disponibilitatea studenţilor de a se pregăti şi a desfăşura activităţi extracurriculare la matematică.(Anexa 7.)

Eşantionul de studenţi cercetat de noi este alcătuit din tineri vârsta cărora variază intre 19-24 ani. Din punct de vedere psihopedagogic această categorie de vârstă este una de tranziţie, pe durată căreia se manifestă atît caracteristici ale adolescenţei cit şi caracteristici noi ale tinereţii, ale stării de adult tânăr [74]. În lucrarea [229, pag. 91] sunt descrise competenţele care se referă la pregătirea cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară. Dezvoltarea competenţelor practice de organizare a activităţilor extracurriculare la studenţi se realizează în perioada practicii pedagogice. Însă în cadrul practicii pedagogice nu avem posibilitatea de a ne axa pe activităţile extracurriculare cu caracter sistematic, de aceea scenariile elaborate şi prezentate de studenţi se referă preponderent la activităţile episodice. Practica demonstrează că studenţii preferă să realizeze activităţi extracurriculare cu caracter competitiv (Figura 3.7.). În urma efectuării unor sondaje, a observărilor efectuate asupra studenţilor practicanţi în procesul elaborării scenariilor activităţilor extracuriiculare la matematică s-a constatat că implicarea studenţilor în activitatea extracurriculară în instituţiile preuniversitare este oportună din motiv că ei sunt capabili de a se supune riscului şi a activiza diverse categorii de elevii: cu succese instabile, care se abat de la tempoul de lucru comun pentru toţi, cu un comportament ciudat, de neînţeles, care intervin în clasă cu comentarii ridicole, preocupaţi de afacerile proprii (individualişti), care nu pot să comunice cu alţii, conflictuali, uneori „obtuzi", şi care uneori nu pot înţelege ceva evident, care nu sunt întotdeauna dispuşi să se supună majorităţii sau profesorului. Capacitatea de a antrena în activitate elevii care poseda calităţile enumerate mai sus este considerată de către practicieni drept capacitate a unui profesor non-standard, capabil de a detecta, identifica, a vedea talentul ascuns, de a motiva copii dotaţi la matematică pentru o activitate investigaţională intensă la disciplină, iar acesta este unul din scopurile de bază ale învăţământului centrat pe subiect.

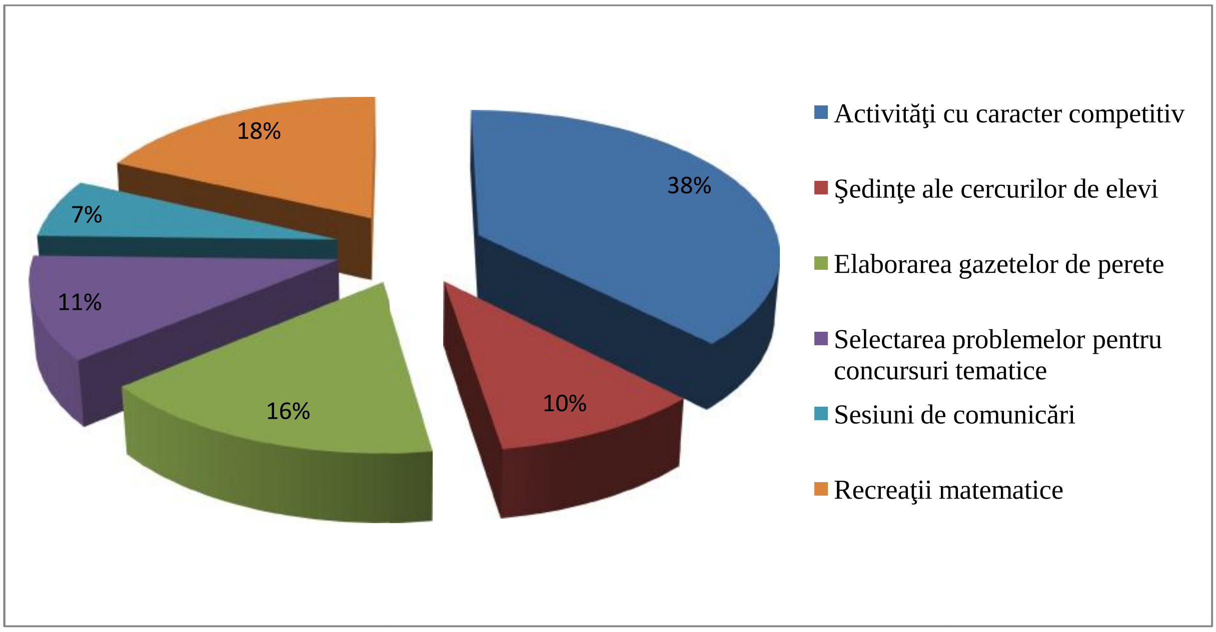



Fig.3. 7. Activităţile extracurriculare preferate de studenţi în timpul practicii pedagogice

În procesul de elaborare a scenariilor pentru activităţile extracurriculare în perioada practicii pedagogice am determinat care sunt recomandările de care urmează să se ghideze studentul practicant, reieşind din tipul de activitate selectat pentru prezentare:

1. Selectaţi o temă de investigaţie pe care vreţi să o abordaţi. Tema poate avea caracter psihopedagogic sau poate să se refere la un compartiment al matematicii deja studiat de elevii clasei la care se desfăşoară practica ori la compartimentul în proces de studiere.
2. Documentaţi-vă din diverse surse bibliografice asupra tematicii selectate. Dacă tema se referă la matematică, literatura recomandată va include curriculum-ul la matematică, manualele şcolare de bază utilizate şi cele auxiliare, în care este expusă tema, culegeri de probleme şi exerciţii de la concursurile matematice, cărţi de popularizare a ştiinţei etc. În cazul selectării unei teme cu caracter psihopedagogic, înafara de literatura matematică, vor fi consultate şi surse referitoare la tematica abordată, la particularităţile de vîrstă şi comportamentale ale elevilor.
3. Stabiliţi care sunt mijloacele didactice necesare pentru desfăşurarea activităţii.
4. Stabiliţi care sunt formele de organizare a secvenţelor descrise în scenariu, care vor fi utilizate în cadrul activităţii.
5. Stabiliţi care este zona dezvoltării proxime a elevilor pentru ca subiectele propuse pentru cercetare în cadrul activităţii extracurriculare să creeze situaţii-problemă elevii, dar să fie accesibile pentru soluţionare.

Examinarea tematicii abordate în cadrul activităţilor extracurriculare pe perioada practicii pedagogice şi a gradului de pregătire a studenţilor pentru proiectarea şi organizarea acestor activităţi a permis să identificăm trei niveluri de performanţă în evaluarea competenţelor studenţilor în conformitatea cu taxonomia modernizată a obiectivelor educaţionale după Bloom.

Abordarea tematicii cu privire la dimensiunea proceselor cognitive este un prilej ca studenţii să-şi autoevalueze propriile aptitudini, calităţi psihice. Astfel, involuntar apare motivaţia pentru formularea unor teme de investigaţie în zona de interferenţă a didacticii cu psihologia. Din temele propuse pentru lucrul individual la psihologie am selectat şi adaptat o listă de subiecte, care se referă atât la activităţile extracurriculare la matematică, cât şi la particularităţile de lucru cu copiii dotaţi şi cu cei capabili de performanţe înalte:

1. Intelectul şi componentele lui structurale. Testele psihologice, posibilităţile şi valoarea lor. Teste de inteligenţă şi psihometrice. Identificarea copiilor dotaţi la matematică.

2. Particularităţile aprecierii şi autoaprecierii la elevi. Autoaprecierea şi nivelul pretenţiilor personalităţii. Rolul autoevaluării în participarea la competiţiile matematice.
3. Sistemul motivaţional uman, structura şi caracteristica lui. Problema motivării elevilor pentru studierea matematicii.
4. Esenţa şi funcţiile atenţiei. Rolul jocurilor didactice în dezvoltarea atenţiei elevilor în cadrul lecţiilor de matematică.
5. Sensibilitatea şi măsurarea ei, fenomenul adaptării. Managementul succesului.
6. Complexitatea percepţiei. Reprezentările în activitatea de predare-învăţare a matematicii.
7. Importanţa memoriei în studierea matematicii. Aplicarea tehnicilor de memorare în studierea matematicii. Reguli mnemonice. Esenţa uitării, fenomenul reminiscenţei.
8. Gândirea ca proces de rezolvare a problemelor. Dezvoltarea gândirii în procesul de studiere a matematicii. Operaţiile gândirii şi formarea lor prin învăţământul matematic. Stiluri de învăţare. Creativitatea.
9. Teoria inteligenţelor multiple. Aplicaţii în studierea matematicii.
10. Stresul şi afectul ca stări psihice deosebite, cauzele apariţiei lor. Competiţiile matematice. Impactul competiţiilor matematice asupra stării psihice a elevilor participanţi. Rolul consilierii psihologice în atenuarea influenţei stresului şi a sentimentelor de euforie exagerată.
11. Problema aptitudinilor. Aptitudinile matematice. Talentul. Copiii dotaţi şi supradotaţi. Societatea Mensa International.
12. Rolul familiei în menţinerea şi dezvoltarea interesului şi motivaţiei pentru studierea matematicii.

Tematica expusă constituie un punct de plecare în formularea temelor de investigaţie la tezele de licenţă.

Alegerea temelor de cercetare pentru elaborarea tezelor de licenţă este la discreţia studenţilor, dar în cazul optării pentru o temă legată de activitatea extracurriculară la matematică, am considerat important ca studentul(a) să-şi asume elucidarea unor aspecte psihopedagogice ale procesului. Anume în cadrul pregătirii tezei de licenţă a fost posibil să contribuim la formarea competenţelor de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică.

La etapă de documentare a fost util să se discute despre bazele psihopedagogice de formare a noţiunilor, de însuşire a definiţiilor, de studiere a afirmaţiilor şi demonstrărilor lor. Au fost aplicate aceleaşi procedee de evaluare bazate pe descriptorii elaboraţi pentru evaluarea nivelului de performanţă pe fiecare dimensiune.

Documentarea presupune luarea de notiţe, conspectare, elaborarea rezumatelor unor lucrări, esenţializarea unor conţinuturi sub formă de teze. Specificul lucrărilor ştiinţifice la didactica matematicii presupune lucrul cu texte matematice şi din domeniul psihopedagogiei, dar şi o experienţă pedagogică, cel puţin pasivă, dacă nu activă. Din această cauză am practicat să respectăm nişte rigori în luarea de notiţe. În primul rând, studentul primeşte o listă a literaturii recomandate la temă, pe care o completează pe diverse căi – catalogul din biblioteca universităţii, reţeaua INTERNET, propria bibliotecă, biblioteca şcolii natale sau a şcolii unde a fost la practica pedagogică etc. Accentuăm faptul că pentru o lucrare în didactică este important să vedem contribuţia practicienilor, de aceea se vor urmări simultan două obiective: ce este publicat în literatură şi ce pot spune cadrele didactice referitor la subiectul abordat.

Asimilarea textului se recomandă a fi efectuată în două etape: lectură globală pentru stabilirea tezelor susţinute de autor şi a ideii centrale; lectura analitică pentru identificarea ideilor avansate, reţinerea celor mai importante exemple, stabilirea structurii logice a expunerii, ierarhizarea argumentelor. Prin lectură se urmăreşte *înţelegerea* tuturor aspectelor subiectului suspus cercetării abordate de diverşi autori. Lectura analitică poate fi făcută aplicând diverse tehnici de Lectură şi Gândire Critică. Un rol important în înţelegerea textului îl are stăpânirea limbajului şi a limbii în care este scrisă lucrarea. Pentru facilitarea activităţii de asimilare a conţinuturilor recomandăm completarea unui glosar de termeni în limba maternă şi a unui vocabular de termeni de specialitate din limbile străine din care se face traducerea. Pentru fidelitate este recomandat să se completeze şi un glosar în limba străină din care se iau materialele. La etapa de asimilare a textului studentul este nevoit să se includă într-un proces de învăţare autoreglată. Caracteristicile definitorii ale acestui proces sunt: activismul personal, asumarea responsabilităţii, monitorizarea permanentă. Aici fiecare individ îşi defineşte căile individuale reieşind din propriul stil de învăţare.

Elaborarea tezei de licenţă la didactica matematicii este un proces de creaţie, care rezidă în mare măsură în sinteza ideilor avansate expuse în literatura de specialitate şi în domeniile aferente, în dependenţă de subiectul supus cercetării.

O metodă care pe care o recomandă pentru a fi utilizată la etapa de sinteză este propusă de proiectul „Lectura şi Scrierea pentru dezvoltarea Gândirii Critice” şi se numeşte *Scrierea din surse multiple*. Ea presupune completarea unei matrice pentru selecţia ideilor din lucrările parcurse sau aflate de la sursele consultate:

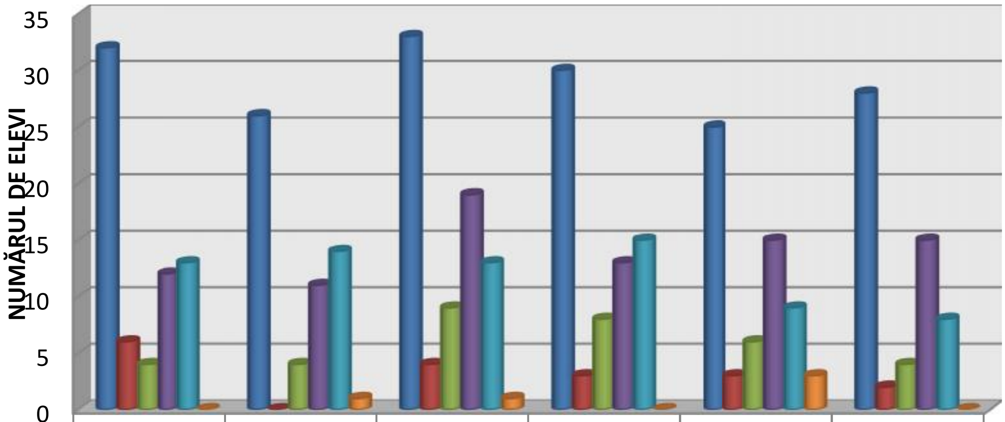
| Matricea scrierii din surse multiple | Sursa 1 | Sursa 2 | … | |
|---|---|---|---|---|
| Ideea 1 | | | | |
| Ideea 2 | | | | |
| … | | | | |

Specificul elaborării tezelor de licenţă axate pe tematică legată de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică prevede studierea conţinuturilor suplimentare la matematică.

Lectura textelor matematice şi selectarea conţinuturilor la un subiect anume are particularităţile sale. Studentul va avea mereu în vizor sarcina de transpunere didactică a conţinuturilor matematice pentru diverse categorii de elevi.

Fiecare student este unic şi se cere elaborarea unor teze de licenţă originale. În perioada 2000-2011 am coordonat elaborarea a mai multe teze de licenţă cu tematică tangenţial legată de activitatea exracurriculară la matematică sau cu subiectul central dedicat acestei teme. Au fost efectuate observări calitative asupra realizării a mai multor teze dedicate aspectelor didactice ale organizării activităţilor extrcurricuare: SM1 „Activitatea extracurriculară la matematică în clasele a 5-6 –a”; NN2. „Utilizarea jocurilor didactice la matematică”; OC3 „Metodica rezolvării problemelor nonstandard la tema „Transformările expresiilor algebrice”; IC4 „Elemente de geometrie distractivă la cercul de matematică în clasele primare”; IB5 „Linii şi puncte remarcabile în triunghi”; TV6 „Utilizarea metodei proiectului în studierea elementelor de statistică matematică”; VA7 „Rolul activităţilor extracurriculare în dezvoltarea motivaţiei pentru studiul matematicii la elevii claselor primare”; VB8 „Compunerea de probleme şi rolul ei în dezvoltarea unui elev creativ”; NC9 „Metodica formării competenţelor de rezolvare a problemelor text, cu conţinut practic”; TS10 „Poezia şi matematica”; OC11 „Elemente de istorism în formarea noţiunilor matematice”; NG12 „Ecuaţii cu parametru şi modul în cursul gimnazial de matematică”; GC13 „Particularităţile organizării activităţilor extrcurricuare în cursul gimnazial de matematică”; GN14 „Explorarea proprietăţilor şirului de numere Fibonacci în cursul gimnazial de matematică”; UG15 „Tabla de şah în problemele matematice”, „Devoltarea competenţelor investigaţionale în procesul rezolvării problemelor de „pavare” a figurilor geometrice”; „Realizarea obiectivelor transdisciplinare prin intermediul rezolvării problemelor de maxim şi minim cu conţinut practic”; „Valori minime şi maxime în geometrie”; „Realizarea obiectivelor transdisciplinare prin intermediul rezolvării problemelor de maxim şi minim cu conţinut practic”, „Biliardmatematic” etc.

Pentru confirmarea unor ipoteze formulate în baza analizei notelor de observare am elaborat un chestionar pentru elevii participanţi la olimpiada republicană în anul 2012. Conţinutul chestionarului este prezentat în Anexa 8. Aspectele pe care am proiectat să le determinăm se refereau la implicarea elevilor olimpici în activităţi extracurriculare, spectrul de olimpiade pe discipline la care olimpicii la matematică sunt implicaţi, necesitatea organizării unor olimpiade zonale sau de alt tip, gradul de satisfacţie al elevilor cu referire la suportul acordat elevilor din partea profesorilor, a şcolii, a comunităţii pentru facilitarea procesului de pregătire către olimpiade şi concursuri şi participarea propriu-zisă la ele.




| | CLASA 7 | CLASA 8 | CLASA 9 | CLASA 10 | CLASA 11 | CLASA 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| NR. TOTAL | 32 | 26 | 33 | 30 | 25 | 28 |
| CERC | 6 | 0 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| ORE FACULTATIVE | 4 | 4 | 9 | 8 | 6 | 4 |
| ORE OPȚIONALE | 12 | 11 | 19 | 13 | 15 | 15 |
| MEDITAȚII | 13 | 14 | 13 | 15 | 9 | 8 |
| TABERE | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 | 0 |

Fig.3. 8. Implicarea elevilor olimpici la matematică în activităţi extracurriculare (pe tipuri şi clase)

Analiza rezultatelor ne-a permis să concluzionăm următoarele.

La întrebarea cu privire la tipurile de activităţi extracrriculare în care sunt implicaţi elevii olimpici răspunsurile s-au repartizat aşa cum este ilustrat în Figura 3.8. Cel mai frecvent elevilor li se oferă posibilitatea de a-şi aprofunda cunoştinţele matematice la orele opţionale şi la meditaţiile individuale cu profesorii. După poularitate urmează apoi orele facultative şi cercurile. Taberele specializate nu sunt populare printer elevii olimpici. Pe aceeaşi figură observăm că meditaţiile individuale sunt practicate cu elevii de vîrste mai mici, iar popularitatea orelor opţionale creşte cu vârsta.

Repartizarea numărului de elevi implicaţi în activităţi pe tipuri ţinând cont de mediul de trai (rural sau urban) este reprezentată în Figura 3.9. (fără municipiul

Chişinău). Observăm, că meditaţiile individuale şi orele opţionale sunt aproximativ la fel de populare în mediul rural şi cel urban.

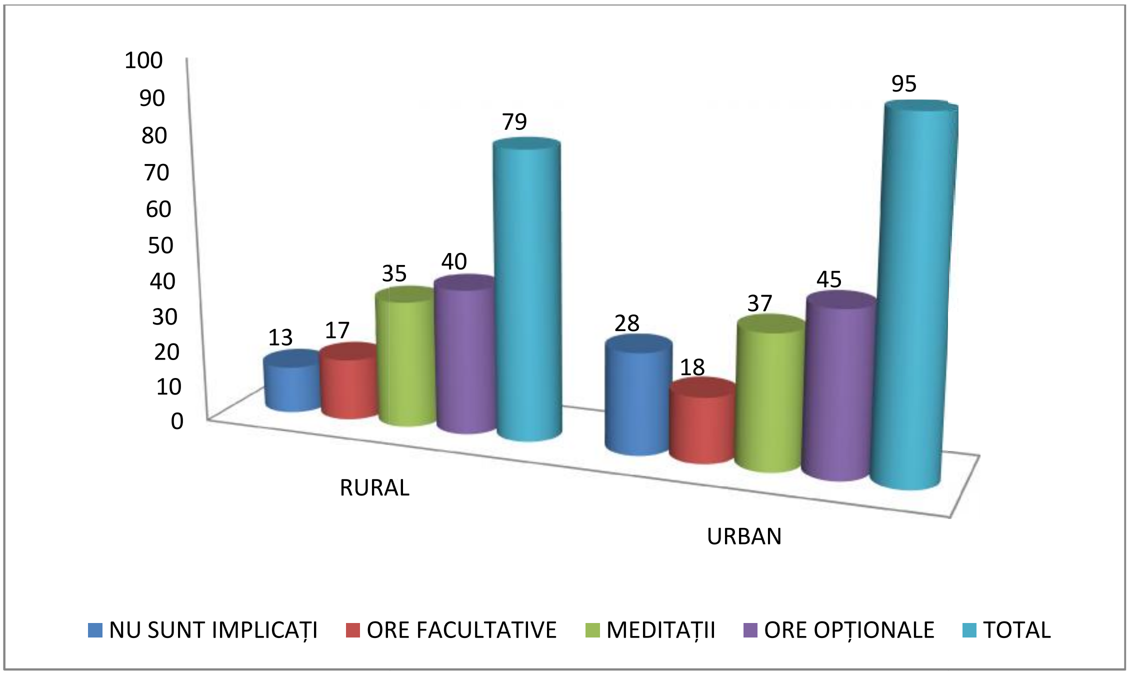



Fig.3. 9. Implicarea elevilor olimpici la matematică în activităţi extracurriculare (tipuri şi categorii rural/urban)

Constatăm că procentul persoanleor care s-au calificat la olimpiada republicană din mediul urban este mai mare decât al celor din mediul rural.

Diagrama 3.10. ne permite să observăm că în mediul urban procentul celor implicaţi în activităţi extracurriculare este mai mic decât în mediul rural.

Urmărind răspunsurile la întrebările cu privire la gadul de satisfacţie al elevilor olimpici în raport cu implicarea comunităţii, şcolii, a profesorilor în sprijinul copiilor dodaţi la matematică, observăm un grad de satisfacţie mai înalt, decât cel înregistrat la profesorii care au completat chestionare de acest tip. În primul rând am detreminat că elevii nu au reproşuri faţă de profesorii care îi pregătesc.

O întrebare la care am obţinut răspunsuri doar de la câteva persoane, se referă la compartimentele matematicii elementare la care elevii consideră că ar vrea să fie pregătiţi mai bine. Am dedus că lipsa răspunsurilor se datorează faptului că nici profesorii, dar nici elevii nu cunosc programul standard pentru pregătirea de olimpiade.

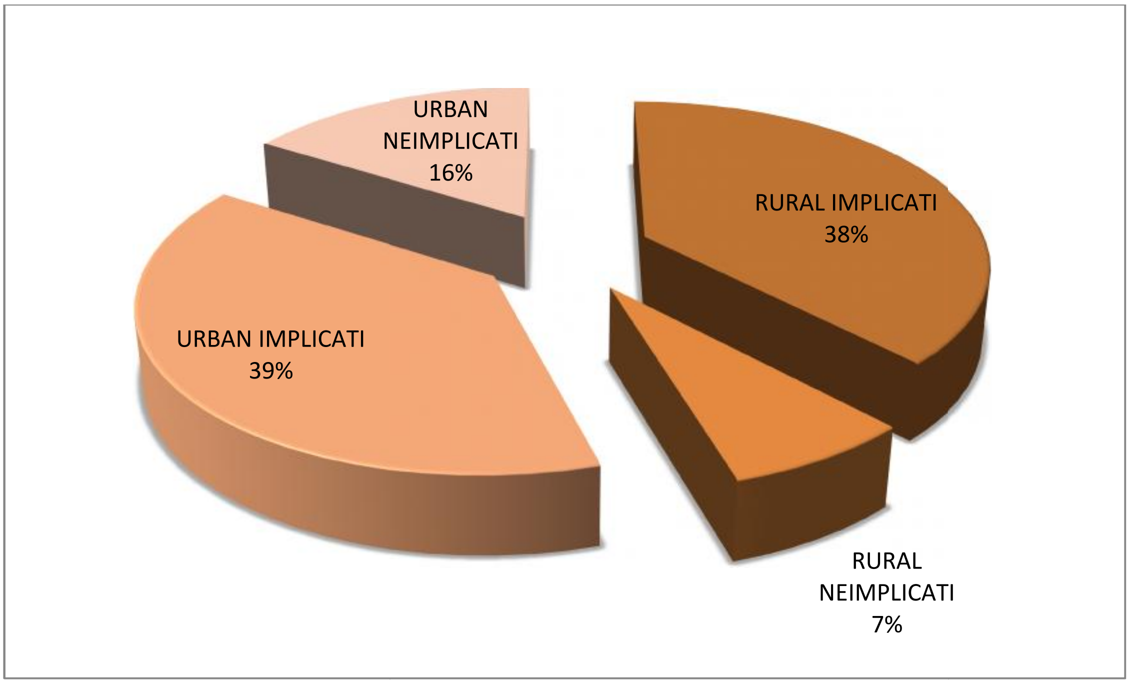



Fig.3. 10. Coraportul dintre numărul de elevi olimpici implicaţi în activităţi extracurriculare la matematică pe categoriile rural/urban

În municipiul Chişinău pentru elevii interesaţi de matematică există oportunitatea de a formare a copiilor dotaţi la matematică şi a celor interesaţi de studiul mai aprofundat al acestei discipline în cadrul Centrului municipal de Excelenţă ICAR, care în anul 2011-2012 a obţinut susţinerea organelor municipale de resort. Centrul oferă posibilităţi de pregătire elevilor la toate categoriile de vărstă. Printre sarcinile Centrului se enumeră:

- Sporirea interesului elevilor pentru studierea matematicii;
- Pregătirea către examenele de absolvire a treptelor de învăţământ;
- Orientarea profesională;
- Autorealizarea şi progresul propriu al elevilor;
- Crearea condiţiilor pentru comunicare între elevi cu interese comune;

Cursurile de matematică au loc săptămânal şi durează trei ore.

Observarea activităţii profesorilor şi propria activitate în cadrul Centrului a permis să facem următoarele concluzii.

Activitatea Centrului oferă avantaje pentru elevi şi părinţi:

- Membrii grupului de profesori care activează constant se caracterizează prin calităţi, precum:

- Capacitatea de a sacrifica timpul liber pentru a trezi interesul faţă de matematică al elevilor;
- Tendinţa de a implica toţi elevii în comunicare, în discuţia problemelor;

- Deschidere pentru abordarea oricăror teme curriculare care îi interesează pe elevi sau la care ei întâlnesc dificultăţi;
- Obiectivitate în aprecierea rezultatelor.

- Elevii cu potenţial deosebit pentru matematică pot fi identificaţi mai uşor în cadrul Centrului, ei sunt observaţi mai uşor, deoarece se manifestă pe fonul unor elevi bine pregătiţi.
- Elevii sunt stimulaţi moral pentru efortul depus şi rezultatele obţinute.
- Grupele de elevi fiind compuse din elevi din diferite şcoli şi venind de la diferiţi profesori permit profesorului să urmărească moduri diferite de percepţie a aceloraşi conţinuturi, reieşind din stiluri diverse de predare, diverse abordări a consecutivităţii predării materiei, astfel şi elevii şi profesorul îşi îmbogăţesc experienţa proprie.
- Activitatea Centrului oferă avantaje pentru sistem:

- Centrul adună profesori activi, preocupaţi de propria creştere profesională;
- Activitatea în cadrul Centrului permite ca să se manifeste atât elevilor cât şi profesorilor;
- Profesorul este pus în condiţii să selecteze pentru ore materiale foarte diverse şi să adapteze conţinuturile la elevi cu diferit grad de pregătire, astfel se află mereu în stare de autoperfecţionare;
- Conţinuturile studiate în fiecare clasă sunt diverse, subiectele studiate pot avea caracter propedeutic, investigaţional, teoretic sau practic, aplicativ în diverse domenii, experimental, de realizare a diverselor proiecte etc., astfel se acţionează în direcţia modernizării predării-învăţării-evaluării.
- Sistemul bazat pe evaluări de tip concurs permite să fie identificate limitele de dezvoltare a curriculum-ului prin extindere şi aprofundare pentru diferite clase.
- Concursurile organizate sistematic antrenează elevii.
- Activitatea la aceeaşi clasă câţiva ani consecutiv permite profesorului să evalueze evoluţia curriculum-ului şcolar în timp.

*Dificultăţi:*

- Copiii care nu au dorinţa de a se concentra în timpul orelor, nu dau dovadă de asiduitate, adesea nu rezistă concurenţei care se creează în clasă;
- Centrul este specializat doar în educaţia matematică extracurriculară a elevilor, la alte discipline nu sunt instituţii similare în Republică;
- Pe fonul unui interes în scădere faţă de matematică la nivel de ţară, scade numărul de elevi care se dedică matematicii în clasele superioare.

- Nu toţi elevii care frecventează Centrul îşi pot permite să participe la Tabăra specializată, care este o continuare a activităţii extracurriculare în condiţii mai confortabile şi relaxante.

Profilul de activitate a Centrelor de acest tip se pretează pentru a fi parte componentă a instituţiilor de învăţământ superior. Astfel de Centre ar reuni savanţii, cadrele didactice din instituţiile de învăţământ preuniversitar, studenţii matematicieni şi elevii capabili de performanţe înalte. Aceste centre oferă posibilitatea de a desfăşura activitatea de mentorat în cascadă, fapt care ar contribui la formarea profesională de calitate a cadrelor didactice la toate nivelurile şi a elevilor dotaţi supradotaţi la matematică.

Profesorii intervievaţi într-un alt studiu estimează procentul copiilor dotaţi în diverse domenii în instituţia unde activează ca variind în diapazonul 5-15%.

Elevii olimpici la matematică participă atât la olimpiade din domeniul profilului real cât şi cel umanist. Astfel, circa 78,1 % dintre intervievaţi susţin că elevii olimpici la matematică mai participă la olimpiadele de fizică, 53,1 % - la olimpiadele de informatică, 37,5 % - la olimpiadele de biologie, 68,8 % - la olimpiadele de chimie, 40,6 % - la olimpiadele la o limbă modernă. Numărul maxim de olimpiade la care a participat un elev (participant la etapa republicană a olimpiadei de matematică) în anul de studii 2011-2012 a fost 7.

La întrebarea cu privire la formele şi strategiile de identificare a copiilor dotaţi aplicate în instituţia unde activează cadrele didactice intervievate au fost obţinute următoarele tipuri de răspunsuri: concursurile; situaţiile de problemă; rezolvarea problemelor nonstandard şi cu grad înalt de dificultate; testarea; lucrul cu literatura suplimentară, etc.

Majoritatea respondenţilor au răspuns că nu pot susţine că instituţiile de învăţământ sunt motivate să se preocupe de identificarea şi dezvoltarea capacităţilor copiilor dotaţi. Adesea orele rezervate pentru cercuri nu sunt oferite profesorilor de matematică (53,1%), iar uneori aceste ore chiar nu sunt distribuite la careva discipline. Astfel, această activitate este lăsată pe seama părinţilor care suportă cheltuielile pentru lucrul individual cu copiii (68,9% din intervievaţi practică meditaţii individuale).

Repartizarea respondenţilor după gradul de satisfacţie cu privire la unele aspecte ale lucrului cu copii dotaţi poate fi urmărită în Tabelul 5.

Tabelul 5. Gradul de satisfacţie al cadrelor didactice cu privire la unele aspecte ale lucrului cu copii dotaţi

| | | **Foarte nesatisfăcut** | **Nesatisfăcut** | **Satisfăcut** | **Foarte satisfăcut** | **Nu ştiu / Nu** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Rolul cursurilor de formare în pregătirea dvs pentru lucrul cu copii dotaţi | 3,1% | 34,4% | 40,6% | 9,4% | 12,5% |
| 2. | Pregătirea tinerilor specialişti pentru lucrul cu copii dotaţi | 18,8% | 34,4% | 25% | 3,1% | 18,7% |
| 3. | Programul de asistenta educaţionala oferit de DETS în organizarea şi desfăşurarea activităţilor cu copiii dotaţi | 15,6% | 37,5% | 31,3% | 3,1% | 12,5% |
| 4. | Utilizarea TIC, a reţelei INTERNET în organizarea şi desfăşurarea de către dvs a activităţilor cu copiii dotaţi | 3,1% | 15,6% | 56,3% | 25% | |
| 5. | Asigurarea cu materiale didactice pentru lucrul cu copii dotaţi (biblioteca şcolară sau proprie) | 9,3% | 25% | 56,3% | 6,3% | 3,1% |
| 6. | Oportunităţi de perfecţionare a abilităţilor de instruire a copiilor dotaţi la matematică | 12,5% | 31,3% | 21,9% | 3,1% | 31,2% |
| 7. | Implicarea comunităţii în susţinerea copiilor dotaţi | 25% | 40,6% | 28,1% | 6,3% | |
| 8. | Stimularea morală a “laureaţilor concursurilor“ şi a profesorilor lor la nivel de comună, raion | 6,3% | 40,6% | 37,5% | 15,6% | |
| 9. | Stimularea materială a “laureaţilor” la nivel de comună, raion | 18,8% | 31,2% | 34,4% | 15,6% | |
| 10. | Stimularea materială a profesorilor “laureaţilor” la nivel de comună, raion | 25% | 37,5% | 34,4% | 3,1% | |

În contextul promovării unor politici în susţinerea copiilor dotaţi am elaborat în cadrul unui atelier de lucru cu profesorii de matematică următorul Program de susţinere a copiilor dotaţi (Tabelul 6.):

Tabelul 6. Program de susţinere a copiilor dotaţi

| | |
|---|---|
| **MĂSURI PENTRU DEZVOLTAREA ŞI SUSŢINEREA REŢELEI DE FORMARE A COPIILOR DOTAŢI LA NIVEL DE STAT** | |
| 1. | Asigurarea tehnico-materială a instituţiilor specializate în formarea copiilor dotaţi |
| 2. | Asigurarea activităţii instituţiilor prin corespondenţă, în zilele de odihnă , serale |
| 3. | Asigurarea activităţii extradidactice la un spectru larg de discipline, realizarea integrativităţii instrucţiei pe arii curriculare |
| 4. | Crearea şcolilor de tip internat pentru copiii dotaţi. |
| **ASIGURAREA ŞI PROTECŢIA SOCIALĂ A COPIILOR DOTAŢI** | |
| 5. | Acordarea burselor anuale |
| 6. | Asigurarea participării copiilor la concursurile naţionale şi internaţionale |
| 7. | Editarea lucrărilor copiilor dotaţi |
| 8. | Susţinerea activităţii taberelor de vară pe discipline, a laboratoarelor, atelierelor de creaţie |
| 9. | Crearea serviciilor de diagnostică şi consultanţă psihologică pe lîngă Centrele de instruire a copiilor dotaţi. |
| 10. | Organizarea timpului liber al copiilor dotaţi |
| **PREGĂTIREA ŞI STIMULAREA CADRELOR IMPLICATE ÎN LUCRUL CU COPII DOTAŢI** | |
| 11. | Organizarea instruirii continue a cadrelor didactice implicate în lucrul cu copii dotaţi |
| 12. | Asigurarea ştiinţifico-metodică a procesului de formare a copiilor dotaţi: curriculum pe discipline şi domenii, materiale didactice, mijloace performante de instruire. |
| 13. | Organizarea manifestărilor ştiinţifico-practice pentru promovarea experienţei avansate în lucrul cu copii dotaţi |
| 14. | Acordarea de stagii peste hotare în centre de profil pentru studierea experienţei avansate în lucrul cu copii dotaţi |
| 15. | Stimularea financiară a cadrelor didactice didactice implicate în lucrul cu copii dotaţi |
| **ASIGURAREA INFORMAŢIONALĂ A PROCESULUI DE FORMARE A COPIILOR DOTAŢI** | |
| 16. | Asigurarea informaţională privind activitatea centrelor de formare a copiilor dotaţi şi manifestările organizate la toate nivelurile în vederea instruirii, evaluării, promovării tinerelor talente . |
| 17. | Acordarea resurselor pentru organizarea sistematică a concursurilor şi jocurilor intelectuale şi translarea lor în mijloacele media. |
| 18. | Acordarea resurselor pentru organizarea şi desfăşurarea monitoring-ului activităţii de formare a copiilor dotaţi. |

Realizarea obiectivului de formare a competenţelor de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare este facilitată în cazul activităţii de mentorat sau coaching. Activitatea de mentorat nu este practicată în Republica Moldova, dar importanţa ghidării studenţilor de către persoane cu experienţă am sesizat-o şi în interviurile cu matematicieni de vază realizate în cadrul aestei cercetări.

Metoda interviului a fost aplicată pentru stabilirea unor puncte de vedere ale matematicienilor cu privire la rolul activităţii extracurriculare în formarea unui profesor matematician. Întrebările în interviu au fost formulate în aşa mod, ca pentru fiecare să obţinem un răspuns în formă de discurs. Conform definiţiei dată de Foucault [34] discursurile, ca sisteme logice şi coerente de afirmaţii, sunt practice sociale cu impact real, de producere de cunoştinţe. Considerăm că analiza de discurs ca metodă care studiază modul în care limbajul se structurează intr-un anumit fel astfel încât produce semnificaţii şi discursuri care operează independent de intenţiile vorbitorului sau ale celui care scrie un text [223] este eficientă în procesul de formulare a unor politici de perspectivă în ştiinţele educaţiei. Prin caracteristicile sale analiza de discurs este văzută ca o versiune pentru ştiinţele sociale a hermeneuticii şi semioticii [221]. Contrar abordării tradiţionale, analiza de discurs respinge asumpţia că limbajul este doar un mijloc de a cunoaşte realitatea existentă şi nimic mai mult. Analiza de discurs vede rolul limbajului ca fiind unul activ şi constructiv prin care pot fi construite noi realităţi. Fiecare persoană, eveniment sau stare de fapt poate fi descrisă în diferite modalităţi. Luarea în considerare a contextului social este importantă, de cele mai multe ori contextul este cel care dă sens cuvintelor. Astăzi se recunoaşte că sistemele de cunoştinţe care produc adevăruri sunt valabile doar pentru o anumită perioadă istorică sau cadru social. Ruptura dintre "lumea reală" şi domeniul unde cunoştinţele se produc (lumea academică, cea a laboratoarelor experimentale) a fost una din cauzele care au contribuit la dezvoltarea psihologiei critice [237]. Relaţia dintre cercetarea fundamentală şi cea aplicativă nu este văzută ca un continuum. Analiza de discurs oferă o abordare alternativă pentru măsurătorile de laborator, categorizările comportamentale şi încercările de a dezvolta modele predictive ale comportamentului uman. Analiza de discurs oferă "povestea" socială a subiectivităţii umane prin studierea resurselor lingvistice care construiesc şi reproduc domeniul sociopolitic [196]. Categorizarea şi ierarhizarea fenomenelor nu sunt simple reflecţii ale realităţii ci sunt determinate de anumite cauzalităţi (nivelul cunoştinţelor de la acea dată, paradigma dominantă, interese ideologice etc.). Domeniile vizate cu precădere de analiza de discurs sunt: interacţiunile şi practicile sociale (ex. relaţia medic-pacient, profesor-elev, părinte-copil, tipul de invăţămant, de asistenţă socială sau medicală); sinele, funcţionarea cognitivă şi crearea de sensuri (ex. semnificaţia noţiunii de sănătate, boală, feminitate sau masculinitate); cultura, relaţiile sociale şi cele de putere (ex. relaţii interetnice, dintre femei şi bărbaţi, dintre grupurile cu orientare sexual predominantă şi cele minoritare); practicile politice (ex. excluderea unor grupuri, discriminarea altora). Analiza de discurs face referire la practicile sociale şi politice in trei moduri: ca şi critică socială; ca mod de "imputernicire" şi oferire de control; ca ghid pentru schimbare şi reforme [4, pag. 357].

Interviul propus matematicienilor este prezentat în Anexa 9.

Concluziile care au putut fi distinse cu referire la pregătirea matematică în anii de studenţie şi la activitatea ştiinţifică ulterioară a savanţilor matematicieni sunt următoarele.

-*Instituţiile cu renume acordă o atenţie deosebită implicării în activitatea de cercetare a studenţilor încă de la primul an de studii.* Drept dovadă servesc răspunsurile: 1) „La sfârşitul primului an de studenţie am primit Premiul I şi un număr de 32 de volume din Opera lui Stalin, tipărite pe hârtie excepţională. Am dus volumele foarte greu la gazda pe care o aveam în Iaşi. Surpriza a venit deschizând volumul I unde Stalin scria "contrarevoluţia din 1917 era formată din cele mai negative elemente ridicate la pătrat". Am rămas stupefiat de o atare prostie." 2) „La Universitatea de Stat din Moscova am participat de două ori la concursul lucrărilor studenţeşti şi am ocupat de fiecare dată locul II la facultate. A doua oară nu am ocupat locul I, deoarece cuvîntul colectiv în limba rusă l-am scris cu un singur "l". Apoi lucrările mele studenţeşti au ocupat locul I la un concurs unional în anul 1968, după ce absolvisem facultatea."

-*Pentru studenţi este importantă încrederea în ei din partea profesorilor cu renume şi posibilitatea de a participa la seminarele ştiinţifice:*1) „La sfârşitul anului al II-lea am fost acceptat ca membru al celebrului Seminar Matematic al Universităţii din Iaşi. O influenţă puternică au exercitat-o asupra mea creatorii Seminarului Matematic Acad. Alexandru Myller şi Acad. Octav Mayer, matematicieni de renume internaţional." 2) „Procesul de învăţare e şi simplu şi complicat. Fiecare îşi face o cale. Dar trebuie să mergi la seminare. Trebuie să te duci să vezi ce fac alţii. Eu personal am început la Universitatea din Moscova să particip la două seminare studenţeşti. Apoi peste un an am fost admis să particip la seminarul catedrei. Seminarele studenţeşti de pregătire permiteau să te manifeşti şi în baza comunicărilor puteai să fii admis la seminarul unde participau toţi profesorii, doctoranzii şi toţi doritorii, care era condus de academicianul Alexandrov P.S. şi în acel seminar în primele luni am primit primele rezultate. Într-u timp scurt am devenit cel mai competent în cunoaşterea literaturii pe tematica abordată la seminar."

-*Este benefic pentru studenţi să studieze profund literatura din diverse compartimente şi să determine un domeniu preferat (mai îngust sau mai extins)* *pentru a se aprofunda. Acest lucru permite să fie obţinute rezultate importante în anii de studenţie şi să elaboreze lucrări ştiinţifice (teze de doctorat) în termeni mai restrânşi de cât durează studiile de doctorat sau să fie demonstrate probleme celebre:* 1) „În cursul anului al II-lea am încercat câteva cercetări independente pe teme pe care nu mi le sugerase nimeni. Încercam atunci să construiesc o geometrie descriptivă 4 dimensională. Nu am reuşit mare lucru, cu exceptia faptului că eram cel mai bine pregătit la cursul de geometrie descriptivă. Experienţă căpătată mi-a servit doi ani mai târziu când am încercat cercetări proprii în teoria câmpurilor de versori, abordată în studiul unui geometru rus cunoscut Biujghens. Am descoperit aici noţiuni fundamentale noi date de valorile extreme şi direcţiile extreme ale torsiunii geodezice. Anume am introdus în premieră noţiunile de torsiune medie şi torsiune totală ale unui camp de versori. Odată cu ele am descoperit o formulă de tip Bonnet şi o indicatoare de tip Bonnet. Aplicate în geometria varietăţilor neolonome şi a suprafeţelor a fost posibil de corectat multe lucruri din geometria subvarietăţilor spaţiului Euclidian cu trei dimensiuni. Marele meu câştig a fost realizarea unei teze de licenţă complet originală, apreciată ntr-o recenzie de Biujhens (în Referativnâi Jurnal 1953). Doctoratul l-am facut ca bursier între anii 1953-1956 tratând o problemă celebră din mecanica sistemelor neolonome pe care reputatul geometru francez Elie Cartan o credea nerezolvabilă (a se vedea “Selecta” de E. Cartan). Am demonstrat că opinia lui Cartan este eronată, descoperind un procedeu inductive de geometrizare a mişcărilor sistemelor mecanice neolonom în cazul când legăturile Pfaff ale acestuia au sisteme derivate. Teza susţinută în 1957, sub conducerea Acad. Mendel Haimovici, supervizată de Acad. Gh. Vrânceanu şi de prof. Victor Vâlcovici a avut un ecou naţional şi chiar internaţional deosebit.” 2) „La universitate am fost remarcat de către regretatul C.Sacaliuc, care fiind şeful catedrei Analiză Matematică m-a agitat să mă specializez la catedra sa, m-a promovat la doctorantură şi în doi ani am prezentat teza de doctor. Conducătorul ştiinţific mi-a fost profesorul N.Krupnik, elevul cunoscutului matematician I.Gohberg. La îndrumarea profesorului N.Krupnik am studiat nu numai literatura la tema tezei ci şi rezultate din domenii înrudite. Tematica era din analiza funcţională iar dlui mi-a recomandat literatură din Algebre Banach. Aceasta a avut un impact determinant la cercetările ulterioare şi la obţinerea unor rezultate noi, anume cu metodele algebrelor Banach.”

-*În formarea matematicienilor adesea personalităţile remarcabile au un rol crucial pentru continuarea carierei*: 1) „La începutul activităţilor mele ştiinţifice, am lucrat în marea şcoală a Seminarului Matematic “Alexandru Myller” al Universităţii Al. I. Cuza, fiind elev direct al unor veritabili savanţi: Alexandru Myller, Octav Mayer, Gheorghe Vrânceanu, Grigore Moisil, Mendel Haimovici, Gheorghe Gheorghiev, ş.a.” 2) “Sunt unul din discipolii membrului corespondent al Academiei de Ştiinţe a Moldovei dr.hab.prof.univ. Alexandru Zamorzaev, care a fondat la USM Şcoala ştiinţifică de cristalografie matematică şi geometrie discretă (anii 60 ai secolului XX). Ca model viu de cercetător perseverent, susţinător al unor argumentări riguroase a afirmaţiilor matematice mi-a servit anume prof.univ. A. Zamorzaev, care bineînţeles şi-a lăsat amprenta asupra destinului meu matematic. Conducătorul meu de doctorat profesorul universitar Alexandru Zamorzaev (1927-1997) a fost pentru mine un exemplu viu de cumsecădenie, de devotament pentru munca de cadru didactic ce o face, de insistenţă şi perseverenţă în cercetarea matematică. Am avut fericirea să devin unul din discipolii Domniei sale în cercetările ştiinţifice. După doctorantură şi susţinerea primei teze (1980) am activat fără întrerupere în calitate de cadru didactic (trecînd toate treptele) la catedra de geometrie din cadrul USM, fondată în 1972 şi condusă pînă în 1992 de prof.univ. Alexandru Zamorzaev. Am comunicat fructuos mai ales în perioada anilor 1990-1997 cînd eu am obţinut cele mai importante rezultate în elaborarea bazelor teoretice ale generalizărilor „fizice" recente a simetriei clasice, care mai apoi au constituit fundamentul celei de a doua teză a mea (1997)." 3) "Am avut mare noroc de profesorii mei de matematică (inclusiv şi de fratele meu). În clasele 8-11, la şcoala din Nisporeni am avut ca profesor pe Elisei Baltă, care făcea minuni prin capacităţile sale de pedagog şi matematician. El a fost acela care mi-a dăruit culegerile de probleme ale autorilor Şahno şi Antonov care m-au ajutat să însuşesc şi să înţeleg multe din matematica elementară." 4) „Am avut doua personalitati în matematica apropiate, de la care am învăţat foarte mult – Academicianul Constantin Sibirschi, care mi-a fost conducător de licenţă la Universitatea de Stat din Chişinau, apoi conducător de aspirantura (doctorat) şi academicianul Vladimir Andrunachievici, directorul Institutului de Matematica al Academiei de Ştiinte a Moldovei sub conducerea căruia am îndeplinit funcţia de Secretar ştiinţific al acestei instituţii timp de 11 ani (1980-1991). M-am simţit aproape de el şi am învăţat multe pana la sfârşitul vieţii sale."

-*Matematicienii preferă să facă studii şi cercetări preponderent ziua, este important să te menţii mereu concentart asupra problemei examinate*: 1) „Eu nu pot dormi ziua, dacă dorm, dorm noaptea. În tinereţe eu puteam să nu dorm câteva zile, 2-3. Am avut capacitatea de a lucra intens multe ore la rând. Dar de regulă lucram dimineaţa, mai ales la plimbare. Mergi şi te gândeşti." 2) „Am lucrat în special dimineaţa. În timpul concediului mi-a plăcut să fac matematică, în gradina de la ţară a casei părinţilor soţiei. Cu familia adunată acolo, departe de zgomotul politicii comuniştilor, m-am simţit un om liber." 3) "E bine să te ocupi cu cercetarea în matematică de dimineaţă, dar acest lucru este posibil numai uneori."

-*Matematicienii acordă o mare importanţă studierii literaturii matematice şi cercetării din toate aspectele a conţinuturilor studiate*: 1)„Toate problemele soluţionate au apărut ori în rezultatul studierii literaturii, mai ales a articolelor ştiinţifice la tema de cercetare, sau în rezultatul propriilor cercetări. Orice teoremă matematică are anumite ipoteze şi cele mai simple probleme şi înţelease se obţin la schimbarea sau slăbirea unor condiţii din ipoteze. Făcînd acest lucru, de regulă, se obţine un alt rezultat şi ceea ce-i important înţelegi mult mai bine condiţiile teoremei.” 2) „În sala de lectură fac cunoştinţă cu o lucrare, caut apoi lucrările care sunt citate în ea, fac cunoştinţă cu ele în detaliu, ce metode se folosesc, ce probleme sunt. Pe atunci nu erau multe cărţi, manuale ca să intre într-un domeniu. Una trebuia să ştii teoria, dar trebuia să ştii şi să rezolvi probleme repede şi bine. Te consultai cu colegii, cu doctoranzii de la catedra de profil.” 3) „Studierea literaturii dedicate unei teme anumite prezintă o etapă destul de însemnată în procesul de soluţionare a unei probleme.” 4) ”Întotdeauna într-o problemă sau alta am căutat în primul rând să studiez lucrările clasicilor, dacă ele sunt şi am acces la ele. Aceste lucrări uneori pot să-ti aduca multe învăţăminte şi idei. Dacă în tinmpul rezolvării unei probleme apar idei deosebite de cele cunoscute, atunci consult orice bibliografie, care are atribuţie la problema dată. Dar mie întotdeauna mi-au placut petele albe în matematica, adica să merg pe drumuri nebătătorite.” 5) „În perioada când studiam matematica, perioadă care cuprinde şi studenţia, am utilizat intens biblioteca Seminarului Matematic “Al. Myller” – bine dotată cu carte străină, dar si cu cărti celebre traduse în URSS de editura MIR. În fapt puteam cumpăra cu preţuri extrem de mici cărţile apărute în limba rusă – care era singura limbă străină obligatorie în curricula universitară. Metodele folosite constau în abordarea materiei predate la cursuri şi studiul individual în bibliotecă.”

- *Programul unei zile dedicate cercetărilor în matematică nu poate fi întocmit cu mare precizie. Există particularităţi al funcţionării creerului care depind de o multitudine de factori:* 1) „Aici program nu există. Organismul nu poate fi forţat. În unele zile poţi lucra foarte intens, iar în altele să vrei sa faci ceva şi să nu te poţi concentra.” 2) „Acum (la o vârstă mai înaintată) programul unei zile din viata mea dedicat matematicii este destul de dozat. Mai mult caut literatură matematică, care mă interesează. Revăd unele lucrări deja de mult publicate. Mă strădui să formulez noi probleme în domeniul meu de cercetare.” 3) „Depinde de problema asupra căreia lucrez şi de faptul la ce etapă am ajuns în rezolvarea ei.”

- *Pauzele în efectuarea cercetărilor matematice dăunează carierei unui matematician*: 1) „Pauzele în efectuarea cercetărilor matematice dăunează. Aici am putea face paralela cu un sportiv. Dacă a încetat pe un timp antrenamentele, pentru a-şi reveni în forma pe care a avut-o până la abandonarea lor, sunt necesare eforturi enorme. Iar cate odată observăm, că unii sportivi n urma acestor abandonări şi-au pierdut calificarea pentru toata viaţa. Cam acelaşi lucru este şi cercetarea în matematică. Pot, însă, fi şi excepţii.” 2) „Cred că, în general, pauzele dăunează efectuării cercetărilor matematice, mai ales dacă nu urmăreşti literatura de specialitate. Matematica se dezvoltă mereu şi dacă rămâi în urmă există pericolul ca cineva să „te acopere” – să obţină rezultate mai generale.” 3) „Sunt sigur că dăunează.” 4) „În artă, în ştiinţă, pauzele sunt periculoase. Savantul trebuie să fie la curent să discute permanent despre cercetările făcute, să participe la conferinţe, la alte tipuri de foruri ştiinţifice. Ca şi muzicantul, daca nu exersează – este pericolul să nu poată recupera.”

Geneza creativităţii matematice este mereu o provocare pentru psihologi. De regulă, la ordinea zilei în procesul de predare a matematicii stă problema de a facilita învăţarea matematicii de către majoritatea elevilor. Discursurile matematicienilor de succes oferă exemple originale de comportament pentru elevii şi studenţii pasionaţi de matematică. Reflexia asupra modului propriu de gândire este o metodă unde apare fenomenul de interferenţă a oservării introspective şi a gândirii matematicienilor, astfel obţinându-se o viziune profundă asupra problemei creaţiei.

## 3.4. Concluzii la capitolul 3

**Cercetarea calitativă** reprezintă o cercetare în măsură să producă rezultate care nu ajung la proceduri statistice sau alte mijloace de cuantificare. Fiind o „abordare naturalistă” are ca scop înţelegerea fenomenului studiat în contextul situaţiilor specifice. Cercetarea calitativă efectuată a parcurs în desfăşurarea ei trei cicluri: ciclul preparator sau anticipativ – planificarea (designul), ciclul productiv – execuţia şi ciclul final – raportul cercetării. Până la etapa de planificare au fost realizate unele cercetări exploratorii pentru a obţine informaţie cu privire la activitatea extracurriculară la matematică în învăţământul preuniversitar. Planificarea cercetării s-a referit la procesul care leagă obiectivele cercetării, datele empirice şi concluziile cercetării. Etapa experimentală a investigaţiei a parcurs următoarele etape: alegerea şi descrierea contextului / cadrului social din care datele urmau a fi colectate; aplicarea metodelor şi recoltarea datelor; prelucrarea şi analiza datelor; formularea concluziilor; validarea concluziilor în vederea generalizării lor; comunicarea sau publicarea rezultatelor cercetării. Metodele calitative utilizate la etapa de creare a design-ului proiectului investigaţional – observaţia participativă a procesului de organizare şi desfăşurare a activităţilor extracurriculare la matematică şi interviul calitativ – au furnizat material pentru stabilirea reperelor conceptuale ale metodologiei de formare la studenţii matematicieni a competenţelor profesionale necesare pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică. S-a constatat că succesul activităţii extracurriculare la matematică depinde de prezenţa unor calităţi profesionale ale cadrului didactic stabilite în zona de interferenţă a domeniilor matematica – didactica matematicii – psihopedagogia. Toate acestea au permis să extragem următoarele concluzii:

1. Analiza de discurs efectuată în baza interviurilor cu savanţi-matematicieni de prestigiu din ţară şi de peste hotare a servit ca ghid pentru categorizările comportamentale ale cadrelor didactice preocupate de educarea viitorilor matematicieni şi pentru dezvoltarea modelului predictiv de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică.

2. Datele obţinute în rezultatul derulării procesului de verificare experimentală a ipotezelor formulate în baza observărilor participative au confirmat că pregătirea studenţilor matematicieni pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică după Modelul Integrator elaborat cu utilizarea resurselor integratoare descrise este eficientă la etapa actuală şi poate fi preluată cu adaptările de rigoare şi la alte discipline.

3. Resursele integratoare nominalizate şi analizate, aplicate separat, contribuie la motivarea studenţilor pentru angajarea într-un proces de pregătire pentru organizarea şi desfăşurarea activităţilor extracurriculare la matematică şi la declanşarea unui proces de învăţare autoreglată, iar aplicate în ansamblu, contribuie la dezvoltarea competenţelor corespunzătoare la un anumit nivel, determinat de pregătirea anterioară şi disponibilitatea proprie a studentului.

**Recomandări**

La ora actuală este oportun:

- să fie introdus în programul de pregătire a cadrelor didactice prin masterat la specialitatea Matematica cursul „Bazele metodologice ale activităţii extracurriculare la matematică”;
- să fie deschise Centre de pregătire continuă a profesorilor în câteva zone ale republicii, care să funcţioneze sistematic şi să ofere servicii de consultanţă, oportunităţi pentru schimb de experienţă şi bune practici în domeniul organizării şi desfăşurării activităţilor extracurriculare la matematică, inclusiv pentru lucrul cu copiii dotaţi şi capabili de performanţe înalte la matematică;
- să fie diversificate formele de identificare şi stimulare a copiilor dotaţi la matematică şi propagate pe zone teritorial-administrative concursurile la matematică şi concursurile integratoare pe arii curriculare;
- să fie promovate site-uri dedicate educaţiei matematice destinate profesorilor şi copiilor interesaţi de matematică, inclusiv pentru e-learning;
- să fie introdus în sistemul educaţional mentoratul, pentru sprijinirea şi formarea în aspect praxiologic a cadrelor didactice în devenire, inclusiv şi în domeniul organizării şi desfăşurării activităţilor extracurriculare la matematică.

## BIBLIOGRAFIE

### Bibliografie în limba română


1. Acte normative: ww.edu.md
2. Agabrian, M. Cercatarea calitativă a socialului, Institul European, Iaşi, 2004, 232 p.
3. Alexandrescu, P., Goşoniu, N., Alexandrescu, C., Rădulescu, S., Frujină, I. Arhimede…Editura CARTEX, Bucureşti, 2008. – 374 p.
4. Băban A., Cogniţie, Creier, Comportament / Cognition, Brain, Behavior. Volumul V. Nr. 4, Decembrie 2001, 351 – 370.
5. Benito Yolanda, Copiii supradotaţi. Educaţie, dezvoltare emoţională, şi adaptare socială. – Iaşi; Polirom, 2003. 192 p.
6. Bocancea V. Formarea conceptului "competenţă şcolară" la studenţii fizicieni. În Invăţămantul Universitar din Republica Moldova la 80 de ani, materialele Conferinţei Ştiinţifice Internaţionale – Chişinău, 2010, 28 – 29 sept., vol. I, p. 184 – 188.
7. Boreico I., Teleuca M., Invarianţi şi jocuri, 2007
8. Boreico I., Ungureanu A., Pachiţaru M., Zahariuc A., Olimpiadele de matematică 2004, clasele IX-X, GIL, Zălău, 2004
9. Bulana M., Boreico I., Frimu A., Ciupan A., Pohoaba C., Olimpiadele de matematica din România, 2007, GIL, Zălău, 2008
10. Câmpan, F., Probleme celebre din istoria matematicii. Ediţia a doua. Bucureşti: Editura Albatros, 1972. – 275 p.
11. Cerghit, I., Vlăsceanu, L. Curs de pedagogie. 1988. – 388 p.
12. Chicu, V., Solovei, R., Hadîrcă, M., Paniş, A., Cara, A. Formarea continuă a cadrelor didactice în contextul educaţiei centrate pe cel ce învaţă. Chişinău: CEP USM, 2010. – 80 p.
13. Chiriac, L. Geometrie competitivă. Ch. Prut Internaţional, 2008. – 104 p.
14. Cindrea Ion A. Matematica, de drag: algebră. Bucureşti: Compania, 2003. 301 p.
15. Cindrea, I. A. Matematica, de drag: geometrie. Bucureşti: Compania, 2003. 304 p.
16. Cioban, M., Sali, L. Controverse în elaborarea strategiei de dezvoltare a învăţământului superior. În Ştefan cel Mare şi Sfânt: 500 de ani de nemurire. Materialele Simpozionului ştiinţific jubiliar. 22-24 mai 2004. Partea a doua. Ch., UST. – 2004, pag. 5-8.
17. Cioban, M; Sali, L. Spirala reformei: reflecţii despre sistemul educaţional contemporan, Conferinţa internaţională „Quality in Formal and non Formal Education", 30.04-01.05.2010, Iaşi, Editura Samia, 2010, pag. 13-18.
18. Cioban M., Sali L. Consideraţii asupra cvadraturii şi descompunerii poligoanelor. În: Materialele Conferinţei Ştiinţifice Internaţionale Învăţământul universitar din Republica Moldova la 80 de ani. Vol. II. Ch.: UST, 2010, p. 31-46.

19. Cioban M., Sali L. Consideraţii asupra măsurării mărimilor geometrice. În: Materialele Conferinţei Ştiinţifice Internaţionale Învăţământul universitar din Republica Moldova la 80 de ani. Vol. II. Ch.: UST, 2010, p. 46-62.
20. Creţu, C. Psihopedagogia succesului. Polirom, Iaşi , 1997. – 232 p.
21. Crudu, V., Metodologia evaluării calităţii învăţământului în instituţiile preuniversitare. Specialitatea: 13.00.01 – Pedagogie generală. Teză de doctor în pedagogie. Chişinău, 2011. – 150 p.
22. Cuculescu, I. Olimpiadele Internaţionale de Mathematică ale elevilor. Editura Tehnică, - Bucureşti. – 352 p.
23. Cununi de lauri pe laminate frunţi (Galeria elevilor olimpici ai Republicii Moldova). Chişinău, 2006. – 64 p.
24. Curtescu, T., Sali L., Bairac R. Olimpiadele mileniului III la matematică. Ch.: Univers Pedagogic, 2007. – 120p.
25. Dascălu Gh.,Radu H., Tăgîrţă V. , ş.a.. Metodica predării matematicii la clasele I-IV. Manual pentru şcolile normale. Editura Lumina, Chişinău, 1995. – 320 p.
26. Deac, Iu. Dicţionar enciclopedic al matematicienilor. Vol. I şi II. Editura Universităţii din Piteşti, 2001-2002.
27. Devlin K. Vârsta de aur a matematicii. Bucureşti, Theta, 2001, 305 p.
28. Didactica matematicii şi informaticii. Chişinău. – 2002. – 164 p.
29. Dragan, I., Parfenie, A. Psihologia invăţării. –Timişoara: Editura Excelsior, 1997, 162 p.
30. Dragu, A., Cristea, S. Psihologie şi pedagogie şcolară. Ed. Ovidius University Press, Constanţa 2003. – 60 p.
31. Eco, U., Cum se face o teză de licenţă. Disciplinele umaniste. In româneşte de George Popescu. Colectia „Biblioteca Italiana“. Pontica, Constanta, 2000, - 204 p.
32. Engel, A. Probleme de matematică – strategii de rezolvare. Traducere de M. Bălună. – Zalău: GIL, 2006. 464 p.
33. Focşa-Semionov, S. Învăţarea autoreglată: teorie şi aplicaţii educaţionale. – Chişinău: Epigraf, 2010. – 360 p.
34. Foucault, M. Ordinea discursului; Un discurs despre discurs. Eurosong & Book. 1998.
35. Gherghinescu, R. Conceptul de competenţă didactică, în Marcus, S. Competenţa didactică, Editura All, Bucureşti, - 1999.
36. Gliga, L. Standarde profesionale pentru profesia didactică. / Lucia Gliga coordonator. Bucureşti, 2002. – 186 p.
37. Gussi Gh. Ş.a. Matematică. Elemente de analiză matematică. Manual pentru clasa XI-a. Editura Didactică şi Pedagogică, R.A., 1993.

38. Guţu, V. (coord.), Chicu, V., Dandara, O., Solcan, A., Solovei, R. Psihopedagogia centrată pe copil. Chişinău: CEP USM, 2008. - ---p.
39. Guţu, V. (coord.), Chicu, V., Dandara, O., Goraş-Postică, V., Solcan, A., Solovei, R. Educaţia centrată pe cel ce învaţă. Ghid metodologic. Chişinău: CEP USM, 2008.
40. Hariton, A. 200 probleme şi întrebări amuzante pentru clasele I-IV. Ch.: LICEUM. -2000. –64p.
41. http://amc.maa.org/a-activities/a6-mosp/mosp.shtml
42. Strategia Naţională de Dezvoltare "Moldova 2020". http://particip.gov.md/
43. Iavorschi, V. Culegere de exerciţii şi probleme pentru concursuri. Chişinău, Editura Prut Internaţional. 2004.
44. Iucu Romiţa B., Instruirea şcolară: perspective teoretice şi aplicative. Iaşi, Polirom, 2008. 220 p.
45. Jinga,I., Istrate,E. : Manual de pedagogie, Editura All, Bucureşti, 2001, pg.61- 73
46. Joiţa, E. (coord.) A devein profesor constructivist. Demersuri constructiviste pentru o profesionalizare pedagogic iniţială. – Bucureşti: EDP, 2008.
47. Landau, E., Psihologia creativităţii, EDP, Bucureşti, 1979.
48. Legea educaţiei naţionale (România)
49. Lupu, I. Metodologia rezolvării problemelor cu grad sporit de dificultate. Ch. 2011.
50. Marcus, S. Competenţa didactică, Editura All, Bucureşti, 1999.
51. Metodica predării matematicii în şcoala medie. Vol.I. Redacţie ştiinţifică Z.Turlacov şi I.Achiri. Lumina, Chişinău. – 1992. – 281 p.
52. Minder, M. Didactica funcţională: obiective, strategii, evaluare. Traducere din franceză: D.Onoferi.- Ch.: Cartier, 2003. - …p.
53. Negreţ-Dobridor, I. , Pânişoară Ion-O. Ştiinţa învăţării: de la teorie la practică. Iaşi: Polirom, 2008. 254 p.
54. Nicola, I. Pedagogie, Editura Didactică şi Pedagogică, R. A., Bucureşti, 1994.
55. Olimpiadele republicane de mathematică. Belousov V., Izman M., Soltan V. ş.a. – Ch., Lumina, 1985. – 152 p.
56. Olimpiadele matematice 2002. Ch.: S.N., 2003. -98 p.
57. Oprea O., Didactica nova. Tehnologia didactică. Partea 2. Chişinău, Lumina, 1992. – 284 p.
58. Patraşcu D., Crudu V. Calitatea invăţămintului în instituţiile preuniversitare: management, tehnologii, metodologii, evaluare. Chişinău: Gunivas, 2007. 378 p.
59. Păun, E., Şcoala – abordare sociopedagogică, Editura Polirom, Iaşi, 1999.
60. Pechelis, V. Potenţialul intelectului. Editura Cartea Moldovenească, 1976. 215 p.
61. Polya, G., Matematica şi raţionamentele plauzibile, vol. I şi II. Bucureşti.: Editura Ştiinţifică, 1962.

62. Potolea D., De la stiluri la strategii. O abordare empirică a comportamentului didactic. În Jinga, I, Vlăsceanu, L. (coord.), Structuri, strategii şi performanţe in invăţămant.- Bucureşti: Ed. Academiei, 1989, p. 160-187.
63. Pufu Elena, Rolul cursurilor opţionale în eficientizarea procesului de predare – învăţare a fizicii în învăţămantul preuniversitar; teză de doctor în pedagogie, Univ. Tiraspol, Chişinău, Republica Moldova 2010, 180 p.
64. Raischi, V. Geometrie. Clasa a VII-VIII-a. Ghid pentru elevi, profesori şi părinţi. Chişinău, Prut Internaţional, 1998. – 352 p.
65. Raischi, V. Matematică. Probleme şi teste pentru clasa V-a. Bucureşti: Sigma, 1994.- 152 p.
66. Sălăvăstru, D. Psihologia educaţiei. – Iaşi: Polirom, 2004. 288 p.
67. Sali L. Motivaţii şi soluţii pentru asigurarea calităţii pregătirii la didactica matematicii. În: The 14th Conference on Applied and Industrial Mathematics dedicated to the 60$^{th}$ anniversary of the foundation of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University. Communications in didactics. Chişinău, 2006, p. 120-127.
68. Sali L. Fundamente psihopedagogice cu privire la dezvoltarea competenţelor de organizare a activităţilor extracurriculare ale studenţilor-matematicieni. În: Proseedings of the International Conference „ Quality in Formal and Non Formal Education”, second edition. Iaşi: Editura Samia, 2012. p. 251 - 259.
69. Sali L. Competiţiile matematice şi rolul lor în progresul învăţământului matematic. În: Mathematics & Information Technologies: Research and Education. Abstracts. Ch.: CEP USM, 2008, p. 74-77.
70. Sali, L. Posibilităţi de realizare a obiectivelor intergartive la studierea proprietăţilor mulţimilor numerice”- în Acta et Commentationes, vol III, Chişinău, 2003, p. 202-207.
71. Sali, L., Procedee de compunere a sarcinilor cu caracter captivant la matematică. Revista Delta, nr. 1 (7) 2008. P. 40-49
72. Sali L., Teleucă M. Studiu privind educaţia copiilor dotaţi la matematică în Republica Moldova. În: Proseedings of the International Conference „Quality in formal and nonformal education, first edition. 7-8 mai 2011. Editura Samia. Iaşi, România. P.143-154.
73. Sali L. Studiu privind pregătirea cadrelor didactice pentru instruirea elevilor dotaţi la matematică. În: International Conference “Mathematics&Information technologies: Research and Education” (MITRE – 2011) dedicated to the 65$^{th}$ anniversary of the Moldova State University. Chişinău, August 22-25, 2011: Abstracts. Ch. : CEP USM, 2011. – 217 p. pag. 193-194, ISBN 978-9975-71-144-9

74. Şchiopu U., Verza E. Psihologia Virstelor. Ciclurile vieţii. – Bucureşti: Editura Didactică şi Pedagogică, 1995, 479 p.
75. Silverman D. (2004) Interpretarea datelor calitative. Metode de analiză a comunicării, textului şi interacţiunii, trad.rom. Adela Toplean, Polirom, Iaşi, pp. 41-58, 177-210, 238-277, 280-307
76. Tascovici D.-E. Repere psiho-pedagogice ale evaluării cadrelor didactice din invăţămantul preuniversitar. Autoref. tezei de doctor în pedagogie. Ch. 2011. 26 p.
77. Teleucă M., A. Ivanov, Probleme de geometrie competitivă, Editura GIL, România, 2009
78. Temple, C. ş.a. Strategii de dezvoltare a gândirii critice pentru toate disciplinele şcolare. Ghidul II. Adaptare N.Creţu. Supliment al revistei „Didactica Pro…”, nr.2. Chişinău, 2002.
79. Ulm, V. Digital Media – A Catalyst for Innovations in Mathematics Education? / In “Mathematics Education with Technology. Experiences in Europe. Augsburg, Germany, 2010. – 272 p., p. 7-29.
80. Voica C., Singer, M. Cercetarea în didactica matematicii – o cenuşăreasă? În ROMAI Educational Journal. Vol. 4 (2009). Editura Sigma, Bucureşti. – 2009. – 64 p. Pag. 8-12.
81. Volcov V. Bazele pedagogice şi manageriale de dezvoltare a instituţiilor de invăţămint complementar in Republica Moldova. Teză de dr în ped., 2011. – 202 p.
82. Zlate, M.: Introducere în psihologie, Editura Polirom, Iaşi, 2000, pg.379-411

**Bibliografie în limba rusă**

83. Абдулова, Л. Формирование исследовательской компетентности студентов колледжа на основе синергетического подхода. **Автореф.** dисс. на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. Специальность: 13.00.08 – Теория и методика профессионального образования. Астрахань, 2009. 23 с.
84. Агаханов, Н.Х., Подлипский, О.К. Методические рекомендации по разработке заданий для школьного и муниципального этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2009/2010 учебном году. Москва, 2009.
85. Акопян Е.А. Пути развития творческой деятельности учащихся в процессе внеклассной работы по математике. Автореф. дисс. на соискание ученой степени канд. пед. наук – М., 1973. – 24 с.
86. Андриенко, А.В. Структура специальных педагогических способностей учителя математики и психологические условия их формирования: Автореф. Дисс. … канд. Психол. Наук. – М., 1990. – 18 с.

87. Афанасьев, В. В., Смирнов Е. И. Гуманитарная роль математики в процессе подготовки учителя. **http://vestnik.yspu.org/releases/novosti_i_problemy/16_1/**
88. Ашкын, Суат Математический факультатив как одна из форм расширения использования компьютерных технологий (на примере 9-11 классов общеобразовательной школы). Дис. . канд. Пед. Наук : 13.00.02 / Суат Ашкын. М., 2004. – 140с.
89. Базарова, Э. Взаимосвязь классных и внеклассных занятий по математике в IV классе как средство повышения эффективности учебно-воспитательного процесса. Автореферат дисс. Канд. Пед. Наук. –Ташкент, 1973. 189 с.
90. Балк, М.Б. Организация и содержание внеклассных занятий по математике. М.: Учпедгиз, 1956. – 248 с.
91. Балк, М.Б., Балк Г.Д., Математика после уроков. Пособие для учителей. – Москва: Просвещение, 1971. – 462 с.
92. Барр, Ст. Россыпи головоломок: Пер. с англ. – Москва: Мир, 1987. – 415 с.
93. Болтянский В.Г. Третья проблема Гильберта. Москва, Наука, 1977, 208 с.
94. Болтянский В.Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры. Серия: «Популярные лекции по матем.», Вып. 22. – Москва, Гостехиздат 1956г. 64 с.
95. Бугаенко, В. Уравнение Пелля. Серия «Библиотека „Математическое просвещение”». Москва: МЦНМО, 2001. – 32 с.
96. Гарднер, М. Математические головоломки и развлечения. – М. Мир. 1971.
97. Гарднер, М. Математические досуги. – Москва, Мир. –1972.
98. Гарднер, М. Математические новеллы. – Москва, Мир. – 1974.
99. Глейзер, Г.И. История математики в школе (IV-VI кл.). – Москва: Просвещение, 1981. –
100. Глейзер, Г.И. История математики в школе (VII-VIII кл.). – Москва: Просвещение, 1981.
101. Глейзер, Г.И. История математики в школе (IX-X кл.). – Москва: Просвещение, 1981. –
102. Гусев, В. Как помочь ученику полюбить математику Ч. 1. Москва: Авангард, 1994г. – 168 с.
103. Гусев, В.А. Внеклассная работа по математике в 6-8 классах: книга для учителя / В.А. Гусев, А.И.Орлов, А.J1. Розенталь. 2-е изд., перераб. – М. : Просвещение, 1984. – 286 с.
104. Данилова В. Дидактическое структурирование процесса обучения студентов в педагогическом вузе. Дис. … канд. пед. наук. – Пермь., 2003. 204 с.
105. Демисенова, С.В. Совершенствование подготовки будущих учителей математики в педвузе к внеклассной работе по математике в школе в условиях

дифференциации обучения школьников и студентов. Автореферат дисс. Канд. Пед. Наук: 13.00.02 - Омск, 2004

106. Денисова Галина Викторовна. Учебно-исследовательская деятельность студентов как фактор профессионализации подготовки будущего учителя математики в педагогическом вузе. Специальность 13.00.02 – теория и методика обучения математике. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук, Рязань,1999.

107. Доровской, Ф. Одаренность: от потенциала – к факту. Учебно-методическое пособие. Воронеж, 2006.

108. Дробышев, Ю. А. Многоуровневая историко-математическая подготовка будущего учителя математики : автореферат дис. … доктора педагогических наук : 13.00.02 / Дробышев Юрий Александрович; [Место защиты: Тул. Гос. Пед. Ун-т им. Л.Н. Толстого].- Москва, 2011.- 45 с.: ил. РГБ ОД, 9 11-2/3675

109. Дьюдени, Г. 520 головоломок. – Москва, Мир. – 1975.

110. Дьюдени, Г. Кентерберийские головоломки. – Москва, Мир. – 1979.

111. Дырченко И.И. Развитие математических способностей учащихся на внеклассных занятиях. Автореферат дисс. Канд. Пед. Наук. М., 1963. -19 с.

112. Есипова, Н.Д. Развитие логического мышления младших школьников на внеклассных занятиях по математике с использованием ЭВМ. Дис. . канд. Пед. Наук. Орел, 2001.

113. Екимова М.А., Кукин Г.П. Задачи на разрезание. Серия: «Секреты преподавания математики». – Москва: МЦНМО, 2002. . 120 с.

114. Журавлев И.К. Взаимосвязь приемов, методов и организационных форм обучения // Советская педагогика. – 1985. - № 11. – С.34-38.

115. Загвязинский В.И. Теория обучения: Современная интерпретация. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – 192с.

116. Загвязинский В.И., Атаханов Р. Методология и методы психолого-педагогического исследования.- М.: Изд. Центр «Академия», 2001.- 208с.

117. Зубелевич, Г.И. Сборник задач московских математических олимпиад (с решениями). Пособие для учителей 5-8 классов. Под ред. Сикорского К.П. Москва, Просвещение. – 1971. – 304 с.

118. Избранные вопросы математики: 9 кл. Факультативный курс. Сост. Шварцбурд С.И. - - Москва: Просвещение, 1980. – 191 с.

119. Избранные вопросы математики: 10 кл. Факультативный курс. Сост. Шварцбурд С.И. - - Москва: Просвещение, 1980. – 191 с.

120. Казаренков В.И., Основы педагогики: интеграция урочных и внеурочных занятий школьников. http://www.gumer.info/bibliotek_Buks/Pedagog/kazar/01.php

121. Клайн М. Математика. Поиск истины: Перевод с англ./ под ред. В.Аршинова, Ю.Сачкова. – Москва, 1988. – 295 с.
122. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т. I. Арифметика. Алгебра. Анализ: Пер. с нем./Под ред. В.Г.Болтянского. – 4-е изд. – М.: Наука, 1987 . – 432 с.
123. Ковриженко, Г.А. Системы счисления и двоичная арифметика: От счета на пальцахдо ЭВМ. . Киев: Рад.шк., 1984. – 79 с.
124. Колмогоров, А.Н. Физико-математическая школа при МГУ / А.Н. Колмогоров, В.В. Вавилов, И.Т. Тропин. М. : Знание, 1981. – 64 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Серия: Математика, кибернетика. - № 5).
125. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. М.: Просвещение, 1977. – 111 с.
126. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть I. Обучение математике через задачи. М.: Просвещение, 1977. – 144 с.
127. Кон, И. Психология ранней юности. – Москва: Проспект, 1989, стр. 49-87.
128. Кордемский Б.А. Увлечь школьников математикой. М.: Просвещение, 1982. -196 с.
129. Кордемский, Б.А. Математическая смекалка / Б.А. Кордемский. М. : Юнисам, МДС, 1994. – 560 с.
130. Кордемский Б.А., Русалев Н.В. Удивительный квадрат. – Москва, 1952.
131. Кострикина Н. П. Задачи повышенной трудности в курсе математики 4-5 классов: Кн. для учителя. – Москва: Просвещение, 1986. – 96 с.
132. Кролевец В.С. Внеклассная работа по математике в V X классах средней школы. Автореферат дисс. Канд. Пед. Наук. – Киев, 1956. – 26 с.
133. Крупнов, Ю.В. Школа персонального образования. Коллективная монография. Москва: Пайдейя, 2003. -389 с.
134. Крысин, А.Я., Руденко, В.Н., Садкова В.И. и др. Поисковые задачи по математике (4-5 классы): Пособие для учителей. . – Москва: Просвещение, 1979. – 95 с.
135. Кучугурова, Н. Профессионально-методическая подготовка учителя математики. Дисс. … д-ра пед. Наук : 13.00.08 Теория и методика профессионального образования: Ставрополь, 2002. – 460 с.
136. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб.пособие для студентов физ.-мат. Спец.пед.ин-тов. Под ред. Лященко Е. И. – Москва: Просвещение, 1988. – 233 с.
137. Левитас, Г.Г. ЭВМ и школьная математика / Г.Г. Левитас // Информатика и образование. 1998. - № 2. – С. 99-100.

138. Лернер И.Я. Дидактические основы современного процесса обучения и его эффективности // Инспектирование общеобразовательной школы. – М.: НИИШ, 1985. – С.59-69.
139. Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание. Москва, Мир, 1977 г., 256 с.
140. Линдсей Г., Хали К., Томпсон Р. Творческое и критическое мышление. Пер. с англ. М.: МГУ, 1981. – 400 с.
141. Лоповок Л.М. Математика на досуге. Книга для учщихся среднего школьного возраста (IV- VIII классы). М.: Просвещение, 1981. 158 с.
142. Литвинцева, Марина Викторовна Формирование поисковой деятельности студентов в процессе математической подготовки в педагогическом вузе. Автореферат дисс. Канд. Пед. Наук: 13.00.02 - Красноярск, 2004. – 16 с.
143. Лойд, С. Математическая мозаика. Пер. с англ. – М.: РИПОЛ, 1995. 352 с.
144. Мамедяров, D. Развитие творческого мышления старшеклассников на факультативных занятиях по математике (на основе фреймовой формы обучения). Специальность 13.00.02. – Теория и методика обучения и воспитания (математика, уровень общего образования). Автореф. диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. Астрахань, 2010 г. – 22 С.
145. Маслоу, А. Мотивация и личность. 3-е uздание. Серия «Мастера психологии». – Санкт-Петербург: Питер, 2003, 351 стр.
146. Медведев В.М. Исследование взаимосвязей классных и внеклассных занятий в общеобразовательной средней школе. Дисс. Канд. Пед. Наук. –М., 1968. Т.1. – 249 е., Т.2. -153с.
147. Минервин, В. Математика на экскурсиях. Работник просвещения. Москва, 1927. -76 с.
148. Московский интеллектуальный марафон. 1997 – 1999 г. 5-8 классы. – Москва: ФИМА, Вервум-М, 2000. -112 с.
149. Назиев Асланбек Хамидович. Гуманитаризация основ специальной подготовки учителей математики в педагогических вузах : Дис. … д-ра пед. Наук : 13.00.02 : Москва, 2000. – 386 с.
150. Немов, Р. Психология. В 2-х книгах. – Москва: Прогресс, 1994.
151. Никандров Н.Д. Россия: социализация и воспитание на рубеже тысячелетий. –М., 2000.
152. Обреимов, В.И. Математические софизмы. Из-во Павленкова. С. Петербург. 1889. 80 с.
153. Окунев, А.А. Спасибо за урок, дети! О развитии творческих способностей учащихся. Кн .для учителя. – М.: Просвещение, 1988. – 128 с.

154. Педагогика: Учеб. Пособие для студентов педагогических вузов и педагогических колледжей / Под ред. П.И. Пидкасистого. – М.: Педагогическое общество России, 2000. – 640с.
155. Первин Л., Джон, О. Психология личности. Теория и исследования. Издание 7 ое. Пер. с англ.: М. Жанкочьян. – Москва: Аспект Пресс, 2001. 607 с.
156. Перельман, Я.И. Живая математика: математические рассказы и головоломки / Я.И. Перельман. М. : ООО «Издательство Астрель» ; ООО «Издательство АСТ», 2003. – 268 С.
157. Петраков И.С. Математические кружки в 8-10 классах: Кн .для учителя. – М.: Просвещение, 1987.
158. Пехлецкий И.Д. Структурно-количественный анализ как аппарат дидактических исследований (педагогико-математический аспект): Дис. …д-ра пед. Наук. – Л., 1988. – 425с.
159. Поташник М.М. Качество образования: Проблемы и психология управления. – М.: Педагогическое общество России, 2002. – 353с.
160. Реньи А. Трилогия о математике. Перевод с венгерского/ под ред. Б.В. Гнеденко. Москва: Мир, 1980. – 376 с.
161. Российская педагогическая энциклопедия. – М.: Науч. Изд. «Большая Российская Энциклопедия», 1998, -Т.2. – 672с.
162. Сали, Л. Из опыта использования элементов занимательности в процессе развития творческих возможностей учащихся. În Didactica matematicii şi informaticii. Chişinău. – 2002. – 164 p. Pag. 124 – 132.
163. Сгибнев А.И. Исследуем на уроке и на проекте. / Сборник «Учим математике» (материалы открытой школы-семинара учителей математики). Под ред. А.Д. Блинкова – М.: МЦНМО, 2006. С. 59-71.
164. Сергеев, И. Н., Олехник, С. Н., Гашков, С.Б. Примени математику. – Москва: Наука, 1989. – 240с.
165. Сетров М.И. Основы функциональной теории. – Л., 1972.
166. Суходольский Г.В. Математические средства моделирования педагогических систем // Методы системного педагогического исследования: Учеб. Пособие / Под ред. Н.В. Кузьминой. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – С.129-135.
167. Сыманюк Э. Э., Тукачев Ю. А., Деструктивные изменения компонентов педагогической деятельности в процессе становления профессионального опыта. Образование и наука. 2005. № 4 (34). Стр. 96-105.
168. Толпегина Л., Математические дуэли-турниры и соревнования. Кишинэу, 1997. – 48 с.
169. Фуше А. Педагогика математики. Пер. с франц. М.З. Рабиновича. Под ред. Проф. И.К. Андронова. — М.: Просвещение, 1969. — 128с.

170. Хлебунова, С. Теория и практика дополнительного профессионального образования педагогических и руководящих кадров общеобразовательной школы в условиях введения профильного обучения. Специальности 13.00.01, 13.00.08. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора педагогических наук. Москва, 2007 г. – 36 С.
171. Хрусталева Т. М. Специальные способности учителя в интегральном исследовании индивидуальности. Дисс. … д-ра пед. Наук:19.00.01 – общая психология, психология личности, история психологии. Пермь, 2004. -405 стр.
172. Чобан, М., Додон Н. Теория Р-разреженных пространств. Кишинев «Ştiinţa». 1979. 100 p.
173. Чобан, М., Сали, Л. О некоторых особенностях полиномиальных кривых. În Didactica matematicii şi informaticii. Chişinău. – 2002. – 164 p. Pag. 143 – 162.
174. Шамова Т.И. и др. Управление образовательными системами / Т.И. Шамова, П.И. Третьяков, Н.П. Капустин. – М.: Гуманит. Изд. Центр ВЛАДОС, 2001. – 320с.
175. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. Пособие для 10 кл. сред. Шк. – М.: Просвещение, 1989. – 352с.
176. Шарыгин И.Ф. Математическое образование: вчера, сегодня, завтра... http://scepsis.ru/library/id_638.html
177. Шашкина, М. Б. Содержание учебно-познавательной деятельности студентов – будущих учителей математики в процессе предметной подготовки.
178. Шварцман З.О. Связь классных и внеклассных занятий по математике в старших классах общеобразовательной средней школы. Дисс . канд. Пед. Наук. М., 1967. – 360 с.
179. Ширкевич К.А. Взаимосвязь классной и внеклассной работы как средство повышения качества знаний и развития учащихся начальных классов. Дисс . канд. Пед. Наук. –М., 1969. 172 с.
180. Шкерина Л.В. Обновление системы качества подготовки будущего учителя в педагогическом вузе / Л.В. Шкерина. – Красноярск: РИО ГОУ ВПО КГПУ им. В.П. Астафьева, 2005. – 274 с.
181. Штейнгауз Г. Сто задач. – Москва, Наука. – 1976. – 168 с.
182. Шуба, М.Ю., Занимательные задания в обучении математике: Кн.для учителя. – 2-е изд. –Москва: Просвещение, 1995. – с.
183. Яхович, В. Методика организации и проведения внеклассных занятий по математике в средней школе с использованием информационных и коммуникационных технологий. Дис. . канд. Пед. Наук . / Орел, 2006. – 211 с.
184. http://nsportal.ru/laboratoriya-odarennosti/talant-ne-imeet-vozrasta
185. http://summer/schoo.msk.ru

186. http://www.kariera.orc.ru/12-99/Trdet051.html
187. http://zpsh.psn.ru

**Bibliografie în limba engleză**

188. Adler, J., Jaworski, B. Public Writing in the Field of Mathematics Teacher Education. The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study Series. Vol. 11, 2009. – 277 p. **Pg.** 249.
189. Adler, Patricia A., Adler,P. Observational Techniques. În Norman K. Denzin şi Y.S. Lincoln (eds.), 1994, Handbook of Qualitative Research, Sage Publications, pp. 377- 392.
190. Al-Hroub, A. Programming for mathematically gifted children with learning difficulties / From Giftedness in Childhood to Successful Inteligence in Adulthood. 11th International Conference of European Council for High Ability. Programme and the Book of Abstarcts. Praha, Triton, 2008. – 144 p. pag. 64
191. Ball, D., Even, R. The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study Series. Vol. 11, 2009. – 277 p.
192. Barab, S., Evans, M. A. and Beak, E. (2004) Activity theory as a lens for characterizing the participatory unit, in D. H. Jonassen (ed.) Handbook of research on educational communications and technology: a project of the association for educational communications and technology (pp 199-214). London: Routledge.
193. Bianco, T., Ulm V. Mathematics Education with Technology. Experiences in Europe. Augsburg, Germany, 2010. – 272 p.
194. Boytchev, P. Equilibristic pandisciplinary approach to technology enhanced learning. In Mathematics and Education in Mathematics. Proceedings of the Forteith jubilee Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians. Borovetz, April 5-9, 2011. – 487 p.
195. Brody L. Cogito.org: a web site and online community for top mat hand science students/ From Giftedness in Childhood to Successful Inteligence in Adulthood. 11th International Conference of European Council for High Ability. Programme and the Book of Abstarcts. Praha, Triton, 2008. – 144 p. Pag. 72
196. Burman, E. (1991). What discourse is not. J. of Philosophical Psychology, 4, 325- 338.
197. Cohen L., Manion L., Morrison K. (2003) Research Methods in Education, 5th edition, Routledge Falmer, pp. 49-73 (etică) şi 105-133 (validitate şi fiabilitate).
198. Combs A. Humanistic Education: Too Tender for a Tough world? – Phi Delta Kappan. -1981.- Vol. 62. № 6. – P. 447.

199. Creativity în Mathematics Education and the Education of Ghifted Students, Proceedings of the Third International Conference/Editor în Chief, Emiliya Velikova, faculty of Education, University of Rousse, Bulgaria, August 3-9, 2003. – 392 p.
200. Crocnan, D. O., Curricular aspects of physics optional curriculum", in Invăţămantul Universitar din Republica Moldova la 80 de ani, materialele Conferinţei Ştiinţifice Internaţionale – Chişinău, 2010, 28 – 29 sept., vol. I, p. 191 – 199.
201. Denzin, N.K., Lincoln Y.S., eds. Handbook of Qualitative Research, Sage Publications. – 1994.
202. Dictionar Oxvord.
203. Dunn, R. & Dunn, K., Teaching students through their individual learning styles: a practical approach. Reston, VA: Reston Publishing Co., 1978.
204. Engel, A. Problem-Solving Strategies. Springer Verlag, New York, 1998.
205. Engestrom, Y. (1987) The emergence of learning activity as a historical form of human learning, Learning by expanding: an activity-theoretical approach to developmental research (pp 29-127). Orienta-Konsultit Oy.
206. Freeman, J. Teaching the gifted and talented. Education Today, 54, 17-21, 2004.
207. http://amc.maa.org/a-activities/a6-mosp/mosp.shtml
208. http://faculty.education.illinois.edu/westbury/Abo/Klafki.html
209. http://www.amazon.co.uk/gp/product/
210. http://www.artofproblemsolving.com/School/index.php
211. http://www.imo-official.org
212. Hubball, H.T., & Clarke, A. (2010). Diverse methodological approaches and considerations for SoTL in higher education. Invited Peer-reviewed Essay for inaugural issue. Canadian Journal of the Scholarship of Teaching & Learning in Higher Education, 1(1). Retrieved from http://ir.lib.uwo.ca/cjsotl_rcacea/vol1/iss1/2
213. Karp, A. Teaching to teach Creatively. În: Creativity în Mathematics Education and the Education of Ghifted Students, Proceedings of the Third International Conference / Editor în Chief, Emiliya Velikova, faculty of Education, University of Rousse, Bulgaria, August 3-9, 2003, p. 73-79.
214. Kenderov, P., Tabov, J. Mathematics Competitions: ghivind marks and comparison of the results. / Mathematics Competitions, Journal of the World Federation of National Matehematics Competitions. Vol 3, no. 1, April 1990. p. 57.
215. Kenderov, Petar S. Higher ability students and inquiry based learning in Bulgaria - the role of European projects INNOMATHED and FIBONACCI / The Proceeding of The 6th Congress of the World Federation of National Mathematics Competitions / Editors: Maruta Avotina, Dace Bonka, Maria Falk de Losada, Alexander Soifer. Riga, Universitz of Latvia, 2011. – 223 p. pag. 177-183.

216. Klafki, W. Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Weinheim: Beltz Verlag, 1963.
217. Laczkovich, M. Equidecomposability and discrepancy: a solution of Tarski's circle squaring problem. – Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik 404 (1990) p. 77-117.
218. Liljedahl, P., Durand-Guerrier, V., Winslow, C. Components of Mathematics Teacher Training. In The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study Series. Vol. 11, 2009. – 277 p. Pg. 25.
219. Lobo, P. Study of classroom practice and effective teaching strategies with digital smart board to gifted/ From Giftedness in Childhood to Successful Inteligence in Adulthood. 11th International Conference of European Council for High Ability. Programme and the Book of Abstarcts. Praha, Triton, 2008. – 144 p., pag.87
220. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. NY: W.H. Freeman, 1983.
221. Much, N. (1992). The analysis of discourse as methodology for a semiotic psychology. American Behavioral Scientist, 36, 52-73.
222. Nunez, I. Activity Theory and the Utilisation of the Activity System according to the Mathematics Educational Community. Critical Review. Educate~ Special Issue, December 2009, pp 7-20, http://www.educatejournal.org/
223. Parker, I. (1992). Discourse Dynamics – Critical Analysis for Social and Individual Psychology. Routledge, London.
224. Patton, M. Q. (2002), Qualitative Research & Evaluation Methods, 3th edition, Sage Publications, pp. 260-332.
225. Pazourek, K. Mathematical algoritms and on-line teaching of gifted students / From Giftedness in Childhood to Successful Inteligence in Adulthood. 11th International Conference of European Council for High Ability. Programme and the Book of Abstarcts. Praha, Triton, - 2008. – 144 p. Pag. 98.
226. Sali, L. About Skills in Mathematical Teaching of Gifted and Talented Children. În Materialele Conferinţei Ştiinţifice internaţionale „Schimbarea Paradigmei în Teoria şi Practica Educaţională” (2008; Chişinău). Volumul II, Chişinău, 2009. 311 p. pag. 164-167.
227. Sali, L. About the particularity of utilization of humor at the mathematical extracurricular activities. The 17th Conferencce on Applied and Industrial Mathematics. Constantza, Romania, September 17-20, 2009. Abstracts. Editura Academiei Navale „Mirccea cel Bătrân”, Constanţa, 2009. 97 p. Pag. 74.
228. Sali L., Regarding the didactical transposition competences of the mathematical contents. În: The 19th Edition of the Annual Conference on Applied and Industrial Mathematics – CAIM, Iaşi, September 22 -25, 2011 ABSTRACTS, CAIM, Iaşi, România, 2011, pag.80.

229. Sali, L. Problems and solutions in the development of students' educational skills in mathematical teaching of gifted and talented children. Programme and the Book of Abstracts, 11-th ECHA Conference „From Giftedness in Childhood to Successful Inteligence in Adulthood", Prague, 2008. Pag. 91.
230. Shmidth, W. et al. The preparation Gap: Teacher education for Middle School Matehemtics in Six Countries (MT21 Report), MSU, 2007.
231. Teleucă M., Sali L., The use of rectangle "pavement" and coloring to solve some problems. În: The 19th Edition of the Annual Conference on Applied and Industrial Mathematics – CAIM, Iaşi, September 22 -25, 2011 ABSTRACTS, CAIM, Iaşi, Romănia, 2011, pag.81.
232. Teleucă, M., Sali, L. Psychopedagogical aspects of the organization and conducting of mathematical battles in schools. The 17th Conferencce on Applied and Industrial Mathematics. Constantza, Romania, September 17-20, 2009. Abstracts. Editura Academiei Navale „Mircea cel Bătrân", Constanţa, 2009. 97 p. Pag. 85.
233. The Problem Book of The 6th Congress of the World Federation of national Mathematics Competitions. Maruta Avotiņa, Dace Bonca, Maria Falk de Losada, Alexander Soifer. Rïga, University of Latvia, 2011. – 64 p.
234. The Proceeding of The 6th Congress of the World Federation of National Mathematics Competitions / Editors: Maruta Avotina, Dace Bonka, Maria Falk de Losada, Alexander Soifer. Riga, Universitz of Latvia, 2011. – 223 p.
235. The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study Series. Vol. 11, 2009. – 277 p.
236. Ulm, V. Digital Media – A Catalyst for Innovations in Mathematics Education? / In "Mathematics Education with Technology. Experiences in Europe. Augsburg, Germany, 2010. – 272 p., p. 7-29.
237. Willig, C. (1999). Applied Discourse Analysis. Social and Psychological Interventions. Open University, Buckingham.
238. www.gifted.uconn.edu

**Bibliografie în alte limbi**

239. Banach S. Sur le problème de de la mesure. Fundamenta Mathematica 4, 1923 7-33.
240. Banach S., Tarski A. Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. Fundamenta Mathematica 6 (1924) 244-277.
241. Bankov, K. A comparative study of mathematics teacher preparation in six countries. Математика и информатика. Научно-методическо списание. Година XXXIII(LI) 2008. София. С. 6-13.

242. Develay, M. De l’apprentissage à l’enseignement, Paris, ESF, 1992.
243. Hausdorff F. Bemerkung uber den Inhalt von Punktmengen. Mathematische Annalen 75 (1914) 428-434.
244. Koch, H.von. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire. Archiv för Matemat., Astron. Och Fys. **1** (1904) 681-702.
245. Tarski A. Problème 38. – Fundamenta Mathematica 7 (1925) p. 381.
246. Wagon S. The Banach-Tarski Paradox. Cambridge, Cambridge University Press, 1985.
247. www.schuelerakademie.de/dsa/2002/index.html

## ANEXE

### Anexa 1.

BAZELE METODOLOGICE
ALE ACTIVITĂŢII EXTRACURRICULARE LA MATEMATICĂ
CURS OPŢIONAL

I. PRELIMINARII

Cursul are drept scop însuşirea de către studenţi a unui volum de cunoştinţe necesare pentru formarea unei concepţii integrate despre activităţile extracurriculare la matematică.

Sistemul de activităţi întruneşte recomandări generale privind organizarea, desfăşurarea, conţinutul activităţilor extracurriculare şi anume: conştientizarea importanţei şi necesităţii organizării şi desfăşurării activităţilor extracurriculare de rând cu activităţile curriculare; studiul schimbărilor procesului instructiv şi adaptarea formelor de organizare a activităţilor extracurriculare la condiţiile actualităţii; analiza bunelor practici educaţionale de realizare a activităţii extracurriculare la matematică; implementarea noilor tehnologii didactice şi inovative în practica organizării activităţilor extracurriculare la matematică.

În rezultatul studierii cursului studenţii trebuie să demonstreze cunoştinţe legate de activitatea extracurriculară la matematică: noţiunile „activitate extracurriculară”, „activitate extracurriculară la matematică”, diverse forme de activitate extracurriculară la matematică; cerinţele faţă de conţinuturile şi mijloacele didactice utilizate în activitate extracurriculară la matematică.

Viitorii profesori de matematică trebuie să posede priceperi de aplicare a cunoştinţelor despre activitatea extracurriculară la matematică în activitatea profesională pedagogică:

- să ştie să realizeze diferite forme ale activităţii extracurriculare la matematică în şcoala modernă;
- să analizeze şi să compare activitatea extracurriculară la matematică cu cea curriculară;
- să dezvolte interesul cognitiv la elevi în cadrul activităţilor extracurriculare la matematică;
- să modeleze condiţiile pentru dezvoltarea unei personalităţi creative în procesul de predare a matematicii;
- să descopere pricinile atitudinii negative a elevilor faţă de matematică;
- să înţeleagă particularităţile individuale ale elevilor, starea lor interioară în diverse situaţii şi să proiecteze în concordanţă cu această înţelegere procesul

instructiv atât în activitatea curriculară cât şi în realizarea activităţilor extracurriculare la matematică.

Cursul „Bazele metodologice ale activităţii extracurriculare la matematică” este recomandabil de a fi organizat în formă de ore practice şi seminare pentru a oferi posibilităţi mai largi pentru discuţii şi întrebări de ordin teoretic şi practic. Un rol important îl are activitatea individuală a studenţilor, deoarece astfel este depăşit formalismul, se realizează o deschidere pentru comunicare pedagogică, permite studenţilor să manifeste independenţă şi activism în asimilarea conţinuturilor cursului.

## 2. ADMINISTRAREA DISCIPLINEI DE STUDIU

| **Codul disciplinei în planul de învăţământ** | **Anul predării** | **Semestrul** | **Numărul de ore** | | | | | **Evaluarea** | | **Responsabil de disciplină** | **Credite** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | **Curs** | **Seminar** | **Training** | **Individuale** | **Laborator** | **Portofoliu** | **Examen** | | |
| Didactica matematicii | I ciclul 2 | 2 | 12 | 32 | 4 | 42 | | + | e | | 3 |

## TEMATICA ŞI REPARTIZAREA ORIENTATIVĂ A ORELOR

| ***Nr. d/o*** | ***Tematica orientativă*** | ***Curs*** | ***Seminar*** | ***Activitate individuală*** |
|---|---|---|---|---|
| *1.* | *Psihopedagogia centrată pe cel ce învaţă: abordare conceptuală. Strategii de predare-învăţare-evaluare centrate pe cel ce învaţă.* | | *2* | *2* |
| *2.* | *Educaţia diferenţiată. Premise psihopedagogice ale abordării diferenţiate a procesului educaţional la matematică.* | *2* | *2* | *2* |
| *3.* | *Abordarea diferenţiată a procesului educaţional la matematică în funcţie de profil. Abordarea integrată a curriculumului la matematică. Valorificarea teoriei inteligenţelor multiple în educaţia matematică.* | | *2* | *4* |
| *4.* | *Abordarea diferenţiată a procesului educaţional la matematică în funcţie de nivel.* | | *2* | *4* |
| *5.* | *Bazele psihopedagogice ale lucrului cu elevii capabili de performanţe înalte la matematică.* | *2* | *2* | *2* |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *6.* | *Motivarea elevilor pentru însuşirea aprofundată a matematicii. Strategii de activare a potenţialului creativ al elevilor în cadrul orelor de matematică.* | | *2* | *2* |
| *7.* | *Activitatea extracurriculară la matematică. Noţiuni generale. Rolul şi locul activităţii extracurriculare la matematică în procesul educaţional. Scopul şi sarcinile activităţii extracurriculare la matematică. Particularităţi de organizare a activităţii extracurriculare la matematică la diferite trepte ale învăţământului preuniversitar.* | *2* | *2* | *2* |
| *8.* | *Principii de organizare şi proiectare a activităţii extracurriculare la matematică. Forme de organizare activităţii extracurriculare la matematică. Metodologia organizării şi desfăşurării activităţilor extracurriculare la matematică.* | *2* | *2* | *2*<br>*4 ore traini ng* |
| *9.* | *Instituţiile de învăţământ complementar. Şcolile matematice şi centrele cu frecvenţa la zi şi frecvenţă redusă, taberele de matematică. Bazele psihopedagogice şi manageriale de funcţionare.* | | *2* | *2* |
| *10.* | *Lectura matematică. Învăţarea autoreglată. Transpunerea didactică a conţinuturilor matematice.* | | *2* | *2* |
| *11.* | *Dezvoltarea competenţelor investigaţionale ale elevilor în cadrul activităţilor curriculare şi extracurriculare la matematică. Metoda proiectelor în învăţământul extracurricular la matematică.* | *2* | *2* | *4* |
| *12.* | *Competiţiile matematice. Concursuri nonstandard la matematică. Olimpiadele. Aspecte psihologo-pedagogice ale pregătirii elevilor către olimpiadele de matematică.* | | *2* | *4* |
| *13.* | *Principalele tipuri de probleme de olimpiadă la matematică. Cerinţe faţă de sistemul de probleme pentru olimpiadele de matematică la diverse etape. Cerinţe faţă de rezolvarea problemelor de olimpiadă. Evaluarea lucrărilor participanţilor la olimpiadă.* | *2* | *2* | *2* |
| *14.* | *Particularităţile de utilizare a TIC la organizarea activităţii extracurriculare la matematică. Învăţământul extracurricular matematic la distanţă. Presa matematică.* | | *2* | *4* |
| *15.* | *Jocul ca formă de organizare activităţii extracurriculare la matematică. Rolul elementelor de matematica distractivă în dezvoltarea competenţelor matematice ale elevilor.* | | *2* | *2* |
| *16.* | *Rolul elementelor de istoria matematicii în dezvoltarea competenţelor matematice ale elevilor.* | | *2* | *2* |
| | ***Total*** | ***12*** | ***32*** | ***46*** |

**Competenţe generice**

- adaptarea mesajului profesional la diverse medii socio-culturale;
- dezvoltarea abilităţilor decizionale;
- abilitatea de a prezenta oral sau în scris teorii şi practici din domeniu în limba maternă;
- capacitatea de a învăţa;
- argumentarea propriei poziţii în luarea unei decizii profesionale;
- aplicarea tehnologiilor informaţionale în activitatea profesională;
- cultivarea sentimentului demnităţii în stabilirea relaţiilor interpersonale la nivelul colectivului profesional, comunităţii naţionale, internaţionale;
- manifestarea toleranţei în comunicare cu persoanele din alte domenii de activitate;
- respectarea deontologiei profesionale în polemica cu colegii de breaslă;
- abilitatea de a se adapta noilor situaţii sociale;
- utilizarea unei limbi străine în lecturile profesionale;
- ajustarea comportamentului la cerinţele deontologiei profesionale.

**Competenţe specifice**

- transpunerea didactică a conţinuturilor matematice;
- lecturarea textelor matematice;
- utilizarea tehnologiilor şi tehnicilor moderne de facilitare a învăţării matematicii, de cointeresare a elevilor în studierea matematicii;
- comunicarea cu copiii şi abilitatea de a motiva elevii pentru studierea matematicii;
- competenţe inovative;
- asumarea responsabilităţilor;
- evaluarea activităţilor extracurriculare;
- evaluarea rezultatelor şcolare şi identificarea nivelului capacităţilor matematice ale elevilor.

## 2. OBIECTIVELE CROSS-CURRICULARE ŞI GENERALE

**Obiectivele cross-curriculare din perspectiva cadrului de calificare:**

- INSTRUMENTALE

- cunoaşterea fundamentelor teoretice şi metodologice ale ştiinţelor educaţiei;
- producerea noilor cunoştinţe în cadrul ştiinţelor educaţiei;
- proiectarea, aplicarea şi transferul strategiilor didactice;
- evaluarea critică a fenomenю, proceselor şi a rezultatelor în cadrul educaţional.

- INVESTIGAŢIONALE

- identificarea şi interpretarea problemelor din domeniul educaţional;

- proiectarea şi realizarea cercetărilor aplicative în domeniul educaţional;
- implementarea rezultatelor investigaţionale în practica educaţională.

- SISTEMICE

- comunicarea eficientă interpersonală şi didactică;
- respectarea codului deontologic educaţional;
- aprecierea şi acceptarea diversităţii şi multiculturalităţii;
- promovarea şi dezvoltarea valorilor personale şi sociale;
- asumarea de responsabilităţi sociale şi profesionale;
- manifestarea creativităţii în activitatea educaţională;
- stabilirea relaţiilor / conexiunilor interdisciplinare şi transdisciplinare;
- luarea de decizii coerente în cadrul activităţii educaţionale;
- autoevaluarea şi reflexia educaţională.

**Obiectivele generale ale cursului:**

*Cunoaştere:*

- să cunoască fundamentele (ped, psih., soc.,) cu referire la Organizarea şi desfăşurarea activităţii extracurriculare la matematică
- să identifice problemele şi tendinţele dezvoltării metodologiei organizării şi desfăşurării activităţii extracurriculare la matematică
- să identifice valenţele şi perspectivele activităţii extracurriculare la matematică

*Aplicare:*

- să analizeze şi să generalizeze abordările, procesele, fenomenele, experienţele legate de organizarea şi desfăşurarea activităţii extracurriculare la matematică;
- să promoveze în procesul educaţional activitatea extracurriculară la matematică;
- să proiecteze produse curriculare destinate activităţii extracurriculare la matematică.

*Integrare:*

- să proiecteze şi să aplice strategiile didactice legate de organizarea şi desfăşurarea activităţii extracurriculare la matematică;
- să proiecteze şi să realizeze investigaţii aplicative privind problematica legată de organizarea şi desfăşurarea activităţii extracurriculare la matematică să aplice abordarea interdisciplinară, pluridisciplinară, transdisciplinară;
- să comunice eficient la nivel interpersonal şi la nivel comunitar;
- sa implementeze un management eficient al procesului de desfăşurarea a activităţii extracurriculare la matematică;
- să propună noi forme, metode, tehnologii de organizare şi desfăşurare a activităţii extracurriculare la matematică.

## OBIECTIVE DE REFERINŢĂ ŞI CONŢINUTURI

**Subiectul 1.** ***Psihopedagogia centrată pe elev: abordare conceptuală. Strategii de predare-învăţare-evaluare centrate pe elev***

| Obiective | Unităţi de conţinuturi |
|---|---|
| • *Să identifice* fundamentele teoretice şi noţiunile-cheie ale psihopedagogiei centrate pe elev;<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze esenţa şi evoluţia concepţiei educaţiei centrate pe elev;<br>• *Să deducă* specificul şi particularităţile educaţiei centrate pe elev;<br>• *Să compare* concepţia educaţiei centrate pe elev cu alte concepţii moderne ale educaţiei;<br>• *Să aprecieze* valenţele formative şi sociale ale educaţiei centrate pe elev;<br>• *Să caracterizeze* funcţiile şi specificul implicării actanţilor educaţiei, profesor – elev<br>• *Să determine* competenţele profesionale ale cadrului didactic promotor al *Educaţiei centrate pe elev*<br>• *Să clasifice* competenţele profesionale ale cadrului didactic în *Educaţia centrată pe elev*.<br>• *Să valorifice* potenţialul didactic al educaţiei centrate pe elev.<br>• *Să se implice* conştient în propria autoedificare. | *Psihopedagogia centrată pe elev ca obiect de studiu.*<br>*Fundamente teoretice ale educaţiei centrate pe elev. Esenţa şi evoluţia concepţiei educaţiei centrate pe elev în contextul abordărilor moderne ale instruirii. Valenţele sociale şi formative ale învăţării centrate pe elev.*<br>*Profesorul – subiect al actului educaţional. Funcţii (atribuţii) şi roluri. Competenţele profesionale ale cadrului didactic în învăţămîntul centrat pe copil. Elevul - subiect al actului educaţional şi necesităţile lui. Responsabilitatea pentru propria învăţare. Relaţionarea şi comunicarea didactică centrată pe elev. Relaţia Subiect – Subiect ca factor determinant în învăţarea centrată pe elev.*<br>*Strategii de predare-învăţare-evaluare centrate pe elev.*<br>**Termeni-cheie:** psihopedagogie centrată pe elev/copil/cel ce învaţă, educaţia centrată pe elev, relaţia „subiect-subiect”, elevul – subiectul actului educaţional, individualitate, individualism, colectiv, umanism. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE

1. Cum înţelegeţi sintagmele „relaţia subiect-obiect” şi „relaţia subiect-subiect” în educaţie. Descrieţi în câteva propoziţii sentimentele dvs în rolul de „obiect” al procesului de instruire şi în rolul de „subiect” al acestui proces.

SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI

2. Selectaţi definiţii ale noţiunilor cheie referitoare la ce este şi ce anume presupune educaţia centrată pe cel ce învaţă. [32]
3. Examinaţi esenţa şi evoluţia conceptelor legate de educaţia centrată pe cel ce învaţă.
4. Care sunt particularităţile specifice ale procesului de predare-învăţare-evaluare în educaţia centrată pe cel ce învaţă. [22]
5. Care sunt cerinţele faţă de proiectarea didactică în cheia educaţiei centrate pe cel ce învaţă.
SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE
6. Identificaţi oportunităţile şi limitele educaţiei centrate pe cel ce învaţă.
EXTINDERE
7. Descrieţi pe o pagina reflecţiile proprii la tema „Şcoala prietenoasă copiilor”[44].

## Subiectul 2. *Educaţia diferenţiată. Premise psihopedagogice ale abordării diferenţiate a procesului educaţional la matematică*

| **Obiective** | **Unităţi de conţinuturi** |
|---|---|
| • *Să identifice* fundamentele teoretice şi noţiunile-cheie ale educaţiei diferenţiate;<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze esenţa şi evoluţia concepţiei educaţiei diferenţiate;<br>• *Să deducă* specificul şi particularităţile educaţiei diferenţiate;<br>• *Să compare* concepţia educaţiei diferenţiate cu alte concepţii ale educaţiei;<br>• *Să aprecieze* valenţele formative şi sociale ale educaţiei diferenţiate;<br>• *Să caracterizeze* funcţiile şi specificul activităţii profesorului în educaţia diferenţiată;<br>• *Să determine* competenţele profesionale ale cadrului didactic promotor al *Educaţiei diferenţiate;*<br>• *Să clasifice* competenţele profesionale ale cadrului didactic în *Educaţia diferenţiată;*<br>• *Să valorifice* metodele şi strategiile inovatoare ale educaţieie diferenţiate;<br>• *Să se implice* conştient în propria autoedificare. | *Educaţia diferenţiată. Noţiuni generale.*<br>*Aspecte istorice privind educaţia diferenţiată.*<br>*Premise psihopedagogice ale abordării diferenţiate a procesului educaţional la matematică.*<br>*Clasificarea formelor de organizare a procesului educaţional prin prisma abordării diferențiate.*<br>**Termeni-cheie**: educaţia diferenţiată, educaţie individualizată, procesului educaţional la matematică, formelor de organizare a procesului educaţional, clasificare, |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE

1.Completaţi fişa de autointerogare:

a) Ce ştiu eu despre educaţia diferenţiată?
b) Am fost eu în situaţia când profesorul se axa pe principiile educaţiei diferenţiată?
c) Ce argumente pot aduce în favoarea opiniei mele vizavi de acest concept?
d) Cum ar pute oponenţii mei să apere punctul de vedere contrar opus cu al meu asupra conceptului de educaţie diferenţiată.

SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI

2. Selectaţi definiţii ale noţiunilor cheie referitoare la ce este şi ce anume presupune educaţia diferenţiată. [ 21]

3. Examinaţi esenţa şi evoluţia conceptelor legate de educaţia diferenţiată. [36, 32]

4. Clasificaţi formele de organizare a procesului educaţional prin prisma abordării diferențiate.

5. Care sunt principalele caracteristici ale învăţământului individualizat.

SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE

6.Identificaţi oportunităţile şi limitele educaţiei diferenţiate la matematică.

EXTINDERE

7.Exploraţi posibilităţile utilizării softurilor educaţionale în abordarea diferenţiată a procesului educaţional la matematică. [10]

## **Subiectul 3.** *Abordarea diferenţiată a procesului educaţional la matematică în funcţie de profil. Abordarea integrată a curriculumului la matematică. Valorificarea teoriei inteligenţelor multiple în educaţia matematică*

| **Obiective** | **Unităţi de conţinuturi** |
|---|---|
| • *Să identifice* fundamentele teoretice şi noţiunile-cheie ale educaţiei diferenţiate la matematică în funcţie de profil;<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze esenţa şi evoluţia concepţiei educaţiei diferenţiate în funcţie de profil;<br>• *Să deducă* specificul şi particularităţile educaţiei diferenţiate la matematică în funcţie de profil;<br>• *Să aprecieze* valenţele formative şi sociale ale educaţiei diferenţiate la | *Abordarea diferenţiată a procesului educaţional la matematică în funcţie de profil.*<br>*Abordarea integrată a curriculum-ului: monodisciplinaritatea (inserţie, armonizare), pluridisciplinaritatea, interdisciplinaritatea, transdisciplinaritatea.*<br>*Valorificarea teoriei inteligenţelor multiple în educaţia matematică.* |

| | |
|---|---|
| matematică în funcţie de profil;<br>• *Să caracterizeze* funcţiile şi specificul activităţii profesorului în clasele cu diverse profiluri;<br>• *Să valorifice* metodele şi strategiile inovatoare ale educaţieie diferenţiate la matematică în funcţie de profil;<br>• *Să realizeze proiecte* din perspectiva abordărilor monodisciplinară, pluridisciplinară, interdisciplinară, transdisciplinară, teoriei inteligenţelor multiple. | **Termeni-cheie:** diferenţierea în funcţie de profil, curriculum integrat, monodisciplinaritatea (inserţie, armonizare), pluridisciplinaritatea, interdisciplinaritatea, transdisciplinaritatea, inteligenţă, tipuri de inteligenţă, teoria inteligenţelor multiple. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE

1. Completaţi Chestionarul de examinare a stilului preferenţial de învăţare pentru a vă autoevalua. [17]

SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI

2. Examinaţi esenţa realizării diferenţierii educaţiei în funcţie de profil şi particularităţile studiului matematicii în clasele cu divers profil (artistic, sportiv etc.). [30]
3. Examinaţi sistemele educaţionale din RM şi din alte state în domeniul educaţiei diferenţiate.
4. Abordarea integrată a curriculum-ului. [1]
5. Monodisciplinaritatea, pluridisciplinaritatea, interdisciplinaritatea, transdisciplinaritatea în învăţământul matematic.

SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE

6. Care este esenţa teoriei inteligenţelor multiple. [18]

EXTINDERE

7. Selectaţi o temă şi valorificaţi ideile teoriei inteligenţelor multiple în educaţia matematică.

### Subiectul 4. *Abordarea diferenţiată a procesului educaţional la matematică în funcţie de nivel*

| Obiective | Unităţi de conţinuturi |
|---|---|
| • *Să identifice* fundamentele teoretice şi noţiunile-cheie legate de conceptele competenţe matematice, | *Problema competenţelor, capacităţilor, abilităţilor, aptitudinilor matematice.* |

| | |
|---|---|
| capacităţi pentru matematică, abilităţi şi aptitudini matematice;<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze esenţa şi evoluţia concepţiei educaţiei diferenţiate în funcţie de nivel;<br>• *Să deducă* specificul şi particularităţile educaţiei diferenţiate la matematică în funcţie de nivel;<br>• *Să aprecieze* valenţele formative şi sociale ale educaţiei diferenţiate la matematică în funcţie de nivel;<br>• *Să caracterizeze* funcţiile şi specificul activităţii profesorului de matematică în clasele cu diverse niveluri de aprofundare;<br>• *Să determine* competenţele matematice specifice absolventului unei clasecu profil matematic*;*<br>• *Să valorifice* metodele şi strategiile inovatoare ale educaţiei diferenţiate la matematică în funcţie de nivel. | *Delimitări conceptuale. Abordarea diferenţiată a procesului educaţional la matematică în funcţie de nivel.*<br>*Particularităţile de predare-învăţare a matematicii în funcţie de deosebirile de gen.*<br>**Termeni-cheie:**<br>diferenţierea în funcţie de nivel, gen; competenţe matematice, capacităţi matematice, abilităţi matematice, aptitudini matematice. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE

1. Parcurgeţi un test de calcule numerice şi logică. [8]

SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI

2. Selectaţi definiţii ale noţiunilor cheie referitoare la ce este şi ce anume presupune educaţia diferenţiată în funcţie de nivel la matematică: aptitudini; competenţe; abilităţi; capacităţi. [11]
3. Clasificaţi formele de organizare a procesului educaţional prin prisma abordării diferențiate în funcţie de nivel.
4. Care sunt principalele caracteristici ale învăţământului matematic aprofundat. [41]

SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE

5.Identificaţi criterii pentru realizarea studiului diferenţiat în funcţie de nivel la matematică.

EXTINDERE

6.Determinaţi particularităţile de predare-învăţare a matematicii în funcţie de particularităţile de dezvoltare a emisferelor creierului.

**Subiectul 5.** ***Bazele psihopedagogice ale lucrului cu elevii capabili de performanţe înalte la matematică***

| Obiective | Unităţi de conţinuturi |
|---|---|
| • *Să analizeze,* să caracterizeze esenţa noţiunilor supradotare, talent , dotare la matematică.<br>• *Să descrie* aspectele psihopedagogice ale lucrului cu elevii capabili de performanţe înalte la matematică;<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze esenţa şi evoluţia metodelor de identificare a copiilor dotaţi;<br>• *Să descrie* particularităţile de predare a matematicii în grupele de elevi capabili de performanţe înalte;<br>• *Să caracterizeze* funcţiile şi specificul activităţii profesorului de matematică cu copiii dotaţi şi supradotaţi;<br>• *Să valorifice* metodele şi strategiile inovatoare în domeniul educaţiei copiilor dotaţi şi supradotaţi la matematică;<br>• *Să se implice* conştient în propria autoedificare. | *Bazele psihopedagogice ale lucrului cu elevii capabili de performanţe înalte la matematică.*<br>*Identificarea copiilor dotaţi la matematică. Supradotarea.*<br>*Caracteristicile de personalitate şi intelectuale ale copiilor dotaţi la matematică.*<br>*Cerinţe faţă de competenţele profesorilor care lucrează cu copiii dotaţi.*<br><br>**Termeni-cheie:** performanţe; copii dotaţi, supradotaţi, talent, identificarea dotaţilor. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE

1.Care este viziunea dumneavoastră în privinţa educaţiei şi formării copiilor dotaţi? Cum anume aţi dori să arate şi ce aţi dori să realizeze? Aveţi ocazia să visaţi la o lume educaţională ideală pentru copiii talentaţi din diverse domenii. Consemnaţi ideile într-un eseu nestructurat.

SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI

2.Selectaţi definiţii ale noţiunilor cheie referitoare la psihopedagogia dotării şi supradotării. [5]

3.Examinaţi esenţa şi evoluţia metodelor de identificare a copiilor dotaţi, a modelelor de identificare.

4.Examinaţi legislaţia internaţională şi a RM în domeniul dotării.

5.Care sunt particularităţile specifice de identificare a aptitudinilor matematice la elevi.
6.Care sunt cerinţele faţă de educatorii copiilor dotaţi la matematică.
SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE
7.Aduceţi-vă aminte de profesorii dumneavoastră de când eraţi elevi. Cum erau? Satisfăceau ei cerinţele pentru un profesor care lucrează cu copii dotaţi?
EXTINDERE
8.Descrieţi modele de succes în educarea copiilor dotaţi la matematică (din viaţa reală, filme, romane etc.).

## Subiectul 6. *Motivarea elevilor pentru însuşirea aprofundată a matematicii. Strategii de activare a potențialului creativ al elevilor la orele de matematică*

| Obiective | Unităţi de conţinuturi |
|---|---|
| • *Să analizeze,* să caracterizeze esenţa noţiunilor motivare, motivaţie, creativitate.<br>• *Să descrie* aspectele psihopedagogice ale motivării pentru învăţare la matematică;<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze esenţa noţiunii de creativitate;<br>• *Să deducă* specificul formării şi dezvoltării capacităţilor creative la elevi în procesul predării-învăţării matematicii;<br>• *Să valorifice* metodele şi strategiile inovatoare de activare a potențialului creativ al elevilor în educaţia matematică;<br>• *Să se implice* conştient în propria autoedificare. | *Motivarea elevilor pentru însuşirea aprofundată a matematicii.*<br>*Strategii de activare a potențialului creativ al elevilor în educaţia matematică.*<br>**Termeni-cheie:**<br>**performanţe**; motivaţie, creativitate, studiu aprofundat, potenţial, educaţie matematică. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE
1.Enumeraţi 5 motive pentru care trebuie studiată matematica.
SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI
2. Selectaţi definiţii ale noţiunilor cheie referitoare motivaţia de a învăţa. [50]
3. Descrieţi componentele interne ale motivaţiei pentru a învăţa
4. Comentaţi următoare lege enunţată de Claparede: „Pentru a-l face pe un individ să acţioneze, acesta trebuie pus în condiţiile potrivite să facă sa ia naştere trebuinţa pe care are funcţia s-o satisfacă acţiunea pe care dorim s-o suscităm”.

5. Explicaţi dialectica dorinţei de a învăţa. [36]
SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE
6.Cum să încurajez elevii să fie mai interesaţi de matematică? [71]
EXTINDERE
7.Colectaţi sugestii pentru motivaţia de a învăţa de la profesori şi din literatura de specialitate.

**Subiectul 7.** ***Activitatea extracurriculară la matematică. Abordări conceptuale***

| Obiective | Unităţi de conţinuturi |
|---|---|
| • *Să identifice* fundamentele teoretice şi noţiunile-cheie legate de educaţia formală, nonformală, informală; învăţământul complementar; activitatea curriculară, extracurriculară, extraşcolară.<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze esenţa activităţii extracurriculare la matematică.<br>• *Să descrie* scopul şi sarcinile activităţii extracurriculare la matematică;<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze esenţa şi rolul activităţii extracurriculare la matematică;<br>• *Să deducă* specificul formării şi dezvoltării capacităţilor creative la elevi prin atragerea în activităţi extracurriculare la matematică;<br>• *Să compare* particularităţile de organizare a activităţii extracurriculare la matematică la diferite trepte ale învățământului preuniversitar.<br>• *Să valorifice* metodele şi strategiile inovatoare de activitate extracurriculară la matematică;<br>• *Să aprecieze* valenţele formative şi sociale ale activităţi extracurriculare la matematică;<br>• *Să se implice* conştient în propria autoedificare. | *Activitatea extracurriculară la matematică. Noţiuni generale.*<br>*Rolul şi locul activităţii extracurriculare la matematică în procesul educaţional.*<br>*Scopul şi sarcinile activităţii extracurriculare la matematică.*<br>*Particularităţi de organizare a activităţii extracurriculare la matematică la diferite trepte ale învățământului preuniversitar.*<br>**Termeni-cheie:** performanţe; activitate extracurriculară, curriculum, extraşcolar, educaţie matematică, trepte de învăţământ. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE
1.Enumeraţi tipurile de activităţi extracurriculare la care aţi participat în anii de şcoală (la orice disciplină).

SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI
2. Documentaţi-vă din literatura pedagogică despre educaţia formală, nonformală, informală.
3. Descrieţi rolul şi locul activităţii extracurriculare la matematică în procesul educaţional.
4. Stabiliţi scopul şi sarcinile activităţii extracurriculare la matematică.
5. Particularităţi de organizare a activităţii extracurriculare la matematică la diferite trepte ale învățământului preuniversitar [35].
SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE
6.Metode active de predare-învăţare utilizate în activitatea extracurriculară la matematică.[54]
EXTINDERE
7.Colectaţi scenarii ale diferitor tipuri de activităţi extracurriculare la matematică. [71]
8. Pregătiţi-vă pentru a prezenta scenariul unei activităţi în faţa grupei.

## **Subiectul 8.** ***Activitatea extracurriculară la matematică. Principii, forme, metodologia proiectării şi implementării.***

| **Obiective** | **Unităţi de conţinuturi** |
|---|---|
| • *Să identifice* fundamentele teoretice şi noţiunile-cheie legate de educaţia formală, nonformală, informală; învăţământul complementar; activitatea curriculară, extracurriculară, extraşcolară.<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze esenţa activităţii extracurriculare la matematică.<br>• *Să descrie* scopul şi sarcinile activităţii extracurriculare la matematică;<br>• *Să deducă* specificul formării şi dezvoltării capacităţilor creative la elevi prin atragerea în activităţi extracurriculare la matematică;<br>• *Să valorifice* metodele şi strategiile inovatoare de activitate extracurriculară la matematică;<br>• *Să aprecieze* valenţele formative şi sociale ale activităţi extracurriculare la matematică;<br>• *Să se implice* conştient în propria autoedificare. | *Principii de organizare şi proiectare a activităţii extracurriculare la matematică.*<br>*Forme de organizare activităţii extracurriculare la matematică: cercul de matematică; orele facultative la matematică; orele opţionale; activităţile extracurriculare episodice la matematică.*<br>*Metodologia organizării şi desfăşurării activităţilor extracurriculare la matematică.*<br>**Termeni-cheie: performanţe**; activitate extracurriculară, curriculum, extraşcolar, educaţie matematică. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE

1.Enumeraţi tipurile de activităţi extracurriculare la care aţi participat la şcoală.

SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI

2.Descrieţi principii de organizare şi proiectare a activităţii extracurriculare la matematică.

3.Prezentaţi o clasificare a activităţilor extracurriculare şi diverse activităţi extracurriculare la matematică.

4.Elaboraţi proiectul de lungă durată pentru cercul de matematica la clasa 7-a. [35, 41]

5.Alegeţi o activitate din lista de mai jos, elaboraţi proiectul didactic ale ei pentru o clasă concretă, selectată la dorinţă. Descrieţi acţiunile privind organizarea şi desfăşurarea acestei activităţi.

- *cercul de matematică;*
- *orele facultative la matematică;*
- *orele opţionale;*
- *activităţile extracurriculare episodice la matematică.*

SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE

6.Metodele interactive în organizarea activităţilor extracurruculare la matematică. [71]

EXTINDERE

7.Colectaţi scenarii ale diferitor tipuri de activităţi cu caracter competiţional la matematică. Pregătiţi un scenariu pentru implementarea în grupa academică. [71]

## Subiectul 9. *Instituţiile de învățământ complementar. Şcolile matematice şi centrele cu frecvenţa la zi şi frecvenţă redusă, taberele de matematică. Bazele psihopedagogice şi manageriale de funcţionare a lor*

| Obiective | Unităţi de conţinuturi |
|---|---|
| • *Să cunoască* fundamentele teoretice şi noţiunile-cheie legate de principiile de funcţionare a instituţiilor de învăţământ complementar.<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze esenţa principiilor de elaborare a programelor de activitate şi dezvoltare a instituţiilor de învăţământ complementar.<br>• *Să deducă* specificul organizării centrelor destinate învăţământului extracurricular la matematică.<br>• *Să descrie* particularităţile de | *Evoluţia sistemului de invăţămint extraşcolar /complementar in Republica Moldova şi tendinţele de schimbare/dezvoltare a funcţiilor lui sociale.*<br>*Structura organizaţională a instituţiei de invăţămint complementar in context managerial*<br>*Asigurarea ştiinţifico-curriculară a activităţii instituţiei de invăţămint complementar*<br>*Specificul managementului in* |

| | |
|---|---|
| organizare a taberelor, şcolilor şi atelierelor specializate în domeniul desfăşurării lucrului extracurricular la matematică şi principiile de elaborare a programelor de activitate a acestor manifestări.<br>• *Să evalueze* metode şi strategii de management al centrelor destinate învăţământului extracurricular la matematică. | *instituţiile de invăţămint complementar în general, şi centrelor destinate învăţământului extracurricular la matematică, în particular.*<br>**Termeni-cheie: performanţe**; învăţământ complementar, managementul instituţiei, activitate extracurriculară, curriculum, extraşcolar, educaţie matematică. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE

1.Parcurgeţi chestionarul „Sisteme de apreciere” [69, p. 299].

SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI

2.Documentaţi-vă la subiectul Evoluţia sistemului de învăţământ extraşcolar/complementar în Republica Moldova [57]

3.Clasificaţi tipurile de instituţii de învăţământ extraşcolar/complementar. [69]

4.Care este structura organizaţională a instituţiei de învăţământ complementar în context managerial şi specificul managementului în instituţiile de învăţământ complementar

5.Selectaţi noţiunilor cheie referitoare la asigurarea ştiinţifico-curriculară a activităţii instituţiei de învăţământ complementar cu profil matematic [ 11].

SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE

6.Identificaţi criterii pentru managementul de succes a activităţii instituţiei de învăţământ complementar cu profil matematic [11].

EXTINDERE

7.Analizaţi-vă limitele personale în ce priveşte calităţile de lider. Documentaţi-vă cu privire la tehnicile utilizate de managerii de succes [19, 20, 37,62]. Formulaţi 10 obiective personale pentru a vă dezvolta calităţi de manager într-o perioadă concretă de timp.

### Subiectul 10. *Lectura matematică. Învăţarea autoreglată. Transpunerea didactică a conţinuturilor matematice*

| Obiective | Unităţi de conţinuturi |
|---|---|
| • *Să analizeze,* să caracterizeze cerinţele faţă de manualele şi auxiliarele la matematică. | *Literatura la matematică. Cerinţe faţă de manualele şi auxiliarele la matematică.* |

| | |
|---|---|
| • *Să analizeze,* să caracterizeze manuale şi auxiliare la matematică prin prisma corespunderii lor cerinţelor faţă de manualele şi auxiliarele la matematică.<br>• *Să descrie* specificul formării competenţelor de lucru cu manualul şi de lectură a textelor matematice.<br>• *Să valorifice* metodele şi strategiile de lucru cu manualul şi de lectură a textelor matematice.<br>• *Să elaboreze* proiecte didactice şi scenarii ale activităţilor extracurriculare la matematică în conformitate cu cerinţele pentru transpunerea didactică a conţinuturilor matematice. | *Lectura matematică. Rolul formării competenţelor de lucru cu manualul şi de lectură a textelor matematice în extinderea şi aprofundarea cunoştinţelor la matematică.*<br>*Învăţarea autoreglată. Specificul studierii independente a literaturii matematice.*<br>*Transpunerea didactică a conţinuturilor matematice.*<br>**Termeni-cheie:** transpunerea didactică a conţinuturilor, lectură, învăţare autoreglată, performanţe, activitate extracurriculară, curriculum, aprofundarea cunoştinţelor. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE

1.Analizaţi propriul comportament în timpul studierii unei lucrări sau al unui manual nou. Scrieţi paşii pe care îi realizaţi în ordine cronologică.

SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI

2.Enumeraţi tipurile de literatura la matematică. Care sunt cerinţele faţă de manualele şi auxiliarele la matematică.

3.Prezentaţi algoritmii de studiere a noţiunilor, a definiţiilor noţiunilor, a axiomelor şi teoremelor. [35]

4.Documentaţi-vă cu referire la lectura analitică şi lectura globală. Care sunt cerinţele faţă de: planul de idei al unei lucrări; rezumatul; comentariul; referatul; tezele pe marginea textului; conspect; notiţe de studiu; fişe de lucru etc. [40]

5.Identificaţi mecanismele intelectuale de luare a notiţelor.

6.Numiţi cerinţele faţă de transpunerea didactică a conţinuturilor matematice. [49]

SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE

7.Alegeţi un subiect matematic din conţinuturi extinse pentru studierea sine stătătoare şi realizaţi transpunerea didactică a conţinuturilor pentru elevii clasei a VIII-a? [70]

8.Analizaţi capitolul „Metacogniţia şi reflecţia” din lucrarea [17, p.204].

EXTINDERE

9.Analizaţi diferite tehnici de învăţare. Examinaţi profilul studentului expert în ARI. Analizaţi propriul comportament în comparaţie cu cel descris pentru studentul expert.

Identificaţi punctele tari şi punctele slabe ale comportamentului dvs în perioada pregătirii pentru examene şi în timpul „confruntării cu examenul”. [17]

### **Subiectul 11.** *Dezvoltarea competenţelor investigaţionale ale elevilor în cadrul activităţilor curriculare şi extracurriculare la matematică. Metoda proiectelor în învăţământul extracurricular la matematică*

| **Obiective** | **Unităţi de conţinuturi** |
|---|---|
| • *Să identifice* fundamentele teoretice şi noţiunile-cheie legate de dezvoltarea competenţelor investigaţionale ale elevilor.<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze esenţa activităţii investigaţionale la matematică.<br>• *Să descrie* scopul şi sarcinile activităţii investigaţionale la matematică.<br>• *Să deducă* specificul formării şi dezvoltării capacităţilor investigaţioanle la matematică în dependenţă de particularităţile de vârstă ale elvilor.<br>• *Să valorifice* metodele şi strategiile inovatoare de formare şi dezvoltare la elevi a capacităţilor investigaţioanle la matematică.<br>• *Să-şi autoevalueze* propriul stil de efectuare a unui demers de cercetare.<br>• *Să se implice* conştient în dezvoltarea proprilor capacităţi investigaţioanle la matematică. | *Activitatea investigaţională a elevilor la matematică.*<br>*Metode, forme şi strategii de organizare a activităţii investigaţionale a elevilor la matematică.*<br>*Metoda proiectelor în învăţământul extracurricular la matematică.*<br>**Termeni-cheie: performanţe**; activitate extracurriculară, metode investigaţionale, curriculum, extraşcolar, educaţie matematică. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE
1.Parcurgeţi un test de gândire laterală. [8]
SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI
2.Selectaţi definiţii ale noţiunilor cheie referitoare la operaţiile mintale şi formarea lor prin învăţământul matematic şi la psihologia procesului de creaţie în matematică [35,74].
3.Documentaţi-vă la tema: Teoria operaţională a lui Galperin

4.Caracterizaţi principalele metode de cercetare în domeniul matematicii: metoda coordonatelor; metoda vectorială; metoda axiomatică; metoda de demonstrare prin reducere la absurd; metoda transformărilor geometrice; metoda inducţiei etc. [41, 73]
5.Descrieţi metoda portofoliului, metoda proiectului şi alte metode utilizate în organizarea activităţii investigaţionale cu elevii.
6. Metoda socratică în procesul de predare a matematicii [74, p. 75].
SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE
7.Identificaţi criterii pentru realizarea unor investigaţii la matematică în baza teoriei inteligenţelor multiple [18, p.64].
EXTINDERE
8.Alegeţi un subiect matematic din conţinuturi extinse pentru studierea sine stătătoare şi elaboraţi un proiect de organizare a cercetărilor pentru elevii clasei a VIII-a? [70]

## **Subiectul 12.** ***Competiţiile matematice. Concursuri nonstandard la matematică. Olimpiadele. Aspecte psihologo-pedagogice ale pregătirii elevilor către olimpiadele de matematică***

| **Obiective** | **Unităţi de conţinuturi** |
|---|---|
| • *Să identifice* rolul concursurilor şi competiţiilor matematice şi semnificaţia lor în educaţia matematică.<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze evoluţia mişcării olimpice la matematică.<br>• *Să descrie* scopul şi sarcinile concursurilor şi competiţiilor matematice;<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze aspectele psihologo-pedagogice ale pregătirii elevilor către olimpiadele de matematică.<br>• *Să deducă* specificul formării şi dezvoltării capacităţilor creative la elevi prin participarea la concursurile de matematică competitivă.<br>• *Să valorifice* metodele şi strategiile inovatoare de pregătire a elevilor pentru concursuri la matematică;<br>• *Să aprecieze* valenţele formative şi sociale ale participării la concursurile de matematică competitivă. | *Concursurile şi competiţiile matematice. Rolul şi semnificaţia lor în educaţia matematică.*<br>*Concursuri nonstandard la matematică.*<br>*Olimpiadele de matematică. Evoluţia mişcării olimpice la matematică.*<br>*Aspecte psihologo-pedagogice ale pregătirii elevilor către olimpiadele de matematică.*<br>**Termeni-cheie:** concurs matematic, performanţe la matematică; olimpiade de matematică, curriculum, extracurricular, educaţie matematică. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE

1. Amintiţi-vă o experienţă proprie de participare la un concurs. Relataţi ce sentimente aţi avut la fiecare etapă: înaintea concursului; în timpul concursului; după concurs. Care este viziunea dumneavoastră în privinţa consilierii psihologice a participanţilor la concursuri în diverse domenii? Consemnaţi ideile într-un eseu nestructurat.

SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI

2. Clasificaţi tipurile de concursuri la matematică. Documentaţi-vă cu privire la concursurile internaţionale de matematică la care au participat elevii din RM şi la rezultatele obţinute. [ 5, 28]
3. Examinaţi esenţa şi evoluţia *mişcării olimpice la matematică* [13, 56].
4. Examinaţi Regulamentul de desfăşurare a olimpiadelor internaţionale la matematică.
5. Analizaţi valenţele formative şi sociale ale participării la concursurile de matematică competitivă.

SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE

6. Analizaţi aspectele psihologo-pedagogice ale pregătirii elevilor către olimpiadele de matematică. Care sunt consecinţele succeselor, dar a eşecurilor în rezultatul evoluării la competiţii asupra psihicului elevilor participanţi? Care este rolul profesorului (psihologului) în menajarea stresului la elevi?

EXTINDERE

7. Elaboraţi scenariul pentru unul din concursurile nonstandard descrise în lucrarea [53] pentru una din clasele gimnaziale.

## Subiectul 13. *Curriculum-ul la matematică pentru pregătirea de olimpiadele la matematică. Principii de proiectare. Principalele tipuri de probleme de olimpiadă la matematică*

| Obiective | Unităţi de conţinuturi |
|---|---|
| • *Să identifice* fundamentele teoretice şi noţiunile-cheie legate de clasificarea problemelor matematice.<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze principiile de selectare a problemelor pentru concursuri şi olimpiade la matematică.<br>• *Să descrie* cerinţe faţă de sistemul de probleme pentru olimpiadele de | *Curriculum-ul la matematică pentru pregătirea de olimpiadele de matematică. Principii de proiectare.*<br>*Cerinţe faţă de sistemul de probleme pentru olimpiadele de matematică la diverse etape.*<br>*Cerinţe faţă de expunerea rezolvărilor problemelor de* |

| | |
|---|---|
| matematică la diverse etape.<br>• *Să analizeze*, să caracterizeze cerinţe faţă de expunerea rezolvărilor problemelor de olimpiadă.<br>• *Să valorifice* metodele şi strategiile de evaluare şi apreciere a lucrărilor participanţilor la olimpiadă. | *olimpiadă.*<br>*Evaluarea şi aprecierea lucrărilor participanţilor la olimpiadă.*<br>**Termeni-cheie: performanţe**; activitate extracurriculară, curriculum, extraşcolar, educaţie matematică. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE

1.Descrieţi profilul elevului olimpic. Amintiţi-vă un film sau o carte citită în care este descrisă viaţa unui „împătimit de matematică”.

SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI

2.Documentaţi-vă cu privire la cerinţele faţă de sistemul de probleme pentru olimpiadele de matematică la diverse etape.

3.Care sunt cerinţele faţă de rezolvarea problemelor de olimpiadă. [13, 55, 46]

4. Examinaţi particularităţile de evaluare şi apreciere a lucrărilor participanţilor la olimpiadă. [60]

5. Care sunt particularităţile specifice de selectare a problemelor pentru olimpiadele internaţionale de matematică? Care este rolul juriului la olimpiadele internaţionale? [13, 34]

6. Analizaţi programele analitice pentru pregătirea elevilor către olimpiade din câteva ţări. Găsiţi tangenţe şi discrepanţe.

SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE

7. Elaboraţi un chestionar şi realizaţi un interviu referitor la diverse aspect ale experienţei unuia din elevii participanţi la olimpiada republicană de matematică.

EXTINDERE

8. Elaboraţi o variantă pentru etapa de sector a olimpiadei matematice la clasa V.

## **Subiectul 14.** ***Particularităţile de utilizare a TIC la organizarea activităţii extracurriculare la matematică. Învăţământul extracurricular matematic la distanţă. Presa matematică***

| **Obiective** | **Unităţi de conţinuturi** |
|---|---|
| • *Să identifice* fundamentele teoretice şi noţiunile-cheie legate de educaţia bazată pe utilizarea TIC şi trăsăturile generale ale softului educaţional. | *Particularităţile de utilizare a TIC în învăţământul matematic.*<br>*Învăţământul extracurricular matematic la distanţă.*<br>*Presa matematică în condiţiile* |

| | |
|---|---|
| • *Să descrie* avantajele şi dezavantejele utilizării TIC în predarea-învăţarea-evaluarea la matematică.<br>• *Să deducă* specificul formării şi dezvoltării capacităţilor creative la elevi prin atragerea în activităţi de elaborare a gazetelor matematice şi a substitutelor lor în condiţiile utilizării TIC.<br>• *Să valorifice* metodele şi strategiile inovatoare de utilizare a softurilor educaţionale în activităţile extracurriculare la matematică.<br>• *Să se implice* conştient în propria autoedificare prin valorificarea ideilor utilizării TIC. | *utilizării TIC.*<br>*Metodologia utilizării softurilor educaţionale în cadrul activităţilor extracurriculare la matematică.*<br>**Termeni-cheie:** TIC (tehnologii informaţionale şi comunicaţionale); IAC (instruirea asistată de calculator), activitate extra-curriculară, curriculum, educaţie matematică. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE

1. METODA FRISCO: Se propune spre analiza situaţia-problemă: IAC în societatea modernă. Se stabilesc rolurile: conservatorul; exuberantul; pesimistul; optimistul. Dezbaterea colectiva: conservatorul apreciază meritele soluţiilor vechi, fără a exclude posibilitatea unor îmbunătăţiri; exuberantul emite idei aparent imposibil de aplicat in practica; pesimistul va releva aspectele nefaste ale oricăror îmbunătăţiri; optimistul va găsi posibilităţi de realizare a soluţiilor propuse de exuberant. Trageţi concluzii şi sistematizaţi ideile emise.

SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI

2. Selectaţi definiţii ale noţiunilor cheie referitoare la ce este şi ce anume presupune IAC [5].
3. Examinaţi esenţa şi evoluţia modalităţilor de utilizare a calculatorului electronic în procesul de predare – învăţare: instrument didactic; mijloc didactic
4. Studiaţi un sistem software utilizat în studierea matematicii. Elaboraţi un sistem de sarcini pentru ghidarea elevilor în studierea unei teme cu ajutorul softului dat.

SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE

5. Testaţi un program de instruire la matematică on-line.
6. Elaboraţi nişte cerinţe pentru comunicarea cu elevii dotaţi şi ghidarea lor în activitatea de învăţare?

EXTINDERE

**7.** Elaboraţi o prezentare PowerPoint la tema „Construirea secţiunilor în poliedre”.

**Subiectul 15.** ***Jocul ca formă de organizare activităţii extracurriculare la matematică. Rolul elementelor de matematica distractivă în dezvoltarea competenţelor matematice ale elevilor***

| **Obiective** | **Unităţi de conţinuturi** |
|---|---|
| • *Să identifice* rolul elementelor de matematica distractivă în dezvoltarea competenţelor matematice ale elevilor.<br>• *Să descrie* scopul şi sarcinile utilizării jocurilor didactice în formarea activităţile extracurriculare la matematică;<br>• *Să analizeze,* să caracterizeze cerinţele de bază faţă de proiectarea, organizarea şi desfăşurarea metodică a jocurilor didactice la matematică.<br>• *Să aprecieze* valenţele formative a jocurilor didactice la matematică.<br>• *Să valorifice* metodele şi strategiile de utilizare a jocurilor didactice la matematică. | *Rolul elementelor de matematica distractivă în dezvoltarea competenţelor matematice ale elevilor.*<br>*Cerinţele de bază faţă de proiectarea, organizarea şi desfăşurarea metodică a jocurilor didactice la matematică.*<br>*Metode şi strategii de utilizare a jocurilor didactice la matematică*<br>*Metodologia organizării şi desfăşurării jocurilor didactice la matematică.*<br>**Termeni-cheie: performanţe**; joc didactic, calcul mintal, activitate extracurriculară, curriculum, competenţe matematice. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE

1. Alcătuiţi un „crossword” din termeni matematici în care se dă termenul cheie cunoscut „polinom”. Descrieţi în câteva propoziţii sentimentele dvs în rolul jucătorului.

SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI

2. Definiţi, folosind cuvinte proprii, jocul didactic.
3. Selectaţi definiţii ale noţiunilor cheie referitoare la ce este şi ce anume presupune jocul didactic.[39, 47]
4. Prezentaţi locul si rolul jocului didactic la orele de matematica şi în cadrul activităţilor extarcurriculare. [48]
5. Care sunt cerinţele faţă de proiectarea didactică a secvenţelor lecţiei de matematică cu utilizarea jocului didactic. [66]
6. Prezentaţi caracteristicile unui joc didactic [35, 68]
7. Enumeraţi aspectele formative induse de jocul didactic.

SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE

8. Identificaţi oportunităţile şi limitele utilizării jocului la lecţiile de matematică. [67]

EXTINDERE

9. Găsiţi sau inventaţi un joc didactic având ca scop consolidarea materiei la o temă din cursul gimnazial de matematică.

## Subiectul 16. *Rolul elementelor de istoria matematicii în dezvoltarea competenţelor matematice ale elevilor*

| Obiective | Unităţi de conţinuturi |
|---|---|
| • *Să identifice p*rincipalele perioade de evoluţie şi dezvoltare a matematicii ca ştiinţă.<br>• *Să descrie* rolul elementelor de istoria matematicii în dezvoltarea competenţelor matematice ale elevilor.<br>• *Să deducă* specificul utilizării elementelor de istoria matematicii în cadrul activităţilor extracurriculare la matematică.<br>• *Să valorifice* metodele şi strategiile inovatoare de utilizare a elementelor de istoria matematicii la abordarea diferenţiată a procesului de studiere a matematicii în funcţie de profil.<br>• *Să se implice* conştient în propria autoedificare. | *Principalele perioade de evoluţie şi dezvoltare a matematicii ca ştiinţă.*<br>*Rolul elementelor de istoria matematicii în dezvoltarea competenţelor matematice ale elevilor.*<br>*Metodologia utilizării elementelor de istoria matematicii în cadrul activităţilor extracurriculare la matematică şi în abordarea diferenţiată a procesului de studiere a matematicii în funcţie de profil.*<br>**Termeni-cheie:** istoria matematicii, abordarea diferenţiată a procesului de studiere a matematicii în funcţie de profil, activitate extracurriculară, educaţie matematică. |

SUBIECTE PENTRU EVOCARE

1. Tehnica florii de nufăr. Tema centrală: Matematicieni celebri în manualele şcolare. „Petale”: compartimentele de bază ale matematicii studiate în gimnaziu şi liceu. Scrieţi în jurul „petalelor” numele savanţilor care şi-au adus contribuţia la dezvoltarea domeniului. Ordonaţi numele în sens cronologic.

SUBIECTE PENTRU REALIZAREA SENSULUI

2. Documentaţi-vă cu privire la principalele perioade de evoluţie şi dezvoltare a matematicii ca ştiinţă. [2]

3. Examinaţi esenţa şi scopurile utilizării elementelor de istorie a matematicii în activităţile curriculare şi extracurriculare [26,63, 64,65, 72].

4. Analizaţi valenţele formative ale conţinuturilor cu caracter istoric şi rolul lor în dezvoltarea motivaţiei şi interesului pentru matematică.

SUBIECTE PENTRU REFLECŢIE

5. Analizaţi istoria dezvoltării noţiunii de număr şi dinamica formării noţiunii în cursul preuniversitar de matematică? Selectaţi material cu caracter istoric pentru fiecare din etapele de studiere a noţiunii de număr şi proiectaţi secvenţele de activităţi care includ aceste materiale în cadrul unor activităţi curriculare sau extracurriculare.

EXTINDERE

6. Studiaţi care este aportul matematicienilor români în dezvoltarea matematicii [9,15].

## Bibliografie la cursul „B*azele metodologice ale activităţii extracurriculare la matematică*"


1. Achiri I., Ceapă V., Şputenco O. Matematica. Ghid de implementare a curriculumului modernizat pentru treapta liceală, Editura Cartier, Chişinău, 2010.
2. Albu Adrian C. *O istorie a matematicii. Antichitatea până în secolul al VI (XIII).* Piteşti: Editura Nomina, 2009, 458 p.
3. Anastasi, A. (1965). *Differential Psychology*. New York: Macmillan.
4. Bejat, M. (1971). *Talent, inteligenţă, creativitate*. Bucureşti: Ed. Ştiinţifică.
5. Benito, Y., Alonso, J. *Educarea copilului talentat* (trad. rom.) Iaşi: Polirom. 2003.
6. Bogdan, T. (coord.) (1978). *Copiii capabili de performanţe superioare*. Bucureşti: E.D.P.
7. Câmpan, F., Probleme celebre din istoria matematicii. Ediţia a doua. Bucureşti: Editura Albatros, 1972. – 275 p.
8. Carter, Ph. Teste de inteligenţă şi psihometrice. Evaluaţi-vă personalitatea aptitudinile şi inteligenţa. Bucureşti. Meteor-Press, 2007. – 192 p.
9. Cioban, M., Valuţă I., Istoria matematicii în Moldova
10. Coşeriu (Lung), L. Elaborarea şi utilizarea software-ului educaţional pentru instruirea diferenţiată la fizică în liceu. Rezumat al tezei de doctorat. – Cluj-Napoca, 2011. – 23 p.
11. Creţu, C. Psihopedagogia succesulu. Polirom, Iaşi, 1997. – 230 p.
12. Creţu, C. M. *Curriculum diferenţiat şi personalizat – Ghid metodologic pentru invăţătorii, profesorii şi părinţii copiilor cu disponibilităţi aptitudinale inalte (vol. I)*. Iaşi: Polirom. 1998.
13. Cuculescu, I. Olimpiade internţionale de mathematic ale elevilor. Editura tehnică. Bucureşti, 1984. – 352 p.
14. Davis, G. A., Rimm, S. B. (1989). *Education of the gifted and talented*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

15. Deac, Iu. Dicţionar enciclopedic al matematicienilor. Vol. I şi II. Editura Universităţii din Piteşti, 2001-2002.
16. Feldhusen, J. F., Kolloff, M. B. (1978). A three-stage model for gifted education. *Gifted / Creative / Talented Journal*, *1*, 2-5, 53, 58.
17. Focşa-Semionov, S. Învăţarea autoreglată. Teorie şi aplicaţii educaţionale. – Chişinău, Epigraf. – 2010, 360 p.
18. Gardner, H. Inteligenţe multiple – noi orizonturi. Bucureşti, Sigma, 2006. – 318 p.
19. Gardner, H. Mintea umană: cinci ipostaze pentru viitor. Bucureşti, Sigma, 2007. – 272 p.
20. Gardner, H., Csikszentmihalyi, M., Damon W. Munca bine făcută. Când excelenţa şi etica îşi dau mâna. Bucureşti, Sigma, 2007. – 319 p.
21. Gherguţ, A. Psihopedagogia persoanelor cu cerinte speciale. Strategii diferentiate si incluzive in educatie. Colegium. Ştiinţe ale educaţiei. Bucureşti, 2006. – 256 p.
22. Guţu, V. coord. Educaţia centrată pe cel ce învaţă. Ghid metodologic. – Chişinău: CEP USM, 2009.
23. http://festival.1september.ru/articles/419304/
24. http://mathedu.ru/journals-collections/
25. http://mentoratgrupa1.wikispaces.com/1.+Materiale+curs
26. http://pay.diary.ru/~eek/p77020421.htm
27. http://www.facilitare.ro/produse
28. http://www.imo-official.org/
29. http://www.scritube.com/profesor-scoala/Teoria-Inteligentelor-Multiple81479.php
30. Ionescu, M., Radu, I. *Didactica modernă*, Editura Dacia, Cluj-Napoca. 1995.
31. Jigău, M. *Copiii supradotaţi*. Bucureşti: Ed. Ştiinţă şi Tehnică. 1994
32. Joiţa, E. coord. A devein professor constructivist. Demersuri constructiviste pentru o profesionalizare pedagogic iniţială. – Bucureşti: EDP, 2008
33. Kulcsar, T. *Factorii psihologici ai reuşitei şcolare*. Bucureşti: E.D.P. 1978
34. Lehtinen , M., Eye-witnessing the IMO: decades of stability and change / In: The 6-th Congress of the World Federation of National Mathematics Competitions. The proceedings. Riga, Latvia, 2011. 223 p. pag. 29.
35. Metodica predării matematicii în şcoala medie. Vol.I. Redacţie ştiinţifică Z.Turlacov şi I.Achiri. Lumina, Chişinău. – 1992. – 281 p.
36. Minder, M. Didactica funcţională: obiective, strategii, evaluare. – Chişinău: Cartier, 2003. 360 p.
37. Missoum, G., Am reuşit!: strategii, tehnici şi metode. – Iaşi: Polirom, 2003. 252 p.
38. N.N. Mihăileanu Istoria matematicii. Editura Enciclopedică Română 1974
39. Neacsu I. (coord.), Metodica predării matematicii la clasele I-IV, EDP, 1988
40. Onofraşi, C. http://www.scribd.com/doc/86632302/Tehnica-invatarii

41. Polya, G., Matematica şi raţionamentele plauzibile, vol. I şi II. Bucureşti.: Editura Ştiinţifică, 1962.
42. Popovici, D. V. (2007). *Orientări teoretice şi practice în educaţia integrată*. Arad: Ed. Universităţii Aurel Vlaicu.
43. Popovici, D. V., Balotă, A. (2004). *Introducere in psihopedagogia supradotaţilor*. Bucureşti: Ed. Fundaţiei Humanitas.
44. Rădulescu, E., Tircă A. Şcoala prietenoasă. Experienţe de proiect. – Bucureşti, Humanitas Educaţional, 2002
45. Renzulli, J. S. (1977). *The enrichment triad model: A guide for developing defensible programs for the gifted and talented*. Mansfield Center, CT: Creative Learning Press.
46. Revistele „Delta”
47. Rosu M., Metodica predarii matematicii pentru colegiile universitare de institutori, Universitatea din Bucuresti, Editura CREDIS. 2004
48. Roşu M. Pedagogia învatamântului primar si prescolar**.** Didactica matematicii în învatamântul primar. Proiectul pentru Învatamântul Rural, 2006
49. Sali, L. Regarding the didactical transposition competences of the mathematical contents. În: The 19th Conference on Applied and Industrial Mathematics. Iaşi, September 22 -25, 2011. Abstracts. Iaşi, România, 2011, p.80.
50. Sălăvăstru, D. Psihologia educaţiei. Polirom, Iaşi, 2004. – 288 p.
51. Stănescu, M. L. (2002). *Instruirea diferenţiată a supradotaţilor*. Iaşi: Polirom.
52. Şchiopu, U. (2005). *Psihologie diferenţială*. Bucureşti: Romania Press.
53. Teleucă M., Sali L. Concursuri nonstandard la matematică. În: ROMAI Educational Journal. Vol. 5. 2010, p. 48 – 55.
54. Temple, C. ş.a. Strategii de dezvoltare a gândirii critice pentru toate disciplinele şcolare. Ghidul II. Adaptare N.Creţu. Supliment al revistei „Didactica Pro…”, nr.2. Chişinău, 2002.
55. The 6-th Congress of the World Federation of National Mathematics Competitions. The proceedings. Riga, Latvia, 2011. 223 p.
56. The Proceeding of The 6th Congress of World Federation of National Mathematcics Competitions/ Editors: Marina Avotina, dace Bonka, Maria Falk de Losada, Alexander Soifer. Riga, Univerity of Latvia, 2011. – 223 p.
57. Volcov, V. Bazele pedagogice şi manageriale de dezvoltare a instituţiilor de invăţămint complementar in Republica Moldova. Teză de doctor în pedagogie, 2011. – 202 p.
58. Zisulescu, Şt. *Aptitudini şi talente*. Bucureşti: E.D.P. 1971
59. А. М. Матюшкин. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М.: Педагогика. 1972 г. С. 170—186.

60. Агаханов, Н.Х., Подлипский, О.К. Методические рекомендации по разработке заданий для школьного и муниципального этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2009/2010 учебном году. Москва, 2009.
61. Адамар, Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. – Москва: МЦНМО, 2001. – 128 с.
62. Вудкок, М., Фрэнсис, Д. Раскрепощенный менеджер. Для руководителя практика: Пер. С англ. – Москва: Дело, 1991. – 320 с.
63. Глейзер Г. И. История математики в школе VII—VIII кл. Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1982. — 240 с.
64. Глейзер Г. И. История математики в школе: IX—X кл. Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1983. — 351 с.
65. Глейзер Г.И. История математики в школе: IV—VI кл. Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1981. — 239 с.
66. Коваленко В. Дидактические игры на уроках математики. Москва, Просвещение. – 1990. – 96 с.
67. Козлова О., Разу Л. Деловые игры и их роль в повышении квалификации кадров. Москва, Знание. – 1978. – 64 с.
68. Кордемкий Б. Увлечь школьников математикой. Москва, Просвещение. – 1981. 112 с.
69. Кристофер, Э., Смит, Л. Тренинг лидерства. – СПб.: Питер, 2001. – 320 с.
70. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб.пособие для студентов физ.-мат. Спец.пед.ин-тов. Под ред. Лященко Е. И. – Москва: Просвещение, 1988. – 233 с.
71. Лупу, И., Чобан-Пилецкая А. Мотивация обучения математике. Кишинэу, 2008. 164 с.
72. Оганесян, В.А., О хрестоматии избранных классиков математики для средней школы. Учş записки МОПИ. Т. 202. Вып. 6. – Москва, 1968. С. 393-414.
73. Сгибнев А.И. Исследуем на уроке и на проекте. / Сборник «Учим математике» (материалы открытой школы-семинара учителей математики). Под ред. А.Д. Блинкова– М.: МЦНМО, 2006. С. 59-71.
74. Фройденталь, Г. Математика как педагогическая задача. Ч. I. Пособие для учителей. – Москва: Просвещение, 1982. – 208 с.

**Anexa 2**

**MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI TINERETULUI**
**AL REPUBLICII MOLDOVA**
**Programa olimpiadei republicane de matematică**
**pentru clasele a VII-a – a IX-a**
**ANUL ŞCOLAR 2008 - 2009**

- Pentru fiecare clasă, în programa de olimpiadă sunt incluse conţinuturile programelor de olimpiadă din clasele anterioare.
- Cunoştinţele suplimentare faţă de programa şcolară, pot fi folosite în rezolvarea problemelor de olimpiadă.

## CLASA A VII–A

### ARITMETICĂ ŞI ALGEBRĂ

**Numere naturale.** Factorul comun. Teorema împărţirii cu rest. Puteri. Reguli de calcul cu puteri. Compararea puterilor. Ultima cifră. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte. Sisteme de numeraţie. Proprietăţile divizibilităţii în **N**.

Criteriile de divizibilitate cu: 2; 5; 10; $2^n$; $5^n$; 3; 9; 7; 11; 13. Numere prime şi numere compuse. Teorema fundamentală a aritmeticii. C.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. ; $[a;b]\cdot(a;b)=a\cdot b$. Numere prime între ele. $a/bc$ şi . $(a;b)=1\Rightarrow a/c$ Dacă $(a;b)=d\Rightarrow\exists x,y\in\mathbf{N}$ astfel încât $(x;y)=1$ şi $a=xd; b=yd$. Dacă $[a;b]=m\Rightarrow\exists x,y\in\mathbf{N}$ astfel încât $(x;y)=1$ şi $m=ax; m=by$.

**Mulţimi.** Operaţii cu mulţimi. Reuniunea. Intersecţia. Diferenţa a două mulţimi. Produs cartezian. Principiul includerii şi excluderii. Formula $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$. Probleme de enumerare. Probleme de logică, rezolvate prin aplicarea principiului Dirichlet (principiul cutiei). Probleme de logică, rezolvate prin aplicarea principiului elementului extremal.

**Numere întregi.** Operaţii în **Z**. Modulul unui număr întreg. Puterea unui număr întreg cu exponent număr natural. Reguli de calcul cu puteri. Proprietăţile divizibilităţii în **Z**.

| | |
|---|---|
| 1) $a/a$, $\forall a\in\mathbf{Z}$ | 8) $a/b\Leftrightarrow(-a)/b\Leftrightarrow a/(-b)\Leftrightarrow(-a)/(-b)$ |
| 2) $a/b$ şi $b/c\Rightarrow a/c$ | 9) $a/b\Rightarrow a/b\cdot c$, $\forall c\in\mathbf{Z}$ |
| 3) $a/b$ şi $b/a\Rightarrow a=b$ sau $a=-b$ | 10) $a/b_1$ şi $a/b_2\Rightarrow a/(b_1\pm b_2)$ |
| 4) $1/a$ şi $-1/a$, $\forall a\in\mathbf{Z}$ | 11) $a/b_1$ şi $a/b_2\Rightarrow a/(b_1c_1\pm b_2c_2)$, unde $c_1,c_2\in\mathbf{Z}$ |
| 5) $a/1$ sau $a/-1\Rightarrow\lvert a\rvert=1$ | 12) $a/b\Rightarrow a\cdot c/b\cdot c$, $\forall c\in\mathbf{Z}$ |
| 6) $a/0$, $\forall a\in\mathbf{Z}$ | 13) $a\cdot c/b\cdot c$, $c\neq 0\Rightarrow a/b$ |

7) $0/a \Rightarrow a=0$ 14) $a_1/b_1$ şi $a_2/b_2 \Rightarrow a_1a_2/b_1b_2$

**Numere raţionale.** Ecuaţii în **Q**. Fracţii zecimale. Operaţii. Inecuaţii în **Q**. Probleme. Periodicitate. Media aritmetică.

**Rapoarte şi proporţii.** Rapoarte. Proporţii. Procente. Mărimi direct proporţionale. Mărimi invers proporţionale. Şir de rapoarte egale. Proporţionalitate directă. Proporţionalitate inversă.

**Mulţimea numerelor reale. Modulul unui număr real**

**Proprietăţi**: a) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathrm{R}$; b) $|x| = \max(-x; x), \forall x \in \mathrm{R}$; c) $|xy| = |x||y|, \forall x, y \in \mathrm{R}$;

**d)** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbf{R}, \ \forall y \in \mathbf{R}^*$; **e)** $\sqrt{x^2} = |x|$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

**Reguli de calcul cu radicali** .

a) Dacă $a \in \mathbf{N}$ şi $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbf{N}$; b) Dacă $a,b \in \mathbf{N}$ şi $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbf{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbf{N}$ şi $\sqrt{b} \in \mathbf{N}$;

c) Dacă $a$ şi $b$ nu sunt pătrate ale unor numere raţionale, atunci $\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$; d) Dacă $a,b \in \mathbf{Q}^*$ şi ~, $\in$ $\mathbf{Q}^*$ astfel încât , atunci $\sim\sqrt{a} + \quad \sqrt{b} \in \mathbf{Q}^*$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$ şi $\sqrt{b} \in \mathbf{Q}$; e) Dacă $a,b \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât $\sqrt{b} \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$, atunci $a \pm \sqrt{b} \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ şi $a\sqrt{b} \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$; f) Dacă $a \in \mathbf{Q}^*$ şi $b \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$, atunci $a+b \in$ **R\Q** şi $ab \in$ **R\Q**;

g) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, unde $a,b,c \in \mathbf{R}^*$ şi $c^2 = a^2 - b$ (formula radicalilor compuşi).

**Metoda reducerii la absurd şi aplicarea ei în demonstraţii.**

**Calcul algebric**. Calcule cu numere reale reprezentate prin litere. Formulele de calcul prescurtat: $(\mathrm{a} \pm \mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 \pm 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$; $(\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2$; $(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 + 2\mathrm{ab} + 2\mathrm{ac} + 2\mathrm{bc}$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1}), \ \forall \ a,b \in \mathbf{R}$ şi $n \in \mathbf{N}$;

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + ... - ab^{n-2} + b^{n-1}), \ \forall \ a,b \in \mathbf{R}$ şi $n \in \mathbf{N}$, $n$ impar;

$(a+b)^n = \mathrm{M}_a + b^n$, unde $a,b \in \mathbf{Z}$, şi $n \in \mathbf{N}^*$ , $M_a$ – multiplul numărului a.

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$ (identitatea lui Lagrange)

Inegalităţi.

1. $a^2 + b^2 \geq 2ab, \forall a,b \in \mathrm{R}$; 2. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc, \forall a,b,c \in \mathrm{R}$; 3. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$; $\forall a,b \in \mathrm{R}_+^*$.

**GEOMETRIE**

**Punct. Dreaptă. Semidreaptă. Segment** (conţinutul programei şcolare).

**Unghi** (conţinutul programei şcolare şi, în plus, teorema directă şi teorema reciprocă a unghiurilor opuse la vârf).

**Congruenţa triunghiurilor** (conţinutul programei şcolare)

**Perpendicularitate** (conţinutul programei şcolare).
**Paralelism** (conţinutul programei şcolare şi, în plus, teorema directă şi teorema reciprocă a liniei mijlocii a unui triunghi).
**Proprietăţi ale triunghiurilor** (conţinutul programei şcolare) şi următoarele teoreme:

- Teorema directă şi teorema reciprocă a liniei mijlocii a unui triunghi.
- Într-un triunghi dreptunghic, lungimea catetei care se opune unghiului de $30^\circ$ este jumătate din lungimea ipotenuzei.
- Teorema reciprocă.
- Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din lungimea ipotenuzei.
- Teorema reciprocă.
- Patrulatere (conţinutul programei şcolare).
- Cercul. Definiţie. Elemente în cerc. Unghi la centru. Măsura arcelor. Coarde şi arce; proprietăţi. Teorema despre proprietatea diametrului perpendicular pe o coardă.

## CLASA A VIII–A

**ALGEBRĂ**

**Numere reale  Partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr real. Ecuaţii. Modulul unui număr real.**

Proprietăţile a) $|x+y| \le |x|+|y|, \forall x, y \in \mathbf{R}$; b) $|x| \le a\ (a>0), a, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow -a \le x \le a$ ;
c) $|x| \ge a\ (a>0), a, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x \ge a$ sau $x \le -a$;

Ecuaţii. Intervale. Intersecţia şi reuniunea intervalelor. Raţionalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$ şi $a \pm \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbf{N}$. Formulele de calcul prescurtat: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$ ; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
Puterea unui număr real cu exponent număr întreg. Reguli de calcul cu puteri.
Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Operaţii.
Ecuaţii de gradul al doilea cu coeficienţi reali. Formulele lui Viete. Factorizări.
Sisteme de două ecuaţii de gradul întîi cu două necunoscute.
Fracţii raţionale. Operaţii.
Şiruri numerice. Progresii aritmetice şi geometrice
Funcţia $f: D \to R, f(x) = ax + b, \quad a, b \in R,$ unde $D$ este o submulţime a lui $R$.

**GEOMETRIE**

**Asemănarea triunghiurilor**

Teorema lui Thales. Teorema reciprocă a teoremei lui Thales. Teorema paralelelor echidistante. Teorema paralelelor neechidistante. Linia mijlocie în triunghi; proprietăţi. Centrul de greutate al unui triunghi; proprietăţi. Linia mijlocie în trapez;

proprietăţi. Teorema fundamentală a asemănării. Criterii de asemănare a triunghiurilor. Teorema bisectoarei (interioare, exterioare) şi teorema reciprocă. Teorema lui Menelaus; teorema reciprocă. Teorema lui Ceva; teorema reciprocă.
Inegalitatea triunghiului. Într-un triunghi, la latura mai mare se opune unghiul mai mare, şi reciproc. Teorema perpendicularelor şi a oblicelor.
Construcţii simple cu rigla negradată şi cu compasul.
Probleme elementare de loc geometric.
**Relaţii metrice în triunghi**
În triunghiul dreptunghic: teorema înălţimii; teorema catetei; teorema lui Pitagora; teoreme reciproce.
Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic: sin, cos, tg, ctg. Formule uzuale.
Teorema lui Pitagora generalizată. Teorema medianei: $m_a^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$ .
Arii. $A_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $A_\Delta = \frac{ab\sin C}{2}$; $A_\Delta = p\,r$; $A_\Delta = \frac{abc}{4S}$;
$A_{patrulat.\,convex} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot sin[\angle(d_1, d_2)]}{2}$.
**Cercul.** Definiţie. Elemente în cerc. Unghi la centru. Măsura arcelor. Coarde şi arce; proprietăţi. Teorema unghiului înscris în cerc. Cerc înscris, cerc circumscris unui triunghi. Patrulater ortodiagonal. Patrulater inscriptibil. Patrulater circumscriptibil. Condiţii de inscriptibilitate, condiţii de circumscriptibilitate. Cercul lui Euler. Poziţiile relative ale unei drepte faţă de un cerc. Poziţiile relative a două cercuri. Teorema arcului capabil de un unghi dat. Puterea punctului în raport cu un cerc. Proprietăţi.
Lungimea cercului şi a arcului de cerc. Aria discului şi a sectorului de cerc.
**Poligoane regulate.** Triunghiul echilateral, pătratul, hexagonul regulat.

## CLASA A IX-A

**ALGEBRĂ**
**Modulul numărului real. Ecuaţii şi inecuaţii cu necunoscuta sub semnul modulului. Radicali de ordinul n. Proprietăţi.**
Formula $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |\,a\,|$. Ecuaţii şi inecuaţii iraţionale, reductibile la rezolvarea unei ecuaţii sau inecuaţii de gradul al doilea.
Puterea numărului real pozitiv cu exponent raţional. Reguli de calcul cu puteri.
Funcţia de gradul doi. Proprietăţile şi graficul ei. Probleme de maxim şi minim.
Funcţia putere. Funcţia radical. Proprietăţile şi graficele lor.
Monoame şi polinoame. Operaţii. Rădăcinile unui polinom. Divizibilitatea polinoamelor. Factorizări. Polinoame reductibile

şi ireductibile pe o mulţime dată de numere. Polinoame simetrice şi antisimetrice.
Fracţii algebrice. Operaţii. Proprietăţi.
Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii. Inecuaţii şi sisteme de inecuaţii. Metoda intervalelor.
**Inegalităţi:**

**1.** $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}, \quad \forall \ a_i \in R^*_+, \quad i=\overline{1,n}$ şi $\forall n \in \mathbf{N}^*$

(**inegalitatea mediilor**);

**2.** $\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right) \ge \left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2$, $\forall a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i=\overline{1,n}$ şi $\forall n \in \mathbf{N}^*$

(**inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz**).

## GEOMETRIE

**Puncte, drepte, plane. Paralelism în spaţiu.**

La conţinutul programei şcolare se adaugă: teoreme de paralelism; teorema lui Menelaus în spaţiu; teorema reciprocă teoremei lui Menelaus; teorema lui Thales în spaţiu; axe de simetrie ale paralelipipedului dreptunghic; axa de simetrie a piramidei patrulatere regulate; simetria faţă de un plan; secţiuni axiale în corpurile care admit axe de simetrie.

**Perpendicularitate în spaţiu. Proiecţii ortogonale pe un plan.**

La conţinutul programei şcolare se adaugă: perpendiculara comună a două drepte; reciprocele teoremei celor trei perpendiculare; plan mediator; plan bisector. Sfere circumscrise, sfere înscrise şi exînscrise în corpuri regulate.

# CLASA A X–A

## ALGEBRĂ

Numere reale. Operaţii cu numere reale. Puterea unui număr real cu exponent real. Partea întreagă şi partea fractionară a unui număr real. Proprietăţi. Logaritmi. Proprietăţi.

Elemente de logică matematică şi teoria mulţimilor. Funcţia caracteristică de mulţime. Mulţimi numărabile şi nenumărabile (***N***,***Z***,***Q*** sunt numărabile şi ***R*** este nenumărabilă). Densitatea în $\mathbf{R}$ a mulţimilor $\mathbf{Q}$ şi $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$. Teorema de densitate a lui Kronecker. Mulțimi convexe, înfăşurătoarea convexă .Teorema lui Helly.

Principiul includerii şi excluderii. Principiul inducţiei matematice. Principiul elementului extremal. Elemente de combinatorică şi binomul lui Newton. Elemente din teoria grafurilor. Principii de enumerare.

Relaţii şi funcţii. Clasificări de funcţii. Monotonie, mărginire, periodicitate, convexitate şi concavitate.

Funcţii injective, surjective, bijective. Compoziţia funcţiilor. Funcţii compuse. Funcţii inverse. Criterii de inversabilitate. Ecuaţii şi inecuaţii funcţionale. Relaţii de recurenţă. Determinarea termenului general. Calcul de sume şi produse.
Funcţiile elementare principale (inclusiv cele trigonometrice) , proprietăţi, reprezentări grafice.
Ecuaţii şi inecuaţii. Sisteme. Totalităţi.
Inegalităţi de tip Jensen. Inegalitatea mediilor. Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski. Inegalitatea lui Holder. Inegalitatea lui Bernoulli. Inegalitatea lui Cebîşev. Metoda lui Şturm.

**Teoria numerelor**

Ecuaţii în numere întregi : $ax+by=c$; $x^2+y^2=z^2$, ecuaţia lui Pell.
Teorema împărţirii cu rest în mulţimea numerelor întregi. Numărul divizorilor, suma şi produsul divizorilor unui număr natural. Algoritmul lui Euclid. Indicatorul lui Euler. Congruenţe modulo *n.*
Teoremele: Euler, Fermat, Wilson, Lagrange, teorema chinezeasca a resturilor.
Numerele lui Fermat, Fibonacci, Lucas, Mersenne, Catalan, triunghiulare şi proprietăţi.

**Geometrie şi trigonometrie**

Teoreme clasice de geometrie plană . Puncte remarcabile şi drepte remarcabile. Teorema lui Stewart. Teorema lui Van-Aubel. Teorema lui Steiner. Dreapta lui Euler. Drepte de tip Simson. Cercurile lui Euler, Tucker, Taylor. Probleme de concurență şi coliniaritate. Geometria patrulaterelor convexe. Relaţii metrice.
Inegalităţi geometrice şi trigonometrice: inegalităţi fundamentale, metoda lui Şteiner, reducerea la inegalităţi algebrice, inegalităţi între elementele unui triunghi, maxime şi minime geometrice.
Transformări geometrice: simetrii, translaţii, rotaţii, omotetii, inversiuni şi aplicaţii.
Noţiuni de calcul vectorial cu aplicaţii în geometrie: vectori liberi, centre de greutate, aplicaţii ale produsului scalar, centre de greutate, momente de inerţie, teoremele lui Şteiner, Lagrange, Jacobi. Puncte laticeale în plan.
Elemente de geometrie analitică. Locuri geometrice clasice. Pol şi polară la cerc.

## CLASA A XI–A

### ALGEBRĂ

Numere complexe. Calcul cu numere complexe. Forme de reprezentare ale numerelor complexe. Aplicaţii ale numerelor complexe în calcul de sume şi produse. Aplicaţii ale numerelor complexe în geometrie.

Matrice. Determinanţi. Determinantul de ordin n. Formula lui Binet-Cauchy. Regula lui Laplace de dezvoltare a unui determinant. Teorema Hamilton-Cayley. Rangul unei matrice din $M_{n.m}(\mathbf{C})$. Rangul produsului şi sumei a două matrice. Inegalitatea lui Sylvester asupra rangului produsului a două matrice. Sisteme liniare de *m* ecuaţii cu *n* necunoscute.

**ANALIZĂ MATEMATICĂ**

Mulţimea numerelor reale. Mulţimi deschise, închise, compacte, densitate în R, lema intervalelor închise. Mulțimi numărabile, numărabilitatea lui $\mathbf{Q}$, numărabilitatea lui $\mathbf{R}$

Şiruri de numere reale. Puncte limită pentru şiruri. Limita şirului. Limita superioară şi limita inferioară la şiruri.

Calcul de limite. Aplicaţii. Şiruri recurente. Progresii aritmetice şi geometrice. Ecuaţii cu recurenţe liniare şi neliniare. Metode de rezolvare şi aplicaţii.

Limite de funcţii. Oscilaţia unei funcţii pe o mulţime, discontinuităţi de prima şi a doua speţă. Calcul de limite. Aplicaţii.

Funcţii continue. Proprietăţi. Teoreme importante despre funcţii continue. Aplicaţii.

Funcţii cu proprietatea valorii intermediare (proprietatea lui Darboux). Teorema lui Darboux.

Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange. Dezvoltări în serie

Funcţii derivabile. Reguli de derivare. Derivate de ordin superior. Regula lui Leibniz.

Teoreme importante despre funcţii derivabile. Monotonie şi convexitate. Rolul primei derivate în studiul unei funcţii. Rolul derivatei a doua în studiul unei funcţii. Studiul funcţiilor. Probleme de maxim şi minim.

Aplicaţii directe ale derivatelor. Regula lui l'Hospital. Rezolvarea unor inegalităţi cu ajutorul derivatelor.

**GEOMETRIE**

Elemente de geometrie spaţială. Paralelism şi perpendicularitate în spaţiu. Teoreme importante despre paralelism şi perpendicularitate. Proiecţii ortogonale în spaţiu. Teorema celor 3 perpendiculare, reciprocele ei.

Geometria tetraedrului. Tetraedre echifaciale. Tetraedre Crelle. Tetraedre ortocentrice.

Probleme de concurenţă şi coliniaritate în spaţiu. Relaţii metrice.

Transformări geometrice în spaţiu.

Poliedre şi corpuri rotunde. Arii şi volume. Sfere înscrise, exinscrise şi circumscrise în poliedre regulate.

Calcul vectorial în spaţiu. Produsul scalar, produsul mixt şi produsul vectorial. Proprietăţi şi aplicaţii.

Elemente de geometrie analitică spaţială. Formula distanţei. Sisteme spaţiale de puncte materiale. Centre de greutate. Momente de inerţie. Distanţe în spaţiu.

## CLASA A XII–A

### ALGEBRĂ

Polinoame în mulţimea numerelor complexe. C.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. şi algoritmul lui Euclid pentru polinoame. Rădăcini multiple, polinomul lui Taylor, derivata formală a unui polinom, condiţii necesare şi suficiente pentru ca o rădăcină să fie multiplă. Polinomul de interpolare al lui Lagrange. Teorema fundamentală a algebrei. Polinoame ireductibile, numere algebrice, polinom minimal. Rădăcini primitive ale unităţii, polinoame ciclotomice. Polinoame simetrice, teorema fundamentală a polinoamelor simetrice, sumele lui Newton. Ecuaţii algebrice. Relaţii Viete.

### ANALIZĂ MATEMATICĂ

Primitive. Integrale nedefinite. Calculul primitivelor. Aplicaţii.

Funcţii integrabile. Sume Darboux, sume Riemann, proprietăţi. Teoreme importante referitoare la funcţii integrabile. Aplicaţiile lor la rezolvarea unor probleme standarde.

Aplicaţii ale integralei Riemann la calculul ariilor, volumelor, lungimilor arcelor de curbă, centrelor de greutate. Calculul limitelor cu ajutorul integralei Riemann. Calcul de sume.

### GEOMETRIE ANALITICĂ

Dreapta în plan. Vector director şi vector normal al dreptei. Probleme de coliniaritate şi concurenţă. Geometria analitică a triunghiului. Metoda analitică de rezolvare a problemelor de loc geometric. Relaţii metrice.

Ecuaţia planului. Vector normal al planului. Distanţe în plan şi în spaţiu.

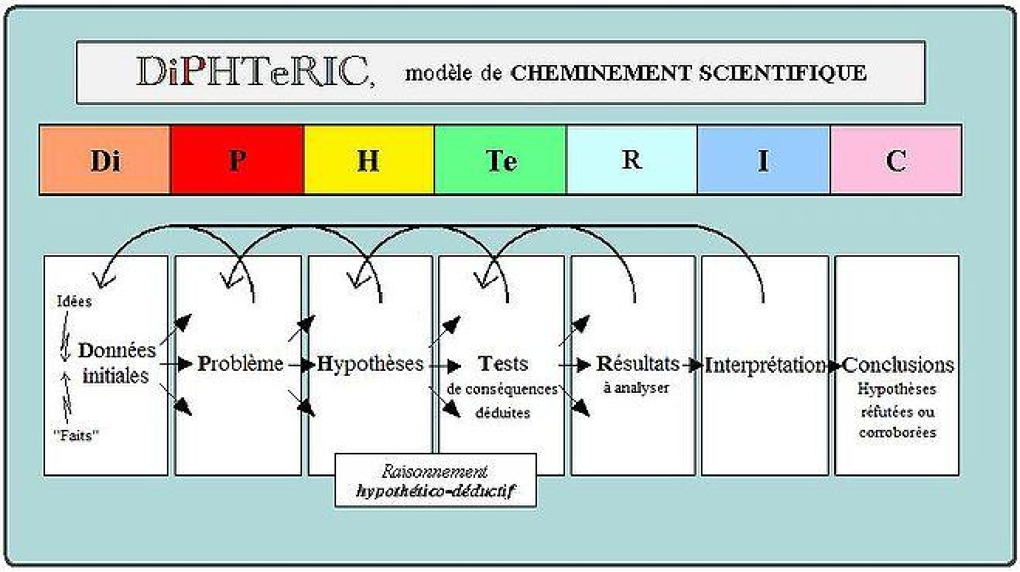
Conice. Clasificarea conicelor. Conice degenerate. Ecuații generale şi ecuaţii canonice. Relaţii metrice pentru conice. Probleme de concurenţă şi tangenţă pentru drepte şi conice. Distanţa dintre două figuri geometrice.

Aplicaţii pentru conice.

**Anexa 3.**

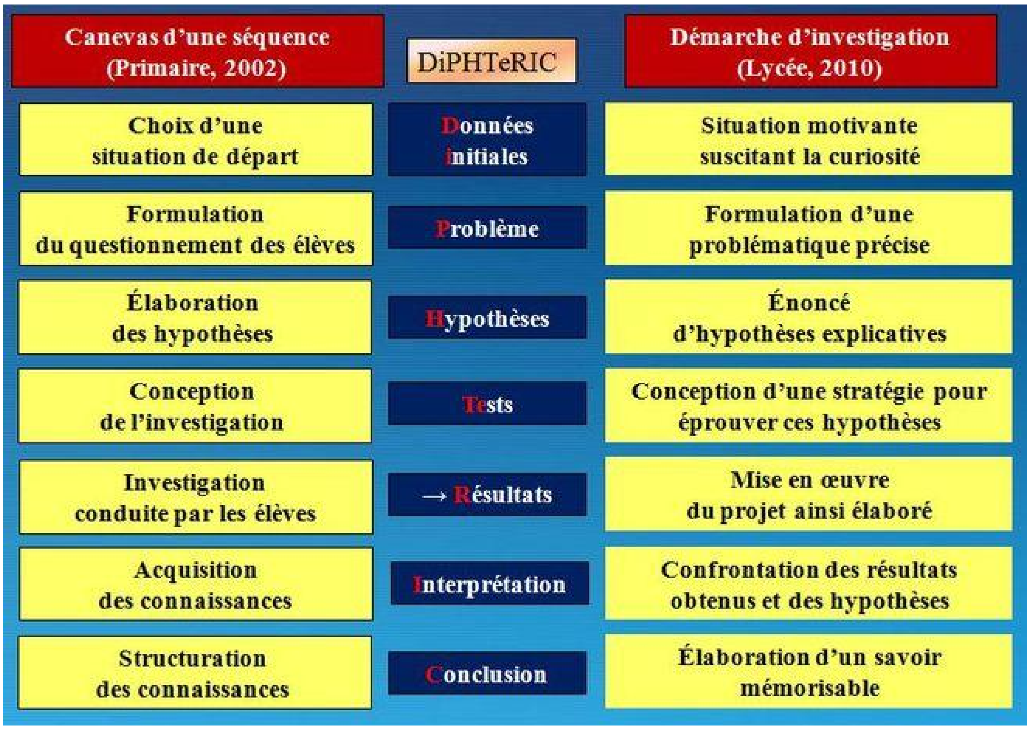
## Modelul DiPHTeRIC

Modelul DiPHTeRIC şi modul de utilizare a modelului DiPHTeRIC propuse de Cariou în anul 2002 sunt recomandate într-un demers de cercetare. Modelul DiPHTeRIC simplificat descrie aproximativ calea ipotetico-deductivă care se bazează atât pe epistemologie cât şi pe analiza lucrului ştiinţific în laborator, fără a pretinde să descrie realitatea complexă a drumului cercetătorilor. Datele iniţiale (**Di**) reprezintă teorii, observaţii, reprezentări, credinţe, obstacole, achiziţii anterioare, modele, experienţe, idei şi fapte. O problemă (**P**) survine când se contrazic ideile şi faptele (mai des ideile vechi şi faptele noi). Problema este de natură să conducă la diverse ipoteze (H), fiecare dintre care poate duce la proiectarea mai multor testări (Te), care nu sunt neapărat experimentale (observare, simulare, modelare …). Paşii următori sunt: analiza rezultatelor, interpretarea şi concluziile.




Instrucţiunile pentru acest model constituie un instrument proiectat pentru profesori. Rolul lor este, odată formulată problema pentru clasa, de a asigura o cale care se bazează pe propunerile elevilor (ipotezele, apoi propunerile de testare), de a-i încuraja pe aceştea, dacă este necesar, de a formula întrebări de stimulare a gândirii.

Ca instrument DiPHTeRIC este corespunzător cu „Canavaua”, definită pentru predarea ştiinţelor şi tehnologiei în ciclul primar(2002), extinsă apoi pentru Colegiu (investigaţii în Matematică şi Ştiinţe experimentale: Introducere comună pentru toate disciplinele ştiinţifice, BO # 5 din 25 august 2005) şi apoi în liceu (în biologie, BO Raportul nr 4 din 29 aprilie 2010).



**Anexa 4.**

## CONSIDERAŢII ASUPRA MĂSURĂRII MĂRIMILOR GEOMETRICE

### 1. INTRODUCERE

Problema măsurării distanţelor, lungimilor curbelor, ariilor figurilor plane, volumelor corpurilor spaţiale a apărut odată cu apariţia civilizaţiilor umane.
În procesul de predare apar următoarele întrebări:

- Ce este unitatea de măsură?
- Ce se înţelege prin expresia „măsurarea mărimilor geometrice date”?
- Cum depinde rezultatul măsurării de unitatea de măsură?
- În ce mod pot fi măsurate mărimile unor figuri de o formă concretă?
- Pentru care clasă de figuri există o măsură a mărimilor lor?

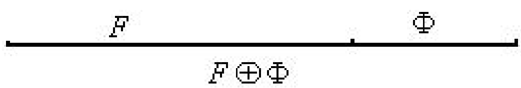
În cursul preuniversitar de matematică atenţia principală este orientată spre întrebarea a patra. Întrebarea a cincea, de regulă, nu se cercetează. Menţionăm că existenţa măsurii pentru anumite tipuri de figuri este o consecinţă din axiomele utilizate.
Se presupune că cititorul cunoaşte principiile de bază ale geometriei şcolare, noţiunile de segment, poligon, poliedru, partea interioară a poligonului, partea interioară a poliedrului, congruenţă a figurilor, asemănarea figurilor.

### 2. CE ESTE O MĂSURĂ?

Orice măsură se referă la o anumită clasă de figuri. Fiecare clasă de figuri are proprietăţile sale specifice.
**Definiţia 2.1.** O clasă *K* de figuri geometrice se numeşte aditivă, dacă se respectă condiţiile:

1. Dacă figurile $F$ şi $\Phi$ sunt asemenea şi $F \in K$, atunci şi $\Phi \in K$.
2. Pentru unele perechi de figuri $F, \Phi$ este determinată suma lor $F \oplus \Phi \in K$.
3. Dacă $F, \Phi \in K$ şi suma $F \oplus \Phi$ există, atunci $F \oplus \Phi = F \cup \Phi$.

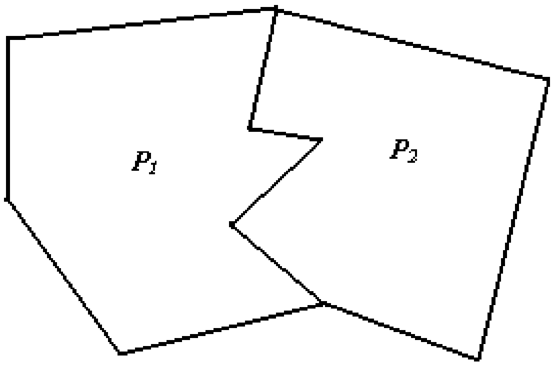
**Nota 2.1.** Deci, suma figurilor este un caz particular al reuniunii lor. Nu se exclude cazul cînd $F, \Phi \in K$ şi $F \cup \Phi \in K$, iar suma $F \oplus \Phi$ nu există!
**Exemplul 2.1.** Fie $K_1$ totalitatea segmentelor. Dacă $F$ şi $\Phi$ sunt segmente, atunci suma lor, egală cu reuniunea, există dacă şi numai dacă aceste segmente nu au puncte interioare comune şi reuniunea lor este un segment.




Reuniunea segmentelor $[-2,2]$ şi $[1,4]$ de pe dreapta reală este segmentul $[-2,4]$, dar suma lor nu există.

Reuniunea segmentelor $[-3{,}0]$ şi $[1{,}3]$ nu este un segment, prin urmare suma lor nu există.

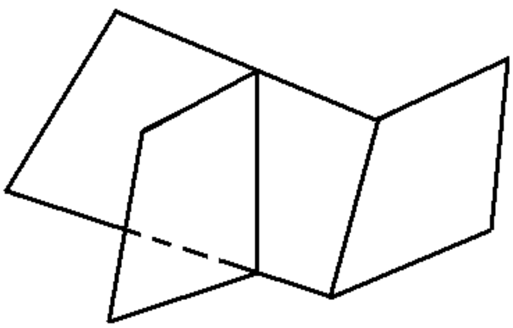
**Exemplul 2.2.** Fie $\mathrm{K}_1^{'}$ totalitatea liniilor frînte simple. Dacă $F = A_1A_2...A_n$ şi $\Phi = B_1B_2...B_m$, atunci suma lor $F \oplus \Phi$ există dacă şi numai dacă $A_1 \neq A_n$ $B_1 \neq B_m$, intersecţia lor $F \cap \Phi$ se conţine în mulţimea $\{A_1, A_n\}$ şi nu conţine nici unul din punctele $\mathrm{B}_2$, ..., $\mathrm{B}_{m-1}$.




**Exemplul 2.3.** Fie $\mathrm{K}_2$ clasa poligoanelor plane. Poligonul $P$ este suma poligoanelor $P_1$ şi $P_2$, dacă $P = P_1 \cup P_2$ şi poligoanele $P_1$ şi $P_2$ nu au puncte interioare comune.

**Exemplul 2.4.** Figura $F$ se numeşte suprafaţă poligonală dacă $F$ este reuniunea unui număr finit de poligoane. Fie $\mathrm{K}_2'$ totalitatea suprafeţelor poligonale. Suprafaţa poligonală $F$ este suma suprafeţelor poligonale $F_1$ şi $F_2$, dacă $F = F_1 \cup F_2$ şi intersecţia $F_1 \cap F_2$ nu conţine un careva poligon.

**Exemplul 2.5.** Fie $\mathrm{K}_3$ clasa poliedrelor. Poliedrul $P$ este suma poliedrelor $P_1$ şi $P_2$, dacă $P = P_1 \cup P_2$ şi poliedrele $P_1$ şi $P_2$ nu au puncte interioare comune.



Aceste exemple explică suficient de clar noţiunea de clasă aditivă de figuri geometrice.

**Definiţia 2.2.** Fie $\mathrm{K}$ o clasă aditivă de figuri geometrice. Vom spune că este dată o măsură a mărimilor figurilor din clasa $\mathrm{K}$ dacă pentru orice figură $F \in \mathrm{K}$ este bine determinat un număr pozitiv $«(F)$ numit mărimea figurii $F$ şi se satisface condiţiile:

1. Dacă figurile $F$ şi $\Phi$ sunt congruente şi $F, \Phi \in \mathrm{K}$, atunci $«(F) = «(\Phi)$.
2. Dacă $F, \Phi \in \mathrm{K}$ şi $F \subseteq \Phi$, atunci $«(F) \leq «(\Phi)$.
3. Dacă $F, F\ , F_2 \in \mathrm{K}$ şi $F = F_1 \oplus F_2$, atunci $«(F) = «(F_1) + (F_2)$.
4. Există o figură $F_0 \in \mathrm{K}$ pentru care $«(F_0) = 1$.

**Nota 2.2.** De regulă, figura $F_0$ din condiţia 4 este de o formă anumită. Această figură determină unitatea de măsură.

Măsurile mărimilor geometrice sunt omogene în sensul următor.

**Definiţia 2.3.** Măsura « a mărimilor geometrice din clasa aditivă K se numeşte omogenă, dacă există o funcţie pozitivă ~$(r)$ definită pe mulţimea numerelor reale pozitive şi se satisfac condiţiile:

1. $\lim\limits_{r\to 0}$~$(r)=0$ şi $\lim\limits_{r\to\infty}$~$(r)=\infty$
2. Dacă $F,\Phi\in$ K şi $\Phi$ este imaginea figurii $F$ la o asemănare cu coeficientul $r>0$, atunci «$(\Phi)=$ ~$(r)$«$(F)$.

Este evident că funcţia «$(r)$ satisface condiţiile:

3. Funcţia ~$(r)$ este continuă şi ~$(1)=1$.
4. Funcţia ~$(r)$ este monotonă şi strict crescătoare.

În majoritatea cazurilor ~$(r)=r^n$ pentru un număr natural $n>0$.

**Teorema 2.1.** Fie « o măsură omogenă a mărimilor geometrice din clasa aditivă K şi $k>0$, $k\in R$. Atunci «’$(F)=k\cdot$«$(F)$ este o nouă măsură omogenă a mărimilor din K.

**Demonstraţie.** Este evident că măsura «’satisface condiţiile 1-3 din Definiţia 2.2.
Fie ~$(r)$ funcţia relativ de care măsura « este omogenă. Există un $r_0>0$ pentru care $k^{-1}=$ ~$(r_0)$. Notăm cu $F_0'$ imaginea figurii $F_0$ la o omotetie cu coeficientul $r_0$. Atunci «$'(F_0')=k\cdot$«$(F_0')=k\cdot$~$(r_0)\cdot$«$(F_0)=k\cdot k^{-1}$«$(F_0)=1$.
Fie $\Phi$ o figură obţinută din figura $F\in$ K la o asemănare cu coeficientul de asemănare $r>0$. Atunci «’$(\Phi)=k$«$(\Phi)=k.$~$(r)\cdot$«$(F)=$~$(r)\cdot$«’$(F)$. Deci şi măsura «’ este omogenă relativ de funcţia ~$(r)$. Teorema este demonstrată.

**Exemplul 2.5.** Fie $K_0$ totalitatea mulţimilor finite şi $F=F_1\cup F_2$, dacă $F=F_1\cap F_2=\varnothing$. Notăm cu «$(F)$ numărul de elemente ale figurii $F$. Atunci «$(F)$ este o măsură neomogenă.

## 3. PROBLEME PRINCIPALE ALE TEORIEI MĂSURĂRII MĂRIMILOR GEOMETRICE

Fie K o clasă aditivă de figuri geometrice în spaţiu.
Prima problemă fundamentală a teoriei măsurării este următoarea.

**Problema 1.** Care sunt condiţiile de existenţă a unei măsuri a mărimilor figurilor din clasa K?.

Simultan cu problema 1 se rezolvă şi următoarea problemă.

**Problema 2.** În ce mod se fixează unitatea de măsură a mărimilor figurilor din clasa K?

La măsurările geometrice în calitate de unitate de măsură se fixează un segment, care se numeşte unitate de măsură sau segment unitar. Acest segment şi determină figura $F_0$ din Definiţia 2.2.

**Problema 3.** Fie dată unitatea de măsură. Cîte măsurări ale mărimilor figurilor din clasa $K$ există cu unitatea de măsură dată?
Afirmaţiile ce conduc la rezolvarea Problemelor 1 şi 2 formează împreună „Teorema de existenţă” a măsurii mărimilor figurilor din $K$, iar afirmaţiile ce ce conduc la rezolvarea Problemei 3 – „Teorema de unicitate”. Cu aceste probleme este legată şi următoarea.
**Problema 4.** Fie că este dată o măsură a mărimilor figurilor din $K$. În ce mod se poate calcula mărimea unor figuri din $K$?
La rezolvarea Problemei 4 se deduc diverse formule de calcul. În aceste formule poate fi utilizată noţiunea de integrală sau operaţiile de adunare, scădere, înmulţire, împărţire şi extragere a rădăcinilor a unor părţi liniare ale figurii.
În procesul demonstrării Teoremelor de existenţă se folosesc următoarele:

## 4. METODA LUI CARATHEODORY DE CONSTRUIRE A UNEI MĂSURI

Fie $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$, unele $R$ este mulţimea numerelor reale. Considerăm că $(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty = x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=\pm\infty$ pentru orice $x \in R$. De asemeni, $\sim \cdot(\pm\infty)\neq\infty$ pentru $\sim > 0$ şi $\sim \cdot(\pm\infty)=\mp\infty$ pentru $\sim < 0$.
Definiţia 4.1. O clasă $\mathcal{B}$ de submulţimi ale mulţimii $\mathcal{S}$ se numeşte semialgebră de submulţimi dacă satisface condiţiile:

1. $\varnothing \in \mathcal{B}$.
2. Dacă $A, B \in \mathcal{B}$, atunci $A \cap B \in \mathcal{B}$.
3. Dacă $A, B \in \mathcal{B}$, atunci există un $n \geq 1$ şi aşa mulţimi disjuncte $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}$, pentru care $\mathcal{B} \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

**Definiţia 4.2.** O clasă $\mathcal{B}$ de submulţimi ale mulţimii $\mathcal{S}$ se numeşte algebră de submulţimi dacă satisface condiţiile.

1. $\varnothing \in \mathcal{B}$.
2. Dacă $A, B \in \mathcal{B}$, atunci $A \cap B \in \mathcal{B}$.
3. Dacă $A \in \mathcal{B}$, atunci $\mathcal{S} \setminus A \in \mathcal{B}$.

**Definiţia 4.3.** O clasă $\mathcal{B}$ de submulţimi ale mulţimii $\mathcal{S}$ se numeşte σ–algebră de submulţimi sau clasă complet aditivă, dacă satisface condiţiile:

1\. $\varnothing \in \mathcal{B}$.
1\. Dacă $A_n \in \mathcal{B}$, pentru orice $n \in N$, atunci $\bigcup_{n=1}^{\infty} An \in \mathcal{B}$.
2\. Dacă $A \in \mathcal{B}$, atunci $\mathcal{S} \setminus A \in \mathcal{B}$.

**Lema 4.1.** Orice algebră $\mathcal{B}$ de submulţimi ale mulţimii $\mathcal{S}$ satisface proprietăţilor:

1. $\mathcal{B}$ este o semialgebră de submulţimi.

2. Dacă $A, B \in \mathcal{B}$, atunci $A \cup B \in \mathcal{B}$..
3. $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$.

**Lema 4.2.** Orice σ-algebră $\mathcal{B}$ de submulţimi ale mulţimii $\mathcal{X}$ satisface proprietăţile:
1. $\mathcal{B}$ este o algebră de submulţimi.
2. Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt mulţimi din clasa $\mathcal{B}$ atunci $\bigcap_{n=1}^{\infty} An \in \mathcal{B}$.

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm că $\bigcap_{n=1}^{\infty} An = \mathcal{X} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{X} \setminus A_n)$.

**Teorema 4.1.** Fie $\mathcal{B}$ o semialgebră de submulţimi ale mulţimii $\mathcal{X}$. Notăm cu $\mathcal{B}_1$ totalitatea submulţimilor $A \subseteq \mathcal{X}$ care sunt reuniuni a unui număr finit de submulţimi $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{B}$, $n \in N$. Fie $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \cup \{\mathcal{X} \setminus H : H \in \mathcal{B}_1\}$. Atunci:
1. $\mathcal{B}_2$ este o algebră de submulţimi ale mulţimii $\mathcal{X}$.
2. Dacă $H \in \mathcal{B}_1$, atunci există un număr $n \geq 1$ şi aşa mulţimi disjuncte $H_1, H_2, ..., H_n \in \mathcal{B}$ pentru care $H = \bigcup_{i=1}^{n} Hi$.
3. Dacă $\mathcal{B}'$ este o algebră de submulţimi ale mulţimii $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$, atunci $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}'$.

**Demonstraţie.** Afirmaţiile 2 şi 3 sunt evidente.
Să demonstrăm afirmaţia 1.
Fixăm $A, B \in \mathcal{B}_2$,. Să demonstrăm că $A \cap B \in \mathcal{B}_2$. Sunt posibile trei cazuri.
Cazul 1. $A, B \in \mathcal{B}_1$. În acest caz există un număr $n \geq 1$ şi submulţimile $A_1, B_1, ..., A_n, B_n \in \mathcal{B}$ pentru care $A = \bigcup_{i=1}^{n} Ai$ şi $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$. Nu se exclude cazul cînd $Ai = \varnothing$ sau $Bj = \varnothing$.
Notăm $H_{ij} = A_i \cap B_j$. Atunci $H_{ij} \in \mathcal{B}$ şi $A \cap B = \bigcup_{i,j=1}^{n} H_{ij} \in \mathcal{B}_1$, iar $A \cup B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cup B_i) \in \mathcal{B}_1$.
Cazul 2. $\mathcal{X} \setminus A$, $\mathcal{X} \setminus B \in \mathcal{B}$. Fie $A' = \mathcal{X} \setminus A$ şi $B' = \mathcal{X} \setminus B$. Atunci $A', B' \in \mathcal{B}_1$ şi $A' \cup B' \in \mathcal{B}_1$, iar $A \cap B = \mathcal{X} \setminus (A' \cup B') \in \mathcal{B}_2$.
Cazul 3. $A \in \mathcal{B}_1$, şi $\mathcal{X} \setminus \mathcal{B} \in \mathcal{B}_1$. Există $n \geq 1$ şi $A_1, B_1, ..., A_n, B_n \in \mathcal{B}$ pentru care $A = \bigcup_{i=1}^{n} Ai$ şi $\mathcal{B}' = \mathcal{X} | \mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$. Pentru fiecare $j \leq n$ există un $H_j \in \mathcal{B}_1$ încît $A \setminus B_j = H_j$.
Atunci $A \cap B = \bigcap_{j=1}^{n} (A / B_j) = \bigcap_{j=1}^{n} H_j \in \mathcal{B}_1$.
Teorema este demonstrată.

**Nota 4.1**. Vom spune că $\mathbf{B}_2$ este algebra generată de familia $\mathbf{B}$.

Orice familie $\mathbf{B}$ de submulţimi ale mulţimii $\mathcal{X}$ generează o σ-algebră $\mathcal{B}^*$ de submulţimi şi o algebră $\overline{\mathbf{B}}$ de submulţimi. Vom avea că $\mathbf{B} \leq \overline{\mathbf{B}} \leq \mathbf{B}^*$.

Dacă $\{a_i : i \leq n\}$.

**Teorema 4.2.** (Teorema Caratheodory).

Fie **B** o semialgebră de submulţimi ale mulţimii Ω şi $« : B \to R$ este o funcţie cu proprietăţile:

1. $«(H) \geq 0$ pentru orice $H \in$ **B**.
2. Dacă $H_1, H_2, ..., H_n, ...$ este un şir de mulţimi mutual disjuncte din **B**, $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ şi $H \in$ **B**, atunci $«(H) = \sum\{«(H_n) : n \in N\}$ şi există o unică funcţie $\overline{«} : B^* \to \overline{R}$ cu proprietăţile:

1. $\overline{«}(H) = «(H)$ pentru orice $H \in$ **B**.
2. $\overline{«}(H) \geq 0$ pentru orice $H \in B^*$.
3. Dacă $H\ , H_2, ..., H_n, ...$ sunt mulţimi disjuncte din $B^*$, atunci $\overline{«}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right) = \sum\{«(H_n) : n \in N\}$.

*Demonstraţie.* Această teoremă este una din cele mai importante teoreme ale teoriei abstracte a măsurii.

Vom expune planul de demonstrare a acestei teoreme.

1. Observăm că « (Ø)=0.
2. Notăm $a^* = sup\{«(H) : H \in B\}$
3. Notăm cu $B_1$ $B_1$ şi $\overline{B} = B_2$ familiile de submulţimi constituite în Teorema 4.1.
4. Pentru fiecare $H \in B_1$ fixăm $H_1, H_2, ..., H_n \in B$ pentru care $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ şi $H_i \cap H_j = \varnothing$ pentru $1 \leq i < j \leq n$.

Mulţimile $H_1, H_2\ , ..., H_n$ formează o **B**-descompunere a mulţimii $H$. Pentru $H \in B_1$ pot exista mai multe **B**-descompuneri.

5. Pentru $H \in B_1$ şi $B$-descompunerea $H_1, H_2, ..., H_n$ a mulţimii $H$ notăm $\overline{«}(H) = \sum\{«(H_i) : i \leq n\}$.
6. Observăm că $\overline{«}(H) = «(H)$ pentru $H \in B$ .
7. Dacă $H \in B_1$, atunci $\overline{«}(H)$ nu depinde de **B**-descompunerea ei.

Într-adevăr, fie $H_1, H\ , ..., H_n$ şi $H_1', H_2', ..., H'n$ şi $H_1', H_2', ..., H'm$ două **B**-descompuneri a mulţimii $H$. Atunci $H_{i\,j} = H_i \cap H_j' \in B$ , $«(H_i) = \sum\{«(H_{ij}) : j \leq m\}$ şi $«(H_j') = \sum\{«(H_{ij}) : i \leq n\}$.

Prin urmare, $\sum\{«(H_i) : i \leq n\} = \sum\{«(H_{ji}) : i \leq n, j \leq m\} = \sum\{«(H_j') : j \leq m\}$.

8. Dacă $H_1, H_2,...H_n,...$ sunt mulţimi mutual disjuncte din $B_1$, $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ şi $H \in B_1$, atunci $\overline{«}(H) = \sum\{\overline{«}(H_n) : n \in N\}$.

Fie $A_1, A_2, ..., A_m$ o **B**-descompunere a mulţimii $H$. Atunci pentru orice *n* există o aşa **B**-descompunere $\{H_{nij} : i \le m, j \le k(n)\}$ încît $H_{ij} \subseteq A_i$ pentru orice $i \le m$ şi $j \le m$. Nu se exclude că $H_{ij} = \varnothing$ pentru careva $i$ şi $j$. Atunci $A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\cup\{A_{nij} : j \le k(n), n \in N\})$ şi $«(A_i) = \sum\{«(Anij) : i \le k(n), n \in N\}$.

Din această egalitate imediat obţinem că $\overline{«}(H) = \sum\{«(A_i) : i \le n\} = \sum \overline{«}(H_n) : n \in N$ .

9. Dacă $H \in B_1$, atunci notăm $\overline{«}(H) = a^* - «(H)$. Este evident că $a^* = sup\{\overline{«}(H) : H \in B_1\} = \overline{«}(S)$. Deci $\overline{«}(H) \ge 0$ pentru orice $H \in \overline{B}$ şi $\overline{«}(A) = «(A)$ pentru $A \in B$ .

10. Dacă $H_1, H_2,...H_n,...$ sunt mulţimi mutual disjuncte din $\overline{B}$, $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ şi $H \in \overline{B}$, atunci $\overline{«}(H) = \sum\{\overline{«}(H_n) : n \in N\}$.

Se aplică construcţiile de la pasul 8 şi din demonstrarea Teoremei 4.1.

11. Pentru orice $H \subseteq S$ notăm $«^* = sup\{\overline{«}(A) : H \subset A, A \in \overline{B}\}$ şi $«_* = inf\{\overline{«}(A) : H \subset A, A \in \overline{B}\}$

Mărimea $«^*(H)$ se numeşte măsura exterioară , iar $«_*(H)$ – măsura interioară a mulţimii *H*.

Este evident că $«_*(H) \le «^*(H)$.

Dacă $«_*(H) < +\infty$,atunci $«^*(S \setminus H) = \overline{«}(S) - «^*(H) = a^* - «_*(H)$.

12. $\overline{«}(H) = «^*(H) = «_*(H)$ pentru orice $H \in \overline{B}$ .

13. Mulţimea $M \subseteq S$ se numeşte «-măsurabilă dacă $«_*(H) = «_*(H \cap M) + «_*(H \setminus M)$ pentru orice submulţime $H \subseteq S$ .

Fie $B_«$ totalitatea mulţimilor «-măsurabile.

14. Orice mulţime $M \in \overline{B}$ este «-măsurabilă. Deci $\overline{B} \subseteq B_«$.

15. Dacă $M \in B_«$, atunci \ $M S \setminus M \in B_«$ .

16. Dacă $A_1, A_2, \ldots$ sunt mulţimi mutual disjuncte din $B_«$, atunci $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in B_«$ .şi

$$«_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\{«_*(A_n) : n \in N\}.$$

17. $«^*(A) = «_*(A)$ pentru orice $A \in B_«$ .

18. Notăm $\overline{«}(A) = «_*(A)$ pentru orice $A \in B_«$ .

Atunci $B_«$ este o σ-algebră de submulţimi şi $B^* \subseteq B_«$ .

Existenţa funcţiei $\overline{«}$ este demonstrată. Unicitatea este o consecinţă a metodei de construcţie.

**Nota 4.2.** Schema lui Caratheodory poate fi folosită cu succes în cazul când sunt date semialgebra $B$ şi măsura « pe ea. În acest caz se spune că $\overline{«}$ este o extindere a măsurii « pe σ-algebra $B^*$ generată de $B$. De fapt noi am extins măsura « pe o σ-algebră cu mult „mai mare”. Însă ± -algebrele $B^*$ şi $B_«$ sunt destul „de aproape „ în sensul că pentru orice $H \in B_«$ există o mulţime $H^o \in B^*$ pentru care $\overline{«}(H^o) = 0$, $H \setminus H^o \in B^*$ şi $\overline{«}(H) = «(H \setminus H^o)$. Atunci şi $\overline{«}(H \setminus H^o) = 0$. Dacă $H \in B_«$ şi $\overline{«}(H) = 0$, atunci mulţimea *H* se numeşte « -neglijabilă . Deci mulţimile din $B_«$ se deosebesc de mulţimile din $B^*$ cu precizia mulţimilor « -neglijabile.

## 5. MĂSURAREA LUNGIMILOR SEGMENTELOR

De măsurarea mărimilor segmentelor este legată toată teoria măsurilor geometrice.

Din această cauză măsurarea mărimilor segmentelor trebuie să ocupe un loc deosebit în studiul matematicii.

La baza teoriei măsurării mărimilor segmentelor stă axioma lui Arhimede (287-212).

Fie *AB* şi *CD* două segmente. Vom spune că $AB \equiv CD$ dacă aceste segmente sunt congruente . Dacă $C_1$, $D_1$, sunt două puncte ale segmentului *CD* şi $AB \equiv C_1D_1$, atunci vom nota $AB \leq CD$. Din $AB \leq CD$ şi $CD \leq AB$ urmează că $AB \equiv CD$.

Notăm $AB<CD$, dacă $AB \leq CD$ şi *AB* nu este congruent cu *CD*.

Deci pentru orice două segmente a şi b se satisface una şi numai una din următoarele relaţii:

1. $a \equiv b$.
2. $a < b$.
3. $b < a$.

Pentru orice segmente *a*, *b* se construiesc segmentul *a+b*, segmentul *a-b* (dacă *b* $\prec a$), segmentul *n a* şi segmentul $\frac{1}{m}a$, unde *n* şi *m* sunt numere naturale.

***Axioma lui Arhimede***. Pentru orice două segmente există un număr natural $n \geq 1$, astfel încât $(n-1)a \leq b < na$.

Considerăm că $1 \cdot a = a$, iar $0 \cdot a = 0$ este un punct , adică este segmentul nul, care este mai mic decât alte segmente.

La măsurarea mărimilor segmentelor în calitate de unitate de măsură $F_0$ (vezi Definiţia2.2) se ia un segment care se numeşte segment unitar sau unitate.

**Teorema 5.1.** Pentru orice segment *e* există o unică măsură *l*(*a*) a lungimilor segmentelor cu unitatea de măsură *e*.

Demonstrare. Fie $N^* = N \cup \{0\}$.

Fixăm segmentul *e* .Cu ajutorul inducţiei construim şirul de segmente $e_0$, $e_1$, $e_2$,…,$e_n$,… astfel încât $e_0 = e$, $e_1 = 10^{-1}e_0$, $e_2 = 10^{-1}e_1$, …, $e_{n+1} = 10^{-1}e_n$

.Deci $e_n = 10^{n-1}e_0$ pentru orice $n \in N$ .

Fie *a* un segment. Există un număr $_n \in N^*$ încât $_n(n)\cdot e_n \le a < (\ _n(a)+1)e_n$.

Numerele $_n(a)$ posedă următoarele proprietăţi:

1. Există şi sunt unice pentru orice segment *a* şi orice număr $n \in N^*$ .

2. $10\ _n(n) \le\ _{n+1}(a) < 10(\ _n(a)+1)$

3. Dacă $a \le b$, atunci $_n(a) \le\ _n(b)$.

4. $_n(a) +\ _n(b) \le\ _n(a+b) \le\ _n(a) +\ _n(b)+1$.

5. $_{n+m}(e_n)=10^m$ pentru orice $n,m \in N^*$ .

Acum notăm $l_n(a) \le 10^{-n}\ _n(a)$.

Obţinem următoarele relaţii.

6. $l_n(a) \le l_{n+1}(a) < l_n(a) + 10^{-n}$

7. $l_n(a) + l_n(b) \le l_n(a+b) < l_n(a) + l_n(b) + 10^{-n}$

8. Pentru $m > n$ avem $l_n(e_m) = 0$, pentru $m < n$ avem $l_n(e_m) = 10^{-m}$ şi $l_n(e_0) = 1$.

Din aceste proprietăţi obţinem că pentru orice segment *a* există limita $l(a) = \lim\limits_{n\to\infty} l_n(a)$.

Din axioma lui Arhimede obţinem că $l(a) \ge l_n(a) > 0$ pentru un careva $n \in N$ . Din proprietatea 7 obţinem:

9. $l(a+b) = l(a) + l(b)$.

Din proprietatea 8 obţinem:

10. $l(e_m) = 10^{-m}$ şi $l(e) = 1$.*l*(*e*) = 1 şi $l(e_m)=10^{-m}$

Din proprietatea 3 obţinem:

11.Dacă $a \le b$, atunci $l(a) \le l(b)$.

12.Dacă $a \equiv b$, atunci $l(a)=l(b)$.

Deci *l*(*a*) este o măsură a lungimilor segmentelor cu unitatea de măsură *e*.

Dacă $l'(a)$ este o altă măsură a lungimilor segmentelor cu unitatea de măsură *e*, atunci:

13.$l'(e_m)=1$ şi $l'(e_m)=10^{-m}$.

Atunci din $_n(n)\cdot e_n \le a < (\ _n(a)+1)e_n$ obţinem că $l_n(a) \le l'(a) < l_n(a) + 10^{-n}$ şi, prin urmare, $l'(a)=l(a)$.

*Teorema este demonstrată .*

Fie $r_k(a) = \ _k(a) - 10 \cdot \ _{k-1}(a))$. Atunci $0 \le r_n(a) \le 9$ şi dacă $l(a)=n_0,n_1,n_2,\ldots n_k\ldots$ca o fracţie zecimală, atunci $n_0= \ _0(a)$ şi $n_k=r_k(a)$ pentru $k \in N$ .

**Nota 5.1.** Măsurarea segmentelor *este o măsură omogenă* cu funcţia $\alpha(r) \ =r$. Deci dacă cunoaştem o măsură $\ell(a)$ a mărimilor lungimilor segmentelor, atunci măsura lungimilor segmentelor cu unitatea de măsură $e'$ va fi $\ell'(a)=\ell(e)^{-1}\ \ell(a)$.

**Notăm 5.2.** Cursul preuniversitar de geometrie conţine un aşa sistem de axiome în care, sau este dată o mărime « $(a)$ a lungimilor segmentelor sau este cunoscută distanţa dintre puncte. În aşa caz uşor se determină o careva măsură a segmentelor cu o careva unitate de măsură. Prin urmare, ar putea fi aplicată Nota 5.1. şi să nu fie demonstrată Teorema 5.1.

Însă această cale din punct de vedere şi metodic şi metodologic este cu un eşec în final. Se pierde „miezul „ problemei măsurării mărimilor geometrice. În acest caz nu reuşim să stabilim unicitatea măsurii lungimii segmentelor!

## 6. MĂSURAREA LUNGIMILOR CURBELOR

Fixăm un segment $e$ ca unitate de măsură

Pentru orice linie frântă ¥ $=A_0A_1A_2\ldots A_n$ se determină lungimea ei $\ell(¥)=\sum_{i=1}^{n}\ell(A_{i-1}A_i)$, unde $l(A_{i-1}A_i)$ este lungimea segmentului $A_{i-1}A_i$.

Frânta ¥ se numeşte simplă, dacă $A_i \ne A_j$ pentru $0 < i < j \le n$ sau $0 \le i < j < n$ şi segmentele $A_0A_1$, $A_1A_2$, …, $A_{n-1}A_n$ nu au puncte interioare comune.

Dacă $A_0=A_n$, atunci linia frântă se numeşte închisă.

Examinăm spaţiul Euclidian $n$-dimensional $E^n$, $n \ge 1$. O aplicaţie continuă ¨ $:[a,b] \to E^n$ se numeşte drum. Drumul ¨ determină curba ¥(¨) formată din totalitatea punctelor ¨(t), $t \in [a,b]$. Drumul ¨ se numeşte simplu dacă ¨$(t_1) \ne$ ¨$(t_2)$ pentru $a < t_1 < t_2 \le b$ sau $a \le t_1 < t_2 < b$. Curba ¥ se numeşte simplă dacă ¥ = ¥(¨) pentru un careva drum simplu ¨ .

Pentru orice drum simplu ¨ $:[a,b] \to E^n$ se determină lungimea drumului $l(¨) = sup\{l(¨(t_0)¨(t_1)¨(t_2)\ldots¨(t_n)) : a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b, n \in N\}$.

Nu se exclude cazul $\ell(¨)=+\infty$.

Dacă ¥ este o curbă simplă atunci lungimea ei $\ell(¥)=\ell(¨)$ unde ¨ $:[a,b] \to E^2$ este un drum simplu ce reprezintă ¥, adică ¥ = ¥(¨). Lungimea curbei simple nu depinde de drumul simplu ce o reprezintă. Din acest punct de vedere noţiunea de curbă simplă poate fi modificată.

Fie $F \subseteq E^n$. Linia frîntă $A_0A_1A_2\ldots A_n$ este înscrisă în $F$, dacă $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt puncte din $F$. Fie £ $> 0$. Linia frîntă $A_0A_1A_2\ldots A_n$ este o £ $-$reţea, dacă pentru orice punct $A \in F$ există un $i \le n$ pentru care $l(AA_i) <$ £ . Să numim $F$ o curbă generalizată simplă, dacă pentru orice £ $> 0$ există o linie frîntă închisă care este înscrisă în $F$ şi formează o £ $-$ reţea . Pentru orice curbă generalizată simplă $F$ se determină lingimea ei $\ell$(F)=*sup{* $\ell$*(¥):¥, este o linie frăntă simplă închisă în F*}.

Curba (generalizată) ¥ se numeşte rectificabilă dacă $\ell$(¥) $l$(¥) $< +\infty$.

Nu orice curbă simplă rectificabilă.

**Exemplul 6.1.** Fie ¥ o curbă reprezentată de funcţia $f(t)=t\cos\frac{s}{t}$ pentru $0 < t \le$ (2®)$^{-1}$ şi $f(0)=0$.

Dacă $t_n$=(2n®)$^{-1}$, atunci $\ell$(¥) $l$(¥) $> \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \frac{1}{2®}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$ .

**Exemplul 6.2. CERCUL**

Se aproximează cu linii frînte închise care sunt poligoane şi conţin $\boldsymbol{2^n}$ laturi.

Dacă $a_n$ este mărimea laturii unui poligon regulat cu $2^n$ laturi incise în cercul de rază $R$, atunci: $a_{2n}=\sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}}$ , $a_n=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$ , unde după semnul {-} vom avea (n-2) radicali şi (n -2) rifre de 2. Din ultima formulă se obţine ® $= lin_{n \to \infty} 2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ .

## 7. ARIA POLIGOANELOR

Trecerea de la măsurarea lungimilor la măsurarea ariilor este foarte importantă. Menţionăm că cazul $n$-dimensional (n$\ge 3$) este similar cu cazul $r$-dimensional.

Definiţia 2.2. pentru clasa de poligoane poate fi formulată în modul următor .

**Definiţia 7.1.** Vom spune că este dată o măsură a ariilor poligoanelor dacă pentru orice poligon $P$ este bine determinat un număr pozitiv ±$(P)$ numit aria poligonului $P$ şi se satisfac condiţiile :

1. Dacă poligonul $P$ şi $Q$ şunt congruente, atunci ±$(P)$ = ±$(Q)$
2. Dacă $P$ şi $Q$ sunt poligoane şi $P \subseteq Q$, atunci ±$(P) \le$ ±$(Q)$.
3. Dacă $P$, $P_1$ şi $P_2$ sunt poligoane şi $P=P_1+P_2$, atunci ±$(P)$ = ±$(P_1)$ + ±$(P_2)$
4. Există un pătrat $P_0$ pentru care ±$(P_0) = 1$

Latura pătratului $P_0$ se numeşte unitate de măsură a ariilor.

În cursul preuniversitar nu se demonstrează Teorema de unicitate şi de existenţă a măsurii ariilor cu unitatea de măsură dată.

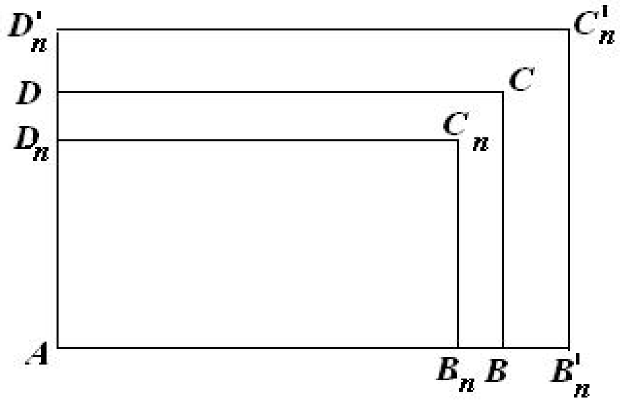
Să admitem că ±$(P)$ este o măsură a ariilor poligoanelor cu unitatea de măsură $e$.

**Teorema 7.1.** Dacă $P$ este un dreptunghi cu laturile de mărimile $a$ şi $b$, atunci $\pm(P) = ab$

Demonstraţie. Fie $P_0$ este pătratul unitar, adică cu latura $e$.

Fie $\ell$(c) lungimea segmentului $c$.

Construim şirul de segmente $e_0, e_1, e_2, \ldots$ pentru care $e_0 = e$, $e_1 = 10^{-1} e_0$, $e_2 = 10^{-1} e_1$, $\ldots$, $e_{n+1} = 10^{-1} e_n$ pentru orice $n \in N$ . Atunci $l(e) = l(e_0) = 1$ şi $\ell(e_n) = 10^{-n}$. Dacă latura $e$ a pătratului $P_0$ se împarte în $10^n$ părţi congruente , atunci în rezultat obţinem $10^{2n}$ pătrate congruente cu laturile congruente cu segmentul $e_n$. Deci pătratul $P_n$ cu latura $e_n$ va avea aria $\pm(P_n) = 10^{-2n}$. Notăm $c=2+a+b$. Admitem că $P$ este un dreptunghi cu laturile de mărimile $a$, $b$ şi $\pm(P) \neq ab$. Atunci există un număr $n \in N$ pentru care $c \cdot 10^{-n} < |ab - \pm(P)|$.




Există aşa numere $a_n$ şi $b_n$ pentru care:

- $a_n 10^n$ şi $b_n 10^n$ sunt numere naturale;
- $0 < a_n < a < a_n + 10^{-n}$ şi $0 < b_n < b < b_n + 10^{-n}$.

Fie $a'_n = a_n + 10^{-n}$ şi $b' = b_n + 10^{-n}$.

Considerăm că $P = ABCD$, $a = \ell(AB) = \ell(CD)$ şi $b = \ell(AD) = \ell(BC)$.

Construim dreptunghiurile $P_n = AB_nC_nD_n$ şi $P'_n = AB'_nC'_nD'_n$ pentru care:

- punctul $B$ este situat între punctele $B_n$ şi $B'_n$;
- punctul D este situat între punctele $D_n$ şi $D'_n$;
- $l(AB_n) = a_n$, $l(AB'_n) = a'_n$, $l(CD_n) = b_n$, $l(CD'_n) = b'_n$.

Atunci $P_n \subseteq P \subseteq P'_n$. Prin urmare $\pm(P_n) < \pm(P) < \pm(P'_n)$.

Conform condiţiilor expuse, dreptunghiul $P_n$ se împarte în $a_n \cdot 10^n \cdot b_n \cdot 10^n = a_n \cdot b_n \cdot 10^{2n}$ $a_n$ . $10^n$ pătrate cu latura de mărimea $10^{-n}$. Prin urmare $\pm(P_n) = a_n \cdot b_n$.

În mod similar demonstrăm că

$$\pm(P'_n) = a'_n \cdot b'_n = (a_n + 10^{-n}) \cdot (b_n + 10^{-n}) = a_n b_n + (a_n + b_n + 10^{-n}) \cdot 10^{-n} < a_n b_n + c \cdot 10^{-n}.$$

Atunci $a_n \cdot b_n < a \cdot b < a_n \cdot b_n + c \cdot 10^{-n}$ contrazicere .

**Corolarul 7.1.** Dacă $P$ este un paralelogram cu baza de mărimea $a$ şi cu înălţimea $h$ dusă la bază, atunci $\pm(P) = a \cdot h$.

**Corolarul 7.2.** Dacă $\Delta$ . este un triunghi cu baza $a$ şi înălţimea $h$ dusă la bază , atunci $\pm(\Delta)=\frac{1}{2}a\cdot h$.

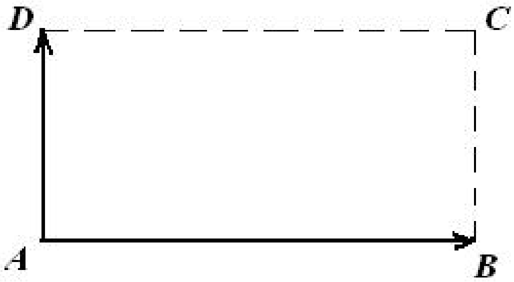
**Corolarul 7.3.** Există cel mult o măsură a ariilor poligoanelor cu unitatea de măsură dată *e.*

**Corolarul 7.4.** Orice măsură a ariilor poligoanelor este o măsură omogenă cu funcţie ¨ $(r)=r^2$.

## 8. PRIMA DEMONSTRARE A EXISTENŢEI ARIILOR

**Teorema 8.1.** Există o unică măsură a ariilor cu unitatea de măsură *e* dată .

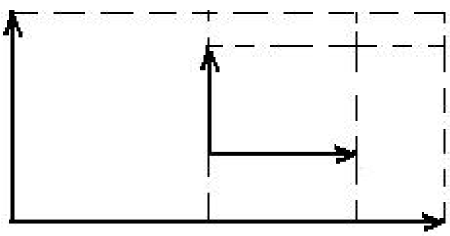
*Demonstrare.* Fixăm un sistem de coordonate cartezian rectangular. Pentru orice punct *M* se determină coordonatele *(x,y)* şi notăm *M=(x,y).* Notăm cu *K* totalitatea dreptunghiurilor cu laturile paralele la axele de coordonate şi cu coordonatele vârfurilor raţionale. La fiecare din aceste dreptunghiuri noi aruncăm două din cele patru laturi în modul următor.




Fiecare dreptunghi poate fi scris în forma *P=ABCD,* unde $A=(x_1y_1)$, $B=(x_1y_2)$, $C=(x_2,y_2)$, $D=(x_1,y_2)$, $x_1<x_2$ $y_1<y_2$.

Acestui dreptunghi nu-i aparţin laturile *BC* şi *CD*. În aceste condiţii clasa *K* este o semialgebră de figuri plane.

Dacă $P,Q\in K$ şi $P\cap Q\neq\varnothing$, atunci $P\cap Q\in K$ şi P\Q este suma cel mult a patru dreptunghiuri din K.



Acum pentru fiecare dreptunghi $P\in K$ cu mărimile laturilor *a* şi *b* considerăm că $«(P)=a\cdot b$.

Clasa $\mathcal{K}$ cu măsura « satisface condiţiile *Teoremei 4.2.*

Deci măsura « poate fi extinsă pe clasa $K^*$ şi obţinem măsura complet aditivă $\overline{«}$ .Totalitatea poliedrelor aparţine clasei $K^*$.

Deci $\overline{«}$ este o măsură a ariilor poligoanelor cu unitatea de măsură dată.

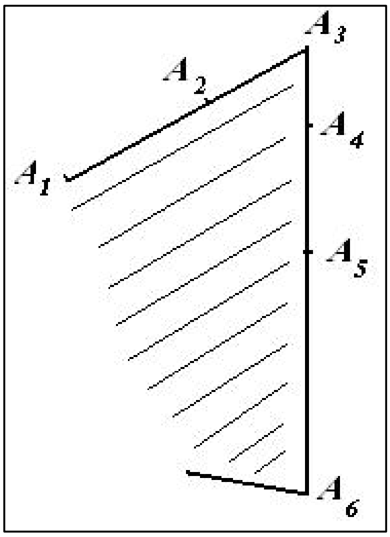
## 9. A DOUA DEMONSTRARE A EXISTENŢEI MĂSURII ARIILOR POLIGOANELOR

Fie *e* o unitate de măsură. Fixăm sistemul de coordonate Cartezian rectangular.

Pentru orice vector $\vec{a}$ se determină coordonatele *{x,y}* şi notăm $\vec{a} = \{x, y\}$.

Dacă $\vec{a} = \{x_1, y_1\}$ şi $\vec{a} = \{x_1, y_1\}$, iar ¨ este cel mai mic unghi format de $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, atunci se determină produsul scalar $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos ¨ = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Fie *P* un poligon. Considerând că pe fiecare latură pot fi adăugate noi vârfuri, care permit să divizăm latura dată în laturi mai mici. Fie *b* o latură a poligonului dat .



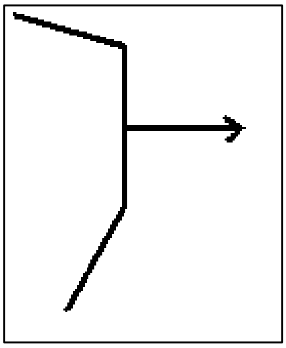

În interiorul laturii *b* fixăm un punct. Din acest punct ducem un segment *c* perpendicular la latura *b*, de lungimea 1 şi care în apropierea originii nu conţine puncte din *P*. Acest segment reprezintă un vector unitar numit normală exterioară a laturii *b* a poligonului *P*.

Notăm că $b_1, b_2, \ldots, b_n$ lungimile laturilor poligonului *P*, cu $\vec{n_i}$ notăm normala exterioară a laturii $b_i$, O este originea sistemului de coordonate şi $B_i$ este un punct situat pe dreapta ce conţine latura $b_i$.

Notăm $\pm(P) = 2^{-1} \sum b_i \left(\overrightarrow{OB_i}, \vec{n_i}\right)$.

Această funcţie satisface condiţiile:

1. Funcţia $\pm(P)$ nu depinde de modul cum au fost fixate punctele $B_i$,



2. Funcţia $\pm(P)$ nu depinde de modul cum au fost fixate vârfurile dreptunghiului *P* .

3. Funcţia $\pm(P)$ nu depinde de modul cum a fost fixată originea *O*.

4. $\pm(P) = a \cdot b$ pentru orice dreptunghi cu laturile *a; b*.

Deci $«(P) = a \cdot b$ este o măsură a mărimilor ariilor poligoanelor.

## 10. DESPRE MĂSURAREA VOLUMELOR

Fie *n≥3*. În spaţiul Euclidian *n*-dimensional $E^n$ în mod natural cu ajutorul inducţiei se definesc *k-poliedrele* pentru *k≤n.*

Menţionăm că *0-poliedru* este un punct, *1-poliedru* este un segment, *2-poliedru* este un poligon obişnuit, *3-poliedru* este un poliedru obişnuit.

Feţele *n-poliedrului* sunt *(n-1)-poliedre*.

Pentru un *n-poliedru* în $E^n$ se definesc *k*-feţele pentru orice *k* ∈*{0,1,…,n-1},* partea inferioară şi partea exterioară . Exemple de *n-poliedre* sunt *n*–paralelipipede , *n*–prisme , *n*–dreptunghiuri, *n*–cuburi.

**Definiţia 10.1.** Se spune că în spaţiul Euclidian $E^n$ este dată o măsură a volumelor *n*–poliedru dacă pentru orice *n–poliedru P*este bine determinat un număr pozitiv $V_n(P)$, numit *n*–volumul poliedrului *P* şi se satisfac condiţiile:

1. Dacă *n*–poliedrele *P* şi *Q* sunt congruente, atunci $V_n(P)=V_n(Q)$.

2. Dacă *P* şi *Q* sunt *n*–poliedre şi $P \leq Q$, atunci $V_n(P) \leq V_n(Q)$ şi $P \subseteq Q$, atunci $V_n(P) \leq V_n(Q)$.

3. Dacă $P$, $P_1$ şi $P_2$ sunt *n*–poliedre şi $P=P_1+P_2$, atunci $V_n(P)=V_n(P)=V_n(P_1)+V_n(P_2)$.

4. Există un *n*–cub $P_0$ pentru care $V_n(P_0)=1$.

Latura *n*–cubului $P_0$ se numeşte unitatea de măsură a volumelor.

Fixăm segmentul *e* ca unitate de măsură . Măsurarea *n*–volumului $V_n(P)$ pentru $n \leq 2$ a fost efectuată în paragrafele precedente. Dacă folosim inducţia matematică şi în demonstraţiile din paragrafele 7-9 cuvântul „poligon” se înlocuieşte cu cuvântul „ *n–poliedru*” şi cuvintele „latură a poliedrului„ – cu cuvintele *„(n-1)* faţă a *n–poliedrului*”, atunci obţinem demonstrările următoarelor termene.

**Teorema 10.1.** Pentru orice unitate de măsură e există o unică măsură a n-volumelor.

**Teorema 10.2.** Fie *P* un n-dreptunghi cu mărimile laturilor $a_1,a_2,\ldots$, an.

**Teorema 10.3.** Fie *P* o *n*-prismă cu *(n-1)*-volumul bazei egal cu *a* şi înălţimea către baza *h*. **Teorema 10.4.** Fie *P* un *n-* tetraedru cu *(n-1)-* volumul bazei *a* şi înălţimea către baza *h*.

Atunci $V_n(P)=\frac{1}{n}\, a\, h$.

În cazul n=2 orice triunghi (adică orice 2-tetraedru) este echicompus cu un paralelogram. Pentru $n \geq 3$ această afirmare nu este justă. Pentru a depăşi acest obstacol este necesar să aplicăm principiul lui Cavalieri. Acest principiu bine cunoscut pentru n=3 este adevărat pentru orice $n \geq 2$.

**Principiul lui Cavalieri**. Fie *P* şi *Q* două *n*-poliedre .

Admitem că există o dreaptă *l* încât orice *(n-1)*-plan (hiperplan) perpendicular către *l* intersectează figurile *P* şi *Q* sau după mulţimi vide sau după figuri *(n-1)*–poliedrale cu *(n-1)*–volumele egale. Atunci $V_n(P)=V_n(Q)$.

Acest principiu este adevărat pentru *n*–prisme cu bazele de acelaşi *(n–1)*-volum şi înălţimile de aceiaşi mărime. Aceasta este o consecinţă din *Teorema 10.3.*

În cazul general, se aplică aproximarea *n*–poliedrelor cu sume de *n*–prisme cu bazele paralele. Dacă admitem că $V_n(P) \neq V_n(Q)$, atunci se poate obţine contrazicere ca şi în cazul demonstrării *Teoremei 7.1.* fără a trece la limită. Este necesar să folosim faptul că *(n–1)*–volumele secţiunilor figurilor *P* şi *Q* sunt mărginite de o constantă c>0.

# 11.MĂSURA CANTOR – PEANO – JORDAN

Problema măsurării ariilor poligoanelor, volumelor poliedrelor şi a lungimii curbelor a apărut în antichitate. Cercetări profunde au fost efectuate de Procl, Arhimede, Heron şi alţii. Practic până în secolul XIX nu a apărut problema demonstrării existenţei şi unicităţii. Aceste afirmări se considerau cunoscute şi cercetările au fost orientate asupra metodelor de calcul a mărimilor geometrice. Integrala lui Riemann a lărgit clasa de figuri pentru care poate fi extinsă teoria „măsurii” mulţimii punctelor de discontinuitate a funcţiei.

Cantor pentru orice figură mărginită $H \subseteq E^n$ defineşte măsura «$(H)$ ca infimul $n$–volumelor poliedrelor ce conţin $H$. Măsura mulţimii $H$ coincide cu măsura închiderii ei în spaţiu. Prin urmare, dacă $H_1 \cap H_2 = \varnothing$, atunci este posibil ca închiderile lor să coincidă şi în acest caz «$(H_1)+$«$(H_2)=2$«$(H_1 \cup H_2)$ şi «$(H_1)=$«$(H_2)=$«$(H_1 \cup H_2)$.

Pentru a depăşi aceste obstacole a măsurii lui Cantor, Peano şi Jordan consideră că măsura « ($H$) este măsura exterioară a mulţimii $H$ şi dacă $H$ este situată în $n$-poliedrul $P$ ei definesc măsura interioară «$_*(H)=$«$(P)-$«$(P \setminus H)$. Măsura $H$ se numeşte măsurabilă în sensul Peano-Jordan dacă « ($H$)= « $_*$($H$). Aceste mulţimi se numesc mulţimi cvadribile.

Clasa de mulţimi cvadribile nu este „bogată” şi nu include toate mulţimile deschise şi mărginite.

Calculul măsurii unei mulţimi deschise $U$ a fost propus de E. Borel. El a descris ± -algebra generată de mulţimile deschise. Ideile lui E.Borel au fost concretizate în anul 1902 de H. Lebesgue. El a introdus măsura exterioară «$^*$($H$) şi măsura interioară «$_*$($H$) pentru orice submulţime $H \subseteq E^n$. Teoria dezvoltată de H. Lebesgue coincide cu metoda lui Caratheodory pentru cazul spaţiilor Euclidiene.

***Notă:*** *Materialul a fost publicat în articolul [19]indicat bibliografia de bază la prezenta lucrare.*

**Anexa 5.**

## CONSIDERAŢII ASUPRA CVADRATURII ŞI DESCOMPUNERII POLIGOANELOR

### INTRODUCERE

Se cunoaşte că pentru orice segment *e* luat ca unitate de măsură se determină lungimile segmentelor, lungimile curbelor simple şi ariile poligoanelor. În această ordine de idei menţionăm că pentru orice figură plană *F* este determinat un număr nenegativ *A(F)* astfel încît:

(®) dacă *F* este un poligon, atunci *A(F)* este aria $A_F$ a acestui poligon;

(±) dacă figurile *F* şi *L* nu se intersectează, atunci $A(F \cup L) = A(F) + A(L)$;

(©) dacă figurile *F* şi *L* sînt congruente, atunci $A(F) = A(L)$.

Funcţia *A(F)* se numeşte *măsură Banach* a figurilor plane [1]. Pentru unele figuri plane numărul *A(F)* poate fi egal cu infinit. Aşa tip de măsură există şi pentru figurile liniare, dar nu există pentru corpurile spaţiale. Considerăm că o măsură Banach a figurilor plane este fixată. În acest caz numărul *A(F)* se va numi aria generalizată a figurii *F*.

Două figuri plane se numesc *echivalente* dacă ariile lor sunt egale. Această noţiune ca şi noţiunea de congruenţă nu depinde de unitatea de măsură a lungimilor şi a ariilor.

O figură se numeşte *conexă* dacă oricare două puncte ale sale pot fi unite printr-o linie frîntă care în întregime se conţine în figura dată.

O figură plană se numeşte *convexă*, dacă ea conţine fiecare segment care uneşte două puncte ale sale.

Dacă figura este conexă şi mărginită de un număr finit de frînte închise, atunci ea se numeşte *poligon*.

Figura plană mărginită de o linie frîntă închisă simplă se numeşte *poligon simplu*.

Vom spune că figura *F* este o sumă a poligoanelor $P_1, P_2, \ldots, P_n$, dacă $F = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ este reuniunea acestor poligoane şi pentru orice $1 \le i < j \le n$ poligoanele $P_i$ şi $P_j$ nu au puncte interioare comune. În acest caz notăm $F = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$ sau $F = \sum_{i=1}^{n} P_i$. Se mai spune că figura *F* este descompusă în suma poligoanelor $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Menţionăm că suma este un caz special al reuniunii. Se cunoaşte că orice poligon se descompune în sumă de triunghiuri.

Vom numi *figură poligonală* figura care poate fi reprezentată ca o sumă de poligoane.

Din antichitate sînt cunoscute următoarele probleme legate de noţiunile de echivalenţă şi sumă a figurilor poligonale:

**Problema 0.1.** De construit un pătrat echivalent cu o figură poligonală dată.

**Problema 0.2.** De construit un poligon asemenea cu un poligon dat şi echivalent cu o figură poligonală dată.

Problemele de construcţie se rezolvă cu ajutorul riglei şi a compasului. La dorinţă, cititorul poate folosi şi alte mijloace de construcţie (rigla marcată, două unghiuri drepte, parabola, etc.).

Noţiunea de congruenţă permite să introducem o noţiune cu mult mai generală:

Problemele 0.1 şi 0.2 sînt rezolvabile cu ajutorul riglei şi a compasului.

**Definiţia 0.3.** Două figuri poligonale $P$ şi $Q$ se numesc *echicompuse* şi notăm $P \top Q$, dacă există un număr natural $n \geq 1$ şi astfel de poligoane $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_n, Q_n$, pentru care:

1. $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$ şi $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$.
2. Pentru orice $i \leq n$ figurile $P_i$ şi $Q_i$ sînt congruente.

Figurile $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_n, Q_n$ se numesc *echidescompuneri* ale figurilor $P$ şi $Q$, dacă ele satisfac condiţiile Definiţiei 0.3.

Figurile congruente sînt echicompuse. Dacă sînt date poligoanele $P_1, P_2, \ldots, P_n$, unde $n \geq 2$, atunci putem construi o infinitate de figuri $F$ pentru care $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$ şi $P_i$ şi $F_i$ sînt congruente pentru orice $i \leq n$. Toate aceste figuri vor avea aceeaşi descompunere, dar forme diferite.

**Problema 0.4.** În ce condiţii două figuri poligonale echivalente sînt echicompuse?

Răspunsul la această întrebare este dat prin Teorema lui Wallace-Bolyai-Gerwien în care se afirmă că două figuri poligonale sînt echicompuse, dacă şi numai dacă ele sînt echivalente. Potrivit unor surse teorema a fost demonstrată de William Wallace (1768-1843) în 1807 şi, independent, de Farcaş Bolyai (1775-1856) (tatăl lui Ianoş Bolyai (1802 - 1860) – unul din fondatorii geometriei neeuclidiene) în anul 1833, iar de P.Gerwien în 1835. Adesea această teoremă se numeşte Teorema lui Bolyai-Gerwien sau Teorema lui Bolyai [10, 11]. (Vom reveni la această teoremă în capitolul 6.) Probabil, această teoremă era cunoscută pentru cazuri concrete şi în antichitate. Acest fapt este confirmat de metodele de calcul ale ariilor figurilor poligonale.

Cu fiecare pereche de figuri poligonale echivalente sunt asociate probleme de tipul:

**Problema 0.5.** Pentru poligoanele echivalente $P$ şi $Q$ de construit descompunerile $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_n, Q_n$, ce satisfac condiţiile Definiţiei 0.3. De determinat cel mai mic număr $n$ pentru care există astfel de descompuneri.

În literatură sînt descrise diverse jocuri şi construcţii amuzante alcătuite pe baza acestor probleme [11, 12, 13, 14]. Rezolvarea problemelor de acest tip dezvoltă creativitatea, gândirea abstractă, imaginaţia spaţială.

## 1. PROBLEMA CVADRATURII

Orice figură poligonală *Q* are aria ei $A_Q \neq 0$. Atunci există un număr $x > 0$ pentru care $x^2 = A_Q$. Deci *x* este lungimea laturii pătratului *P* echivalent cu figura *Q*. Prin urmare astfel de pătrat există şi este unic (considerăm identice soluţiile, dacă figurile sînt congruente). Pentru a construi latura pătratului *P* este necesară cunoaşterea construcţiilor următoare:

***C1.*** **Suma:** $x = a + b$, unde *a* şi *b* sînt două segmente date.

***C2.*** **Diferenţa:** $x = a - b$, unde *a* şi *b* sînt două segmente date şi $a > b$.

***C3.*** **Împărţirea segmentului în raportul dat:** $x = \frac{m}{n}a$, unde *a* este segment, iar *m* şi *n* sînt două numere naturale pozitive.

***C4.*** **Al patrulea segment proporţional:** $x = \frac{ab}{c}$, unde *a, b* şi *c* sînt trei segmente date.

***C5.*** **Media geometrică**: $x = \sqrt{ab}$, unde *a* şi *b* sînt două segmente date.

**Algoritmul 1.** Problema cvadraturii figurii poligonale *F* se rezolvă în modul următor:

***1.*** Descompunem figura *F* în sumă de triunghiuri $\Delta_1$, $\Delta_2, ..., \Delta_n$.

***2.*** Pentru fiecare triunghi $\Delta_i$ considerăm o bază $a_i$ şi înălţimea $h_i$ dusă către această bază. Atunci $x^2 = \frac{1}{2}(a_1h_1 + a_2h_2 + ... + a_nh_n)$ este aria figurii *F*.

***3.*** Construim segmentele $y_1 = h_1$, $y_2 = \frac{a_2h_2}{a_1}$, $y_3 = \frac{a_3h_3}{a_1}$, ..., $y_n = \frac{a_nh_n}{a_1}$.

***4.*** Construim segmentul $b = y_1 + y_2 + ... + y_n$.

***5.*** Construim segmentul $a = \frac{a_1}{2}$.

***6.*** Construim segmentul $x = \sqrt{ab}$. Segmentul *x* este latura pătratului echivalent cu figura *F*.

Problema 0.1 este un caz particular al Problemei 0.2, însă rezolvarea Problemei 0.2 poate fi redusă la rezolvarea Problemei 0.1.

**Algoritmul 2.** Fie *Q* un poligon dat şi *F* o figură poligonală dată. Efectuăm următoarele construcţii:

***1.*** În poligonul Q fixăm două vârfuri diferite *A* şi *B*.

***2.*** Construim latura $a = AC$ a pătratului echivalent cu poligonul *Q*, astfel încît punctul *C* să fie situat în exteriorul dreptei *AB*.

***3.*** Construim latura $b = AC'$ a pătratului echivalent cu figura poligonală *F*, unde $C'$ este un punct situat pe semidreapta $[AC)$.

***4.*** Construim pe semidreapta $[AB)$ un punct $B'$ astfel încât dreptele *BC* şi $B'C'$ să fie paralele.

***5.*** Cu centrul de omotetie *O* şi coeficientul $k = \frac{b}{a}$ construim un poligon $Q'$ omotetic cu poligonul *Q*. La această omotetie punctul $B'$ este imaginea punctului *B*. Poligonul $Q'$ este asemenea cu poligonul *Q* şi echivalent cu figura poligonală *F* (Figura A5.1.).

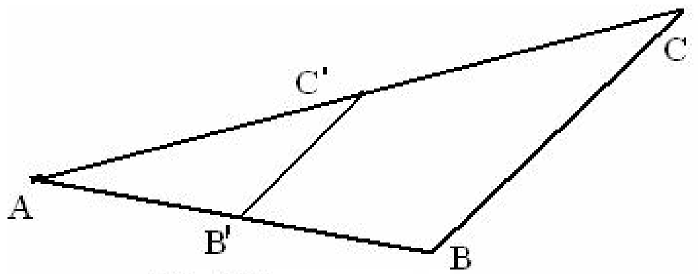


**Fig. A5.1.**

## 2. GRADUL DE COMPLEXITATE. PRODUSUL DESCOMPUNERILOR

Fie *F* şi $\Phi$ două figuri poligonale. Notăm cu $c(F,\Phi)$ cel mai mic număr natural *n* pentru care figura *F* poate fi divizată în *n+1* poligoane convexe din care se obţine figura $\Phi$. Numărul $c(F,\Phi)$ se va numi gradul de complexitate al transformării figurii *F* în figura $\Phi$.

**Proprietatea 2.1**. Dacă *F* este un poligon convex, atunci $c(F,F) = 0$.

**Proprietatea 2.2.** $c(F,\Phi) = c(\Phi,F)$.

**Proprietatea 2.3**. Dacă *F*, $\Phi$ şi *Q* sînt trei figuri poligonale, $c(F,\Phi) = n-1$, $c(\Phi,Q) = m-1$, atunci $c(F,Q) \le n \cdot m - 1$.

**Demonstraţie.** Fie $P$ şi $P'$ două poligoane convexe. Admitem că $P \cdot P' = \varnothing$, dacă poligoanele $P$ şi $P'$ nu au puncte interioare comune, şi $P \cdot P' = P \cap P'$, în caz contrar. Este evident că $P \cdot P'$ este sau mulţimea vidă, sau un poligon convex. Considerăm că mulţimile vide sunt egale şi congruente. Mulţimea $P \cdot P'$ se va numi produsul poligoanelor $P$ şi $P'$. Deoarece $c(F,\Phi) = n-1$, există *n* poligoane convexe $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$ pentru care $\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i$ şi figura *F* poate fi compusă din figurile $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$. Deoarece $c(\Phi,Q) = m-1$, există *m* poligoane convexe $\Phi'_1, \Phi'_2, ..., \Phi'_m$ pentru care $\Phi = \sum_{j=1}^{m} \Phi'_j$ şi figura *F* poate fi compusă din figurile $\Phi'_1, \Phi'_2, ..., \Phi'_m$. Notăm $\Phi_{ij} = \Phi_i \cdot \Phi'_j$. Atunci $\{\Phi_{ij} : i \le n, j \le m\}$ este o nouă descompunere a figurii $\Phi$ din care poate fi compusă şi figura F şi figura Q. Descompunerea $\{\Phi_{ij} : i \le n, j \le m\}$ se numeşte produsul descompunerilor $\{\Phi_i : i \le n\}$ şi $\{\Phi_j : j \le m\}$. Este evident că produsul acestor descompuneri conţine cel mult $m \cdot n$ mulţimi. Proprietăţile 1 - 3 sînt demonstrate.

**Corolarul 2.4.** Relaţia de echivalenţă $\top$ satisface următoarele condiţii:

1. (Reflexivitatea). Fiecare figură poligonală este echicompusă cu ea însăşi: $F \top F$.
2. (Simetria). Dacă figura poligonală este echicompusă cu figura poligonală $\Phi$, adică $F \top \Phi$, atunci şi invers $\Phi \top F$.
3. (Tranzitivitatea). Dacă $F$, $\Phi$ şi $Q$ sînt trei figuri poligonale , $F \top \Phi$ şi $\Phi \top Q$, atunci $F \top Q$.

**Nota 2.6.** Se poate examina şi cazul descompunerii în poligoane neconvexe. În acest caz numărul $c(F, \Phi)$ se va micşora, dar este mai complicat să definim produsul descompunerilor, deoarece produsul a două poligoane neconvexe poate fi compus din orice număr de poligoane.

## 3. TRANSFORMAREA UNUI TRIUNGHI ÎNTR-UN DREPTUNGHI

**Teorema 3.1.** Orice triunghi $F$ poate fi transformat într-un dreptunghi $P$ pentru care $c(F, P) = 2$.

**Demonstraţie** (**Algoritmul 3**). Fie $F = ABC$ un triunghi în care unghiurile $\angle A$ şi $\angle B$ nu sunt obtuze. Notăm cu $A_1$ şi $B_1$ mijloacele laturilor $AC$ şi $BC$ respectiv. Fie $L$, $M$, $N$ picioarele perpendicularelor coborâte din punctele $A$, $B$, $C$ respectiv pe dreapta $A_1 B_1$. Triunghiul $ABC$ a fost divizat în trei triunghiuri din care poate fi construit dreptunghiul $ABML$ (Figura A5.2).

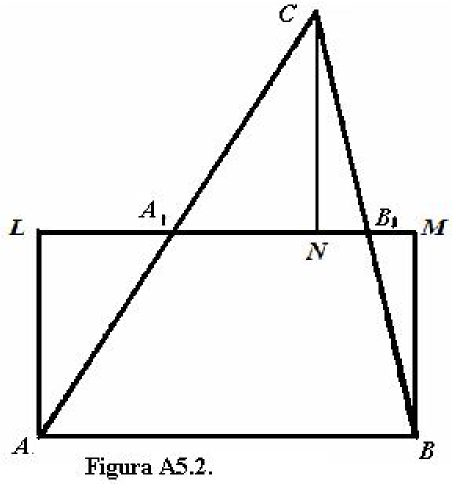


Figura A5.2.

## 4. TRANSFORMAREA UNUI PARALELOGRAM ÎNTR-UN DREPTUNGHI

**Teorema 4.1.** Orice paralelogram $F$ poate fi transformat într-un dreptunghi $P$ pentru care $c(F, P) = 1$.

**Demonstraţie** (**Algoritmul 4**). Fie $F = ABCD$ un paralelogram în care latura $AB$ este una din cele mai mari laturi. Putem considera că $\angle A$ nu este obtuz. Notăm cu $M$ şi $L$ picioarele perpendicularelor coborâte din punctele $A$ şi $B$ pe dreapta $DC$ respectiv. Atunci paralelogramul $ABCD$ este descompus în două poligoane convexe $ABMD$ şi $BCM$ din care poate fi construit dreptunghiul $ABML$. Menţionăm că punctul $M$ aparţine laturii $CD$ (Figura A5.3).

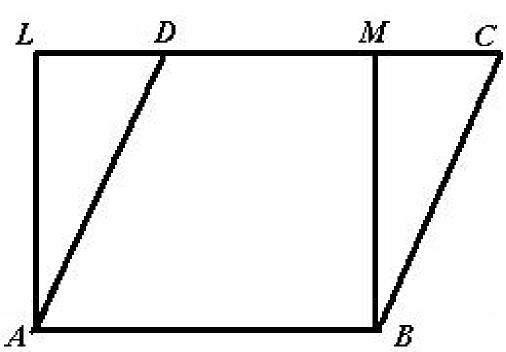



Figura A5.3.

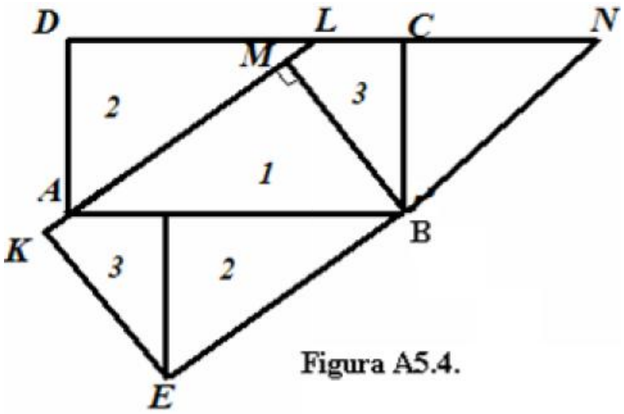



Figura A5.4.

## 5. TRANSFORMAREA DREPTUNGHIURILOR

**Teorema 5.1.** Dacă $P$ şi $Q$ sunt două dreptunghiuri echivalente, atunci $P \top Q$ şi $c(P,Q) \le 3$.

**Demonstraţie** (**Algoritmul 5**). Fie $a$ şi $b$ sunt laturile dreptunghiului $Q$, $d \le c$, $a \le c$ şi $Q = ABCD$. Este dat că $a \cdot b = c \cdot d$. Atunci din $b \le a$, $d \le c$ şi $a \le c$ obţinem $d \le a$. Fie că $a \ne c$, adică, dreptunghiurile $P$ şi $Q$ nu sunt congruente. Efectuăm următoarele construcţii:

***1.*** Pe segmentul $DC$ construim un punct $L$ pentru care $AL = a$. Din $d < a < c$ urmează că punctul $L$ există şi este unic.

***2.*** Din punctul $B$ ducem o perpendiculară la dreapta $AL$ până la intersecţie cu ea în punctul $M$.

***3.*** Construim paralelogramul $ABNL$. Atunci $c(ABCD, ABNL) = 1$. Deoarece $AL = a$ şi $a \cdot b = c \cdot d = AL \cdot MB$ este aria paralelogramelor $ABCD$ şi $ABNL$, obţinem că $MB = b$.

***4.*** Construim dreptunghiul $BMKE$, unde $K$ aparţine semidreptei $[LM)$ (Figura A5.4).

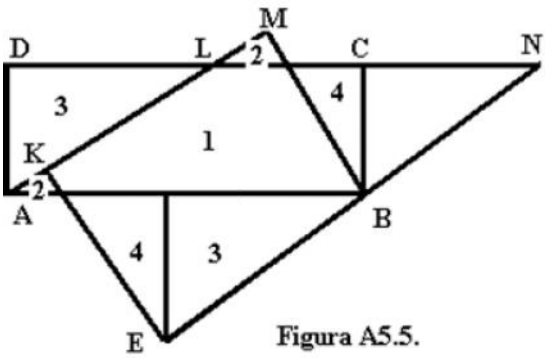



Figura A5.5.

Atunci dreptunghiurile $BMKE$ şi $P$ sunt congruente, iar $c(ABNL, BMKE) = 1$. Din proprietatea 2.3 obţinem că $c(P,Q) \le 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Insă pentru a obţine dreptunghiul $P$ dreptunghiul $Q$ a fost divizat cel mult în patru părţi. (Dreptunghiul se descompune în patru părţi, dacă punctul $M$ nu aparţine semidreptei $[LA)$, Figura A5.5.) Deci, $c(P,Q) \le 3$. Teorema este demonstrată.

**Corolarul 5.2.** Orice paralelogram poate fi descompus în cel mult patru părţi pentru a obţine un pătrat echivalent cu el.

**Corolarul 5.3.** Orice triunghi poate fi descompus în cel mult 8 părţi pentru a obţine un pătrat echivalent cu el.

**Exerciţiul 5.4.** Demonstraţi că $c(\Delta, P) \le 4$, unde $\Delta$ şi P sunt un triunghi şi un pătrat echivalente.

## 6. TEOREMA WALLACE-BOLYAI-GERWIEN

**Teorema 6.1.** Orice figură poligonală este echicompusă cu un pătrat.

**Demonstraţie** (**Algoritmul 6**). Fie *F* o figură poligonală.

***1.*** Descompunem figura *F* în suma triunghiurilor $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$.

***2.*** Construim latura $a$ a pătratului *P* echivalent cu figură poligonală *F* (Algoritmul 1).

***3.*** Fie $AB = a$ şi *ABCD* un pătrat.

***4.*** Pe raza $l = [BC)$ construim punctele $C_1, C_2, ..., C_n = C$ astfel încât:

- segmentele $[AB]$ şi $[BC]$ sunt congruente;
- dreptunghiul $ABC_1D_1$ este echicompus cu triunghiul $\Delta_1$;
- dacă $1 \le i < n$ atunci punctul $C_i$ este situat între punctele *B* şi $C_{i+1}$, iar triunghiul $\Delta_{i+1}$ este echicompus cu dreptunghiul $C_iC_{i+1}D_{i+1}D_i$.

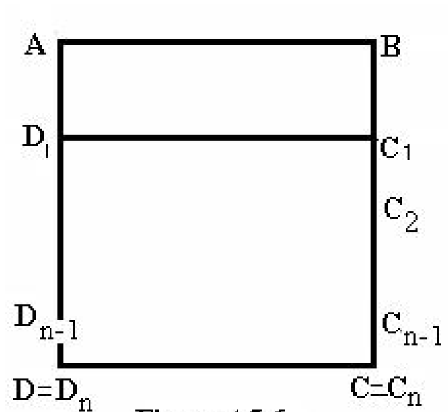


Figura A5.6.

Punctele $D_1, D_2, ..., D_n = D$ sunt situate pe latura *AD* a pătratului *ABCD*. Obţinem că $F \top ABCD$ şi $c(F, ABCD) \le 5n - 1$. (Figura A5.6.)

Teorema este demonstrată.

**Corolarul 6.2** (Teorema Wallace-Bolyai-Gerwien). Două figuri poligonale sînt echicompuse dacă şi numai dacă ele sînt echivalente.

**Nota 6.3.** Algoritmii 1–6 permit construirea descompunerilor pentru transformarea figurii poligonale *F* în altă figură poligonală *Q*, echivalentă cu ea. Descompunerile efectuate nu întotdeauna vor fi optimale, dar ele pot fi utile la aflarea unei soluţii optimale (sau mai econome).

**Nota 6.4.** Latura $a$ a pătratului echicompus cu figura poligonală se poate construi prin metoda determinată de construcţiile din Algoritmul 1. Determinarea descompunerii figurii date în poligoane din care se compune un pătrat se va numi „*problema cvadraturii concrete*”.

**Nota 6.5.** Noţiunile de echicompunere şi echivalenţă se definesc în mod similar pentru corpurile spaţiale şi, în particular, pentru poliedre. Aceste relaţii sînt reflexive, simetrice şi tranzitive. Metodele de transformare a paralelogramelor (Algoritmii 4 şi 5) permit să transformăm similar paralelipipede şi să demonstrăm că paralelipipedele echivalente sînt echicompuse. În anul 1901 matematicianul german Max Dehn (1878-1952) a determinat condiţiile necesare ca două paralelipipede să fie echicompuse şi a demonstrat că tetraedrul regulat şi cubul cu volume egale nu sînt echicompuse (vezi [10, 11]). Aceste rezultate profunde au rezolvat Problema 3 din cele 23 de probleme celebre formulate de D. Hilbert în anul 1900 [10] şi au stabilit că teoria generală a măsurării mărimilor geometrice este imposibil de dezvoltat fără metode infinitezimale. Prin urmare, teoriile despre arii şi volume sunt similare, dar metodele de rezolvare a unor probleme sînt diverse.

## 7. PROBLEMELE LUI ABUL VEFA

Abul Vefa Mohamed ben Mohamed (940-998), matematician şi astronom arab, a studiat mişcarea Lunii, dar şi construcţii geometrice. El a propus o rezolvare originală a următoarei probleme.

**Problema 7.1.** Din trei pătrate congruente să se construiască un pătrat.

**Rezolvare.** Primele două pătrate au fost divizate în câte patru părţi. De exemplu, primul pătrat $ABCD$ se împarte în patru părţi $ABM$, $ADM$, $BCM$ şi $DCM$, unde $AL = AB$, $L \in AC$ şi $M$ este mijlocul segmentului $LD$ (Figura A5.7). Prin analogie este divizat şi cel de al doilea pătrat, iar părţile obţinute se adaugă la al treilea pătrat în conformitate cu imaginea din Figura A5.8. În rezultat obţinem un pătrat *HGFE*. Abul Vefa a considerat că această transformare este optimală din punct de vedere al calculelor necesare şi $c(\Phi, HGFE) \le 8$, unde $\Phi$ este figura compusă din trei pătrate congruente. Se poate demonstra că $c(\Phi, HGFE) \le 5$. Însă această demonstrare necesită calcule geometrice mai complicate (vezi Figura A5.9.).

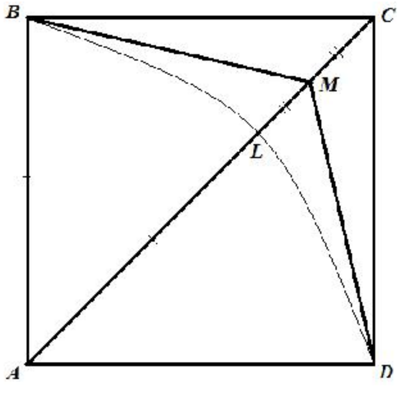



Figura A5.7.

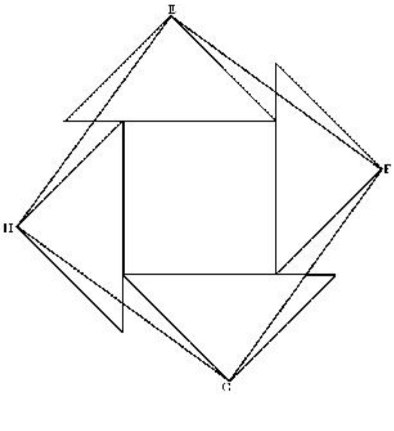


Figura A5.8.

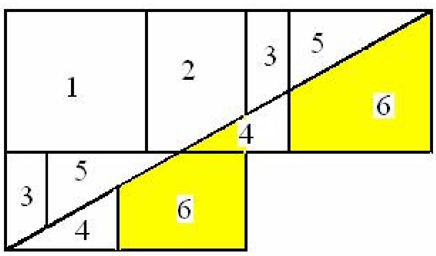



Figura A5.9.

## 8. JOCUL TANGRAM

Tangramul este un joc logic care provine din China Antică. O legendă spune că un servitor al împăratului chinez ducînd o placă de formă pătrată din faianţă foarte scumpă şi extrem de fragilă, a spart-o în 7 bucăţi (Figura A5.10.). În panică, disperat, el a încercat să o reasambleze, dar nu a reuşit. În schimb în procesul de căutare a soluţiei a făcut numeroase mostre şi desene originale.

Tangramul are circa 4 mii de ani şi este ilustrarea perfectă a aforismului "Maeştrii se dovedesc în lipsa mijloacelor".

Jocul Tangram constă în aşezarea celor 7 figuri (toate şi numai ele - prima regulă) una lângă alta, fără suprapuneri (a doua regulă), în plan (regulă implicită), pentru a forma anumite figuri, şi anume, figuri cu valoare estetică sau imagini stilizate de obiecte reale (vezi [12, 13]).

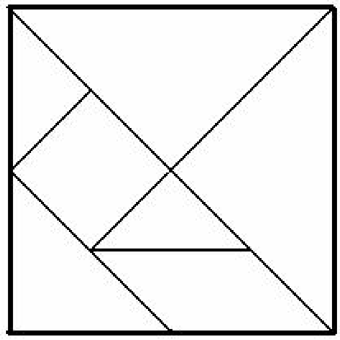


Figura A5.10.

Cele 7 figuri iniţiale - se mai numesc şi *tanuri*.

Abia în 1942 s-a demonstrat că din cele 7 figuri pot fi realizate 13 figuri convexe, folosind regulile menţionate mai sus. Demonstraţia aparţine matematicienilor Fu Traing Wang şi Chuan Chih Hsing, de la Universitatea Naţională din Chekiang, China. Ele sînt reprezentate în Figurile 10 – 22.

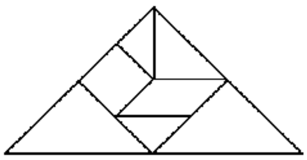


Figura A5.11.

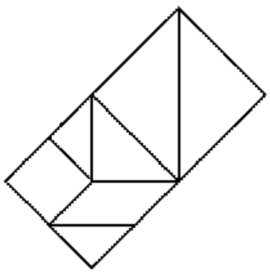


Figura A5.12

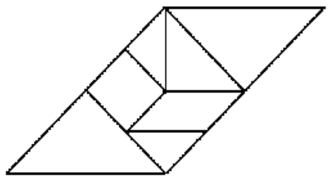


Figura A5.13

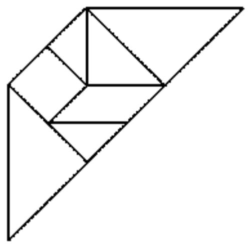


Figura A5.14

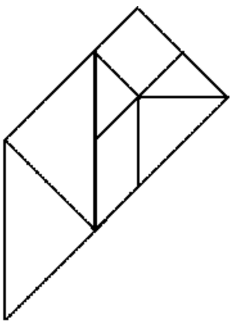


Figura A5.15

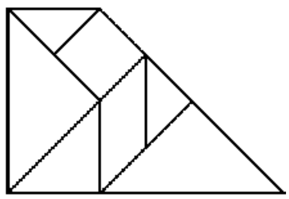


Figura A5.16

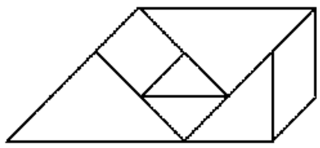


Figura A5.17

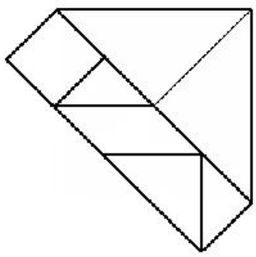


Figura A5.18

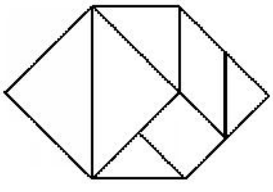


Figura A5.19

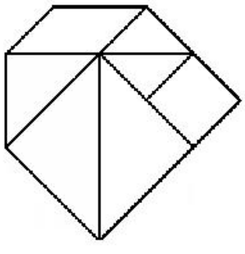


Figura A5.20

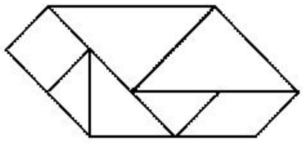


Figura A5.21

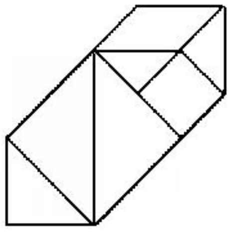


Figura A5.22

Soluţii neconvexe există o infinitate. Ele pot avea forme foarte ciudate. De exemplu, Figurile A5.23 – 25. Încercaţi să inventaţi noi figuri-siluete.

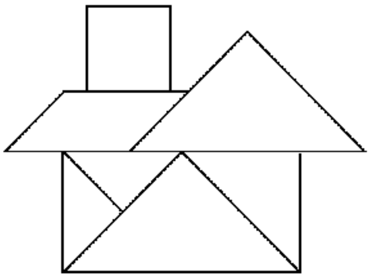


Figura A5.23.

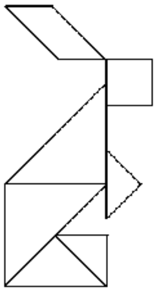


Figura A5.24.

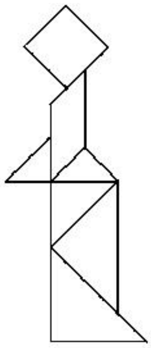


Figura A5.25.

## 9. EXERCIŢII

**Exerciţiul 9.1.** Descompuneţi pătratul în 10 părţi şi din aceste părţi compuneţi 5 pătrate congruente.
Indicaţie: Folosiţi liniile ce unesc un vârf al pătratului cu mijlocul unei laturi ce nu conţine acest vîrf.
**Exerciţiul 9.2.** Descompuneţi pătratul în 10 părţi şi din aceste părţi compuneţi un hexagon regulat.
Indicaţie: Folosiţi Figurile A5.26-28.

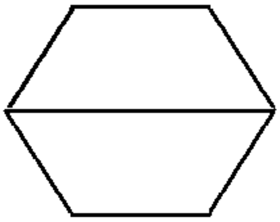


Figura A5.26.

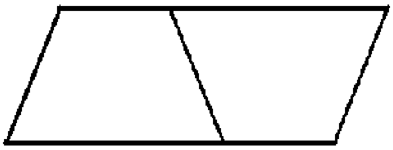


Figura A5.27.

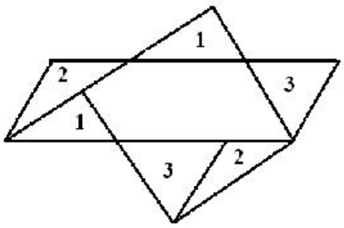


Figura A5.28.

**Exerciţiul 9.3.** Din nouă pătrate cu laturile 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 18 formaţi un dreptunghi.
**Exerciţiul 9.4.** Din unsprezece pătrate cu laturile 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 7, formaţi un pătrat.
**Exerciţiul 9.5.** Din două pătrate cu laturile ***a, b*** formaţi un pătrat.
Indicaţie: Folosiţi Teorema lui Pitagora.
**Problemă 9.6.** Din pătratul dat formaţi ***n*** triunghiuri echilaterale.

# 10. FIGURI CVADRIBILE

Noţiunea de arie poate fi definită pentru o clasă de figuri plane care se numesc figuri cvadribile.

**Definiţia 10.1.** Figura *F* se numeşte cvadribilă, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există două figuri poligonale $F_{\varepsilon}^{'}$ şi $F_{\varepsilon}^{''}$ cu proprietăţile: 1) $F_{\varepsilon}^{'} \subseteq F \subseteq F_{\varepsilon}^{''}$; 2) $A_{F_{\varepsilon}^{'}} - A_{F_{\varepsilon}^{''}} < \varepsilon$.

Considerăm că punctul este o figură poligonală cu aria nulă.

Pentru orice figură *F* notăm $A_F^S = \inf\{A_\Phi : F \subseteq \Phi, \Phi \quad \textit{este} \quad \textit{figura} \quad \textit{poligonala}\}$ şi $A_F^i = \sup\{A_\Phi : \Phi \subseteq F, \Phi \quad \textit{este} \quad \textit{figura} \quad \textit{poligonala}\}$. Figura *F* este cvadribilă, dacă şi numai dacă $A_F^S = A_F^i$. Pentru orice figură cvadribilă *F* notăm $A_F = A_F^S = A_F^i$ şi $A_F = A(F)$.

**Nota 10.2.** Dacă numărul $A_F$ se construieşte cu rigla şi compasul, atunci cu aceste instrumente se construieşte şi un pătrat *P* pentru care $A_P = A_F$. Însă nu pentru orice figură cvadribilă problema cvadraturii se rezolvă cu rigla şi compasul. În anul 1882 matematicianul german K.L.F.Lindeman (1852-1939) a stabilit că problema cvadraturii cercului nu se rezolvă cu rigla şi compasul.

Dacă figura *F* este cvadribilă, atunci există un şir de triunghiuri $\Delta_{1,}\Delta_2,...,\Delta_n$, ... astfel, încât $\sum\{\Delta_i : i = 1,2,...\} \subseteq F$ şi $A_F = \sum\{A_{\Delta_i} : i = 1,2,...\}$. Acest şir există, dar nu întotdeauna uşor se determină.

O figură fascinantă denumită insula (sau steaua, sau fulgul de zăpadă) lui Koch a fost construită în 1904 de matematicianul german H. von Koch (1870-1924) (vezi [3, 5, 7]).

Fie $F_1$ un triunghi echilateral cu latura $a_1 = l$. Perimetrul triunghiului este $P_1 = 3l$, iar aria $A_1 = a$. Fiecare latură a triunghiului este împărţită în trei părţi egale şi pe partea din mijloc a fiecărei laturi este construit un triunghi echilateral cu latura $a_2 = \frac{1}{3}l$. Obţinem figura $F_2$ cu numărul de laturi $n_2 = 4 \cdot 3 = 12$ care are perimetrul $P_2 = n_2 \cdot \frac{1}{3^2} l = \frac{4}{3} l$, iar aria triunghiurilor adăugate este $A_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} a$. Fiecare din laturile figurii $F_2$ este împărţită în trei părţi egale şi pe partea din mijloc a fiecărei laturi este construit cîte un triunghi echilateral cu latura $a_3 = \frac{1}{3^2} l$. Obţinem figura $F_3$ cu numărul de laturi $n_3 = 4n_2 = 4^2 \cdot 3$ care are perimetrul $P_3 = n_3 \cdot \frac{1}{3^3} l = 4^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3^3} l = \left(\frac{4}{3}\right)^2 l$, iar aria triunghiurilor adăugate este $A_3 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 a$.

La pasul $k$ vom obţine figura $F_k$ cu numărul de laturi $n_k = 3 \cdot 4^{k-1}$ care are perimetrul $P_k = n_k \cdot \frac{1}{3^k} l = 4^{k-1} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3^k} l = \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} l$, iar aria triunghiurilor adăugate este $A_k = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} a$. Raţionamentele inductive pot fi urmărite în tabelul de mai jos.

| | **Numărul de laturi** | **Perimetrul $P_k$ al figurii $F_k$** | **Numărul $m_k$ de triunghiuri ce se adaugă la fiecare pas** | **Aria totală $A_k$ a triunghiurilor adăugate la fiecare pas** |
|---|---|---|---|---|
| Pasul 1. | $n_1 = 3$ | $P_1 = 3l$ | $m_1 = 1$ | $A_1 = a$ |
| Pasul 2. | $n_2 = 3 \cdot 4$ | $P_2 = n_2 \cdot \frac{1}{3^2} l = \frac{4}{3} l$ | $m_2 = n_1 = 3$ | $A_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} a$ |
| Pasul 3. | $n_3 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^2$ | $P_3 = n_3 \cdot \frac{1}{3^3} l = 4^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3^3} l = \left(\frac{4}{3}\right)^2 l$ | $m_3 = n_2 = 3 \cdot 4$ | $A_3 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 a$ |
| Pasul 4. | $n_4 = 3 \cdot 4^3$ | $P_4 = n_4 \cdot \frac{1}{3^4} l = 4^3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3^4} l = \left(\frac{4}{3}\right)^3 l$ | $m_4 = n_3 = 3 \cdot 4^2$ | $A_4 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^3 a$ |
| | ... | ... | ... | ... |
| Pasul k. | $n_k = 3 \cdot 4^{k-1}$ | $P_k = n_k \cdot \frac{1}{3^k} l = 4^{k-1} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3^k} l = \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} l$ | $m_k = n_{k-1} = 3 \cdot 4^{k-2}$ | $A_k = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} a$ |

În Figura A5.29 sînt reprezentate primele patru iteraţii. „Insula lui Koch” conţine reuniunea figurilor $F_1$, $F_2$,..., $F_k$ ,... împreună cu punctele de limită ale reuniunii. Frontiera „insulei lui Koch” este o curbă continuă care nu are tangentă (nu este derivabilă) nici într-un punct al ei. Perimetrul final este $p = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n l = \infty$, iar aria finală totală este $A = a + \frac{3}{4} a \left(\frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^n + \ldots\right) = a + \frac{3}{4} a \cdot \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5} a$.

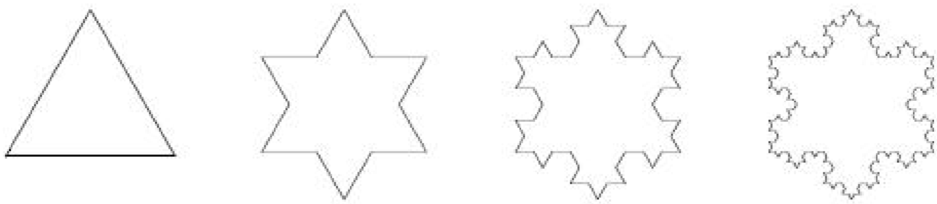


**Figura A5.29.**

Ţinînd cont de faptul că $a = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$, obţinem $A = \frac{2\sqrt{3}}{5} l^2$. Acest număr se construieşte cu rigla şi compasul. Deci „insula lui Koch” este o figură cvadribilă dar nu este o figură poligonală. „Insula lui Koch” este un exemplu din Teoria Fractalilor construită de B.Mandelbrot în anul 1977 [7, 3].

## 11. DESCOMPUNERI ARBITRARE. PARADOXUL LUI BANACH-TARSKI

Situaţia devine paradoxală, dacă în Definiţia 0.3 figurile $P_1, Q_1, P_2, Q_2, ..., P_n, Q_n$, vor fi arbitrare.

În anul 1924 matematicienii polonezi S.Bahach (1892-1945) şi A.Tarski (1901-1983) au demonstrat următoarea teoremă.

**Teorema 11.1** (Paradoxul lui Banach-Tarski [2])**.** Fie $P$ şi $Q$ două poliedre. Atunci există aşa un număr $n \geq 1$ şi aşa figuri $P_1, Q_1, P_2, Q_2, ..., P_n, Q_n$, pentru care:

1) $P_i \cap P_j = Q_i \cap Q_j = \varnothing$ pentru toţi $1 \leq i < j \leq n$.

2) $P = \sum P_i$, $Q = \sum Q_i$.

3) Pentru orice $i \leq n$ figurile $P_i$ şi $Q_i$ sînt congruente.

Demonstraţia acestei teoreme este foarte complicată şi se bazează pe Axioma Alegerii din Teoria Mulţimilor. Din această teoremă se deduce că dintr-un cub pot fi confecţionate ***n*** cuburi de aceeaşi mărime pentru orice ***n*** natural. Legenda Bibliei că dintr-un peşte poate fi obţinut un număr suficient de peşti de aceeaşi mărime nu contravine logicii matematice. Din Paradoxul lui Bahach-Tarski rezultă că nu există o măsură Bahach pentru toate corpurile spaţiale.

Descompunerile similare cu cele din Teorema 11.1 se numesc paradoxale. Elementele acestor descompuneri sunt mulţimi de tip paradoxal şi nu sînt măsurabile. Clasa de mulţimi măsurabile conţine totalitatea mulţimilor cvadribile. În plan mulţimile măsurabile pot fi definite în următorul mod. Şirul de figuri $F_1, F_2, ...$ se numeşte monoton crescător (descrescător), dacă

$F_n \subseteq F_{n+1}$ ($F_n \supseteq F_{n+1}$, respectiv) pentru orice ***n*.** Notăm cu $\boldsymbol{B_e}$ clasa de figuri $F$ pentru care există un şir monoton crescător $F_1, F_2, ...$ de figuri poligonale pentru care $F = \cup F_n$. Numărul « (F) $= \lim_{n\to\infty} A(F_n)$ se numeşte măsura mulţimii $F$. Notăm cu $\boldsymbol{B_i}$ clasa de figuri $H$ pentru care există un şir monoton descrescător $H_1, H_2, ...$ de figuri poligonale pentru care $H = \cap F_n$. Numărul « (H) $= \lim_{n\to\infty} A(H_n)$ se numeşte măsura mulţimii $H$. Măsura « ($H$) nu depinde de şirul fixat. Pentru orice figură $F$ notăm « $_i(F)=sup\{$« $(L): L \subseteq F,\ L \in \boldsymbol{B_i}\}$ şi « $_e(F)=inf\{$« $(L): L \supseteq F,\ L \in \boldsymbol{B_e}\}$. Figura $F$ se numeşte măsurabilă, dacă « $_i(F)=$« $_e(F)$. În acest caz numărul « $(F)=$« $_i(F)=$« $_e(F)=A(F)$ se numeşte măsura mulţimii *F*. Pentru mulţimile nemăsurabile *F* măsura Banach *A(F)* nu se determină în mod univoc. Teoria mulţimilor măsurabile a fost construită în anii 1898 – 1902 de matematicienii francezi E.Borel (1871-1956) şi H.Lebesgue (1875-1941).

**Exerciţiul 11.2.** Demonstraţi că orice figură *F* finită sau numărabilă formată din punctele $A_1, A_2$,...din plan este măsurabilă şi « (*F*)=0.

**Exerciţiul 11.3.** Fie *H* totalitatea punctelor *(x,y)* din plan cu ambele coordonate raţionale situate în pătratul unitar $P = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, iar $F = P \setminus H$. Demonstraţi că figurile *F* şi *H* sunt măsurabile, nu sînt cvadribile, $A_F^S = 1$, $A_H^S = 1$, $A_F^i = 0$, $A_H^i = 0$, «(*F*)= 1 şi « (*H*) = 0.

Indicaţie: Mulţimea *H* este numărabilă.

S.Banach şi A.Tarski în demonstrarea Teoremei 11.1 au aplicat o descompunere paradoxală a sferei $S^2 = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2= 1\}$ propusă de matematiceanul german Felix Hausdorff (1868-1942) în anul 1914.

**Teorema 11.4** (Paradoxul lui Hausdorff [4])**.** Există trei mulţimi disjuncte *A*, *B*, *C* şi o mulţime numărabilă *L* pentru care $S^2 = A \cup B \cup C \cup L$ şi figurile *A, B, C*, $B \cup C$ sînt congruente.

Mulţimile *A, B, C*, $B \cup C$ din Teorema 11.4 nu sunt măsurabile. Diverse descompuneri paradoxale au fost sistematizate în cartea [9].

Paradoxul lui Hausdorff este important în teoria măsurii pe spaţii neeuclidiene de tip eliptic.

Primele exemple de mulţimi nemăsurabile pe dreaptă şi pe cerc au fost construite în anul 1905 de matematicianul italian Giuseppe Vitali (1875-1932). Construcţia propusă de G. Vitali permite să demonstrăm următoarea teoremă.

**Teorema 11.5.** Fie *P* şi *Q* două figuri poligonale. Atunci există aşa un şir infinit de figuri $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_n, Q_n, \ldots$, pentru care:

1) $P_i \cap P_j = Q_i \cap Q_j = \varnothing$ pentru toţi $1 \le i < j < \infty$.

2) $P = \sum P_i$, $Q = \sum Q_i$ .

3) Pentru orice *i* figurile $P_i$ şi $Q_i$ sînt congruente.

Din Teorema lui Wallace-Bolyai-Gerwien (Corolarul 6.2) şi din existenţa măsurii Banach pentru toate figurile plane obţinem că numărul de figuri din Teorema 11.5 poate fi finit dacă şi numai dacă poligoanele *P* şi *Q* sunt echivalente.

În anul 1990 matematicianul ungar Miklos Laczkovich a demonstrat că în sens larg există „o cvadratură concretă a cercului”.

**Teorema 11.6** (M. Laczkovich [6])**.** Fie *P* şi *Q* un patrat şi un cerc de arii egale. Atunci există aşa un număr $n \ge 1$ şi aşa figuri $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_n, Q_n$, pentru care:

1) $P_i \cap P_j = Q_i \cap Q_j = \varnothing$ pentru toţi $1 \le i < j \le n$.

2) $P = \sum P_i$, $Q = \sum Q_i$ .

3) Pentru orice $i \leq n$ figurile $P_i$ şi $Q_i$ sînt congruente.

Demonstraţia acestei teoreme de asemenea este foarte complicată. Este suficient să menţionăm că în demonstraţia lui M. Laczkovich [6] numărul $n$ este aproape de $10^{50}$. Acest rezultat rezolvă o problemă formulată de A. Tarski în anul 1925 [8].

## ÎNCHEIERE

Problema descompunerii unei figuri plane în figuri de anumită formă este de importanţă deosebită din punct de vedere al practicii. Această problemă în practica de zi cu zi se întâlneşte în vestimentaţie, la croirea dintr-o bucată de pânză de formă dreptunghiulară sau pătrată a unui număr maxim de piese de o anumită formă, la parchetarea unei suprafeţe etc.

O demonstrare originală a Teoremei lui Pitagora pentru triunghiul pitagoreic cu laturile 3, 4, 5 folosind proprietăţile figurilor echicompuse a fost găsită la matematicienii din China Antică. (Figurile A5.30, A5.31.)

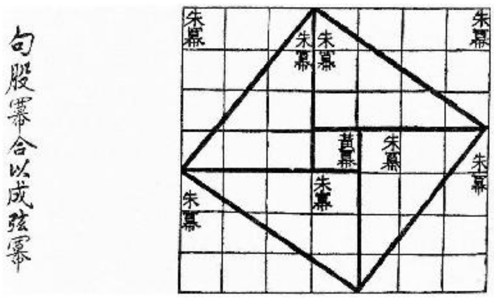



Figura A5.30.

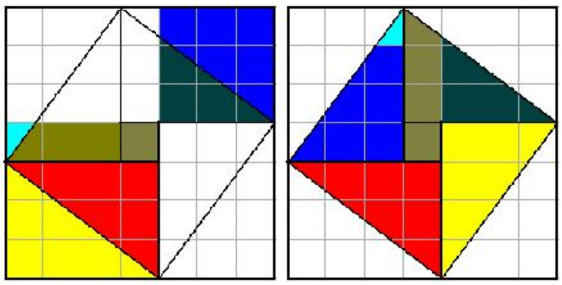


Figura A5.31.

Rezolvarea problemelor de acest tip a dat naştere unei direcţii importante a matematicii contemporane, anume, „Programarea liniară”. Pentru aportul considerabil în rezolvarea problemelor de programare liniară matematicianul rus L.V.Kantorovici (1912-1986) a primit Premiul Nobel în economie (1975).

Problema descompunerii figurii poligonale în pătrate două câte două necongruente lungimile laturilor cărora sunt numere întregi în careva unitate de măsură se numeşte probleme cvadraturii complete. Pentru un pătrat există cvadraturi complete din 26, 28 pătrate, etc. Însă nu este stabilit pentru care $n$ există o cvadratură completă a pătratului din $n$ pătrate. Cu rezolvarea acestor probleme sunt legate probleme de construcţie a circuitelor electrice (vezi .[12, 13, 14]).

**Bibliografie:**


1. Banach S. Sur le problème de la mesure. Fundamenta Mathematica 4 (1923) 7-33.
2. Banach S., Tarski A. Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. Fundamenta Mathematica 6 (1924) 244-277.

3. Devlin K. Vârsta de aur a matematicii. Bucureşti, Theta, 2001, 305 p.
4. Hausdorff F. Bemerkung uber den Inhalt von Punktmengen. Mathematische Annalen 75 (1914) 428-434.
5. Koch, H.von. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire. Archiv för Matemat., Astron. och Fys. **1** (1904) 681-702.
6. Laczkovich, M. Equidecomposability and discrepancy: a solution of Tarski's circle squaring problem. - Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik 404 (1990) p. 77-117.
7. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. New York: W.H. Freeman, 1983.
8. Tarski A. Problème 38. - Fundamenta Mathematica 7 (1925) p. 381.
9. Wagon S. The Banach-Tarski Paradox. Cambridge, Cambridge University Press, 1985.
10. Болтянский В.Г. Третья проблема Гильберта. Москва, Наука, 1977, 208 с.
11. Болтянский В.Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры. Серия: «Популярные лекции по математике», Выпуск 22. – Москва, Гостехиздат 1956г., 64 с.
12. Екимова М.А., Кукин Г.П. Задачи на разрезание. Серия: «Секреты преподавания математики». - Москва: МЦНМО, 2002. . 120 с.
13. Кордемский Б.А., Русалев Н.В. Удивительный квадрат. - Москва, 1952.
14. Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание. М., Мир, 1977 г., 256 с.

***Notă:** Materialul a fost publicat în articolul [18] indicat bibliografia de bază la prezenta lucrare.*

**Anexa 6.**

***Anchetă (profesori)***

1. Aţi fost implicat(ă) în activităţi extradidactice la matematică (<u>*bifaţi*</u>):

a) ca elev ☐; c) permanent ☐;
b) ca student ☐; d) episodic ☐.

2. Aţi participat la olimpiadele şcolare la matematică când eraţi elev? a) Da. b) Nu.
3. Organizaţi activitatea extracurriculară la matematică în clasele în care predaţi. a) Da. b) Nu.
4. Consideraţi că aveţi suficiente cunoştinţe şi abilităţi pentru a organiza activităţi extradidactice la matematică. a) Da. b) Nu.
5. Preferaţi să organizaţi activităţi extracurriculare episodic sau permanent.
6. Aranjaţi domeniile de mai jos în ordinea descreşterii importanţei lor în pregătirea profesională a cadrelor didactice pentru a organiza activităţi extracurriculare la matematică:
   a) ☐ Matematica;
   b) ☐ Pedagogia, didactica matematicii;
   c) ☐ Psihologia;
7. ☐ Altele (nominalizaţi domenii) Aţi avut ocazia să întâlniţi copii talentaţi sau supradotaţi în activitatea dvs? a) Da. b) Nu.
8. Aveţi experienţă de lucru cu copii dotaţi (încercuiţi)? a) Da. b) Nu.
   Dacă da, atunci (încercuiţi):
   a) aţi lucrat în particular cu astfel de elevi;
   b) aveţi grupuri stabile de copii dotaţi din clasele în care predaţi cărora le atrageţi atenţie deosebită;
   c) predarea în grupuri special formate pentru studierea matematicii la nivel aprofundat.
9. Care sunt caracteristicile de bază pe care consideraţi că se bazează aptitudinile (capacităţile) matematice:
   a) Memoria bună.
   b) Atenţia bine dezvoltată.
   c) Străduinţa.
   d) Factorul ereditar.
   e) Imaginaţia bine dezvoltată.
   f) Altele (enumăraţi)_______________________________________________
10. Aveti cunoştinţe suficiente pentru a lucra cu copiii dotaţi? a) Da. b) Nu.
11.

1. Care sunt temerile dvs:

a) nu aveţi suficiente cunoştinţe matematice pentru a preda copiilor dotaţi;
b) nu posedaţi experienţa necesară (tehnici, metode, forme) pentru a preda copiilor dotaţi;

2.Care sunt părerile dvs:

c) nu consideraţi necesare activităţile cu copiii dotaţi, căci ei se descurcă singuri;
d) de instruirea copiilor dotaţi trebuie să se îngrijească părinţii acestor copii;
e) de instruirea copiilor dotaţi trebuie să se îngrijească societatea, prin crearea unor centre speciale;
f) alte păreri (exprimati-vă parerile)______________________________________-

12. Consideraţi că statul trebuie să creeze condiţii speciale pentru instruirea copiilor dotaţi şi supradotaţi 1) în şcoli sau 2)clase specializate, 3) alte tipuri?
13. Va-ţi asuma responsabilitatea să predaţi într-o clasă de elevi supradotaţi?
14. Consideraţi că au fost destul de adaptate cursurile de matematică superioară pentru a asigura legătura lor cu conţinuturile matematicii preuniversitare?
15. Aţi dori să vă continuaţi studiile în domeniul didacticii matematicii?

Dacă da, selectaţi cursurile pe care aţi dori să le ascultaţi şi ordonaţi-le în dependenţă de preferinţe:

a) secvenţe din istoria matematicii în cursul preuniversitar de matematică;
b) bazele matematicii elementare din punctul de vedere al matematicii superioare;
c) studiul integrat al disciplinelor, aplicaţii ale matematicii în diverse domenii şi în viaţa cotidiană;
d) particularităţile psihopedagogice de organizare şi desfăşurare a activităţii extracurriculare la matematică;
e) strategii didactice moderne de organizare şi desfăşurare a activităţii curriculare şi extracurriculare la matematică;
f) predarea-învăţarea-evaluarea bazate pe teoria inteligenţelor multiple;
g) predarea-învăţarea-evaluarea asistată de calculator;
h) alte cursuri ___________________________________________________________-

16. Numiţi câţiva autori pe care îi consideraţi de valoare şi ale căror lucrări le utilizaţi în activitatea profesională (pe domenii):

Didactica matematicii, matematica________________________________________-
Psihologie______________________________________________________________
Pedagogie ______________________________________________________________-

17. Aveţi un hobby? a) Da. b) Nu.
18. Consideraţi că aţi putea formula şi realiza nişte obiective transdiciplinare (matematica+hobby-ul dvs) în cadrul orelor de matematică? a) Da. b) Nu.
19. Consideraţi că este suficient ca o dată la 5 ani să frecventaţi cursurile de perfecţionare? a) Da. b) Nu.

20. Aveţi acces la reţeaua INTERNET? a) Da. b) Nu.
21. Participaţi la conferinţe şi forumuri ştiinţifico-didactice. a) Da. b) Nu.
22. Vârsta _____ ani.
23. Localitatea unde activaţi (*bifaţi*): rurală - □; urbană - □.
24. Anul absolvirii instituţiei de învăţământ superior __________.
25. Stagiul pedagogic _____ani.
26. Limbile de predare __________________________________________________.
27. Gradul didactic, alte titluri ____________________________________________.
28. Clasele în care predaţi _____________________________________________ .
29. Disciplinele la care predaţi _________________________________________.
30. Alte studii de până la şi după obţinerea calificării în domeniul în care profesaţi:
a) colegiu pedagogic □,
b) colegiu de alt profil (nominalizaţi) ____________________________________;
c) studii superioare în alt domeniu (nominalizaţi) ____________________________;
d) studii de master în matematică □;
e) studii de master în alt domeniu (nominalizaţi) ___________________________.

**Anexa 7.**

***Anchetă (studenţi)***

1. Facultatea, specialitatea __________________________________________.
2. Vârsta _____ani.
3. Anul de studii ______.
4. Studii preuniversitare: (*bifaţi*): liceu - □; şcoală medie de cultură generală - □; alte (nominalizaţi) _____________________________________________.
5. Localitatea unde aţi absolvit liceul, şcoala medie (*bifaţi*): rurală - □; urbană - □.
6. Aţi fost implicat(ă) în activităţi extradidactice la matematică (*bifaţi*):
a) în anii de studii preuniversitare □; permanent □; episodic □.
b) în anii de studii universitare □; permanent □; episodic □.
7. Aţi participat la olimpiadele şcolare când eraţi elev? a) Da. b) Nu.
8. Aţi participat la olimpiadele şcolare la matematică când eraţi elev? a) Da. b) Nu.
9. Credeţi că performanţele la matematică depind în cea mai mare măsură de:

| | | |
|---|---|---|
| | Factorul ereditar | Ordonaţi descrescător |
| | De personalitatea profesorului de matematică | |
| | De gradul de pregătire ştiinţifică al profesorului de matematică | |
| | De competenţele psihopedagogice ale profesorului de matematică | |

| | | |
|---|---|---|
| | De mediul în care învaţă copilul | |
| | De atitudinea elevului faţă de disciplină | |
| | De gradul de solicitare a matematicii în viitoarea profesie | |

10. Aţi avut ocazia să întâlniţi copii dotaţi şi supradotaţi? a) Da. b) Nu.
11. Care sunt caracteristicile de bază pe care consideraţi că se bazează aptitudinile (capacităţile) matematice: Memoria bună, Atenţia bine dezvoltată, Străduinţa, Factorul ereditar, Imaginaţia bine dezvoltată, Altele
12. Aveţi experienţă la practica pedagogică? a) Da. b) Nu.
13. Consideraţi că aveţi suficiente cunoştinţe pentru a organiza activităţi extradidactice la matematică la următoarea practică pedagogică. a) Da. b) Nu.
14. Care forme de organizare a activităţii extracurriculare la matematică le consideraţi mai eficiente? Cercul de matematică, orele opţionale, victorinele, olimpiadele, jocurile intelectuale cu sarcini interdsciplinare, jocurile interactive pe calculator, şcolile de vară la matematică, taberele de matematică, excursii, proiectul, conferinţele, concursurile periodice, şcolile de matematică prin corespondenţă.
15. Aranjaţi domeniile de mai jos în ordinea descreşterii importanţei lor în pregătirea profesională a cadrelor didactice pentru a organiza activităţi extracurriculare la matematică:

a) □ Matematica;
b) □ Pedagogia;
c) □ Psihologia;
d) □ Altele (nominalizaţi domenii) ________________________________________.

16. Care sunt temerile şi părerile dvs:

a) nu aveţi suficiente cunoştinţe matematice pentru a preda copiilor dotaţi;
b) nu posedaţi experienţa necesară (tehnici, metode, forme) pentru a preda copiilor dotaţi;
c) nu consideraţi necesare activităţile cu copiii dotaţi, căci ei se descurcă singuri;
d) de instruirea copiilor dotaţi trebuie să se îngrijească părinţii acestor copii;
e) de instruirea copiilor dotaţi trebuie să se îngrijească societatea, prin crearea unor centre speciale;
f) alte păreri (exprimati-vă parerile)_______________________________________-

17. Consideraţi că statul trebuie să creeze condiţii speciale pentru instruirea copiilor dotaţi şi supradotaţi în şcoli sau clase specializate? a) Da. b) Nu.
18. Aţi putea să vă asumaţi responsabilitatea să predaţi după absolvirea universităţii într-o clasă de elevi dotaţi? a) Da. b) Nu.
19. Consideraţi că sunt destul de adaptate cursurile de matematică superioară pentru a elucida legătura lor cu conţinuturile matematicii preuniversitare? a) Da. b) Nu.

20. Aţi dori să vă continuaţi studiile (la nivelul master) în domeniul didacticii matematicii?
a) Da. b) Nu.
Dacă da, selectaţi cursurile pe care aţi dori să le ascultaţi şi ordonaţi-le în dependenţă de preferinţe:
a) secvenţe din istoria matematicii în cursul preuniversitar de matematică;
b) bazele matematicii elementare din punctul de vedere al matematicii superioare;
c) studiul integrat al disciplinelor, aplicaţii ale matematicii în diverse domenii şi în viaţa cotidiană;
d) particularităţile psihopedagogice de organizare şi desfăşurare a activităţii extracurriculare la matematică;
e) strategii didactice moderne de organizare şi desfăşurare a activităţii curriculare şi extracurriculare la matematică;
f) predarea-învăţarea-evaluarea bazate pe teoria inteligenţelor multiple;
g) predarea-învăţarea-evaluarea asistată de calculator;
h) alte cursuri ______________________________________________________-
21. Numiţi câţiva autori pe care îi consideraţi de valoare şi ale căror lucrări le consideraţi utile în activitatea profesorului (pe domenii):
Didactica matematicii, matematica ________________________________________-
Psihologie_____________________________________________________________-
Pedagogie _____________________________________________________________-
22. Aveţi un hobby? a) Da. b) Nu.
23. Consideraţi că aţi putea formula şi realiza nişte obiective transdiciplinare (matematica+hobby-ul dvs) în cadrul orelor de matematică? a) Da. b) Nu.
24. Aveţi acces la reţeaua INTERNET? a) Da. b) Nu.
25. Participaţi la conferinţe şi forumuri ştiinţifico-didactice? a) Da. b) Nu.
26. Aţi fost supus(ă) testării prin teste de aptitudini, de inteligenţă, de personalitate? a) Da. b) Nu.
27. Posedaţi careva tehnici de învăţare rapidă, citire pe diagonală, percepţie spaţială, memorare eficientă? a) Da. b) Nu.
28. Citiţi literatură suplimentară în afara conspectului oferit de profesor? a) Da. b) Nu.
29. Care dintre compartimentele matematicii şcolare consideraţi că e mai dificil pentru elevi? Algebra, Geometria, Analiza matematică
30. Care dintre compartimentele matematicii şcolare a fost mai dificil pentru dvs în şcoală? ____________________________________________________________
31. Care dintre disciplinele matematice universitare e mai dificilă pentru dvs?
32. Numiţi câteva jocuri digitale pe care le practicat ultimul timp _____________-
33. Ce competenţe vă dezvoltă practicarea acestor jocuri? _________________-

**Anexa 8.**

**Chestionar (profesori)**

1. Numiţi specialitatea pe care aţi absolvit-o. ________________________________
2. Scrieţi anul în care aţi absolvit facultatea ___________________
3. Care este vîrsta dvs? ___________________
4. După părerea dvs, care este procentul copiilor dotaţi în diverse domenii în instituţia unde activaţi. ___________________
5. La care olimpiade din domeniul ştiinţelor exacte mai participă elevii olimpici la matematică din instituţia unde activaţi. ____________________________
6. La care olimpiade din domeniul ştiinţelor umaniste mai participă elevii olimpici la matematică din instituţia unde activaţi. ____________________________________
7. Care sunt strategiile de identificare a copiilor dotaţi aplicate în instituţia unde activaţi? ____________________________________________________
8. Indicati gradul dvs de satisfactie cu privire la urmatoarele aspecte ale lucrului cu copii dotaţi:

| | | **Foarte nesatisfăcut** | **Nesatisfăcut** | **Satisfăcut** | **Foarte satisfăcut** | **Nu ştiu / Nu răspund** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Rolul cursurilor de formare în pregătirea dvs pentru lucrul cu copii dotaţi | | | | | |
| 2. | Pregătirea tinerilor specialişti pentru lucrul cu copii dotaţi | | | | | |
| 3. | Programul de asistenta educationala oferit de DETS în organizarea şi desfăşurarea activităţilor cu copiii dotaţi | | | | | |
| 4. | Utilizarea TIC, a reţelei INTERNET în organizarea şi desfăşurarea de către dvs a activităţilor cu copiii dotaţi | | | | | |
| 5. | Asigurarea cu materiale didactice pentru lucrul cu copii dotaţi (biblioteca şcolară sau proprie) | | | | | |
| 6. | Oportunităţi de perfectionare a abilităţilor de instruire a copiilor dotaţi la matematică | | | | | |
| 7. | Implicarea comunităţii în susţinerea copiilor dotaţi | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8. | Stimularea morală a laureaţilor şi a profesorilor lor la nivel de comună, raion | | | | | |
| 9. | Stimularea materială a laureaţilor la nivel de comună, raion | | | | | |
| 10. | Stimularea materială a profesorilor laureaţilor la nivel de comună, raion | | | | | |

10. Care credeti ca sunt factorii responsabili pentru succesul sau insuccesul cadrului didactic în activitatea cu copii dotaţi? (Bifaţi.)

☐ Gradul de instruire
☐ Atitudinea fata de munca
☐ Performantele profesionale proprii
☐ Situaţia economică a societăţii
☐ Interesul copiilor şi al părinţilor
☐ Administraţia instituţiei de învăţămînt
☐ Politicile educaţionale promovate în cadrul sistemului
☐ Alţi factori (nominalizaţi) ____________________________

11. Pe o scala de la 1 la 10 ce punctaj ati acorda intensităţii procesului de cooperare între profesorii de la disciplinele înrudite (matematica, informatica, fizica) în activitatea cu elevii dotaţi?

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |

12. Credeţi ca în Republica Moldova ar fi oportun să fie organizate concursuri (olimpiade) zonale la matematică (zonele Nord, Centru, Sud). ***Da/Nu***

13. Care sunt formele de activitate cu copii dotaţi la matematică practicate în instituţia unde activaţi? (Încercuiţi, adăugaţi)

1) Cercul de matematică
2) Ore facultative
3) Ore opţionale
4) Meditaţii individuale
5) Tabere de matematică
6) ____________________

14. În care activităţi cu copiii dotaţi la matematică va implicaţi dvs personal: (Bifaţi.)

☐ Pregătesc pentru olimpiade elevii din clasele în care predau
☐ Pregătesc pentru olimpiade elevii din instituţia unde activez
☐ Pregătesc pentru olimpiade elevii din lotul olimpic raional

- Pregătesc pentru olimpiade elevii din lotul olimpic republican
- Compun probleme pentru olimpiadele din instituţia unde activez
- Compun probleme pentru olimpiadele raionale
- Compun probleme pentru olimpiadele republicane

Altele ____________________________________________

15. Care compartimente ale programei de pregătire către olimpiadele la matematică ar fi utile pentru dvs în lucrul cu copiii dotaţi?

**Anexa 9.**

## Interviu cu matematicieni

1. Amintiţi-vă, vă rog, cînd şi în ce împrejurări s-a trezit interesul dvs pentru matematică? Este interesul dvs pentru matematică ereditar? Mai aveţi rude de gradul I sau II cu abilităţi matematice? Au existat persoane care v-au servit drept model sau v-au influenţat personal înclinaţiile dvs matematice?
2. Aţi participat la olimpiade şi concursuri matematice în anii de şcoală? Cum vă pregăteaţi către aceste competiţii? Vă plăceau concursurile pentru caracterul lor competitiv sau pentru faptul că ele erau precedate de o perioadă de rezolvare intensă a unor probleme „frumoase”, de descoperire a unor adevăruri necunoscute pînă atunci de dvs? Preferaţi să vă pregătiţi individual sau în grup pentru concursuri?
3. Vă amintiţi exact metodele de lucru practicate de dvs în anii cînd studiaţi matematica, cînd tindeaţi nu atăt să faceţi cercetări proprii, cît să însuşiţi rezultatele altora? Puteţi să relataţi ceva interesant în acest context?
4. În perioada studiilor de doctorat preferaţi să vă extindeţi cunoştinţele în mai multe direcţii ale matematicii, sau aţi studiat foarte aprofundat un compartiment îngust, referitor la teză şi doar mai tărziu treptat v-aţi extins orizonturile în alte arii? Sau aţi avut altă abordare? Puteţi să descrieţi experienţa cognitivă a dvs din acea perioada?
5. V-au marcat cumva evenimentele şi circumstanţele în care aţi primit rezultatele ştiinţifice pe care le apreciaţi cel mai mult, la care ţineţi cel mai mult? Aţi putea descrie acele sentimente?
6. În opinia dvs, ce rol au în descoperirile matematice „măria sa întîmplarea”, inspiraţia de moment, „muzele”?
7. Aţi avut sentimentul „insight”, cănd o problemă sau o întrebare la care aţi căutat răspuns timp îndelungat fără succes, să vi se primească brusc, în timp ce vă gîndeaţi la probleme cu un caracter total diferit? Aţi rezolvat probleme în vis? S-a întîmplat că trezindu-vă dimineaţa să vedeţi rezolvarea completa a unor probleme la care v-aţi gîndit în ajun sau în zilele precedente şi nu izbutiseţi să le rezolvaţi?
8. Ce importanţă acordaţi studierii literaturii matematice? Aţi putea să descrieţi procesul de pregătire a unei lucrări pentru publicare? Aveţi nişte strategii eficiente în acest aspect?
9. Înainte de a începe soluţionarea unei noi probleme vă străduiţi mai întîi să studiaţi lucrările publicate la această temă sau preferaţi să daţi frîu liber raţiunii proprii şi doar apoi consultaţi literatura în domeniu pentru a determina ce parte din rezultatele obţinute de dvs sunt originale.

10. Cît timp v-aţi dori să acordaţi matematicii pe parcursul zilei? Aveţi preferinţe pentru a vă ocupa de matematică în anumite perioade ale zilei? Care sunt ele? Dă funcţia dvs la serviciu vă ocupă toată ziua, cum reuşiţi să îmbinaţi cu ea lucrul ştiinţific?
11. Ce sfaturi puteţi oferi unui tînăr matematician? Dar unei persoane care doreşte să urmeze studiile la matematică? V-aţi dorit ca proprii dvs copii (nepoţi) sa devină matematicienii?
12. Cum vedeţi un program de mentorat în condiţii ideale pentru formarea savanţilor matematicieni în condiţii ideale? Cum ghidaţi doctoranzii la care sunteţi îndrumător pentru a progresa în propria învăţare şia obţine performanţe?
13. Aţi avut în perioada formării dvs ca savant un mentor, conducător de doctorat sau o altă personalitate pe care aţi admirat-o pentru anumite calităţi deosebite? Care au fost acele calităţi? În ce împrejurări aţi comunicat cel mai fructuos?
14. Aţi avut (sau poate aveţi şi acum) un discipol (sau un coleg din anii de studenţie) „briliant”, care poseda calităţi deosebite, talent pentru matematică? Care au fost acele calităţi? Puteţi să-l caracterizaţi din punctul de vedere al dezvoltării lui ca personalitate?
15. Dăunează carierei unui matematician pauzele în efectuarea cercetărilor matematice? Folosiţi concediul pentru a vă deda matematicii? Care este programul unei zile din viaţa dvs dedicată matematicii?
16. Aveţi un hobby? Ce preferaţi să faceţi în timpul liber?

## ANNOTATION

**Key words:** curriculum, extracurricular activity, systemic approach, competencies self-instruction, initial formation, continuous formation, investigational competencies, gifted students.

**The field of study** is The theory and methodology of (mathematical) instruction.

**The purpose of the paper:** The establishment of epistemological, theoretical and practical benchmarks for the development of a pedagogical model for future mathematics teachers' training in organizing and conducting extracurricular activities in the subject field.

**Objectives:** The elaboration of anintegrating conceptual model for students' training in organizing and deploying extracurricular activities in mathematics. The determination of methodological bases of the initial professional formation of mathematics teachers in accordance with the current requirements of the society and of their preparation for extracurricular activities and work with gifted children, capable of high performances in mathematics. The elaboration of recommendations concerning the creation of optimal conditions for the formation of competencies in organizing and deploying extracurricular activities in mathematics and the monitoring of this process. Experimental validation of the Integrating Model of training teachers for the extracurricular activities in mathematics.

**The scientific novelty and originality of the results** consists of the elaboration of an Integrating Model of training teachers for extracurricular mathematical activities.

**The theoretical significance of the paper** consists of the analysis and synthesis of the conceptual psycho-pedagogic and didactic benchmarks underlying the Integrating Model of training teachers for extracurricular mathematical activities.

**The scientific problem** consists of the elaboration of the methodological bases of an integrated system of mechanisms for the formation of teachers' professional competencies in organizing and deploying extracurricular mathematical activities.

**The applicative value of the paper** consists of the elaboration of the methodology of applying the Integrating Model of training future mathematics teachers for extracurricular activities.