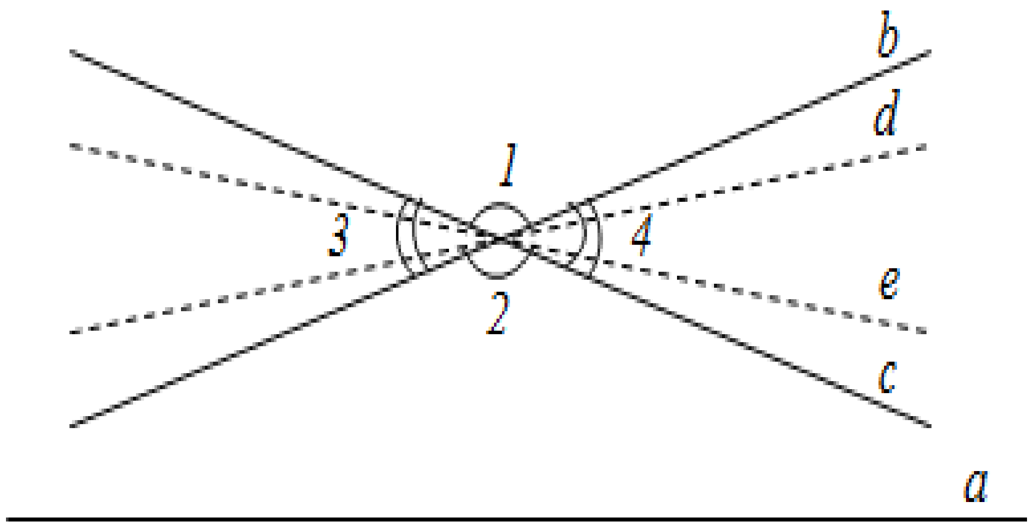
Laurențiu Calmuțchi

Elemente de geometrii neeuclidiene



Chișinău 2018

C.Z.U.: 514.13(075.8)
C 14

Lucrarea a fost recomandată pentru tipar de Senatul Universității de Stat din Tiraspol: proces verbal nr. 6 din 18 decembrie 2018

Recenzenți:
Sergiu Cataranciuc, doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar, Universitatea de Stat din Moldova
Liubomir Chiriac, doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar, Universitatea de Stat din Tiraspol

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții
Calmuțchi, Laurențiu.
Elemente de geometrii neeuclidiene / Laurențiu Calmuțchi. – Chişinău : UST, 2019. – 118 p. : fig.
1 disc optic electronic (CD-ROM ; 700 Mb ; 52x) : sd., col.; în container, 15 x 15 cm. – Titlu preluat de pe eticheta discului. – Cerințe de sistem: Windows OS, HDD 64 Mb, PDF Reader. – Disponibil:http:///www.ust.md.
Bibliogr.: p. 118 (13 tit.).
ISBN 978-9975-76-272-4.
514.13(075.8)
C 14

Tiparul: Tipografia UST

C U P R I N S

Capitolul I: DEZVOLTAREA FUNDAMENTELOR GEOMETRIEI

Capitolul II: AXIOMATICA LUI D. HILBERT

Capitolul III. ELEMENTE DIN GEOMETRIA HIPERBOLICĂ ȘI GEOMETRIA ELIPTICĂ

INTRODUCERE

”Bazele geometriei” reprezintă acel compartiment al matematicii în care se introduc și se studiază noțiunile de bază și axiomele geometriei, se stabilește rolul și locul ficărei axiome în construcția științei geometrice și deasemenea posibilitatea de a înlocui unele axiome cu altele și consecințele acestor înlocuiri.

Așa cum cunoașterea doar a limbii materne nu dă posibilitatea să pătrunzi în toate particularitățile ei, să clarifici și să înțelegi structura ei fără a o compara cu alte limbi, tot așa cunoașterea doar a unei geometrii a lui Euclid, nu dă posibilitatea să clarifici în întregime particularitățile construcției științei geometrice. Până la concepțiile contemporane ale geometriei se poate de ajuns doar după studierea geometriei neeuclidiene, create de către N. I. Lobacevski și celei eliptice,create de Riemann. Cunoașterea cu aceaste geometrii este doar prima treaptă a studierii bazelor geometriei. Pe parcursul secolelor geometria a servit bază nu numai a matematicii,dar șia altor științe. Anume în geometrie au apărut primele teoreme și primele demonstrații.Însăși legile gîndirii matematice s-au format cu ajutorul geometriei. Multe probleme geometrice au contribuit la apariția a noi direcții ștințifice și invers, multe probleme științifice au fost rezolvate cu ajutorul metodelor geometrice.

Pregătirea unui viitor specialist în domeniul matematicii nu poate fi concepută fără cunoștințe vaste în geometrie.Fiind una din cele mai străvechi ramuri ale matematicii moderne, astăzi geometria a atins un nivel înalt de abstractizare și complexitate, fapt ce i-a permis să pătrundă în toate ramurile științei.Anume din aceste considerente,în planurile de studii de la toate specialitățile cu profil real, geometria este inclusă drept disciplină obligatorie.

Din cele menționate urmează importanța studierii de către viitorii profesori de matematică a geometriilor neeuclidiene și a bazelor geometriei.

Lucrarea dată este adresată studenților de la ciclurile I și II, specialitățile; „Matematica și informatica”, „Matematica și Fizica”, „Matematica”, „Matematici moderne și tehnologii moderne în instruire, și tuturor celor pasionați de matematică. Pentru a pătrunde în esența geometriilor neeuclidiene, în capitolul I sunt ilustrate unele date din istoria dezvoltării cunoștințelor gemetrice până la apariția „Elementelor” lui Euclid, se face o analiză a acestei lucrări, menționând atât neajunsurile cât și importanța istorică a acestei lucrări. O deosebită atenție se acordă problemei Postulatului V și a unor încercări de a „demonstra” acest postulat cu ajutorul celorlalte postulate și axiome.. Mai profundă atenție se acordă cercetărilor lui Saccheri, Lambert și Lejandre, care au fost foarte aproape de a rezolva problema Postulatului V a lui Euclid.

Având în vedere că geometria hiperbolică se bazează pe primele patru grupe de axiome ale lui D. Hilbert, în capitolul II sunt formulate axiomele geometriei euclidiene și se enumeră noțiunile care pot fi introduse după fiecare grup de axiome și teoremele principale, care pot fi demonstrate în baza acestor grupe de axiome.

De bază se consideră capitolul III. În acest capitol sunt expuse noțiunile de bază și unele teoreme mai principale din geometria hiperbolică și din cea eliptică. Se construiește modelul lui Poincare pentru demonstrarea independenței Postulatului V de celelalte axiome și postulate și compatibilității geometriei hiperbolice.

Ținând cont de faptul că în modelul Poincare transformarea de inversiune joacă un rol deosebit pentru verificarea axiomelor de congruență, lucrarea conține și o anexă în care este cercetată inversiunea și proprietățile ei principale. În a doua anexă sunt formulate unele probleme pentru activitate independentă.

Consider, că am o deosebită datorie pentru a aduce mulțumiri recenzenților și celor care au făcut observații și sfaturi prietenești pentru a îmbunătăți calitatea acestei lucrări: profesorilor S. Cataranciuc, L. Chiriac și conferențiarului V.Pușuntică.

Autorul

CAPITOLUL I. DEZVOLTAREA FUNDAMENTELOR GEOMETRIEI

1.1. Dezvoltarea geometriei până la Euclid

Primele cunoștințe geometrice, căt și noțiunea de număr, au apărut din timpurile cele mai vechi ale culturii omenești, din practica primelor măsurări și numărarea efectuată de către om. Aceste cunoștințe au fost dobândite de civilizațiile Răsăritului Antic: în Egipt, Babilon, China, India în legătură cu dezvoltarea prelucrării pământului. Monumentele de cultură din Babilon și Egipt mărturisesc că geometria din aceste țări avea un caracter empiric și reprezinta o culegere de soluții particulare a unor probleme. Astfel, în mileniul II î.e.n. egiptenii calculau exact aria triunghiului și volumul trunchiului de piramidă patrulateră regulată, aria discului de rază R o calculau după formula $S = \left(\frac{16}{9}R\right)^2$, ceea ce dă pentru π o valoare destul de exactă

$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16\ldots$. În această perioadă babilonenii cunoșteau așa numita teoremă a lui Pitagora.

Să menționăm faptul, că în matematica din Răsăritul Antic (Babilon și Egipt) nu se întâlnește nici o demonstrație, dar numai anumite reguli.

În secolul VII î.e.n., datorită dezvoltării legăturilor comerciale, cunoștințele geometrice au pătruns din Egipt în Grecia. În legătură cu dezvoltarea economiei, științei și artei din Grecia Antică, geometria se dezvoltă de către oamenii de știință și într-o perioadă istorică relativ scurtă, capătă schimbări fundamentale. Grecii au eliberat geometria de caracterul empiric și receptual și pe parcursul a trei secole au transformat geometria într-o știință strictă și au dezvoltat-o mult mai mult, decât au dezvoltat-o egiptenii pe parcursul a câtorva milenii.

Dezvoltarea geometriei (matematicii în genere) de până la Euclid poate fi devizată în trei perioade, în legătură cu schimbările centrului de dezvoltare a științei și filosofiei grece.

Prima perioadă de dezvoltare a geometriei grece cuprinde secolele VII-VI î.e.n. în legătură cu existența așa numitei școli ionice din Asia Mică, fondatorul și reprezentantul principal a căreia a fost Thales din Milet. Această perioadă reprezintă un punct de cotitură în dezvoltarea geometriei, doarece anume în această perioadă geometria începe să se transforme dintr-o culegere de reguli și rețete într-o știință. Grecii au început logic să demonstreze anumite afirmații geometrice în formă generală.

Se consideră, că Thales a demonstrat următoarele teoreme:

1. Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.

2. Unghiurile de la baza triunghiului isoscel sunt congruente.

3. Unghiul înscris în semicerc este unghi drept.

4. Diametrul împarte discul în două părți congruente.

5. Triunghiul se determină de o latură și două unghiuri alăturate.

6. Vestita teoremă a lui Thales.

Această perioadă are o mare însemnătate în procesul de dezvoltare a geometriei. A fost pus începutul expunerii geometriei prin metoda deductivă sau axiomatică.

În a *doua perioadă*, centrul de dezvoltare a științei devine Italia de Sud (sec. VI-V î.e.n). Reprezentantul principal al acestei perioade este Pitagora și școala sa. Se consideră că Pitagora a demonstrat următoarele teoreme:

1. Suma unghiurilor interioare în orice triunghi este egală cu două unghiuri drepte.

2. Aria pătratului, construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe catete.

3. Planul poate fi acoperit cu triunghiuri, patrulatere și hexagoane regulate.

Se consideră că Pitagora și elevii săi au descoperit metoda geometrică de rezolvare a ecuațiilor pătrate, construirea poligonului echivalent cu poligonul dat și asemenea cu alt poligon, descoperirea celor cinci tipuri de poliedre regulate (tetraedru, hexaedru, octaedru, dodecaedru, icosaedru).

Pe bună dreptate se consideră, că cea mai importantă descoperire a școlii lui Pitagora a fost descoperirea segmentelor incomensurabile. Această descoperire a avut o mare influență în toată dezvoltarea de mai departe a matematicii grece.

A *treia perioadă* cuprinde secolul IV î.e.n. Reprezentanții acestei perioade sunt școlile filosofice a lui Platon și Aristotel, matematicienii Democrit (470-430 î.e.n), Eudoxus (410-356 î.e.n.) și Menehm (380-320 î.e.n.). Democrit a descoperit teoremele despre volumele piramidei și a conului. Eudoxus este creatorul teoriei geometrice a proporțiilor, care a înlocuit la greci teoria numerelor iraționale, pe care grecii nu o cunoșteau. Eudoxus a descoperit deasemenea și metoda epuizării: ”Dacă din mărimea *A* de scăzut $\frac{1}{2}$ A sau mai mult, cu restul de făcut același lucru ș.a.m.d., atunci se poate obține așa o mărime, care va fi mai mică decât orice mărime dată”. Prin această metodă Eudoxus determină volumul piramidei, conului și a sferei. Elevul lui Eudoxus – Menehm a descoperit secțiunile conice, care mai târziu au fost studiate de către Apoloniu (256-170 î.e.n.).

Arhimede (287-212 î.e.n.) a descoperit regula de calculare a ariei suprafeței sferice și volumelor unor corpuri. El a determinat aproximația pentru π $\left(\pi = \frac{22}{7} = 3{,}143\ \ldots\right)$.

Meritul deosebit al oamenilor de știință din Grecia Antică constă în faptul că ei au pus problema de a construi un sistem științific de cunoștințe geometrice și că ei au și rezolvat această problemă în prima aproximație. Această problemă a fost pusă de mai mulți filosofi, dintre care în primul rând urmează a fi numit Platon (429-348 î.e.n.) și în mod special Aristotel (384-322 î.e.n.). Aristotel a fost unul dintre cei mai iluștri filosofi din antichitate, creatorul logicii formale. Deși, el nemijlocit nu s-a ocupat cu geometria, anume el a formulat concret ideia de a construi geometria printr-un lanț de afirmații, care reese una din alta numai în baza regulilor logicii.

Spre sfârșitul secolului III î.e.n. grecii aveau un bagaj mare de adevăruri geometrice și cunoșteau metodele de demonstrație ale acestora. În acea perioadă a apărut ideia de adunat tot acest material geometric și de-al aduce într-o ordine logică. Această problemă au încercat să o rezolve mai mulți autori (Hipocrate, Fedii ș.a.), dar rezultatele lor n-au ajuns până la noi, deoarece au fost pierdute odată cu apariția “Elementelor” lui Euclid.

1. 2. „Elementele„ lui Euclid

Euclid (330-275 î.e.n.), elevul școlii lui Platon, este unul dintre cei mai iluștri matematicieni (geometri) din antichitate. A trăit și a activat în Alexandria. Pe timpul împăratului Ptolemeu preda matematica în Alexandria și a fost creatorul secției matematice a muzeului, fondat de Ptolemeu. S-au păstrat unele povestiri neprecise despre Euclid.În una din ele se spune că Ptolemeu s-a adresat către Euclid cu întrebarea:”*Nu există oare o altă cale mai scurtă de a studia geometria, decât cea expusă în”Elemente*” ?” Euclid cu mândrie a răspuns că în geometrie nu există o cale deosebită nici pentru împărați.

”Elementele” lui Euclid sunt alcătuite din 13 capitole. Capitolele I-VI sunt consacrate planimetriei, VII-IX–aritmeticii, X–mărimilor incomensurabile, XI-XIII–stereometriei.

Primul capitol conține teoria despre segmente, despre laturile și unghiurile triunghiului, despre drepte perpendiculare și drepte paralele, despre paralelograme, despre ariile triunghiului și paralelogramului și teorema lui Pitagora.

Capitolul II se bazează pe rezultatatele primului și este dedicat algebrei geometrice. În particular, într-o formă geometrică se demonstrează identitatea $(a+b)^2 = a^2 + +2ab + b^2$. Se termină acest capitol cu rezolvarea ecuațiilor pătrate pe cale geometrică.

În capitolul III se expune învățătura despre cerc și disc, despre secante și tangente, despre unghiurile formate de ele, despre gradul punctului în raport cu cercul.

În capitolul IV se studiază poligoanele înscrise și cele circumscrise, construirea poligoanelor regulate (patrulater, pentagon, hexagon și poligon cu 15 laturi).

Capitolul V conține teoria proporțiilor lui Eudoxus. Astfel, se aduce un echivalent geometric al numărului real pozitiv și îndreptățirea operațiilor cu mărimile incomensurabile. Teoria proporțiilor a lui Eudoxus înlocuia grecilor teoria numerelor iraționale.

În capitolul VI se implimentează teoria proporțiilor, se expune învățătura despre figurile asemenea și se extinde domeniul algebrei geometrice. Aritmetica și teoria numerelor se expune în capitolele VII-IX. Este caracteristic faptul, că teoria proporțiilor cu numere întregi se cercetează din nou și independent de cele studiate în capitolul V. Astfel, Euclid aici se conduce strict de principiul de separare a teoriei despre numere de teoria mărimilor geometrice. În aceste capitole se aduc teoremele despre proporțiile continui și despre progresii. Menționăm, că anume în aceste capitole Euclid expune algoritmul de determinare a celui mai mare divizor comun a două numere și demonstrația faptului că mulțimea numerelor simple (prime) este infinită.

În capitolul X Euclid se întoarce la mărimile incomensurabile și face o clasificare a unui sistem elaborat de iraționalități într-o formă geometrică.

Stereometria este expusă în capitolele XI-XIII. Tot aici se determină raportul ariilor discurilor, volumelor piramidelor și altor corpuri, folosind principiul epuizării a lui

Eudoxus. Se vede că în aceste capitole, dar și în genere Euclid ocolește calcul aproximativ.

În ultimul capitol se studiază poliedrele regulate.

Să menționăm faptul, că multe din cele cunoscute în geometrie pe timpul lui Euclid n-au fost expuse în ”Elemente” (teoria secțiunilor conice, curbele de ordin superior ș.a.).

Fiecare capitol se începe cu definițiile acelor noțiuni, care se întâlnesc în capitolul dat. Astfel, primul capitol se începe cu 23 de definiții. Vom aduce doar unele dintre ele.

1. Punct este ceia ce nu are părți.
2. Linia este lungimea fără lățime.
3. Marginile liniei sunt puncte.
4. Dreapta este o linie, care este la fel aranjată (situată) în raport cu toate punctele sale.
5. Suprafața este ceia, ce are numai lungime și lățime.
6. Marginile suprafeței sunt linii.
7. Plan este suprafața, care la fel este situată în raport cu toate dreptele, situate pe ea.

Urmează afirmațiile acceptate fără demonstrație, pe care Euclid le împarte în postulate și axiome.

Postulate

1. Se cere, ca din fiecare punct către orice alt punct să se poată duce o dreaptă.
2. Și ca fiecare dreaptă să poată fi prelungită nemărginit.
3. Și ca din fiecare centru să poată fi descris un cerc de orice rază.
4. Și ca toate unghiurile drepte să fie egale (congruente).
5. Și ca de fiecare dată, când dreapta la intersecție cu alte două drepte formează cu ele unghiuri alterne interne, situate de aceiași parte a secantei, suma cărora este mai mică decât a două unghiuri drepte, ca aceste drepte să se intersecteze și anume din acea parte, din care această sumă este mai mică decât suma a două unghiuri drepte.

Axiome

1. Și ca cele egale cu a treia să fie egale între ele.
2. Și dacă la egale adunăm egale, să obținem egale.

3. Și dacă din egale scădem egale, să obținem egale.

4. Și dacă la inegale adunăm egale, să obținem neegale.

----

7. Și ca cele ce se suprapun să fie egale.

Nici până acum nu este clar, prin ce se deosebesc postulatele de axiome. Există mai multe păreri diferite, dar niciuna din ele nu este acceptată definitiv.

Să menționăm metoda de expunere a ”Elementelor”. Fiecare afirmație la început se formulează, apoi se indică ce este dat și ce trebuie de demonstrat. Urmează demonstrația argumentată de postulatele, axiomele și teoremele ulterior demonstrate. Toate demonstrațiile se termină cu cuvintele ”*ceia ce trebuia demonstrat*”. În fiecare demonstrație se cercetează toate detaliile, toate cazurile posibile.

Să menționăm faptul, că Euclid în ”Elemente” vine nu ca un adunător sau un sistematizator a cunoștințelor acumulate de omenire la acea etapă de dezvoltare a matematicii, în particular a geometriei. Aportul propriu creator a lui Euclid în această operă este foarte mare. În primul rând, însăși sistematizarea materialului sub unghiul de vedere de a satisface tuturor cerințelor strict științifice și expunerii exacte nu putea fi îndeplinită fără mari eforturi creative ale autorului. A fost necesar în mod critic de revăzut toate afirmațiile geometrice și demonstrațiile care existau, la multe din ele de adus alte demonstrații noi, de suprapus cu alte teoreme în condițiile noilor legături și în mod corespunzător de expus materialul. Așa de exemplu, Euclid aduce o nouă demonstrație a teoremei lui Pitagora, independentă de asemănare și proporții.

În al doilea rând lui Euclid îi aparține clasificarea mărimilor incomensurabile, cercetate în capitolul X al ”Elementelor”. Dacă avem în vedere faptul, că grecii nu posedau simbolica noastră algebrică și toate calculele erau efectuate ”geometric”, apoi nu se poate să nu fim încântați despre imaginația și talentul autorului.

Critica sistemului lui Euclid

”Elementele” lui Euclid au jucat un rol foarte esențial nu numai în istoria dezvoltării matematicii, dar și în toată cultura omenirii. Este foarte greu de numit o altă carte, care ar putea fi comparată cu ”Elementele” lui Euclid, după durata influenței asupra culturii și științei popoarelor civilizate, după rolul pe care l-a avut timp de peste două milenii în calitate de îndrumar, ca izvor nesecat de idei științifice, care a stimulat în continuare dezvoltarea gândirii creatoare matematice. Nici pentru o altă știință nu există astfel de exemplu, când un manual din antichitate să rămână în același rol de manual pe parcursul a peste două mii de ani. ”Elementele” lui Euclid numai după anul 1482 au fost reeditate de peste 500 ori și au fost traduse aproape în toate limbile din lume. După ”Elementele” lui Euclid au însușit matematica Copernic, Galilei, Descartes, Newton, Leibniz, Euler, Lomonosov, Lobacevski și mulți, mulți alți corifei ai științei din lumea întreagă. Euclid primul a pus problema de a fundamenta geometria, adică de a formula definițiile și axiomele, pe baza cărora se poate dezvolta geometria pe cale strict logică. Acesta este meritul istoric al lui Euclid în fața științei. Construcția logică a geometriei a fost elaborată de Euclid destul de exact pentru timpul acela.

Dacă însă cercetăm expunerea ”Elementelor” din punct de vedere a matematicii contemporane, atunci trebuie să recunoaștem că există și multe neajunsuri.

Veriga cea mai slabă din sistemul lui Euclid o constituie definițiile. Multe din aceste definiții nu sunt clare (de exemplu definiția punctului, dreptei). În unele definiții se întâlnesc așa noțiuni, care singure cer a fi definite (de exemplu, ”lungime”, ”lățime”, ”margine”). Euclid aduce două definiții diferite noțiunilor de punct și de linie (în definițiile 3 și 6 punctul și linia se definește a doua oară prin noțiunea de ”margine”). Dacă, însă una și aceiași noțiune se definește prin două definiții diferite, atunci trebuie de demonstrat că aceste definiții sunt echivalente, ceia ce n- a făcut Euclid și nici n-a putut să facă. Dacă cercetăm definiția dreptei, putem subânțelege noțiunea de cerc, iar prin definiția planului putem aduce noțiunea de suprafață sferică. Nu întâmplător nici una din definițiile 1-7 nu pot și nici nu se aplică la demonstrarea teoremelor și fără nici o pierdere pot fi excluse. Toate aceste neajunsuri a definițiilor lui Euclid se lămuresc prin faptul, că Euclid a dorit să definească toate noțiunile geometrice, fapt ce este imposibil.

În ce privește postulatele și axiomele putem spune că conținutul acestor afirmații este esențial și servește la baza demonstrațiilor afirmațiilor geometrice (teoremelor). Totodată observăm, că lista axiomelor și postulatelor nu este completă pentru a construi geometria strict pe cale logică. Așa de exemplu, în geometrie noi deseori folosim așa noțiuni care se exprimă prin cuvintele ”punctul dreptei este situat între alte două puncte ale acestei drepte”, ”două puncte sunt situate de aceași parte (de diferite părți) a dreptei”,

”punctul este situat în interiorul triunghiului” ş.a.m.d. Postulatele și axiomele lui Euclid nu permit să argumentăm aceste noțiuni (la aceste neajunsuri a atras atenția C. F. Gauss). Din această cauză la demonstrația teoremelor, în care se folosesc aceste noțiuni, Euclid apelează la desen. Noțiunile de mai sus deși par a fi clare, totuși pentru a construi un sistem logic aceasta nu este suficient, este necesar ca în axiome de avut descrieri exacte a proprietăților acestor noțiuni în axiome. Acestea sunt axiomele de ordine, care lipsesc la Euclid. Să menționăm că aceste axiome de ordine au fost elaborate în lucrările lui Pash în anul 1882.

Dacă un cerc trece printr-un punct interior și printr-un punct exterior în raport cu alt cerc, atunci prin tăcere Euclid presupune că aceste cercuri se intersectează. Analogic, se presupune că dreapta ce trece printr-un punct interior cercului, intersectează cercul. Indiferent de evidența acestui fapt, el trebuie de demonstrat (la acest fapt primul a atras atenția Leibniz). Postulatele și axiomele lui Euclid nu permit argumentarea acestor demonstrații. Pentru a argumenta astfel de demonstrații a fost introdusă axioma de continuitate abea în secolul XIX.

Unele neajunsuri a ”Elementelor” lui Euclid au fost observate încă din antichitate. Astfel, Arhimede (287-212 î.e.n.) a introdus axioma (numită mai târziu axioma lui Arhimede), care joacă un rol esențial în teoria măsurării lungimelor segmentelor, ariilor suprafețelor și volumelor corpurilor. Și după Arhimede au fost unele încercări de a preciza unele noțiuni fundamentale geometrice, dar pe parcursul multor secole nimeni nu a adăugat ceva esențial, în comparație cu ceia ce a făcut Euclid. Să menționăm, că foarte puțini au încercat să completeze lista postulatelor și axiomelor. Problema principală, după părerea savanților, era să aducă sistemul de axiome și postulate la minimum. Această tendință s-a intensificat mai ales, după ce s-a observat că poate fi demonstrat postulatul referitor la unghiurile drepte și ultima afirmație din postulatul V.

1.3. Unele încercări de a demonstra postulatul V

În paragraful precedent am menționat tendința savanților de a aduce la minimum numărul de axiome și postulate. În acest context un loc deosebit ocupă cercetările referitoare la postulatul V a lui Euclid. Acest postulat joacă un rol foarte important în geometria euclidiană. Pe acest postulat se bazează teoria dreptelor paralele și toate compartimentele geometriei în legătură cu această teorie: asemănarea figurilor, teoremele despre suma unghiurilor interioare în triunghi și într-un poligon convex, trigonometria, teoria ariilor suprafețelor și volumelor corpurilor ș.a.m.d.

Să menționăm că din toate postulatele și axiomele lui Euclid postulatul V se deosebește esențial prin complicitatea sa. Din această cauză din timpurile cele mai îndepărtate mulți cercetători s-au străruit să înlocuiască postulatul V a lui Euclid cu altă afirmație echivalentă cu postulatul V. O astfel de afirmație, care se pune în locul postulatului V la baza teoriei paralelelor devine axoma lui John Pleiffer, introdusă în anul 1795.

Print-un punct ce nu aparține dreptei date, în planul determinat de acest punct și dreapta dată, trece nu mai mult decât o dreaptă ce nu intersectează dreapta dată.

În capitolul I al ”Elementelor” primele 28 de afirmații sunt demonstrate fără a apela la postulatul V. Se vede că Euclid încerca să demonstreze cât mai multe afirmații fără a apela la acest postulat. Am putea afirma, că nici lui Euclid nu-i prea plăcea acest postulat. Aceste împrejurări au contribuit la fapul că peste 2000 de ani, după Euclid, au avut loc sute de încercări pentru a demonstra acest postulat pe baza celorlalte postulate și axiome.

Particularitățile postulatului V menționate în paragraful precedent mereu atrăgeau atenția matematicienilor din următoarele secole. Dacă mai avem în vedere că până la mijlocul secolului XIX un criteriu neapărat al axiomelor și postulatelor se considera evidența acestora, atunci devine clară tendința matematicienilor timp de peste 2000 de ani de a demonstra postulatul V a lui Euclid și să-l treacă în rândul teoremelor. Astfel, pe lângă cele trei probleme clasice (cuadratura discului, dublarea cubului și trisecția unghiului) mai apare o problemă nu mai puțin complicată–problema postulatului V a lui Euclid.

Să aducem doar unele încercări de a demonstra postulatul V.

Unul din comentatorii ”Elementelor” – Proclus (410-485 î.e.n.) nu numai că încearcă să demonstreze postulatul V, dar ne mai comunică despre unele încercări făcute până la dânsul. Astfel, Proclus comunică că încă în secolul I î.e.n. Posedonii a propus de numit paralele dreptele situate în același plan și egal depărtate una de alta. Cu ajutorul acestei definiții Posedonii demonstrează postulatul V, dar de fapt el introduce un nou postulat, esența căruia este că locul geometric de puncte egal depărtate de la dreapta dată, situate de aceiași parte, reprezintă o dreaptă. Așa dar, Posedonii nu a făcut altceva decât a înlocuit un postulat cu alt postulat. Dacă însă acceptăm postulatul V, atunci ușor se poate demonstra că linia, toate punctele căreia sunt egal depărtate de la o dreaptă dată și situate de aceiași parte, este o dreaptă paralelă la dreapta dată. Menționăm, că Euclid numește paralele dreptele situate într-un plan și care nu se intersectează.

Proclus demonstrează postulatul V reeșind din afirmația acceptată în mod evident, că distanța de la un punct situat pe una din laturile unghiului ascuțit până la cealaltă latură,atunci când punctul se îndepărtează de vârful unghiului, poate deveni oricât de mare. Să menționăm că această afirmație poate fi demonstrată fără a apela la postulatul V și prin urmare, este un adevăr din geometria absolută. Bazându-se pe această afirmație Proclus demonstrează dacă o dreaptă intersectează una din două drepte paralele, atunci ea o intersectează și pe cealaltă.

Proclus judecă în felul următor: Fie AB și CD două drepte paralele, iar dreapta EG intersectează dreapta AB în punctul M (fig. 1). Atunci,în baza afirmației de mai sus, punctul semidreptei EG îndepărtându-se de la punctul M se va îndepărta de dreapta AB oricât de mult, dar așa cum distanța dintre dreptele paralele AB și CD este finită, atunci dreapta EG

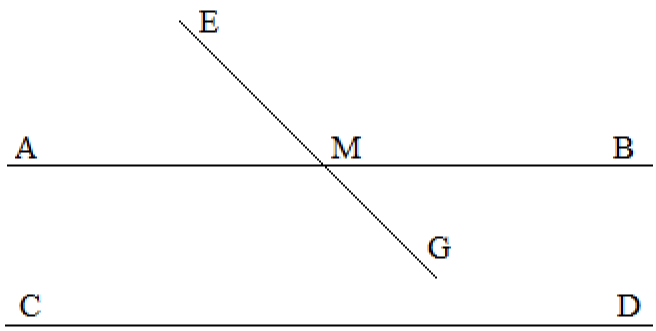


Fig. 1

neapărat va intersecta dreapta CD. Atunci, urmează imediat că prin punctul M trece numai o dreaptă AB paralelă la dreapta CD (axioma lui Pleiffer), dar atunci are loc postulatul V. Acest rezultat s-a obținut deoarece Proclus s-a folosit de faptul că distanța dintre două drepte paralele este o mărime finită, dar acest fapt este un nou postulat, echivalent cu postulatul V, deoarece din postulatul V urmează că dreptele paralele sunt egal depărtate una de alta și prin urmare, distanța dintre ele este o mărime finită.

O altă „demonstrație„ a postulatului V a lui Euclid este adusă de profesorul Universității din Oxford John Wallis (1616-1703).

John Wallis conștient introduce postulatul: ”*Pentru orice triunghi există un triunghi asemenea cu orice coeficient de asemănare*”. În așa mod Wallis înlocuiește postulatul V cu un alt postulat în care se folosește o închipuire ilustrativă despre forma figurii, independent de dimensiunile ei, iar după aceste considerente Wallis demonstrează postulatul V. Și iarăși se demonstrează că postulatul lui Wallis este echivalent cu postulatul V.

O „demonstrație„ interesantă a postulatului V îi aparține matematicianului Farkaş Bolyai (1775-1856), tatăl vestitului J á noș Bolyai – unul din creatorii geometriei neeuclidiene. Farkaş Bolyai introduce postulatul: ”*Trei puncte ce nu aparțin unei drepte, întotdeauna aparțin unui cerc*”. Pe baza acestui postulat F. Bolyai demonstrează postulatul V. După cum știm, acceptând postulatul V ușor se demonstrează că prin orice trei puncte ce nu aparțin unei drepte, trece un cerc și numai unul singur. Prin urmare, postulatul lui F. Bolyai este echivalent cu postulatul V.

Toate încercările de a demonstra postulatul V au unele trăsături caracteristice.

În primul rând toți autorii ”demonstrațiilor” postulatului V erau încrezuți în unica posibilitate și justețea absolută a postulatului V și nu-și puteau închipui o altă posibilitate: prea mare era autoritatea lui Euclid.

În al doilea rând, toți considerau că axiomele și postulatele trebuie să fie niște afirmații neapărat evidente și deaceia erau încrezuți că postulatul V poate fi demonstrat cu ajutorul celorlalte axiome și postulate.

De obicei toți cei care încercau să demonstreze postulatul V a lui Euclid înlocuiau de fapt acest postulat cu o afirmație evidentă la prima vedere, dar până în cele din urmă se dovedea că această afirmație era echivalentă cu postulatul V.

Să menționăm că problema corectă referitoare la postulatul V consta în faptul de a demonstra postulatul V pe baza doar a celorlalte axiome și postulate, fără a introduce cu acest scop alte postulate speciale. Anume asupra acestei cerințe și greșiau toți cei care încercau să demonstreze postulatul V a lui Euclid. Din cele spuse urmează că toate încercările de a demonstra postulatul V erau lipsite de însăși formularea corectă a problemei postulatului V. În ce constă neajunsul acestei probleme? Acest neajuns constă în faptul că sistemul de postulate și axiome a lui Euclid nu era complet. Acesta este principalul neajuns al sistemului lui Euclid. Acest neajuns a fost lichidat abea la sfârșitul secolului XIX și începutul secolului XX.

1.4. Cercetările lui Saccheri, Lambert și Legendre

În secolul XVIII s-a produs o înnaintare esențială în metodologia demonstrării postulatului V a lui Euclid. Acest succes se datorează la trei savanți: italianul Girolamo Saccheri, germanul Johann Heinrich Lambert și francezul Adrien-Marie Legendre. Ideia principală a cercetărilor acestor savanți consta în faptul de a demonstra postulatul V de la contrariu. Această idee a fost atât de importantă, că ea a adus nemijlocit la rezolvarea problemei postulatului V.

Cercetările lui Saccheri (1667-1733)

În lucrările sale Saccheri cercetează patrulaterul cu două unghiuri drepte și două laturi laterale congruente. Așa patrulater acum se numește patrulaterul lui Saccheri.

Să luăm un segment arbitrar AB (fig. 2) și de aceiași parte construim segmentele AD și BC, congruente între ele și perpendiculare pe AB. Unim punctele D și C și obținem un

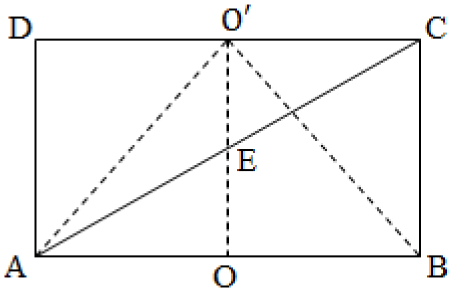


Fig. 2

patrulater cu două unghiuri drepte A și B și laturile laterale congruente AD și BC. Latura AB se numește baza de jos a acestui patrulater, iar latura CD este baza de sus.Saccheri își pune problema: ce se poate spune despre unghiurile D și C, dacă se va baza pe toate axiomele și postulatele lui Euclid, în afară de postulatul V, Saccheri demonstrează, că în așa caz, unghiurile D și C sunt congruente. Să aducem această demonstrație, dar concretizând-o cu așa numită axiomă a lui Pash, în următoarea formulare: *Dacă o dreaptă din planul triunghiului ABC nu trece nici printr-un vârf al triunghiului, dar intersectează una din laturile triunghului, atunci ea intersectează una și numai una din celelalte două laturi ale triunghiului.*
Din mijlocul O al segmentului AB construim de aceiași parte cu AD și BC o

perpendiculară OO'. Perpendiculara OO' va intersecta latura AB a triunghiului ABC și nu trece prin vârfurile acestui triunghi. Prin urmare, conform axiomei lui Pash, ea va intersecta ori latura BC , ori latura AC. Observăm însă, că OO' și BC nu se intersectează, deoarece ambele sunt perpendiculare la AB. Așa dar, OO' intersectează latura AC în careva punct E. Din nou observăm că dreapta OO' intersectează latura AC a triunghiului ACD și nu trece nici prin unul din vârfurile acestui triunghi. Prin urmare, OO' intersectează pe baza axiomei lui Pash latura DC în careva punct O', așa cum latura AD este perpendiculară pe AB, ea nu poate s-o intersecteze. Unim punctul O' cu punctele A și B. Observăm că $\Delta AOO' \equiv \Delta BOO'$ ca dreptunghice și după catete, prin urmare, $[AO'] \equiv [BO']$ și $\measuredangle OAO' \equiv \measuredangle OBO'$, dar atunci, $\measuredangle DAO' \equiv \measuredangle CBO'$, ca unghiuri complementare până la unghiuri drepte a unghiurilor congruente OAO' și OBO'. Cercetând triunghiurile $\Delta ADO'$ și $\Delta BCO'$, ne convingem că ele sunt congruente. Prin urmare, $\measuredangle C \equiv \measuredangle D$ și $DO' = O'C$, adică O' este mijlocul segmentului DC.

Să cercetăm acum patrulaterul cu două unghiuri drepte la care laturile laterale $AD < BC$ (fig. 3).

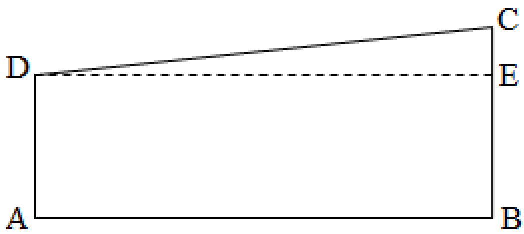


Fig. 3

Pe latura BC depunem $BE = AD$. Atunci conform celor demonstrate mai sus $\measuredangle ADE \equiv \measuredangle BED$. Deoarece unghiul BED este unghi exterior triunghiului DEC, urmează că $\measuredangle BED > \measuredangle C$, dar atunci $\measuredangle D > \measuredangle C$.

Ușor se demonstrează de la contrariu și afirmația inversă. Așa dar este adevărată așa numita lemă a lui Saccheri, care aparține geometrie absolute.

Lema 1.4.1. Dacă în patrulaterul cu unghiurile drepte A și B laturile AD și BC sunt congruente, atunci $\measuredangle C \equiv \measuredangle D$, dacă însă laturile AD și BC nu-s congruente, atunci din cele două unghiuri C și D acela este mai mare, care este alăturat la latura mai mică și invers.

Să cercetăm cazul întâi, când $AD = BC$ și prin urmare, $\measuredangle D \equiv \measuredangle C$. Ce se poate spune despre unghiurile C și D? Referitor la aceste unghiuri Saccheri presupune:

1) Sau aceste două unghiuri sunt ascuțite;

2) Ori aceste unghiuri sunt drepte;

3) Sau aceste unghiuri sunt obtuze.

Aceste presupuneri le vom numi corespunzător: ipoteza unghiului ascuțit, ipoteza unghiului drept, ipoteza unghiului obtuz.

În ce privește ipoteza unghiului drept Saccheri a demonstrat că această ipoteză este echivalentă cu postulatul V.

Prin urmare, dacă ar fi posibil de demonstrat că ipotezele unghiului ascuțit și celui obtuz aduc la contrazicere cu alte axiome sau postulate, ori cu unele teoreme demonstrate pe baza acestora, atunci ar fi demonstrată justețea unghiului drept și totodată ar fi demonstrat și postulatul V a lui Euclid. Această problemă își pune sie Saccheri, iar dacă el ar fi putut face acest lucru, apoi ar fi fost o demonstrație excelentă de la contrariu a postulatului V.

În cele ce urmează Saccheri demonstrează echivalența afirmației despre suma unghiurilor interioare ale triunghiului cu ipoteza unghiului ascuțit, drept sau obtuz corespunzător.

Să notăm prin σ_{ABC} suma unghiurilor interioare în orice triunghi ABC. Saccheri demonstrează: dacă are loc ipoteza unghiului ascuțit, atunci $\sigma_{ABC} < 2d$, dacă are loc ipoteza unghiului drept, atunci $\sigma_{ABC} = 2d$ și dacă are loc ipoteza unghiului obtuz, atunci $\sigma_{ABC} > 2d$.

Saccheri demonstrează, că suma unghiurilor interioare în orice triunghi nu-i mai mare decât $2d$, adică n-are loc ipoteza unghiului obtuz. Vom demonstra această afirmație diferit de demonstrația lui Saccheri.

Lema 1.4.2. Pentru orice triunghi ABC se poate de construit un așa triunghi $A_1B_1C_1$ încât $\sigma_{ABC} = \sigma_{A_1B_1C_1}$ și $m\measuredangle A_1 \leq \frac{1}{2} m\measuredangle A$.

Demonstrație. Fie ABC un triunghi arbitrar, iar A' este punctul simetric cu punctul A în raport cu mijlocul O al laturii BC (fig. 4). Să demonstrăm că triunghiul $AA'C$ este triunghiul, care poate fi luat în calitate de triunghiul cel căutat.

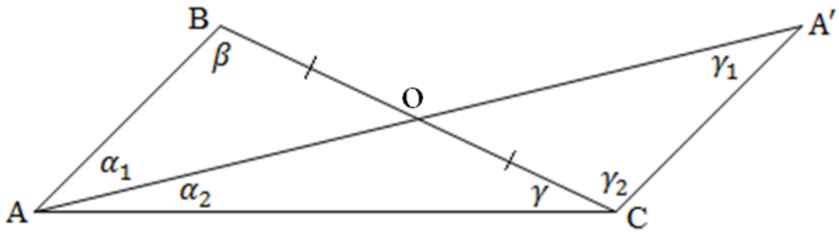


Fig. 4

Într-adevăr. Evident $\Delta ABO \equiv \Delta A^{'}CO$ și $\measuredangle AOB \equiv \measuredangle A^{'}OC$ urmează $\alpha_1 + \beta = \gamma_1 + \gamma_2$. Deoarece $\sigma_{ABC} = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma$, $\sigma_{AA^{'}C} = \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma$ urmează $\sigma_{ABC} = \sigma_{AA^{'}C}$. Așa cum $\alpha_1 = \gamma_1$ și $\hat{A} = \alpha_1 + \alpha_2$, atunci unul din unghiurile α_2 sau γ_1 a triunghiului $AA^{'}C$ nu este mai mare decât $\frac{1}{2}\hat{A}$. Lema este demonstrată.

Cu ajutorul acestei leme vom demonstra prima teoremă Legendre-Saccheri.

Teorema 1.4.3. Suma unghiurilor interioare în orice triunghi nu poate fi mai mare decât $2d$.

Demonstrație. Presupunem contrariul. Fie există așa triunghi ABC astfel încât $\sigma_{ABC} = 2d + \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$. Aplicăm lema de mai sus de n ori la triunghiul ABC. În rezultat obținem triunghiul $A_nB_nC_n$, care satisface condițiilor $\sigma_{A_nB_nC_n} = \sigma_{ABC}$ și $\widehat{A_n} \leq \frac{1}{2^n}\hat{A}$. Alegem n astfel încât $\frac{1}{2^n}\hat{A} < \varepsilon$, atunci $\widehat{A_n} < \varepsilon$. Deoarece $\widehat{A_n} + \widehat{B_n} + \widehat{C_n} = 2d + \varepsilon$, urmează că $\widehat{B_n} + \widehat{C_n} > 2d$ (1). Pe de altă parte, se poate demonstra că $\widehat{B_n} + \widehat{C_n} < 2d$ (2). Într-adevăr, fie β este măsura unghiului exterior a triunghiului $A_nB_nC_n$ adiacent cu unghiul B_n, atunci $\beta > \widehat{C_n}$. Deoarece $\beta + \widehat{B_n} = 2$, urmează $\widehat{B_n} + \widehat{C_n} < 2d$. Contrazicerea primită demonstrează teorema.

După ce Saccheri a demonstrat că suma unghiurilor interioare în orice triunghi nu poate fi mai mare decât suma a două unghiuri drepte, el își pune întrebarea: *nu se poate oare ca în unele triunghiuri această sumă să fie egală cu 2d, iar în altele mai mică decât 2d?*

Saccheri demonstrează așa numita a doua teoremă Legendre-Saccheri.

Teorema 1.4.4. Dacă într-un triunghi suma unghiurilor intrioare este egală cu $2d$, atunci în orice triunghi această sumă este egală cu $2d$.

După ce a respins și ipoteza unghiului obtuz, Saccheri își îndreaptă toată activitatea de cercetare pentru a exclude ipoteza unghiului ascuțit. Astfel, el demonstrează un șir de teoreme paradoxale din punctul de vedere a geometriei obișnuite. Presupunând ipoteza unghiului ascuțit, Saccheri demonstrează că există o oblică și o perpendiculară la una și aceiași dreaptă și care nu se intersectează.

Fie ABC un triunghi cu unghiul drept C (fig. 5).

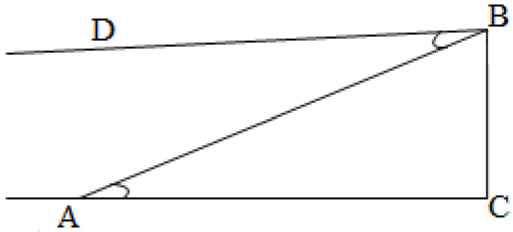


Fig. 5

Să construim dreapta BD,astfel încât $\measuredangle ABD$ să fie congruent cu $\measuredangle BAC$. Așa cum noi am presupus ipoteza unghiului ascuțit, atunci $\sigma_{ABC} < 2d$, iar deoarece unghiul C este drept urmează că $C\hat{A}B + C\hat{B}A < d$, dar atunci $D\hat{B}A + A\hat{B}C < d$. Astfel, AC este perpendiculară, iar BD este oblică la dreapta BC și aceste drepte nu se intersectează, deoarece în caz contrar obținem triunghiul în care unghiul CAB ar fi exterior și în același timp ar fi congruent cu unghiul interior DBA, ceia ce este imposibil.

Dezvoltând ipoteza unghiului ascuțit, Saccheri demonstrează că în fascicolul de drepte ce trec prin unul și același punct A (fig. 6), ce nu aparține dreptei a, există două drepte p și q asimptotice la dreapta a, care împart fascicolul de drepte în două submulțimi, astfel încât

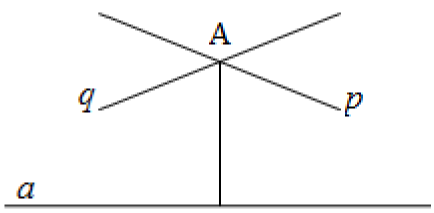


Fig. 6

dreptele dintr-o submulțime intersectează dreapta a, iar dreptele din cealaltă submulțime au perpendiculara comună cu dreapta a.

Saccheri a demonstrat deasemenea, că în cazul ipotezei unghiului ascuțit, perpendiculara la latura unghiului ascuțit intersectează la început a doua latură, iar apoi pe măsura îndepărtării de la vârful unghiului (fig. 7), încetează de a mai intersecta a doua latură. Mai mult chiar, există perpendiculara limită care nu va intersecta a doua latură.

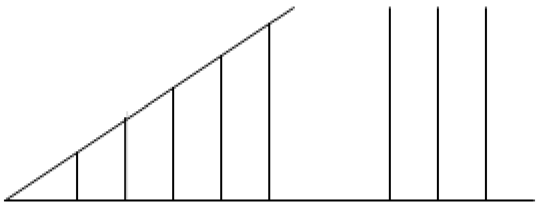


Fig. 7

Saccheri a mai demonstrat că în cazul ipotezei unghiului ascuțit locul geometric de puncte egal depărtate de la o dreaptă data și situate de aceiași parte, este o curbă, diferită de dreaptă.

Totuși, fiind convins, că nici o altă geometrie diferită de geometria lui Euclid nu poate exista, Saccheri ajunge la concluzia greșită, că ipoteza unghiului ascuțit duce la contrariu și anume că ea contrazice noțiunii de dreaptă.

Însemnătatea cercetărilor lui Saccheri în istoria dezoltării constă în faptul că el a pus o nouă cale în cercetarea problemei postulatului V.

Cercetările lui Lambert (1728–1777)

Lambert s-a ocupat cu astronomia, geodezia și fotometria. În matematică s-a evidențiat prin faptul că a demonstrat iraționalitatea numărului π și cercetările referitor la problema postulatului V. Din anul 1765 a fost membru al Academiei de Științe din Berlin.

Cum după conținut, tot așa și după metodele de cercetare a problemei postulatul V a lui Euclid, Lambert a continuat cercetările lui Saccheri. Lambert ca și Saccheri cercetează patrulaterul, numai nu cu două unghiuri drepte, dar cu trei unghiuri drepte. Referitor la al patrulea unghi, Lambert deasemenea presupune ipotezele unghiului ascuțit, drept și obtuz. Lambert stabilește echivalența ipotezei unghiului drept cu postulatul V a lui Euclid, aduce la contrazicere ipoteza unghiului obtuz și îndreaptă cercetările sale în direcția excluderii ipotezei unghiului ascuțit. Lambert obține toate rezultatele aduse de Saccheri. El demonstrează că suma unghiurilor interioare în triunghi este mai mică decît $2d$. Lambert mai obține un șir de rezultate noi, care reesă din ipoteza unghiului ascuțit.

Așa, de exemplu, Lambert demonstrează că aria triunghiului este direct proporțională cu diferența dintre $2d$ și suma unghiurilor interioare în triunghi (defectul triunghiului), a descoperit existența unei unități absolute de lungime.

Spre deosebire de Saccheri, Lambert niciodată n-a spus că el a demonstrat postulatul V. El pe bună dreptate considera că n-a ajuns nici la o contrazicere, indiferent de rezultatele pe care le-a obținut.

Lambert primul a observat, dacă pe suprafața sferică de considerat cercurile mari în calitate de drepte, atunci ipoteza unghiului obtuz se va realiza pe suprafața sferică. Lambert face o concluzie justă că geometria sferică nu depinde de postulatul V a lui Euclid. După încercările de a aduce la contrazicere ipoteza unghiului ascuțit Lambert face concluzia că ipoteza unghiului ascuțit se realizează pe o suprafață sferică imaginară.

Cercetările lui Legendre (1752-1833)

Legendre a fost profesor la școala politehnică, membru al Academiei de Științe din Paris. Are rezultate impunătoare în diferite domenii ale matematicii. S-a ocupat și cu problema postulatului V. Legendre demonstrează la început, acceptând fără demonstrație, dacă suma unghiurilor interioare în triunghi este egală cu $2d$, atunci are loc postulatul V. Astfel, Legendre demonstrează echivalența acestor două afirmații. După aceasta el consideră, dacă ar putea demonstra că suma unghiurilor în triunghi este $2d$, fără a apela la postulatul V, atunci ar fi demonstrat postulatul V. Legendre își pune întrebarea: *ce se poate spune despre suma unghiurilor în triunghi neapelând la postulatul V?* Legendre presupune trei ipoteze:

1) suma unghiurilor în triunghi este mai mare decât $2d$;

2) egală cu $2d$;

3) mai mică decât $2d$.

Prin câteva metode Legendre demonstrează că suma unghiurilor în triunghi nu-i mai mare decât $2d$, adică n-are loc prima ipoteză. Pentru a demonstra postulatul V rămâne de demonstrat că ipoteza a treia duce la contrazicere. Legendre aduce mai multe "demonstrații" a postulatului V, dar de fiecare dată, fără să observe, presupunea evidente diferite afirmații, care până în cele din urmă se dovedeau a fi echivalente cu postulatul V.

În comparație cu Saccheri și Lambert, Legendre n-a descoperit rezultate noi în problema postulatului V. Saccheri și Lambert au mers mult mai departe și au obținut noi consecințe din ipoteza unghiului ascuțit. Totodată menționăm meritul lui Legendre, că el a determinat nemijlocit legătura dintre postulatul V și suma unghiurilor în triunghi. Dacă cercetările lui Saccheri și Lambert au trecut puțin observate de matematicieni, apoi autoritatea lui Legendre a făcut ca mai mulți matematicieni de la sfârșitul secolului XVIII să atragă atenția asupra postulatului V. Acest fapt a grăbit în mare măsură rezolvarea problemei postulatului V.

Să menționăm că cercetările realizate de Saccheri, Lambert și Legendre sunt pătrunse de convingerea că postulatul V a lui Euclid poate fi demonstrat cu ajutorul celorlalte postulate și axiome. În privința metodei demonstrări postulatului V ei au ales o nouă cale. Teoriile dezvoltate de ei sunt încercări de a demonstra postulatul V de la contrariu. Ei au fost aproape de rezolvarea problemei postulatului V, dar încrederea că ipoteza unghiului ascuțit va duce la contrazicere i-a dus pe Saccheri și Legendre la concluziii greșite, iar pe Lambert la cercetare nefinisată.

1.5. Afirmații echivalente postulatului V

După Euclid, două drepte se numesc paralele, dacă ele sunt situate în același plan și n-au puncte comune. Să menționăm, că fără a apela la postulatul V se pot demonstra o mulțime de teoreme. Printre acestea sunt și cele trei criterii de congruență a triunghiurilor și multe alte proprietăți ale triunghiurilor. În mod deosebit vom menționa teorema despre unghiul exterior al triunghiului: *unghiul exterior al triunghiului este mai mare decât fiecare din cele două interioare nealăturate.* Cu ajutorul acestei teoreme vom demonstra o lemă foarte importantă în expunerea de mai departe.

Lema 1.5.1. Dacă la intersecția a două drepte cu o secantă unghiurile corespondente sunt congruente, atunci aceste două drepte nu se intersectează.

Demonstrație. Fie la intersecția dreptelor a și b cu secanta AB unghiurile corespondente sunt congruente (de exemplu $\measuredangle 1 \equiv \measuredangle 2$ (fig. 8))

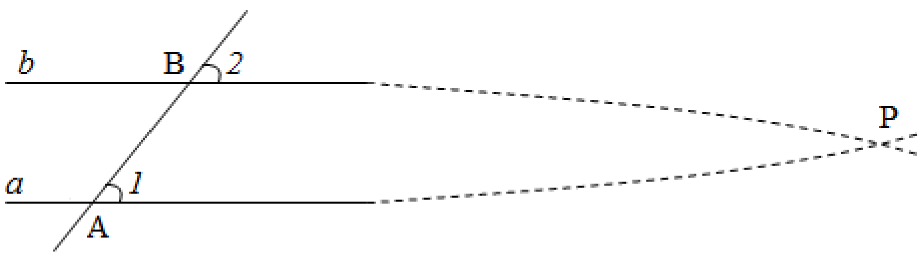


Fig. 8

Dacă presupunem că dreptele a și b se intersectează în careva punct P, atunci obținem triunghiul ABP în care unul din unghiurile de la vârful A sau B este congruent cu unghiul exterior de la celălalt vârf. Acest fapt contrazice teoremei despre unghiul exterior al triunghiului. Lema este demonstrată.

Cu ajutorul acestei Leme, fără a apela la postulatul V a lui Euclid, se poate demonstra că print-un punct M ce nu aparține dreptei a, în planul determinat de punctul M și dreapta a, trece o dreaptă paralelă la dreapta a.

Într-adevăr, fie MN perpendiculara coborâtă din punctul M la dreapta a, iar b dreapta ce trece prin punctul M perpendicular pe dreapta MN (fig. 9). Conform lemei precedente, dreptele a și b nu se intersectează și prin urmare, sunt paralele.

Apare întrebarea: *câte drepte trec prin punctul M, ce nu aparține dreptei a, paralele la dreapta a?*

Teorema 1.5.2. Dacă are loc postulatul V, atunci prin fiecare punct M, ce nu aparține dreptei a, trece o singură dreaptă paralelă la dreapta a.

Demonstrație. Fie a o dreaptă arbitrară și M un punct arbitrar ce nu aparține dreptei a (fig. 9).

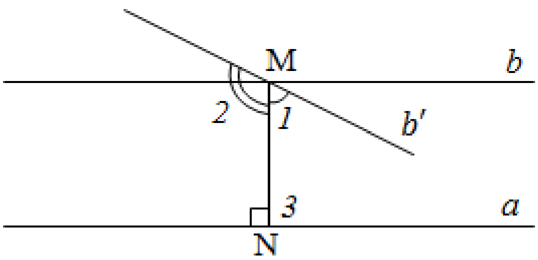


Fig.9

Construim dreapta MN perpendiculară pe dreapta a și dreapta b perpendiculară pe dreapta MN, care să treacă prin punctul M. Evident, dreptele a și b sunt paralele. Fie b' o dreaptă arbitrară diferită de dreapta b și care trece prin punctul M. Unul dintre unghiurile 1 sau 2 este unghi ascuțit. Fie unghiul 1 este ascuțit. La intersecția dreptelor a și b' cu secanta MN se obțin unghiurile 1 și 3 de aceiași parte a secantei MN, suma cărora este mai mică decât $2d$ și deoarece are loc postulatul V dreptele a și b' se intersectează. Urmează, că b este unica dreaptă ce trece prin punctul M paralelă la dreapta a. Teorema este demonstrată.

Să demonstrăm că este justă și afirmația inversă.

Teorema 1.5.3. Dacă print-un punct ce nu aparține dreptei date trece o singură dreaptă paralelă la dreapta dată, atunci are loc postulatul V a lui Euclid.

Demonstrație. Fie la intersecția dreptelor a și b cu secanta MN se formează unghiuri interne de aceiași parte α și β, astfel încât

$$\alpha + \beta < 2d \tag{1}$$

Să demonstrăm că dreptele a și b se intersectează într-un punct situat în semiplanul, în care sunt situate unghiurile α și β (fig. 10).

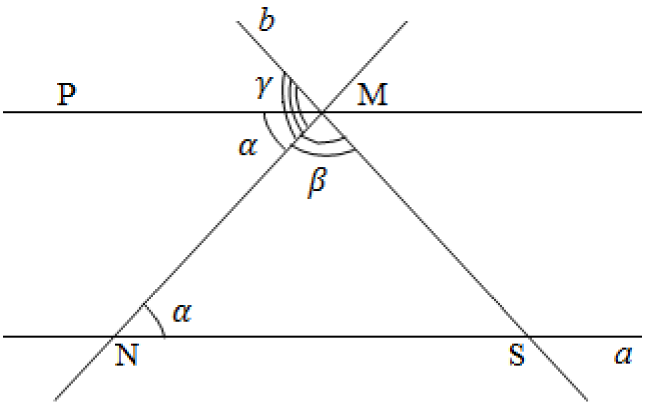


Fig.10

Să notăm prin γ unghiul adiacent cu unghiul β. Așa cum $\beta + \gamma = 2d$ din (1) urmează că $\gamma > \alpha$. Depunem de la semidreapta MN unghiul NMP congruent cu unghiul α, astfel încât $\measuredangle PMN$ și α să fie alterne interne de părți diferite față de secanta MN la intersecție cu dreptele MP și a. Conform lemei 1.5.1 dreptele MP și a sunt paralele. Deoarece $\alpha < \gamma$ dreptele MP și b nu coincid. Având în vedere că prin punctul M trece o singură dreaptă paralelă la dreapta a, urmează că dreptele a și b se intersectează în careva punct S. Dacă vom presupune că punctul S este situat în semiplanul în care este situat unghiul β, atunci din inegalitatea $\alpha < \gamma$ obținem contrazicere cu teorema despre unghiului exterior al triunghiului. Prin urmare, punctul S aparține semiplanului în care sunt situate unghiurile α și β. Teorema este demonstrată.

Așa dar, postulatul V a lui Euclid este echivalent cu așa numita axiomă a paralelelor: *printr-un punct ce nu aparține dreptei date, în planul determinat de acest punct și dreapta dată trece nu mai mult decât o singură dreaptă paralelă la dreapta dată.*

Există mai multe afirmații echivalente cu postulatul V. Una din acestea este afirmația: *suma unghiurilor interioare în fiecare triunghi este egală cu 2d*. Într-adevăr, dacă are loc postulatul V, atunci din teorema 1 rezultă că are loc axioma paralelelor, dar atunci, după cum se știe din geometria elementară, suma unghiurilor în fiecare triunghi este egală cu $2d$. Să demonstrăm și afirmația inversă.

Teorema 1.5.4. Dacă suma unghiurilor în fiecare triunghi este egală cu $2d$, atunci are loc postulatul V.

Demonstrație. Având în vedere teorema 1.5.3, este suficient de demonstrat, dacă suma unghiurilor în fiecare triunghi este egală cu $2d$, atunci are loc axioma paralelelor.

Fie a o dreaptă arbitrară și M un punct ce nu aparține dreptei a, iar MN perpendicualara coborâtă din punctul M pe dreapta a (fig. 11).

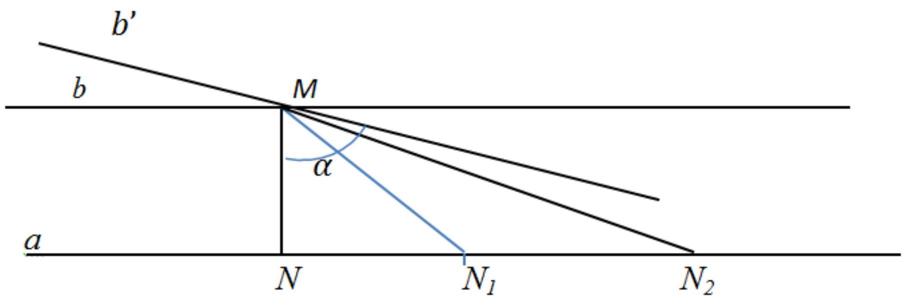


Fig. 11

Să construim prin punctul M dreapta b perpendiculară pe dreapta MN. Conform lemei 1.5.1 dreapta b este paralelă la dreapta a. Să demonstrăm că orice altă dreaptă b', ce trece prin punctul M intersectează dreapta a. Să notăm prin α unghiul ascuțit pe care-l formează dreapta b' cu dreapta MN. Pe dreapta a de la punctul N din partea unghiului α depunem consecutiv segmentele :

$[NN_1] \equiv [MN], [N_1N_2] \equiv [MN_1], \dots, [N_{n-1}N_n] \equiv [MN_{n-1}]$.

Așa cum suma unghiurilor în fiecare triunghi este egală cu $2d$, urmează că $N\widehat{M}N_1 = M\widehat{N_1}N = \frac{d}{2}$. Deoarece $\measuredangle MN_1N$ este exterior pentru triunghiul dreptunghic isoscel MN_1N_2, urmează că $M\widehat{N_2}N_1 = \frac{d}{4}$,adică $M\widehat{N_2}N = \frac{d}{4}$. Prelungind acest proces obținem $M\widehat{N_n}N = \frac{d}{2^n}$, dar atunci $N\widehat{M}N_n = d - \frac{d}{2^n}$. După condiție $\alpha < d$, deaceia n poate fi ales, astfel încât, $N\widehat{M}N_n > \alpha$. În așa caz dreapta b' va trece prin interiorul unghiului NMN_n și va intersecta segmentul NN_n. Așa dar, dreptele b' și a se intersectează. Teorema este demonstrată.

Axioma paralelelor a lui Euclid poate fi înlocuită cu așa afirmație: *în toate triunghiurile suma unghiurilor interioare este una și aceiași.* Dacă acceptăm această afirmație în calitate de axiomă, atunci postulatul V va fi demonstrat ca teoremă. Să demonstrăm această afirmație. Să notăm suma unghiurilor în fiecare triunghi prin x, atunci (fig. 12):

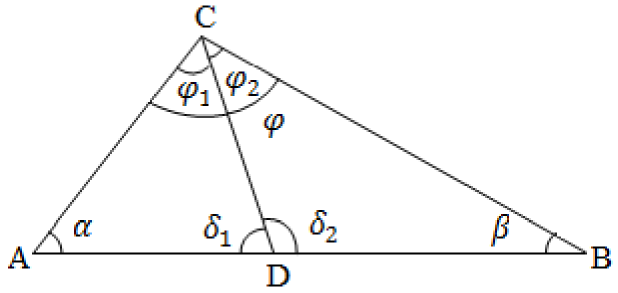


Fig. 12

1. $\alpha + \beta + \varphi = x,$
2. $\alpha + \varphi_1 + \delta_1 = x,$
3. $\beta + \varphi_2 + \delta_2 = x,$
4. $\delta_1 + \delta_2 = 2d.$

Adunăm egalitățile 2 și 3, obținem:

$$\alpha + \varphi_1 + \delta_1 + \beta + \varphi_2 + \delta_2 = 2x,$$

sau

$$x + 2d = 2x,\ x = 2d.$$

În așa fel, în triunghiul ABC suma unghiurilor este egală cu $2d$, dar atunci are loc postulatul V. Deoarece, din postulatul V urmează că suma unghiurilor în fiecare triunghi este egală cu $2d$, atunci afirmația că suma unghiurilor în fiecare triunghi este o mărime constantă este echivalentă cu postulatul V.

Academicianul M. V. Ostrogradscki în manualul său de geometrie elementară în loc de postulatul V folosea axioma: *Două drepte paralele la a treia, sunt paralele între ele.*

Acceptând această axiomă ușor se demonstrează că perpendiculara p și oblica q la dreapta AB (fig. 13) întotdeauna se intersectează.

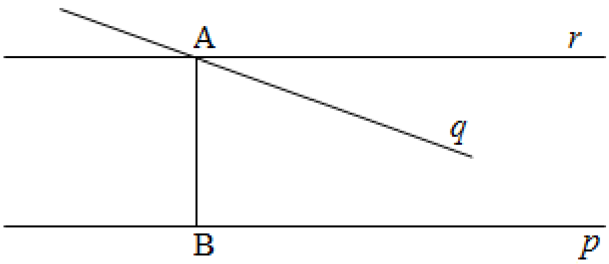


Fig. 13

Într-adevăr, să presupunem că dreapta q nu intersectează dreapta p. În așa caz am avea că prin punctul A trec două drepte diferite q și r care nu intersectează dreapta p. Aici r este perpendiculara la dreapta AB, iar q este oblica la dreapta AB. Conform axiomei lui Ostrogradscki dreptele q și r sunt paralele. Aceasta însă nu poate avea loc deoarece punctul A este comun dreptelor r și q. Contrazicerea obținută demonstrează, că oblica q și perpendiculara p se intersectează. Are loc și afirmația inversă:

Dacă are loc postulatul V a lui Euclid, atunci două drepte paralele cu a treia sunt paralele între ele.

Într-adevăr, dacă am presupune că două drepte paralele la a treia se intersectează am avea că print-un punct trec două drepte paralele, ceia ce contrazice axiomei paralelelor.

În așa fel am demonstrat că afirmația: două drepte paralele la a treia dreaptă, sunt paralele între ele, este echivalentă cu postulatul V.

Teorema 1.5.5. Dacă baza de sus a patrulaterului Saccheri este egală cu baza de jos, atunci are loc postulatul V a lui Euclid.

Demonstrație. Fie în patrulaterul $ABDC$ a lui Saccheri $CD = AB$ (fig. 14). Atunci $PB = QD$, unde P și Q sunt mijlocurile bazelor AB și CD corespunzător.

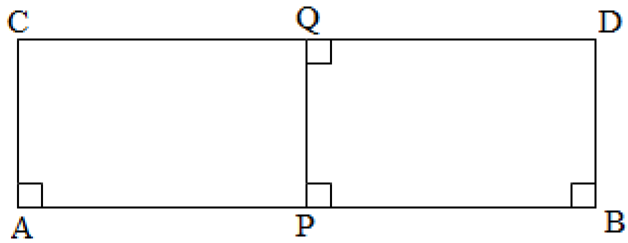


Fig. 14

Prin urmare, patrulaterul $QPBD$ va fi deasemenea patrulater Saccheri cu baza de jos PQ și baza de sus BD și cu unghiul drept B (congruent cu unghiul D) de la baza de sus. Prin urmare, în patrulaterul $PBDQ$ avem patru unghiuri drepte, fapt echivalent cu postulatul V. Așa dar afirmația: *în patrulaterul Saccheri baza de jos este egală cu baza de sus, este echivalentă cu postulatul V a lui Euclid.*

Teorem 1.5.6. Dacă lungimea segmentului ce unește mijlocurile a două laturi a triunghiului este egală cu jumate din lungimea laturii a treia, atunci are loc postulatul V a lui Euclid.

Demonstrație. Fie D și E mijlocurile laturilor AC și BC a triunghiului ABC (fig. 15).

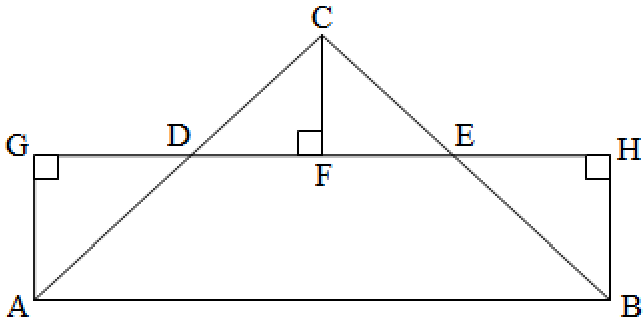


Fig. 15

Din vârfurile triunghiului ABC coborâm perpendicularele AG, BH și CF pe dreapta DE. Din congruența triunghiurilor ADG și CDF, urmează că $AG = CF$. Din congruența triunghiurilor BHE și CFE, urmează că $BH = CF$. Prin urmare $AG = BH$ și deci, patrulaterul $ABHG$ este patrulaterul Saccheri. Din congruența acelorași triunghiuri avem: $DG = DF$ și $EH = FE$. Atunci $HG = 2DE = AB$ după condiție, adică în patrulaterul Saccheri $HGAB$ baza de sus AB este egală cu baza de jos GH, dar atunci conform celor demonstrate mai sus are loc postulatul V a lui Euclid. Astfel, am obținut încă o afirmație echivalentă postulatului V: *linia medie a triunghiului este egală cu jumătatea bazei triunghiului.*

Teorem 1.5.7. Dacă în orice triunghi dreptunghic patratul ipotenuzei este egal cu suma patratelor catetelor, atunci are loc postulatul V a lui Euclid.

Demonstrație. În triunghiul dreptunghic arbitrar ABC construim segmentul DE, care unește mijlocurile D și E a catetelor (fig. 16).

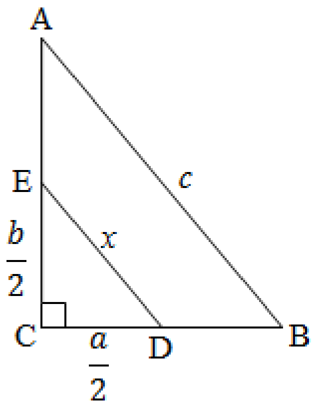


Fig. 16

Din condițiile teoremei avem:

$$x^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{c^2}{4},$$

Prin urmare, $x = \frac{c}{2}$ și conform Teoremei 1.5.6 are loc postulatul V.

Teorema 1.5.8. Dacă latura hexagonului regulat înscris în cerc este egală cu raza acestui cerc, atunci are loc postulatul V a lui Euclid.

Demonstrație. Întra-devăr, mărimea unghiului de la centru, care se sprijină pe arcul AB este egală cu $\frac{1}{6}$ din cerc, adică cu $60°$. Din condiție $AB = OB$ și prin urmare unghiurile de la baza OA a triunghiului OAB sunt congruente.

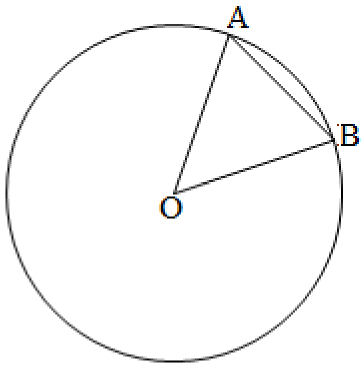


Fig. 17

Unghiul A este congruent cu unghiul B, așa cum $OA = OB$. Prin urmare, suma unghiurilor în triunghi este $2d$, dar atunci are loc postulatul V. Teorema este demonstrată.

Evident, este justă și afirmația inversă. Astfel, am obținut încă o afirmație echivalentă cu postulatul V.

1.6. Apariția geometriei hiperbolice

Până la începutul secolului XIX toate încercările de a demonstra postulatul V a lui Euclid au eșuat. Totuși aceste încercări nereușite au jucat un rol pozitiv, deoarece ele au ajutat de a pătrunde mai adânc în structura geometriei, au făcut să se înțeleagă mai corect legătura reciprocă dintre afirmațiile geometrice mai importante. Aceste încercări au pregătit terenul ca unii savanți să ajungă la ideea, că acest postulat nu poate fi demonstrat cu ajutorul celorlalte postulate și axiome a lui Euclid.

La începutul secolului XIX aceste încercări nereușite s-au încununat cu succes. La descoperirea așa numitei geometrii ”neeuclidiene” sau hiperbolice au ajuns trei cercetători:

1) marele matematician german Carl Friedrich Gauss (1777-1855);

2) profesorul Universității din Cazani Nikolai Ivanovici Lobacevski (1792-1856);

3) ofițerul ungar János Bolyai (1800-1860).

Trebuie să menționăm de la bun început, că aportul acestora în crearea și dezvoltarea noii geometrii este foarte diferit.

În ce privește Gauss, el pe parcursul vieții sale n-a lăsat nici o urmă de expunere sistematică a descoperirilor sale din domeniul geometriei neeuclidiene, n-a făcut nici o publicație pe această temă. Despre cercetările lui Gauss în geometria neeuclidieană lumea matematicienilor a aflat doar după moartea acestui mare matematician, după ce au fost publicate unele manuscrise și scrisori, de către prieteni. Din aceste izvoare se poate face concluzia că Gauss încă în 1816 poseda unele idei despre geometria neeuclidiană pe care le-a dezvoltat în ”tăcere”. Gauss se temea să nu-și păteze autoritatea în fața savanților lumii, care încă nu erau pregătiți să-l înțeleagă. Gauss nu numai că n-a publicat rezultatele sale din domeniul geometriei neeuclidiene, dar nici n-a permis prietenilor săi să divulge conținutul scrisorilor sale referitoare la noua geometrie și nici n-a susținut moral pe János Bolyai, N. Lobacevski, pe alții, care aveau aceleași idei și pentru care uneori chiar erau obijduiți pentru aceasta.

János Bolyai a ajuns la ideia existenței noii geometrii încă în anul 1823, dar a publicat rezultatele sale abea în 1832 (trei ani mai târziu decât Lobacevski). Fiind neînțeles de contemporanii săi și având o atârnare neînțeleasă din partea lui Gauss, I. Bolyai mai mult n-a publicat nici o lucrare. Este interesant faptul că Bolyai considera că Lobacevski este o persoană razgândită de Gauss și că sub numele acestuia se ascunde însăși Gauss.

Un merit deosebit în descoperirea și dezvoltarea geometriei neeuclidiene îi aparține măreţului savant rus N. I. Lobacevscki.

N. I. Lobacevscki s-a născut la 2 decembrie 1792 în orașul Nijnâi Novgorod, în familia unui mic funcționar. Datorită energiei depuse de mama sa, în anul 1802 a fost admis în gimnaziul din Cazani, iar în 1807 a fost transferat în Universitatea din Cazani. După absolvirea Universitații din Cazani a fost lăsat în calitate de lector în această universitate. În anul 1816 N. I. Lobacevski devine profesor, iar în anii 1827-1846 este rector al acestei universități. În anii 1846-1855 activează în calitate de adjunct al Șefului de studii a ținutului Cazani. S-a stins din viață la 24 februarie 1856.

În primii ani de activitate în universitate N. I. Lobacevski se concetrează în demonstrarea postulatului V. Încercările sale nereușite de a demonstra postulatul V, cât și încercările predecesorilor săi l-au adus la concluzia, că postulatul V nu poate fi demonstrat pe baza celorlalte postulate și axiome.

Pentru a demonstra acest fapt, N. I. Lobacevscki a construit un sistem logic, în care a păstrat toate postulatele și axiomele lui Euclid, înlocuind doar postulatul V cu afirmația opusă: *printr-un punct M ce nu aparține dreptei a, în planul determinat de punctul M și dreapta a, trec cel puțin două drepte ce nu intersectează dreapta a.* Lobacevski, dezvoltând sistemul astfel obținut, ajunge la concluzia că această schemă logică reprezintă o nouă geometrie, care poate fi dezvoltată cu același succes, cum și geometria lui Euclid.

La 7 februarie (după stilul vechi) în 1826 N. I. Lobacevski a făcut un referat la ședința facultății de fizică și matematică a universității din Cazani pe teoria paralelelor: ”Abordări despre principiile geometriei”. În anul 1829 în revista universității din Cazani apare articolul „Despre începuturile geometriei”. Aceasta a fost prima lucrare publicată pe noua geometrie. Ulterior, Lobacevski a publicat mai multe lucrări pe această temă. În aceste lucrări, el primul a formulat și a argumentat afirmația că postulatul V nu poate fi demonstrat pe baza celorlalte postulate și axiome a lui Euclid.

Lobacevski dezvoltă noua geometriei pe plan și în spațiu în limitele în care era dezvoltată geometria lui Euclid , inclusiv și formulele trigonometriei. Lobacevski a numit noua geometrie ”imaginară” (ulterior ea a fost numită geometria lui Lobacevski sau geometria hiperbolică).

Descoperind noi și noi afirmații, Lobacevski nu întâlnește careva contraziceri logice. Cercetările sale făcute l-au adus la concluzia, că geometria dată nu poate duce la contrazicere. Dorind să demonstreze acest fapt, el face o cercetare analitică a acestei geometrii și rezolvă problema compatibilității geometriei sale destul de suficient pentru timpurile celea.

Lobacevski a arătat că noua geometrie poate fi aplicată cu succes în analiza matematică. El a calculat multe integrale, care până la dânsul nu puteau fi calculate.

Rezultatele obținute de Lobacevski s-au dovedit a fi atât de neobișnuite, încât matematicienii educați pe ideile lui Euclid, nu puteau accepta aceste rezultate (chiar și academicianul M. V. Ostrogradski – unul dintre cei mai talentați matematicieni din secolul XIX). Numai după moartea lui Gauss, după ce au fost publicate corespondențele lui Gauss cu unii prieteni-matematicieni, în care se conțineau unele păreri încântătoare despre cercetările lui Lobacevski și Bolyai, atenția matematicienilor din toată lumea a fost îndreptată spre geometria lui Lobacevski. Au urmat multe cercetări referitoare la geometria hiperbolică. O atenție deosebită merită lucrarea lui Eugenio Beltrami ”Experiența de interpretare a geometriei neeuclidiene”, care a fost publicată în anul 1868. În această lucrare au fost aduse exemple de suprafețe în care se realizează geometria plană a lui Lobacevski. În anul 1871 marele matematician german Felix Klein (1849-1925) în lucrarea ”Despre așa numita geometrie neeuclidiană” a demonstrat compatibilitatea acestei geometrii.

Să menționăm că cercetările lui Lobacevski au fost recunoscute și pe larg promovate abea după moartea autorului. S-a dovedit, că lucrările lui Lobacevski din domeniul geometriei reprezintă o nouă etapă în dezvoltarea științelor exacte. În legătură cu aceasta, matematicianul englez Clifford l-a numit Copernic al geometriei pe Lobacevski.

Până la Lobacevski se considera, că geometria euclidiană este unica învățătură posibilă despre spațiu. Lucrările lui Lobacevski au dezmințiti această părere și au dus la unele generalizări a geometriei și la aplicațiile ei în diferite domenii ale matematicii, mecanicii, fizicii și astronomiei.

În § 1.2 am menționat că din punct de vedere științific sistemul de postulate și axiome a lui Euclid nu poate fi acceptat ca complet satisfăcător, deoarece în expunerea geometriei deseori se folosesc așa afirmații, care nici nu se întâlnesc în postulate și axiome, dar nici nu-s demonstrate. În legătură cu acest fapt spre sfârșitul anilor 60 a secolului XIX în fața matematicienilor a apărut problema de a construi un așa sistem de axiome a geometriei elementare, în baza căruia, bazânduse numai pe legile logicii, fără a apela la ilustrativitate și unele fapte chipurile evidente, să se poată expune geometria. Această problemă a devenit și mai actuală după ce au fost recunoscute rezultatele lui Lobacevski și au apărut lucrările lui B. Riemann despre geometria eliptică.

Spre sfârșitul secolului XIX și începutul secolului XX au apărut un șir de lucrări puse la baza geometriei a unor vestiți matematicieni ca Pash, Peano, Pierre, Hilbert, Weili ș.a. Cele mai reușite s-au dovedit a fi lucrările lui Hilbert și Weili. Aceste cercetări au avut o mare influență la formarea metodei axiomatice, care se aplică în toate compartimentele matematicii contemporane.

Lucrarea lui D. Hilbert ”Bazele geometriei” editată în anul 1899 a jucat un rol esențial în această serie de cercetări. În anul 1903 acestei lucrări i s-a decernat premiul internațional N. I. Lobacevski. În această lucrare pentru prima dată este dat un sistem complet de axiome, suficient pentru a construi întreaga geometrie euclidiană numai pe cale logică.

Se poate de spus: cu ”Bazele geometriei” lui Hilbert se începe actuala metodă axiomatică în matematică. Din aceste considerente în capitolul următor ne vom face cunoscut mai detailat cu această lucrare.

CAPITOLUL II. AXIOMATICA LUI D. HILBERT

După Hilbert se presupune că sunt date trei mulțimi diferite. Elementele primei mulțimi se numesc puncte, elementele celei de a doua mulțime se numesc drepte, iar elementele celei de a treia mulțime se numesc plane. Punctele, dreptele și planele se notează corespunzător prin literele $A, B, C, \ldots, a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Se presupune că elementele acestor mulțimi se află în anumite relații, care se numesc ”aparține”, ”a fi situat între” și ”congruent”. Acestea sunt relațiile de bază. Natura acestor noțiuni, adică a elementelor celor trei mulțimi și a relațiilor de bază pot fi arbitrare, dar acestea trebuie să satisfacă anumitor axiome. Sistemul de axiome a lui Hilbert conține 20 axiome care sunt împărțite în cinci grupe.

Observație. Când se va vorbi despre două sau trei puncte, trei sau două drepte, două sau trei plane, atunci de fiecare dată se va avea în vedere că acestea sunt diferite.

2.1. Grupa I. Axiomele de incidență

Axiomele acestei grupe presupun că între elementele celor trei mulțimi are loc o anumită relație, care se exprimă prin niște noțiuni nedefinite ”a fi situat pe”, ”aparține”, ”incident”, astfel încât se satisfac următoarele axiome:

I_1. Pentru orice două puncte A și B, există dreapta a ce trece prin aceste puncte.

I_2. Pentru orice două puncte A și B, există nu mai mult decât o dreapta a ce trece prin aceste puncte.

I_3. Pe fiecare dreaptă există cel puțin două puncte. Există cel puțin trei puncte, ce nu aparțin unei drepte.

I_4. Pentru orice trei puncte A, B, C, ce nu aparțin unei drepte, există planul α ce trece prin aceste puncte. Pe fiecare plan este situat cel puțin un punct.

I_5. Pentru orice trei puncte, ce nu aparțin unei drepte, există nu mai mult decât un plan, ce trece prin aceste puncte.

I_6. Dacă două puncte A, B ale dreptei a aparțin planului α, atunci fiecare punct al dreptei a aparține planului α.

În așa caz se spune că dreapta a este situată în planul α sau că planul α trece prin dreapta a.

I_7. Dacă două plane α și β au un punct comun A, atunci ele au cel puțin încă un punct comun B.

I_8. Există cel puțin patru puncte, ce nu aparțin aceluiași plan.

Cu ajutorul axiomelor $I_1 - I_8$ pot fi demonstrate un șir de teoreme, unele din care în cursul școlar nici nu se demonstrează, considerându-se ca evidente.

Vom enumera unele dintre acestea.

Teorema 2.1.1. Prin două puncte A, B trece o dreaptă a și numai una singură.

Teorema 2.1.2. Prin trei puncte ce nu aparțin unei drepte trece un plan și numai unul singur.

Teorema 2.1.3. Două drepte nu pot avea mai mult decât un punct comun.

Teorema 2.1.4. Două plane sau n-au nici un punct comun, sau au o dreaptă comună, pe care sunt situate toate punctele comune ale acestor plane.

Teorema 2.1.5. Printr-o dreaptă și un punct ce nu-i aparține trece un plan și numai unul singur.

Teorema 2.1.6. Prin două drepte ce se intersectează trece un plan și numai unul singur.

Teorema 2.1.7. Pe fiecare plan există cel puțin trei puncte ce nu aparțin unei drepte.

Teorema 2.1.8. Planul și dreapta ce nu-i aparține nu pot avea mai mult decât un punct comun.

După cum se vede, atât din axiomele de incidență, cât și din teoremele formulate mai sus, atât dreptele cât și planele sunt foarte ”sărace” în puncte. Numai cu ajutorul axiomelor $I_1 - I_8$ nu se poate demonstra că pe dreaptă ori plan există un număr infinit de puncte.

2.2. Grupa II. Axiomele de ordine

Se presupune că un punct pe dreaptă se poate afla într-o anumită relație cu alte două puncte ale acestei drepte. Această relație se exprimă prin cuvintele ”a fi situat între” sau ”situat între”. Dacă punctul B este situat între punctul A și punctul C, vom scrie $A\text{–}B\text{–}C$. Se presupune satisfacerea următoarelor axiome:

II_1. Dacă $A\text{–}B\text{–}C$, atunci A, B, C sunt trei puncte ale unei drepte și $C\text{–}B\text{–}A$.

II_2. Pentru orice două puncte A și B, pe dreapta AB există cel puțin un punct C, astfel încât $A - B - C$.Место для формулы.

II_3. Pentru orice trei puncte ale unei drepte, există nu mai mult decât un punct, situat între celelalte două puncte.

II_4. (**Axioma lui Pash**). Fie A, B, C trei puncte ce nu aparțin unei drepte, iar a o dreaptă din planul ABC, ce nu trece nici prin unul din punctele A, B, C. Atunci, dacă dreapta a trece printr-un punct al segmentului AB, atunci ea trece deasemenea printr-un punct al segmentului AC sau BC.

Cu ajutorul axiomelor primelor două grupe de axiome pot fi demonstrate un şir de teoreme, printre care în mod deosebit vom demonstra următoarea teoremă.

Teorema 2.2.1. Dacă A şi C sunt două puncte, atunci există cel puţin un punct B, astfel încât $A - B - C$.

Demonstraţie. Conform axiomei I_3 există punctul D, ce nu aparţine dreptei AC. (fig. 18).

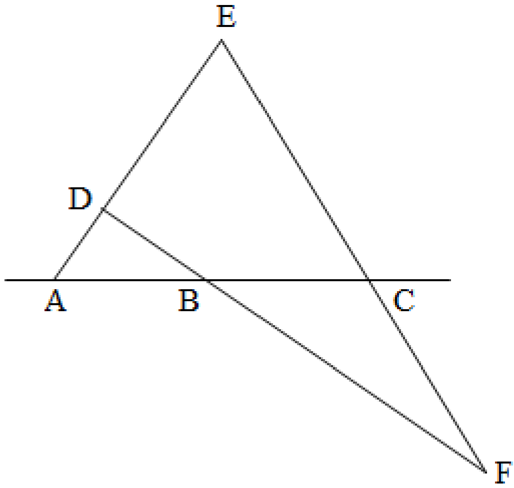


Fig. 18

Conform Teoremei 2.1.5 din paragraful precedent prin punctul D și dreapta AC trece un singur plan α. Conform axiomei II_2 pe dreapta AD există așa punct E, încât $A - D - E$. După axioma I_6 punctul E aparține planului α. Conform axiomei II_2 pe dreapta EC există așa punct F, încât $E - C - F$. Conform axiomei I_6 punctul F este situat în planul α și dreapta FD deasemenea aparține planului α. În baza axiomei II_3 F nu este situat între E și C, adică nu aparține segmentului EC. Dreapta FD nu trece nici prin unul din punctele A, E, C. Într-adevăr, dreapta FD are cu dreapta EC punctul comun F, diferit de

E și C în baza axiomei II_1, iar în baza teoremei 3 din paragraful precedent alte puncte comune nu pot să existe. Dreapta FD nu trece nici prin punctul A, deoarece are cu dreapta AE punctul comun D, diferit de punctele A și E (axioma II_1) și alte puncte comune nu există (Teorema 3 din paragraful precedent). Prin urmare, avem dreptul de a folosi axioma lui Pash în raport cu dreapta DF și punctele A, E, C. Să aplicăm axioma lui Pash, în baza căreia dreapta DF va intersecta ori segmentul EC, sau segmentul AC într-un punct interior. După cum am văzut însă, DF nu are puncte comune cu segmentul EC și prin urmare, dreapta DE intersectează segmentul AC într-un punct interior B. Teorema este demonstrată.

Se pare acum, că se poate demonstra, că pe segmentul AC există o mulțime infinită de puncte, dacă aplicăm această teoremă la segmentul AB sau BC ș.a.m.d. Aceasta însă nu este chiar așa. Problema e că, dacă $A-B-C$, iar $B-D-C$, din axiomele noastre încă nemijlocit nu se vede că $A-D-C$. Din această cauză va trebui de demonstrat niște afirmații adăugătoare.

Teorema 2.2.2. Din trei puncte ale unei drepte unul și numai unul este situat între celelalte două.

Teorema 2.2.3. Dacă $A-B-C$, iar $B-C-D$, atunci B și C sunt situate între A și D.

Teorema 2.2.4. Dacă $A-B-C$ și $A-C-D$, atunci $B-C-D$ și $A-B-D$.

Teorema 2.2.5. Între orice două puncte ale dreptei sunt situate o mulțime infinită de puncte.

Demonstrație. Fie pe dreapta a sunt date punctele A și B. Conform Teoremei 2.2.1 există punctul C, astfel încât $A-C-B$. Conform aceleiași teoreme există punctul C_1, astfel încât $A-C_1-C$. Conform teoremei 4 punctul C este situat între punctele A și B, iar conform axiomei II_1 punctele A, B, C, C_1 sunt puncte diferite ale dreptei (axioma II_1). În baza teoremei 1 există punctul C_2, astfel încât $A-C_2-C_1$. Conform teoremei 4 este situat între A și C, dar atunci în baza aceleiași teoreme $A-C_2-B$ și conform axiomei II_1 este diferit de punctele A, B, C, C_2. Repetând aceste raționamente, noi putem demonstra existența oricărui număr de puncte pe segmentul AB.

Să menționăm că astfel, noi demonstrăm doar existența unei mulțimi numerabile de puncte pe dreaptă. Pentru a demonstra însă existența unui număr nenumerabil de puncte de puterea continuumului, axiomele primelor două grupe nu sunt suficiente. Pentru aceasta este necesar de aplicat axiomele de continuitate. Aceasta se referă și la demonstrația existenței unui număr infinit de drepte în plan și de plane în spațiu.

Se introduc noțiuni noi și se demonstrează noi teoreme.

Definiția 2.2.6. Fie A, B, O trei puncte ale unei drepte. Dacă O este situat între A și B, atunci se spune că A și B sunt situate de părți diferite de la punctul O, iar dacă O nu este situat între A și B, atunci se spune că A și B sunt situate pe dreaptă de aceiași parte de la punctul O.

Are loc teorema:

Teorema 2.2.7. Fiecare punct O al dreptei a împarte toate celelalte puncte ale dreptei a în două clase, astfel încât orice două puncte ce aparțin uneia și aceleași clase sunt situate de aceiași parte de la punctul O, iar orice două puncte ce aparțin la clase diferite, sunt situate de părți diferite de la punctul O.

Această teoremă permite de a introduce noțiunea de semidreaptă.

Definiția 2.2.8. Mulțimea tuturor punctelor dreptei a, situate de una și aceiași parte de la punctul O, adică ce aparțin unei clase, se numește semidreaptă, iar punctul O se numește originea semidreptei.

Din Teorema 2.2.7 urmează că fiecare punct împarte dreapta în două semidrepte.

Prin anologie se introduce noțiunile de semiplan și semispațiu.

Se introduce noțiunea de unghi, de punct interior unghiului, de punct exterior unghiului, de domeniu interior unghiului și de domeniu exterior unghiului.

Teorema 2.2.9. Fiecare semidreaptă h, ce trece prin interiorul unghiului AOB și prin punctul O intersectează segmentul AB și invers: orice semidreaptă ce trece prin vârful unghiului și printr-un punct interior segmentului AB, ce unește două puncte A și B, ce aparțin laturilor unghiului, este semidreaptă interioară unghiului AOB.

Cu ajutorul primelor două grupe de axiome se poate deasemenea introduce noțiunile de linie frântă, de poligon, de domeniu interior poligonului și de domeniu exterior poligonului.

Dacă O este un punct oarecare, h o semidreaptă cu originea O, iar λ este semiplanul determinat de dreapta $\bar{h}$, atunci terna O, h, λ se numește steag și se notează (O, h, λ). Aici $\bar{h}$ este dreapta determinată de semidreapta h.

2.3. Grupa III. Axiomele de congruență

Se presupune că segmentul (unghiul) se află într-o anumită relație cu alt oarecare segment (unghi). Această relație se exprimă prin cuvântul ”congruent” sau ”egal” și se notează ” $\equiv$ ” sau ” $=$ ”. Se cere satisfacerea următoarelor cinci axiome.

III_1. Dacă este dat segmentul AB și o semidreaptă cu originea în punctul A', atunci există punctul B' ce aparține acestei semidrepte, astfel încât $[A'B'] \equiv [AB]$.

Se poate demonstra că punctul B' pe această dreaptă este unic.

III_2. Dacă $[A'B'] \equiv [AB]$ și $[A''B''] \equiv [AB]$, atunci $[A'B'] \equiv [A''B'']$.

III_3. Fie $A-B-C$, $A'-B'-C'$, $[AB] \equiv [A'B']$ și $[BC] \equiv [B'C']$, atunci $[AC] \equiv [A'C']$.

III_4. Fie dat $\measuredangle hk$ și steagul (O', h', λ'). Atunci, în semiplanul λ' există o semidreaptă k' și numai una singură cu originea în O', astfel încât $\measuredangle hk \equiv \measuredangle h'k'$.

Fiecare unghi este conrgruent cu sine însuși.

III_5. Fie A, B, C trei puncte ce nu aparțin unei drepte și A', B', C' deasemenea trei puncte ce nu aparțin unei drepte. Dacă $[AB] \equiv [A'B']$, $[AC] \equiv [A'C']$, $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$, atunci $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$.

Cu ajutorul axiomelor de congruență pot fi demonstrate un șir de teoreme. Vom enumera unele din ele.

Teorema 2.3.1. Relația de congruență este o relație de echivalență pe mulțimea segmentelor.

Teorema 2.3.2. În triunghiul isoscel unghiurile de la bază sunt congruente.

Definițiea2.3.3. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ se numesc congruente, dacă $[AB] \equiv [A'B']$, $[BC] \equiv [B'C']$, $[CA] \equiv [C'A']$, $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$, $\measuredangle B \equiv \measuredangle B'$, $\measuredangle C \equiv \measuredangle C'$.

Teorema 2.3.4. Au loc cele trei criterii de congruență a triunghiurilor.

În calitate de exemplu, să demonstrăm primul criteriu de congruență a triunghiurilor.

Dacă în triunghiurile ABC și $A'B'C'$, $[AB] \equiv [A'B']$, $[AC] \equiv [A'C']$, $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

Demonstrație. Deoarece $[AB] \equiv [A'B']$, $[AC] \equiv [A'C']$ și $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$, atunci în baza axiomei III_5 avem $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$, adică $\measuredangle B \equiv \measuredangle B'$. Din $[AB] \equiv [A'B']$, $[AC] \equiv [A'C']$, $\measuredangle CAB \equiv \measuredangle C'A'B'$ în baza aceleași axiome $\measuredangle ACB \equiv \measuredangle A'C'B'$, adică $\measuredangle C \equiv \measuredangle C'$. Rămâne să demonstrăm că $[BC] \equiv [B'C']$. Facem demonstrația de la contrariu. Fie $[BC] \not\equiv [B'C']$. În baza axiomei III_1 pe semidreapta $[B'C')$ există punctul D pentru care $[BC] \equiv [B'D']$. Așa cum punctele C' și D' nu coincide, urmează că semidreptele $[A'C')$ și $[A'D')$ deasemenea nu coincid (fig. 19).

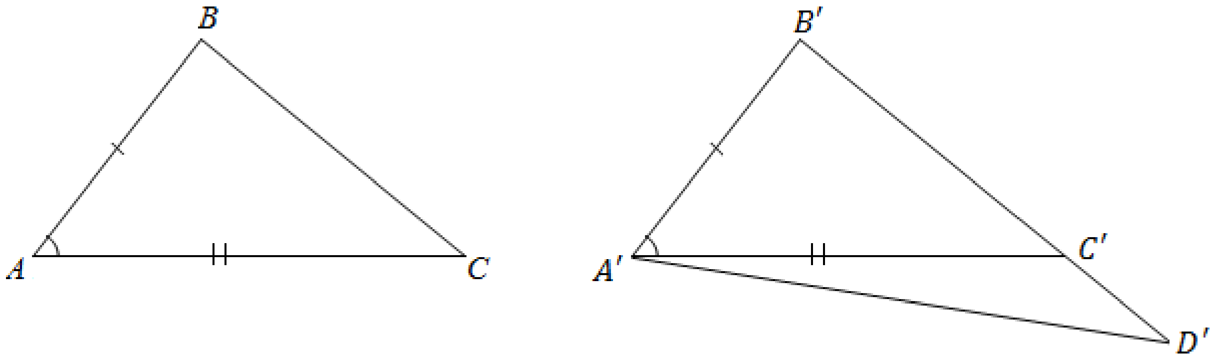


Fig. 19

Din $[BA] \equiv [B'A']$, $[BC] \equiv [B'D']$, $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'D'$ în baza axiomei III_5 obținem $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'D'$. După condiție însă $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$. Ultimele două congruențe contrazic condiției de unicitate în axioma III_4. Prin urmare, $[BC] \equiv [B'C']$.

Teorema este demonstrată.

Cu ajutorul criteriilor de congruență a triunghiurilor se demonstrează următoarea teoremă.

Teorema 2.3.5. Relația de congruență pentru unghiuri este o relație de echivalență.

Se definesc noțiunile ”mai mic”, ”mai mare” pentru segmente și unghiuri și se determină proprietățile comparării segmentelor și unghiurilor. Se introduce noțiunea de unghi adiacent și unghi drept.

Teorema 2.3. 6. Unghiul drept există.

Teorema 2.3.7. Unghiurile drepte sunt congruente.

Teorema 2.3.8. În fiecare triunghi laturii mai mare se opune unghiul mai mare și invers.

În mod deosebit menționăm teorema la care vom apela de mai multe ori.

Teorema 2.3.9. Unghiul exterior al triunghiului este mai mare decât fiecare din cele două interioare nealăturate.

Se definesc mijlocul segmentului și bisectoarea unghiului.

Teorema 2.3.10. Fiecare segment are un mijloc și numai unul singur.

Teorema 2.3.11. Fiecare unghi are o bisectoare și numai una singură.

Teorema 2.3.12. În triunghiul isoscel bisectoarea unghiului de la vârf este mediană și înălțime.

Teorema 2.3.13. Prin orice punct al planului trece o singură perpendiculară la o dreapta dată.

Teorema 2.3.14. Dacă două drepte sunt perpendiculare la aceiași dreaptă, atunci aceste două drepte nu se intersectează.

Teorema 2.3.15. Dacă la intersecția a două drepte cu a treia dreaptă se formează unghiuri corespondente congruente, atunci aceste două drepte nu se intersectează.

Teorema 2.3.16. Dacă în planul α sunt date o dreaptă și un punct ce nu aparține aceste drepte, atunci prin acest punct trece cel puțin o dreaptă ce nu intersectează dreapta dată.

2.4. Grupa IV. Axiomele de continuitate

IV_1. (**Axioma lui Arhimede**). Fie $[AB]$ și $[CD]$ două segmente arbitrare. Atunci pe dreapta AB există un număr finit de puncte $A_1, A_2, \dots A_n$ astfel încât au loc relațiile:

1) $A - A_1 - A_2,\ A_1 - A_2 - A_3, \dots, A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$;

2)$[AA_1] \equiv [A_1A_2] \equiv \dots \equiv [A_{n-1}A_n] \equiv [CD]$;

3)$A - B - A_n$.

IV_2. (**Axioma lui Cantor**). Fie pe o dreaptă arbitrară a este dat un șir infinit de segemente $[A_1B_1], [A_2B_2], \dots, [A_{n-1}A_n]$, ..., astfel încât fiecare începând cu al doilea este situat în interiorul celui precedent și pentru fiecare segment $[CD]$ există așa $n \in \mathbb{N}$, încât $[A_nB_n] < [CD]$. Atunci pe dreapta a există așa punct M, ce aparține fiecărui segment al acestui șir.

Ușor ne încredințăm că punctul M este unic. Într-adevăr, dacă presupunem că punctul N diferit de punctul M deasemenea aparține tuturor segmentelor șirului, atunci obținem că $[A_nB_n] \geq [MN]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fapt ce contrazice axiomei.

Se poate demonstra că axiomele $IV_1 - IV_2$ cu condiția că au loc axiomele $I - III$ sunt echivalente cu axioma lui ***Dedekind***.

Fie dată o descompunere a punctelor segmentului $[AB]$ în două clase K_1 și K_2 (adică $K_1 \cup K_2 = [AB]$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$), care satisface la două condiții:

1) $A \in K_1, B \in K_2$ și clasele K_1, K_2 mai conțin puncte diferite de A și B;
2) Orice punct din clasa K_1 diferit de A este situat între A și orice punct din clasa K_2.

Atunci, există punctul M_0 pe segmentul $[AB]$, astfel încât orice punct situat între A și M_0 aparține clasei K_1, iar orice punct situat între M_0 și B aparține clasei K_2.

Împărțirea segmentului $[AB]$ în clasele K_1 și K_2, care satisface condițiilor $1) - 2)$ se numește *secțiunea lui Dedekind*. Despre punctul M_0 se spune că el face această secțiune. Se poate demonstra că punctul M_0 este unic și că el aparține uneia din clasele K_1 sau K_2.

Cele mai importante consecințe din axiomele $I - IV$ se referă la teoria măsurării segmentelor și unghiurilor. Construind teoria măsurării segmentelor, ușor se poate demonstra, că există aplicație biunivocă între punctele dreptei și mulțimea numerelor reale și că această aplicație păstrează ordinea. Prin urmare, punctele pe dreaptă sunt continuu situate unul după altul, după cum și numerele în mulțimea $\mathbb{R}$.

Să mai menționăm că odată cu introducerea axiomelor de continuitate se mai poate demonstra și așa teoreme:

Teorema 2.4.1. Dreapta situată într-un plan cu cercul și care trece printr-un punct A interior cercului, intersectează cercul în două puncte.

Teorema 2.4.2. Dacă două cercuri sunt situate în același plan, astfel încât unul trece printr-un punct interior și printr-un punct exterior în raport cu celălalt, atunci aceste cercuri se intersectează în două puncte.

2.5. Grupa V. Axioma paralelelor

Totalitatea axiomelor din grupele $I - IV$, cercetate mai sus, nu-s suficiente pentru a fundamenta geometria euclidiană, este necesară încă axioma paralelelor.

Toate afirmațiile geometrice, care pot fi demonstrate în baza axiomelor grupelor $I - IV$ determină așa numita geometrie absolută. Toate teoremele pe care le-am anunțat după fiecare grupă din cele patru grupe de axiome cercetate, sunt teoreme ale geometriei absolute. După cum am văzut, geometriei absolute îi aparține și teorema despre aceia, că printr-un punct, ce nu aparține dreptei date, în planul determinat de acest punct și această dreaptă, trece nu mai mult decât o dreaptă ce nu intersectează dreapta dată. Garantând existența unei așa drepte, teorema aceasta nu dă răspuns la întrebarea, dacă această dreaptă va fi unică.

În dependență de faptul, acceptăm noi ca în calitate de cerință adăugătoare, această dreaptă să fie unică sau nu, noi obținem corespunzător sau geometria lui Euclid, sau geometria lui Lobacevski.

Geometria absolută, bazată doar pe axiomele primelor patru grupe de axiome, este partea comună a cestor două geometrii.

Axioma paralelelor lui Euclid poate fi formulată în felul următor:

V. *Fie a o dreaptă oarecare și A un punct ce nu-i aparține dreptei a, atunci în planul determinat de dreapta a și punctul A, prin punctul A trece nu mai mult decât o dreaptă, ce nu intersectează dreapta a.*

Dacă la cele patru grupe de axiome mai acceptăm și axioma paralelelor V a lui Euclid, atunci noi facem concluzia, că prin punctul $A \notin a$ trece o singură dreaptă ce nu intersectează dreapta a. Această dreaptă se numește paralelă la dreapta a.

În baza axiomelor celor cinci grupe $I - V$ se poate construi teoria paralelelor după Euclid, de demonstrat teorema despre suma unghiurilor interioare în triunghi și în poligonul convex, de studiat proprietățile paralelogramului și trapezului, de construit teoria asemănării ș.a.m.d. Să mai menționăm, că axiomele grupelor $I - V$ permit argumentarea trigonometriei studiate în cursul preuniversitar și deasemenea geometria analitică a lui Descartes. În particular, folosind teorema lui Pitagora, pentru demonstrarea căreia este necesar de folosit axioma V a paralelelor, se poate de demonstrat formula de calculare a distanței dintre două puncte după coordonatele acestor puncte. Se mai poate demonstra că planul în spațiu poate fi determinat de o ecuație de gradul întâi, iar dreapta de către un sistem de două ecuații cu trei variabile. Astfel, avem posibilitatea de a aplica algebra pentru a demonstra teoremele geometriei.

Cu ajutorul axiomelor $I - V$ se poate introduce noțiunea de arie a poligonului și noțiunea de volum a poliedrului.

CAPITOLUL III. GEOMETRIA ELEMENTARĂ ÎN PLANUL HIPERBOLIC

3.1. Geometria absolută

După cum am menționat în capitolul I, în geometrie există o mulțime de afirmații, care nu depind de postulatul V a lui Euclid. Totalitatea acestor afirmații alcătuiesc așa numita geometrie absolută. S-a menționat deasemenea, că sistemul lui Euclid nu era complet şi deseori, atât Euclid cât şi geometrii după dânsul, erau nevoiţi să apeleze la desen, adică să se bazeze pe careva afirmaţie evidentă.

N. I. Lobacevski s-a pomenit într-o situație similară. El n-a propus un sistem de axiome, n-a formulat o listă completă de axiome și nici n-a putut să facă acest lucru, dar ca și Euclid, deseori apela la desen, acceptând unele afirmații ca evidente.

Lobacevski în cercetările sale se bazează pe toate afirmațiile lui Euclid, demonstrate fără a apela la postulatul V. Toate aceste afirmații sunt comune pentru geometria lui Euclid și cea a lui Lobacevski. Astfel geometria absolută este fundamentul și geometriei lui Euclid și a geometriei hiperbolice.

Să aducem o listă necompletă de teoreme din planimetrie, care se referă la geometria absolută.

Teorema 3.1.1. Fiecare segment și fiecare unghi se poate în mod univoc de împărțit în jumătate.

Teorema 3.1.2. Prin fiecare punct se poate construi o singură perpendiculară la dreapta dată.

Teorema 3.1.3. Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.

Teorema 3.1.4. Toate unghiurile drepte sunt congruente.

Teorema 3.1.5. În orice triunghi nu poate fi mai mult decât un unghi drept sau obtuz.

Teorema 3.1.6 Într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului de la vârf este și mediană și înălțime.

Teorema 3.1.7. Unghiul exterior al triunghiului este mai mare decât fiecare din cele două nealăturate.

Teorema 3.1.8. În triunghi latura mai mare se opune unghiului mai mare și invers.

Teorema 3.1.9. Au loc cele trei criterii de congruență a triunghiurilor.

Teorema 3.1.10. Dacă la intersecția a două drepte cu o secantă se obțin unghiuri corespondente congruente sau că suma celor alterne interne de aceiași parte a secantei sunt egale cu $2d$, atunci aceste două drepte nu se intersectează.

Teorema 3.1.11. Două perpendiculare la aceiași dreaptă nu se intersectează.

Teorema 3.1.12. Suma unghiurilor în triunghi nu poate fi mai mare decât $2d$.

Teorema 3.1.13. Print-un punct ce nu aparține dreptei date, în planul determinat de acest punct și dreapta dată, trece măcar o dreaptă ce nu intersectează dreapta dată.

Teorema 3.1.14. Dacă semidreapta trece prin vârful triunghiului și prin interiorul acestui triunghi, atunci semidreapta intersectează latura opusă a triunghiului.

Teorema 3.1.15. Bisectoarele triunghiului se intersectează într-un punct din interiorul triunghiului.

Teorema 3.1.16. În orice triunghi se poate înscri un singur cerc.

Teorema 3.1.17. Dreapta intersectează cercul nu mai mult decât în două puncte.

Teorema 3.1.18. Dacă în plan două puncte sunt situate de părți diferite a unei drepte, atunci segmentul ce unește aceste puncte intersectează dreapta dată.

Teorema 3.1.19. Dacă alegem un segment unitar, atunci fiecărui segment i se poate pune în corespondență un singur număr pozitiv, numit lungimea segmentului și invers, fiecărui număr pozitiv se poate pune în corespondență un segment, lungimea căruia se exprimă prin acest număr.

Teorema 3.1.20. Dacă alegem un unghi oarecare în calitate de unitate de măsură, atunci fiecărui unghi i se poate pune în corespondență un singur număr, numit măsura sau mărimea unghiului.

Teorema 3.1.21. Dacă toate semidreptele ce pornesc din vârful unghiului AOB și laturile $[OA)$ și $[OB)$ sunt împărțite în două clase K_1 și K_2 astfel încât:

1) Fiecare semidreaptă aparține unei și numai unei clase, $[OA)$ aparține clasei K_1, iar $[OB)$ aparține clasei K_2;

2) Fiecare semidreaptă diferită de $[OA)$ din clasa K_1 este situată între $[OA)$ și orice semidreaptă din clasa K_2, atunci există o semidreaptă h și numai una singură de frontieră între semidreptele acestor clase, iar semidreapta h aparține clasei K_1 sau clasei K_2.

Evident, există mult mai multe afirmații în geometria absolută. Aici au fost aduse doar acele afirmații care vor fi folosite în expunerea geometriei hiperbolice.

3.2. Axioma lui Lobacevski. Paralelismul dreptelor după Lobacevski

Geometria lui Lobacevski (sau geometria hiperbolică) se bazează pe axiomele primelor patru grupe de axiome a lui Hilbert, adică pe axiomele geometriei absolute și pe axioma lui Lobacevski:

$\boldsymbol{V^*}$. *Fie a o dreaptă arbitrară, iar A un punct ce nu aparține dreptei a. Atunci în planul, determinat de dreapta a și punctul A, există cel puțin două drepte, ce trec prin punctul A și care nu intersectează dreapta a.*

Din axioma V^* urmează nemijlocit, că fiind dată o dreaptă și un punct A ce nu aparține dreptei a, atunci există o mulțime infinită de drepte ce trec prin punctul A și care nu intersectează dreapta a.

Într-adevăr, conform axiomei V^* există două drepte, pe care le notăm prin b și c, care trec prin punctul $A \notin a$ și nu intersectează dreapta a (fig. 20). Dreptele b și c formează două perechi de unghiuri opuse la vârf, care sunt notate în fig. 20 prin 1,2 și 3,4.

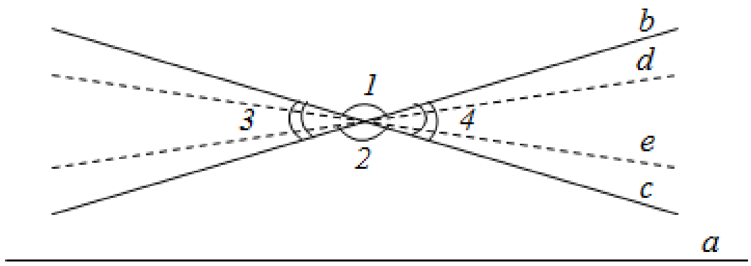


Fig. 20

Deoarece dreapta a nu intersectează dreptele b și c, urmează că toate punctele dreptei a aparțin domeniului interior al unuia din cele patru unghiuri 1,2,3,4. Fie, de exemplu dreapta a aparține domeniului interior al unghiului 2. Atunci, evident, orice dreaptă ce trece prin punctul A și este situată în domeniile interioare ale unghiurilor 3,4, nu intersectează dreapta a (de exemplu dreptele d, l din fig. 20).

Spre deosebire de definiția dreptelor paralele după Euclid, în geometria hiperbolică paralele la dreapta dată se numesc numai unele din dreptele ce nu intersectează dreapta dată. Pentru a introduce această noțiune, vom considera că toate dreptele pe care le vom cerceta, sunt drepte orientate. Din această cauză noi le vom nota prin două litere, de exemplu UV, considerând că punctul U este premergător punctului V. Vom presupune deasemenea, că punctele U și V sunt alese astfel, încât toate punctele cercetate de noi pe această dreaptă, sunt situate între punctele U și V.

Definiția 3.2.1. Dreapta AB se numește paralelă la dreapta CD, dacă aceste drepte n-au puncte comune și pentru orice puncte P, Q ,astfel încât $P \in AB$ și $Q \in CD$, orice semidreaptă interioară unghiului QPB intersectează semidreapta QD (fig. 21). Dacă dreapta AB este paralelă la dreapta CD se notează $AB \parallel CD$.

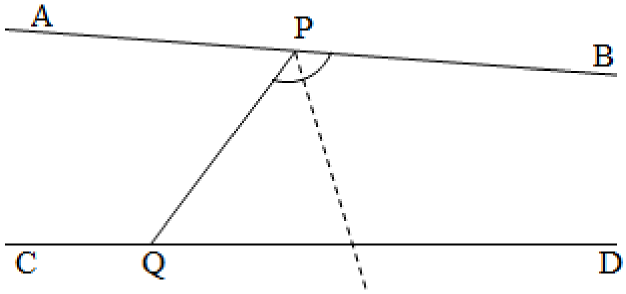


Fig. 21

Are loc următorul criteriu de paralelism al dreptelor.

Teorema 3.2.2. Dacă dreptele AB și CD n-au puncte comune și există așa puncte P, Q, astfel, încât $P \in AB$, $Q \in CD$ și orice semidreaptă h interioară unghiului QPB intersectează semidreapta QD, atunci $AB \parallel CD$.

Demonstrație. Pentru a demonstra teorema este suficient să determinăm că pentru orice puncte P' și Q' ce aparțin corespunzător dreptelor AB și CD, orice semidreaptă interioară unghiului $Q'P'B$ intersectează semidreapta $Q'D$. Sunt posibile următoarele trei cazuri:

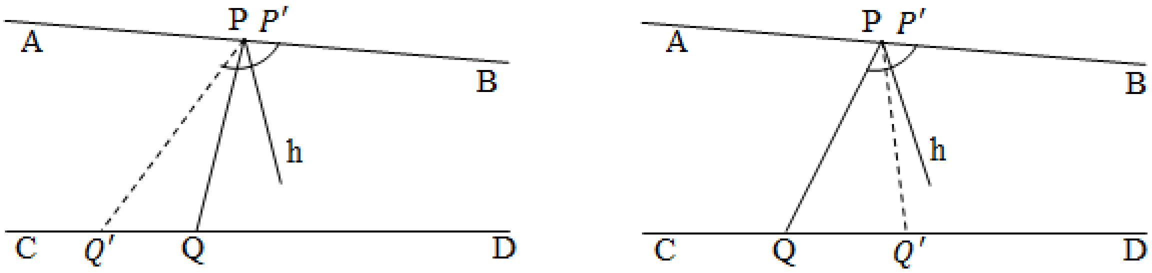
a) Punctul P' coincide cu punctul P;

b) Punctul P' aparține semidreptei $[PA)$;

c) Punctul P' aparține semidreptei $[PB)$.

Vom cerceta doar primele două cazuri, lăsând cazul trei pe seama cititorului.

a) Fie P' coincide cu punctul P. Dacă Q' aparține semidreptei $[QC)$, atunci $\measuredangle Q'P'B$ reprezintă reuniunea unghiurilor $Q'PQ$ și QPB și prin urmare, semidreapta h ori este situată în interiorul unghiului $Q'P'Q$, ori coincide cu semidreapta $[PQ)$, sau este situată în interiorul unghiului QPB (fig. 22, a).



a) b)

Fig. 22

În primele două cazuri semidreapta h intersectează segmentul $[Q'Q]$ și deaceia intersectează și semidreapta $[Q'Q)$. În cazul trei semidreapta h după condiția teoremei intersectează semidreapta $[QD)$ și prin urmare, intersectează și semidreapta $[Q'D)$.

Dacă Q' aparține semidreptei $[QD)$, atunci unghiul $Q'P'B$ reprezintă doar o parte a unghiului QPB (fig. 22, b). În așa caz semidreapta h este interioară unghiului QPB și după condițiile teoremei intersectează semidreapta QD. Punctul de intersecție aparține semidreptei $[Q'D)$, deoarece h nu trece prin interiorul unghiului QPQ' și prin urmare, nu intersectează segmentul $[QQ']$.

b) Punctul P' aparține semidreptei $[PA)$. Semidreapta h este situată în interiorul unghiului $Q'P'P$, deaceia h intersectează segmentul $[PQ']$ în careva punct M (fig. 23).

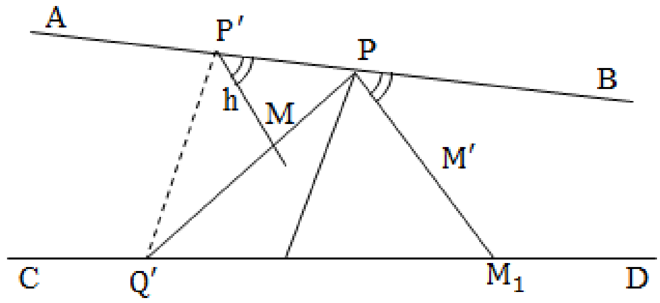


Fig. 23

Depunem de la semidreapta $[PB)$, în semiplanul în care este situată dreapta CD, unghiul BPM' congruent cu unghiul $PP'M$. Așa cum $\measuredangle BPQ'$ este exterior triunghiului $PP'Q'$, urmează că $\measuredangle PP'Q' < \measuredangle BPQ'$ și prin urmare, $\measuredangle PP'M < \measuredangle BPQ'$, dar atunci $[PM')$ este semidreaptă interioară unghiului BPQ'. Deci, conform celor demonstrate în a) această semidreaptă intersectează semidreapta $[Q'D)$ în careva punct M_1 (fig. 23).

Dreapta $P'M$ intersectează latura PQ' a triunghiului $PQ'M_1$ și nu intersectează latura PM_1 (deoarece $\measuredangle BPM_1 \equiv \measuredangle BP'M$), dar atunci conform axiomei lui Pash dreapta $P'M$ intersectează segmentul $[Q'M_1]$. Prin urmare, semidreapta h intersectează semidreapta $[Q'D)$.

Să demonstrăm existența dreptelor paralele.

Teorema 3.2.3. Fie AB o dreaptă orientată, iar M un punct ce nu aparține acestei drepte. Atunci în planul MAB există o drepată CD și numai una singură, care trece prin punctul M și este paralelă la dreapta AB.

Demonstrație. Fie $M \notin AB$. Construim perpendiculara MN pe dreapta AB și perpendiculara MP pe dreapta MN (fig. 24). Vom considera că punctele P și B sunt situate de aceiași parte în raport cu dreapta MN. Conform Lemei 1.5.1 dreptele MP și NB nu se intersectează.

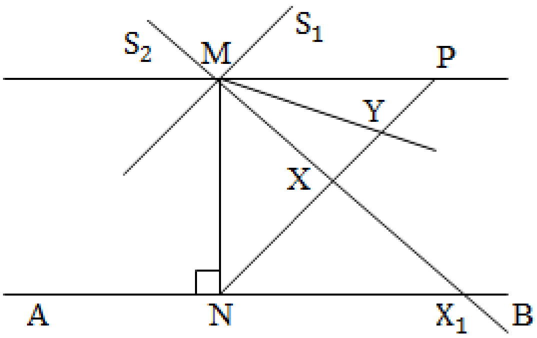


Fig. 24

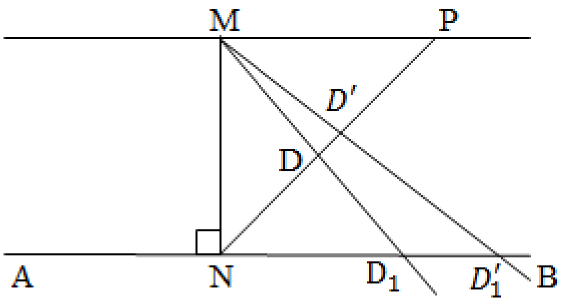


Fig. 25

Toate punctele segmentului $[NP]$ le împărțim în două clase K_1 și K_2. Fie în K_1 sunt acele puncte X ale segmentului NP, pentru care semidreapta $[MX)$ intersectează semidreapta $[NB)$, iar în K_2 acele puncte Y ale segmentului $[NP]$, pentru care semidreapta $[MY)$ nu intersectează semidreapta $[NB)$. Să demonstrăm că această împărțire satisface condițiilor $1) - 2)$ a axiomei lui Dedekind.

1) Evident $N \in K_1$ și $P \in K_2$. Clasa K_1 mai conține puncte diferite de N, de exemplu punctele X de intersecție a semidreptei $[MX_1)$ cu segmentul NP, unde X_1 este un punct arbitrar de pe semidreapta $[NB)$ (fig. 24).

Clasa K_2 conține puncte diferite de punctul P. Într-adevăr, conform axiomei V^* există dreapta MS_1, diferită de dreapta MP, care deasemenea nu intresectează dreapta AB. Atunci nici dreapta MS_2 simetrică cu MS_1 în raport cu dreapta MN, deasemenea nu va intersecta dreapta AB. Una din dreptele MS_1 sau MS_2 trece prin interiorul unghiului NMP și va intersecta segmentul $[NP]$ în careva punct Y, însă ea nu va intersecta semidreapta NB. Prin urmare $Y \in K_2$.

2) Fie X un punct arbitrar din clasa K_1 diferit de punctul N, iar Y oarecare punct din K_2. Atunci $N - X - Y$, deoarece în caz contrar vom avea $N - Y - X$, ceea ce înseamnă că semidreapta MY este semidreaptă interioară unghiului NMX. Atunci, semidreapta MY intersectează segmentul $[NX_1]$ și deci, $Y \in K_1$.

În așa fel, pe mulțimea punctelor segmentului $[NP]$ are loc secțiunea lui Dedekind. Fie punctul D face această secțiune. Să demonstrăm, că $D \in K_2$. Să presupunem contrariul, fie $D \in K_1$. Atunci semidreapta $[MD)$ intersectează semidreapta $[NB)$ în careva punct D_1 (fig. 25). Considerăm pe semidreapta $[NB)$ punctul D_1' astfel, încât $N - D_1 - D_1'$. Semidreapta MD_1' intersectează segmentul DP în careva punct D' și $D_1' \in K_1$. Acest rezultat contrazice axiomei lui Dedekind. Prin urmare, $D \in K_2$. Pe dreapta MD considerăm punctul C astfel, încât $C - M - D$. Conform teoremei precedente, vom avea $CD \parallel AB$.

Rămâne să demonstrăm, că CD este unica dreaptă ce trece prin punctul M și este paralelă la dreapta AB. Să presupunem contrariul, fie că mai există o altă dreaptă $C'D'$ ce trece prin punctul M și paralelă la dreapta AB. Conform definiției paralelismului dreptelor, semidreptele interioare unghiurilor NMD și NMD' intersectează semidreapta

$[NB)$, deaceia semidreptele MD și MD' sunt situate în același semiplan în raport cu dreapta MN, căruia îi aparține și semidreapta $[NB)$. Atunci sau $[MD)$ este semidreaptă interioară unghiului NMD', sau $[MD')$ este semidreaptă interioară unghiului NMD. Dar atunci, una din dreptele CD sau $C'D'$ intersectează dreapta AB, ceea ce contrazice definiției paralelismului a două drepte. Teorema este demonstrată.

Fie M un punct ce nu aparține dreptei a, iar MN perpendiculara din punctul M pe dreapta a. Fie $A, B \in a$, astfel încât, $A - N - B$. Din Teorema 3.2.3, urmează că prin punctul M trece o singură dreaptă $CD \parallel AB$ și o singură dreaptă $EF \parallel BA$ (fig. 26).

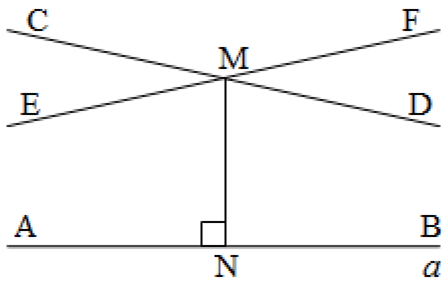


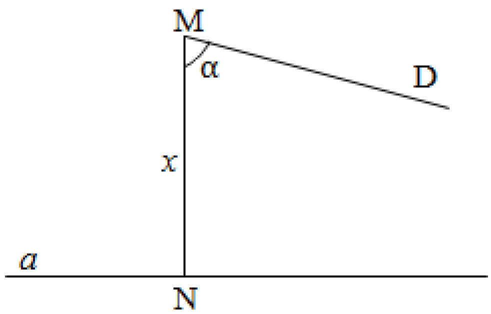
Fig. 26

În procesul demonstrării Teoremei 3.2.3 noi am stabilit, că unghiurile DMN și NMF sunt ascuțite și prin urmare, CD și EF sunt drepte diferite. Să demonstrăm că $\measuredangle DMN \equiv \measuredangle NMF$. Presupunem contrariu $\measuredangle DMN \not\equiv \measuredangle FMN$, de exemplu, $\measuredangle DMN > \measuredangle FMN$. Să cercetăm semidreapta $[MF')$, simetrică cu semidreapta $[MF)$ în raport cu dreapta MN (semidreapta MF' nu este în fig. 26). Această semidreaptă este interioară unghiului DMN. Așa cum $[MF)$ nu intersectează dreapta AB, atunci nici $[MF')$ nu va intersecta dreapta AB. Aceasta contrazice definiției paralelismului dreptelor CD și AB.

Astfel, prin fiecare punct M, ce nu aparține dreptei a, trec două drepte paralele la dreapta a, în două direcții diferite. Aceste două drepte formează unghiuri ascuțite congruente cu perpendiculara MN dusă din punctul M pe dreapta a. Fiecare din aceste două unghiuri se numește unghi de paralelism în punctul M în raport cu dreapta a.

Să demonstrăm, că mărimea unghiului de paralelism se determină complet de distanța de la punctul M până la dreapta a.

Fie NMD unghiul de paralelism în punctul M în raport cu dreapta a, iar $N'M'D'$ unghiul de paralelism în punctul M' în raport cu dreapta a', $\alpha = N\widehat{M}D$, $x = MN$, $\alpha' = N'\widehat{M'}D'$, $x' = M'N'$ (fig. 27). Să demonstrăm că $\alpha = \alpha'$, dacă $x = x'$.



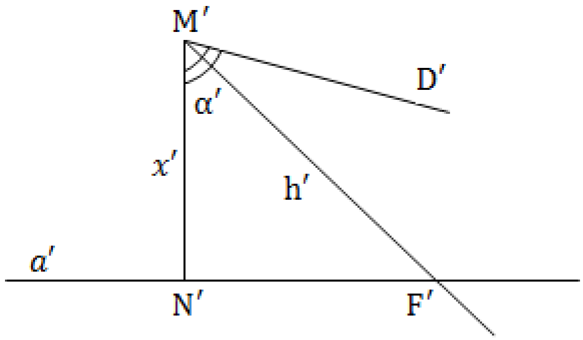


Fig. 27

Fie $\alpha' \neq \alpha$, de exemplu, $\alpha' > \alpha$. Atunci există o semidreaptă h' interioară unghiului $N'M'D'$, încât unghiul dintre semidreptele $[M'N')$ și h' are mărimea α. Semidreapta h', fiind interioară unghiului $N'M'D'$ va intersecta dreapta a' în careva punct F'. Pe dreapta a de la punctul N depunem segmentul $[NF] \equiv [N'F']$ astfel, încât punctele F și D să aparțină aceluiași semiplan în raport cu dreapta MN. Obținem $\Delta MNF \equiv \Delta M'N'F'$ (triunghiul MNF nu este arătat în fig. 27). Deoarece $N\widehat{M}F = \alpha$, apoi semidreptele $[MD)$ și $[MF)$ coincid. În așa fel am ajuns la concluzia că dreptele MD și a se intersectează. Acest fapt contrazice definiției paralelismului dreptelor. Pin urmare, $\alpha = \alpha'$.

În așa fel ne-am convins că mărimea unghiului de paralelism este o funcție de distanța de la punct până la dreaptă, adică $\alpha = \mathrm{f}(x)$. Această funcție se notează $\alpha = \Pi(x)$ și se numește funcția lui Lobacevski și joacă un rol foarte important în geometria hiperbolică. Din cele expuse mai sus devine clar, că funcția $\Pi(x)$ este definită pentru orice $x > 0$ și că $0 < \Pi(x) < \frac{\pi}{2}$.

N. I. Lobacevski a determinat expresia analitică a acestei funcții și anume:

$$tg\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}},$$

unde k este un număr oarecare pozitiv.

Din expresia analitică a funcției lui Lobacevski urmează că $\Pi(x)$ este o funcție monoton descrescătoare și primește toate valorile de la 0 până la $\frac{\pi}{2}$. Cu alte cuvinte, orice unghi ascuțit este unghi de paralelism în careva punct în raport cu careva dreaptă dată.

În așa fel, ne-am convins că în geometria hiperbolică există o dependență între mărimile unghiulare și mărimile liniare: aceasta este o deosebire esențială între geometria lui Euclid și geometria hiperbolică. Așa, de exemplu, în geometria hiperbolică nu există asemănarea figurilor. În particular, triunghiurile cu unghiurile corespunzător congruente, sunt congruente. După cum știm, în geometria euclidiană există mărimi constante a mărimilor unghiulare, de exemplu, unghiul drept sau radianul, în timp ce nu există mărimi absolut constante de lungime. Pentru a exprima lungimea segmentelor prin numere este necesar de ales unitatea de măsură a lungimei.

În calitate de asfel de unitate poate fi luat orice segment. În geometria hiperbolică, având unitatea de măsură a unghiurilor, se poate de ales mărimea de unitate de măsură a lungimii. Așa, de exemplu, în calitate de unitate de măsură a lungimii se poate lua segmentul, căruia îi corespunde unghiul de paralelism egal cu $\frac{\pi}{4}$ sau $\frac{\pi}{6}$, sau un oarecare alt unghi.

3.3. Triunghiuri și patrulatere în planul hiperbolic

În 3.1 au fost menționate un șir de teoreme a geometrie absolute. Printre acestea sunt și teoreme referitoare la triunghi. Toate teoremele, demonstrația cărora se face, fără a apela la postulatul V au loc și în geometria euclidiană și în geometria hiperbolică.

Totodată menționăm că triunghiurile și patrulaterele în planul hiperbolic au și unele proprietăți specifice. Vom cerceta unele dintre aceste teoreme.

Teorema 3.3.1. Suma unghiurilor interioare în orice triunghi este mai mică decât $2d$.

Demonstrație. Fie ABC un triunghi arbitrar. Conform primei teoreme Saccheri-Legendre $\sigma_{ABC} \leq 2d$. Dacă presupunem că $\sigma_{ABC} = 2d$, atunci după cum am demonstrat în Teorema 1.5.3, are loc postulatul V a lui Euclid, fapt ce contrazice axiomei V^*. Prin urmare, $\sigma_{ABC} < 2d$. Teorema este demonstrată.

Concluzie. Suma unghiurilor interioare în triunghi nu este una și aceiași pentru toate triunghiurile.

Demonstrație. Fie ABC un triunghi arbitrar, iar D un punct arbitrar pe latura BC. Atunci $\sigma_{ABC} = \sigma_{ABD} + \sigma_{ACD} - 2d$ (fig. 28). Așa cum $\sigma_{ACD} - 2d < 0$, urmează că $\sigma_{ABC} < \sigma_{ABD}$.

Teorema 3.3.2. Suma unghiurilor interioare în orice patrulater convex este mai mică decât $4d$.

Demonstrație. Fie $ABCD$ un patrulater convex arbitrar. Construim diagonala AC și astfel, descompunem patrulaterul în două triunghiuri ABC și ADC. Atunci $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\widehat{D}=\sigma_{ABC}+\sigma_{ADC}$. Deoarece $\sigma_{ABC}<2d$, $\sigma_{ADC}<2d$ urmează că $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\widehat{D}<4d$. Teorema este demonstrată.

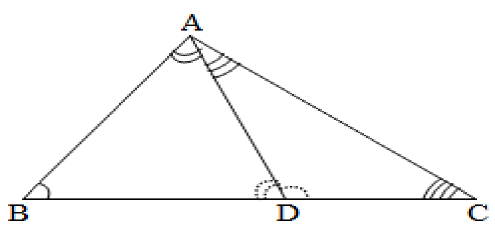
Din Teorema 3.3.2 nemijlocit urmează:

Teorema 3.3.3. În geometria hiperbolică unghiurile congruente de la baza de sus a patrulaterului Saccheri sunt ascuțite. Cu alte cuvinte, în geometria hiperbolică este justă ipoteza unghiului ascuțit a lui Saccheri.

Teorema 3.3.4. În geometria hiperbolică este justă ipoteza unghiului ascuțit a lui Lambert.

Teorema 3.3.5. Dacă trei unghiuri ale unui triunghi sunt congruente corespunzător cu trei unghiuri ale altui triunghi, atunci aceste două triunghiuri sunt congruente.

Demonstrație. Fie în triunghiurile ABC și $A'B'C'$ avem $\measuredangle A\equiv\measuredangle A'$, $\measuredangle B\equiv\measuredangle B'$, $\measuredangle C\equiv\measuredangle C'$. Să demonstrăm că $[AB]\equiv[A'B']$. Presupunem că $[AB]\not\equiv[A'B']$. Fie de exemplu $AB>A'B'$. Pe semidreptele $[AB)$ și $[AC)$ considerăm punctele B'' și C'' astfel încât $AB''=A'B'$ și $AC''=A'C'$ (fig. 29).



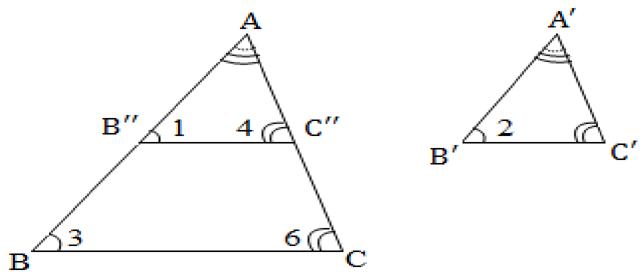


Fig. 28 Fig. 29

Conform primului criteriu de congruență a triunghiurilor avem: $\triangle AB''C''\equiv\triangle A'B'C'$ și deci, $\measuredangle 1\equiv\measuredangle 2$. Din condiția teoremei $\measuredangle 2\equiv\measuredangle 3$, dar atunci $\measuredangle 1\equiv\measuredangle 3$. Analogic, obținem că $\measuredangle 4\equiv\measuredangle 6$.

Din presupunere $AB>A'B'$ și deci, $A-B''-B$, adică dreapta $B''C''$ intersectează latura AB a triunghiului ABC. Din faptul că $\measuredangle 1\equiv\measuredangle 3$, urmează că $B''C''$ nu intersectează latura BC, dar atunci conform axiomei lui Pash, dreapta $B''C''$ va intersecta latura AC a triunghiului ABC și prin urmare, $A-C''-C$. Din ultima afirmație urmează că patrulaterul $BB''C''C$ este convex. Din congruențele $\measuredangle 1\equiv\measuredangle 3$ și $\measuredangle 4\equiv\measuredangle 6$ urmează că suma unghiurilor interioare în patrulaterul convex $BB''C''C$ este egală cu $4d$. Astfel noi am obținut contrazicere cu teorema 2. Prin urmare, $[AB] \equiv [A'B']$. În baza criteriului doi de congruență a triunghiurilor $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. Teorema este demonstrată.

Teorema 3.3.5 reprezintă cel de al patrulea criteriu de congruență a triunghiurilor din planul hiperbolic, care evident, nu are loc în geometria lui Euclid.

Am demonstrat (Teorema 3.3.1), că în orice triunghi ABC suma unghiurilor interioare $\sigma_{ABC} < 2d$. Diferența $2d - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$ se numește *defectul triunghiului* și se notează prin D_{ABC}. Evident, $0 < D_{\triangle} < 2d$. Să demonstrăm, că defectul triunghiului posedă proprietatea de aditivitate.

Teorema 3.3.6. $D_{ABC} = D_{ABD} + D_{BDC}$ (fig. 30).

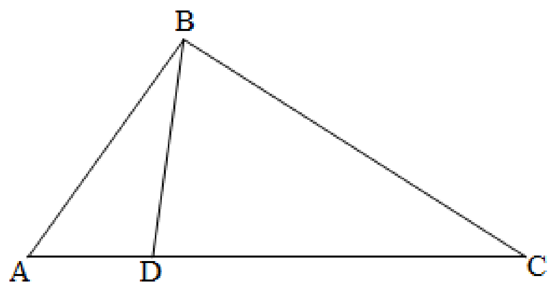


Fig. 30

Demonstrație. Într-adevăr, $D_{ABC} = 2d - \sigma_{ABC} = 2d - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = 2d -$
$-(\sigma_{ABD} + \sigma_{BDC} - 2d) = (2d - \sigma_{ABD}) + (2d - \sigma_{BDC}) = D_{ABD} + D_{BDC}$.

Teorema este demonstrată.

Teorema 3.3.7. Pentru orice unghi ascuțit există o unică dreaptă, perpendiculară pe una din laturile unghiului și paralelă la cealaltă latură.

Demonstrație. Demonstrația acestei teoreme vom face-o de la contrariu. Fie dat unghiul ascuțit MON și să presupunem că orice perpendiculară la latura OM intersectează latura ON **(**fig. 31).

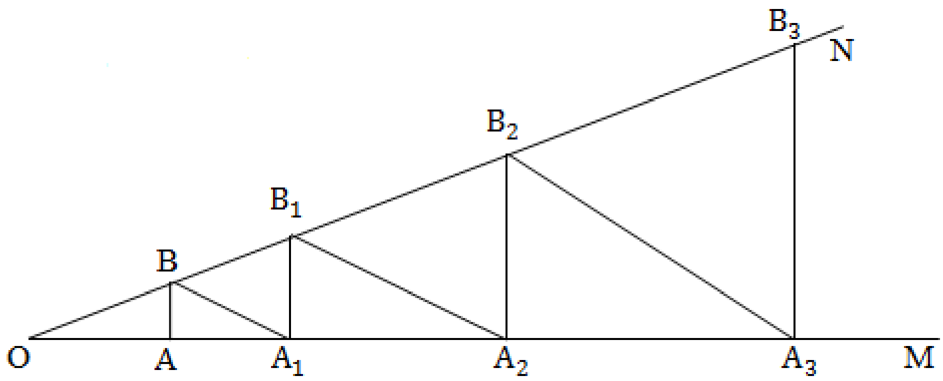


Fig. 31

Depunem pe semidreapta $[OM)$ un segment arbitrar $[OA]$, iar consecutiv $[AA_1] \equiv [OA]$, $[A_1A_2] \equiv [OA_1]$, ..., $[A_{n-1}A_n] \equiv [OA_{n-1}]$. În punctele $A, A_1, A_2, \dots, A_n$ construim perpendicularele la $[OM)$, care conform presupunerii, toate vor intersecta latura $[ON)$ corespunzător în punctele $B, B_1, B_2, \dots, B_n$. Construim segmentele $BA_1, B_1A_2, \dots, B_{n-1}A_n$. Atunci, $\triangle\, OAB \equiv \triangle\, ABA_1$, $\triangle\, OA_1B_1 \equiv \triangle\, A_1B_1A_2$, $\triangle\, OA_2B_2 \equiv \triangle\, A_2B_2A_3$,...,
$\equiv \triangle\, OA_{n-1}B_{n-1} \equiv \triangle\, A_{n-1}B_{n-1}A_n$.
Aplicăm Teoreman 3.3.6 la triunghiurile obținute și avem:

$$D_{OBA_1} = 2D_{OAB}$$

$$D_{OB_1A_1} = D_{OBA_1} + D_{BA_1B_1} = 2D_{OAB} + D_{BA_1B_1} > 2D_{OAB}$$

$$D_{OB_2A_2} = D_{OB_1A_2} + D_{B_1A_2B_2} = 2D_{OB_1A_1} + D_{B_1A_2B_2} > 2^2 D_{OAB}$$

$$D_{OB_3A_3} = D_{OB_2A_3} + D_{B_2A_3B_3} = 2D_{OB_2A_2} + D_{B_2A_3B_3} > 2^3 D_{OAB}$$

Prelugind acest proces, obținem:

$$D_{OB_nA_n} > 2^n D_{OAB}.$$

Așa cum $D_{OAB} > 0$, atunci există $n \in \mathbb{N}$, încât $2^n D_{OAB}$ va fi mai mare decât π, dar atunci $D_{OB_nA_n} > \pi$, contrazicere, deoarece $D_{OB_nA_n} < \pi$. Contrazicerea primită ne demonstrează, că nu toate perpendicularele la $[OM)$ intersectează semidreapta $[ON)$.

Așa dar, pe semidreapta $[OM)$ există puncte de două clase: perpendicularele la $[OM)$ în punctele primei clase intersectează semidreapta $[ON)$, iar perpendicularele la $[OM)$ în punctele din clasa a doua, nu intersectează semidreapta $[ON)$. Fiecare punct din prima clasă este mai aproape de punctul O, decât orice punct din a doua clasă, deoarece în caz contrar conform axiomei lui Pash, s-ar putea face concluzia că punctul din clasa a doua ar fi în același timp și punct din prima clasă, ceia ce este absurd.

Evident, că fiecare clasă nu este vidă (fig. 32). Prin urmare, în baza axiomei lui Dedekind, pe semidreapta $[OM)$ există așa punct P, încât toate punctele situate între O și P aparțin primei clase, iar toate punctele situate mai departe de punctul P de la punctul O, aparțin clasei a doua.

Să demonstrăm, că punctul P aparține clasei a doua.

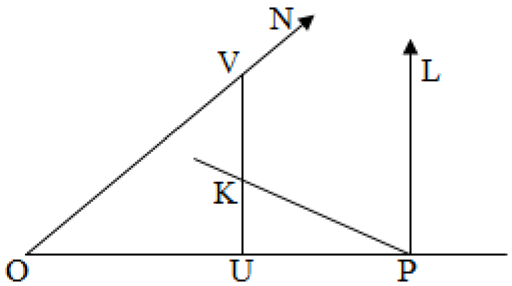


Fig. 32

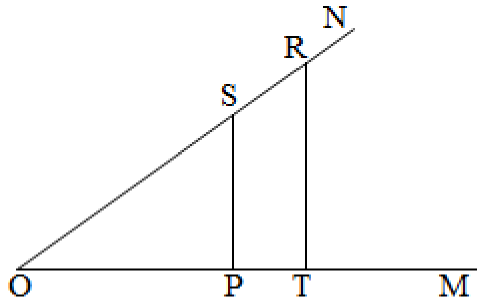


Fig. 33

Să presupunem, că punctul P aparține primei clase, atunci perpendiculara la $[OM)$ în punctul P intersectează semidreapta $[ON)$ în careva punct S (fig. 33). Pe semidreapta $[ON)$ există punctul R astfel, încât $O - S - R$. Din punctul R coborâm perpendiculara RT pe semidreapta $[OM)$. Punctul T va fi situat de la punctul O mai departe decât punctul P, deoarece $O - S - R$ și RT nu intersectează SP (Teorema 3.1.11). Prin urmare, punctul T aparține clasei a doua, dar în același timp perpendiculara la $[OM)$ în acest punct intersectează semidreapta $[ON)$. Contrazicerea primită ne demonstrează că punctul P este punct din a doua clasă, adică perpendiculara PL nu intersectează semidreapta $[ON)$ (fig. 32**)**.

Să demonstrăm acum, că orice semidreaptă $[PK)$, interioară unghiului OPL, intersectează semidreapta $[ON)$. Considerăm un punct arbitrar K pe semidreapta $[PK)$ (fig. 32). Dacă punctul K va aparține semidreptei $[ON)$ sau de părți diferite cu punctul P în raport cu semidreapta $[ON)$, atunci afirmația este demonstrată (Teorema 1.18). Să presupunem acum, că punctul K și punctul P sunt situate de aceiași parte, în raport cu $[ON)$. Din punctul K coborâm perpendiculara KU pe $[OM)$. Atunci, $O - U - P$ și deci, U este punct din prima clasă. Prin urmare, KU intersectează $[ON)$ în careva punct V. Semidreapta $[PK)$ intersectează latura UV a triunghiului OUV și nu trece nici prin unul din vârfurile acestui triunghi, dar atunci, conform axiomei lui Pash, semidreapta $[PK)$ intersectează $[ON)$. Așa dar, $PL \parallel ON$. Teorema este demonstrată.

Teorema 3.3.8. Pentru orice unghi mai mic decât $2d$, există o singură dreaptă, paralelă la ambele laturi a acestui unghi (în direcții diferite).

Demonstrație. Fie m $\measuredangle AOB < 2d$ (fig. 34).

Construim bisectoarea $[OC)$ a acestui unghi. Atunci, m$\measuredangle AOC < d$ și conform Teoremei 3.3.7 există unica perpendiculară PL la latura $[OC)$, paralelă la OA. În baza simetriei, prelungirea $[PL')$ a acestei perpendiculare este perpendiculară pe $[OC)$ și paralelă la $[OB)$. Așa dar, $L'L \parallel OA$ și $LL' \parallel OB$. Teorema este demonstrată.

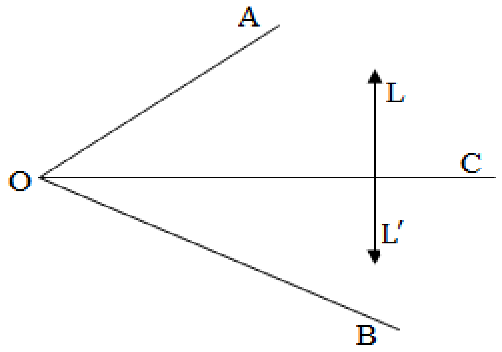


Fig. 34

3.4. Poziția reciprocă a două drepte în planul hiperbolic

Lema 3.4.1. Dacă $AB \parallel CD$, atunci există axa de simetrie a dreptelor AB și CD.

Demonstrație. Fie P și Q puncte ce aparțin corespunzător dreptelor AB și CD, iar h și k bisectoarele unghiurilor QPB și PQD (fig. 35). Așa cum $AB \parallel CD$, atunci semidreapta h intersectează semidreapta QD în careva punct E. Atunci semidreapta k intersectează segmentul PE în careva punct S.

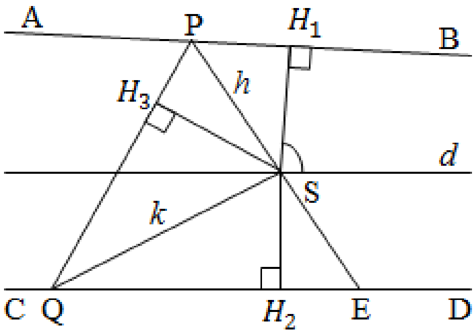


Fig. 35

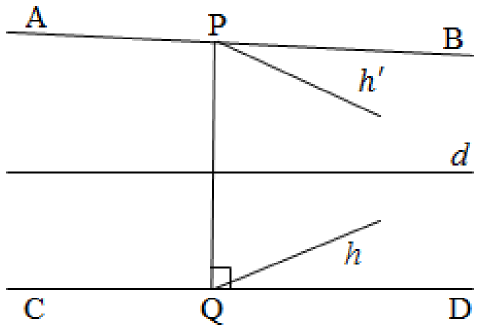


Fig. 36

Să notăm prin SH_1, SH_2 și SH_3 perpendicularele duse din punctul S pe dreptele AB, CD și PQ corespunzător (fig. 35). Din faptul că punctul S aparține semidreptei h urmează că $SH_1 = SH_3$, iar din faptul că punctul S aparține semidreptei k urmează că $SH_3 = SH_2$. Prin urmare, punctul S este egal depărtat de la dreptele AB și CD. Acum devine clar, că dreapta d, ce conține bisectoarea unghiului H_1SH_2 este axă de simetrie pentru dreptele AB și CD. Lema este demonstrată.

Teorema 3.4.2. Dacă $AB \parallel CD$, atunci $CD \parallel AB$.

Demonstrație. Fie $AB \parallel CD$. Atunci, conform lemei 1, există axa de simetrie d a acestor două drepte. Fie P un punct arbitrar al drepte AB. Atunci punctul Q, simetric cu punctul P în raport cu axa de simetrie d, aparține dreptei CD (fig. 36). Pentru a demonstra teorema ne vom folosi de criteriul de paralelism a două drepte (Teorema 3.2.2). Dreptele AB și CD nu se intersectează, deoarece $AB \parallel CD$. Rămâne de demonstrat că orice semidreaptă interioară unghiului PQD intersectează semidreapta $[PB)$.

Fie h o semidreaptă interioară unghiului PQD, iar h' semidreapta simetrică cu semidreapta h în raport cu dreapta d. Deoarece unghiurile PQD și QPB sunt simetrice, iar h este semidreaptă interioară unghiului PQD, urmează că h' este semidreaptă interioară unghiului QPB. Având în vedere că $AB \parallel CD$, avem că h' intersectează semidreapta QD, dar atunci și semidreapta h intersectează semidreapta $[PB)$. Teorema este demonstrată.

Observație. Pentru o claritate mai bună, vom indica prin săgeată direcția orientării dreptelor în planul hiperbolic.

Teorema 3.4.3. Dacă $AB \parallel EF$, $CD \parallel EF$, iar AB nu coincide cu CD, atunci $AB \parallel CD$.

Demonstrație. Să observăm la început că dreptele AB și CD nu se intersectează, deoarece în caz contrar am avea că prin punctul lor de intersecție vor trece două drepte AB și CD paralele la dreapta EF în una și aceiași direcție, ceea ce contrazice Teoremei 3.2.2.

Să examinăm două cazuri posibile.

Cazul 1. Fie dreptele AB și CD sunt situate de aceiași parte în raport cu dreapta EF și fie că dreapta CD este situată între dreptele AB și EF (fig. 37). Considerăm pe dreptele AB și EF punctele arbitrare A și E corespunzător și construim segmentul $[CE]$. Deoarece punctele A și E sunt situate de părți diferite în raport cu dreapta CD, atunci conform Teoremei 3.1.18 segmentul $[AE]$ va intersecta dreapta CD în careva punct C.

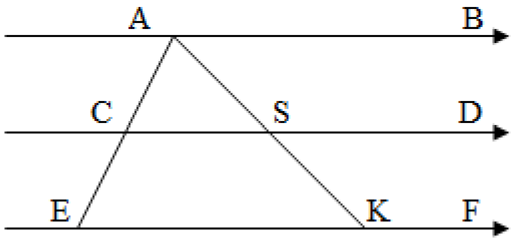


Fig. 37

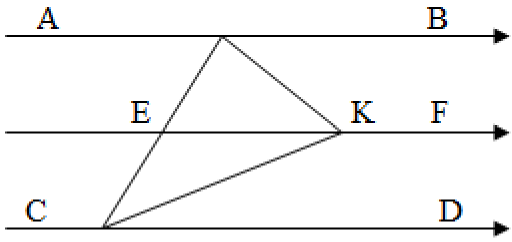


Fig. 38

Din punctul A construim o semidreaptă arbitrară interioară unghiului BAE, care intersectează semidreapta $[EF)$ în careva punct K, deoarece $AB \parallel EF$. Așa cum punctele A, K sunt de părți diferite în raport cu dreapta CD, urmează că această semidreaptă intersectează și semidreapta $[CD)$ în careva punct S. Prin urmare, $AB \parallel CD$.

Cazul II. Fie dreptele AB și CD sunt situate de părți diferite în raport cu dreapta EF (fig. 38). Considerăm pe dreptele AB și CD punctele arbitrare A și C corespunzător. Segmentul $[AC]$ intersectează dreapta EF în careva punct E, deoarece punctele A și C se află de părți diferite în raport cu dreapta EF (Teorema 3.1.18). Orice semidreaptă $[AD)$, ce trece prin interiorul unghiului BAE intersectează EF în careva punct D, deoarece $AB \parallel EF$ după condiție, dar atunci această semidreaptă va intersecta și pe CD, deoarece $EF \parallel CD$, iar semidreapta AD trece prin interiorul unghiului FKC. Prin urmare, $AB \parallel CD$. Teorema este demonstrată.

Ne învoim să numim două drepte neorientate a și b paralele, dacă pe aceste drepte se pot alege direcțiile astfel, încât ele să fie paralele.

Definiția 3.4.4. Două drepte din planul hiperbolic se numesc divergente (sau superparalele), dacă ele nu se intersectează și nici nu-s paralele.

Ușor de observat că printr-un punct M, ce nu aparține dreptei a, trec o infinitate de drepte, fiecare din care este divergentă cu dreapta a. Într-adevăr, fie dreptele CD și EF sunt paralele dreptei a în diferite direcţii (fig. 26). Atunci orice dreaptă, ce trece prin punctul M prin interiorul unghiurilor opuse la vârf CMF şi EMD, sunt divergente cu dreapta a.

Astfel, în geometria hiperbolică spre deosebire de geometria euclidiană avem trei cazuri de poziţie reciprocă a două drepte: dreptele se intersectează, sunt paralele ori sunt divergente (superparalele).

Teorema 3.4.5. Două drepte, care au perpendiculara comună, sunt divergente.

Demonstrație. Fie AB și CD două drepte date, iar PQ perpendiculara comună (fig. 39). Conform lemei 1, § dreptele AB și CD nu se intersectează. Aceste drepte nu pot fi nici paralele, deoarece în caz contrar, unghiurile drepte APQ şi BPQ ar trebui să fie unghiuri de paralelism în punctul P, în raport cu dreapta CD. Dar unghiul de paralelism întotdeauna este ascuțit, deaceia presupunerea noastră nu este corectă și deci, dreptele AB și CD sunt drepte divergente. Teorema este demonstrată.

Consecința 1. În planul hiperbolic nu există perpendiculara comună a două drepte paralele.

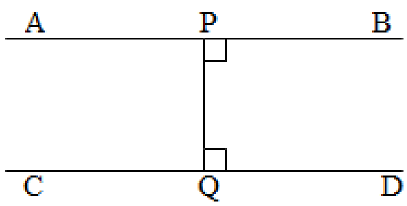


Fig. 39

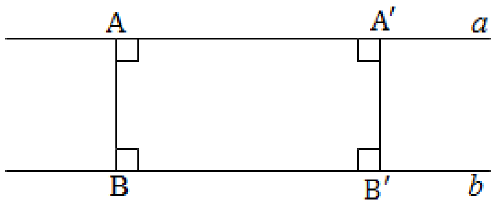
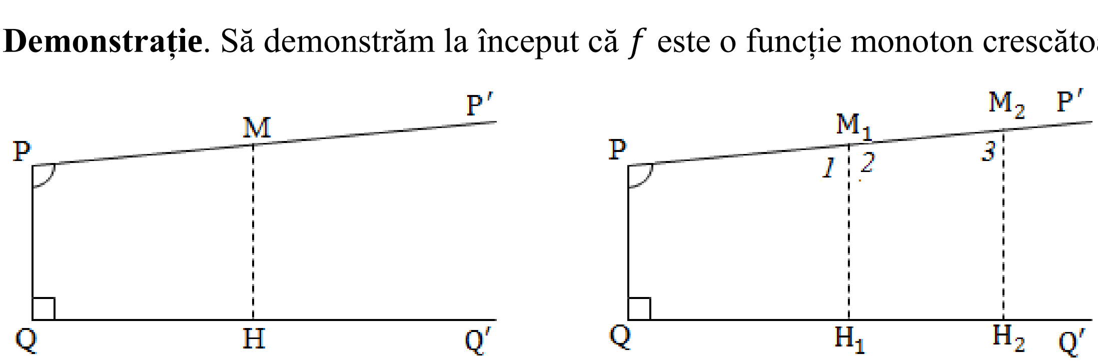


Fig. 40

Să mai observăm că două drepte nu pot avea mai mult decât o perpendiculară comună. Într-adevăr, dacă de exemplu, dreptele a și b au două perpendiculare comune AB și $A'B'$ (fig. 40), atunci patrulaterul convex $AA'B'B$ are patru unghiuri drepte, contrazicere cu Teorema 3.3.2. Prin urmare, dacă două drepte au o perpendiculară comună, atunci ea este unică și aceste două drepte sunt divergente. Este adevărată și afirmația inversă: *orice două drepte divergente au o perpendiculară comună.*

Lema 3.4.6. Fie semidreptele $[PP')$ și $[QQ')$ sunt situate în același semiplan determinat de dreapta PQ, unghiul PQQ' este drept, iar unghiul QPP' este drept sau obtuz **(**fig. 41, a). Atunci, dacă M este un punct variabil al semidreptei PP', iar H proiecția acestui punct pe dreapta QQ', atunci funcția $MH = f(MP)$ este monoton crescătoare și nemărginită.

Demonstrație. Să demonstrăm la început că f este o funcție monoton crescătoare.



a) b)

Fig. 41

Pentru aceasta, considerăm pe semidreapta $[PP')$ două puncte M_1 și M_2 astfel, încât $PM_1 < PM_2$ și vom demonstra că $M_1H_1 < M_2H_2$, unde H_1 și H_2 sunt corespunzător proiecțiile punctelor M_1 și M_2 pe dreapta QQ'. Să cercetăm trei dodreptunghiuri cu bazele QH_1, QH_2, H_1H_2 (fig. 41, b). Deoarece $PM_1 < PM_2$, urmează că $P - M_1 - M_2$. Aplicăm Teorema 3.3.2 2 din paragraful precedent la dodreptunghiurile cu bazele QH_1 şi QH_2, având în vedere că unghiul P este drept sau obtuz, facem concluzia că unghiurile 1 şi 3 sunt ascuţite. Evident, unghiul 2 este obtuz, atunci din dodreptunghiul $H_1H_2M_2M_1$, urmează că $M_1H_1 < M_2H_2$. Prin urmare, funcţia f este monoton crescătoare.

Să demonstrăm, că funcţia f este monoton crescătoare şi nemărginită. Pentru aceasta pe semidreapta $[PP')$ considerăm punctele $M_1, M_2, \dots, M_n$ astfel, încât $PM_1 = M_1M_2 = \cdots = M_{n-1}M_n$, unde $n > 2$. Fie $H_1, H_2, \dots, H_n$ proiecțiile acestor puncte pe dreapta QQ' (fig. 42).

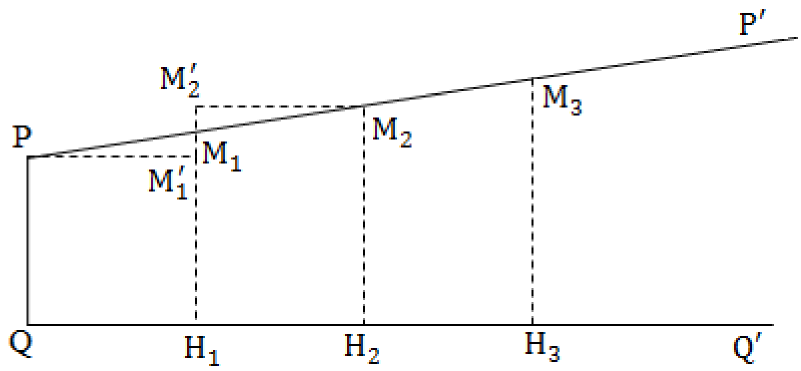


Fig. 42

Din cele demonstrate mai sus $PQ < M_1H_1 < M_2H_2$. Depunem pe semidreapta $[H_1M_1)$ segmentele $[H_1M_1']$ şi $[H_1M_2']$ congruente corespunzător cu segmentele $[PQ]$ şi $[M_2H_2]$. Atunci, evident, $M_1' - M_1 - M_2'$.

În triunghiurile PM_1M_1' şi $M_2M_1M_2'$ avem $[PM_1] = [M_2M_1]$, $\measuredangle PM_1M_1' \equiv \measuredangle M_2M_1M_2'$, dar $\measuredangle PM_1'M_1$ a primului triunghi este obtuz (ca unghi adiacent cu unghiul M_1' a patrulaterului Saccheri cu baza QH_1), iar $\measuredangle M_2M_2'M_1$ a triunghiului al doilea este ascuțit (ca unghi a patrulaterului Saccheri cu baza H_1H_2). Prin urmare, $M_1'M_1 < M_2'M_1$. Să notăm $M_1M_1' = \delta$, atunci $M_1H_1 = PQ + \delta$, $M_2H_2 = M_1H_1 + M_2'M_1 > PQ + 2\delta$.

Judecând analogic, facem concluzia că $M_3H_3 > PQ + 3\delta$,..., $M_nH_n > PQ + n\delta$. Prin urmare, funcția f este monoton crescătoare și nemărginită. Lema 3.4.6 este demonstrată.

Fie AB și CD două drepte divergente, iar PQ perpendiculara lor comună (fig. 43).

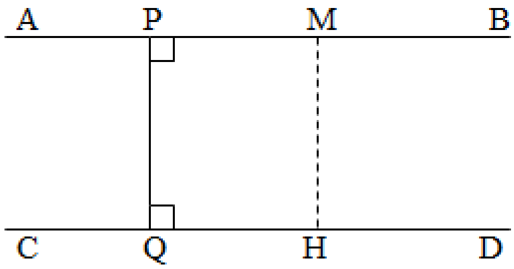


Fig. 43

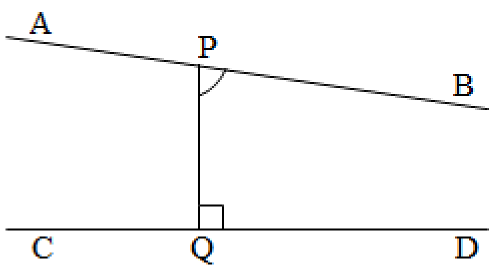


Fig. 44

Figurile $BPQD$ și $APQC$ satisfac condițiilor Lemei 3.4.6 și în baza acestei leme distanța de la un punct variabil al drepte AB până la dreapta CD crește nemărginit, atunci când punctul M se îndepărtează de la punctul P, cum într-o direcție așa și în cealaltă direcție. Cu alte cuvinte, dreptele divergente se îndepărtează nemărginit una de alta pe măsura îndepărtării de la perpendiculara comună.

Fie acum $AB \parallel CD$, iar PQ perpendiculara din punctul $P \in AB$ pe dreapta CD (fig. 44). Așa cum $\measuredangle QPB$ este ascuțit, unghiul $\measuredangle QPA$ este obtuz. Figura $APQC$ satisfac condițiilor Lemei 3.4.6. În baza acestei leme distanța de la un punct variabil M al dreptei AB până la dreapta CD crește nemărginit, când punctul M se îndepărtează de la punctul P în partea opusă direcției de paralelism. Se poate demonstra, că atunci când punctul M se îndepărtează de la punctul P în direcția de paralelism, această distanță tinde la zero. Cu alte cuvinte, dreptele paralele, îndepărtându-se nemărginit una de alta într-o direcție, asimptotic se apropie în direcția opusă.

3.5. Cercul. Echidistanta. Oriciclul

În planul euclidian există două curbe – dreapta și cercul, care posedă proprietatea de a aluneca pe sine însăși fără deformații. Așa curbe se numesc curbe de curbură constantă. Existența doar a două astfel de curbe de curbură constantă este în strânsă legătură cu faptul, că în planul euclidian sunt posibile două cazuri de poziție reciprocă a două drepte: două drepte sau se intersectează într-un punct, sau sunt paralele. Din această cauză,urmează existența doar a două tipuri de fascicole:

1) fascicolul de drepte, care trec prin unul și același punct, numit centrul fascicolului;
2) fascicolul de drepte paralele.

În planul hiperbolic două drepte pot să se intersecteze într-un punct, pot fi paralele, dar pot fi și divergente. Datorită acestor trei posibilități de poziție reciprocă a două drepte, în planul hyperbolic există trei tipuri de fascicole:

1) fascicolul de drepte, care se intersectează într-un punct, numit centrul fascicolului; așa fascicol se numește fascicol central sau fascicol eliptic (fig. 45, a);

2) fascicolul de drepte divergente, perpendiculare pe o dreaptă, numită baza fascicolului; așa fascicol se numește fascicol hiperbolic (fig. 46, a);

3) fascicolul de drepte paralele în direcția determinată de către o dreaptă, numită axa fascicolului; un așa fascicol se numește fascicol parabolic **(**fig. 47,a**).**

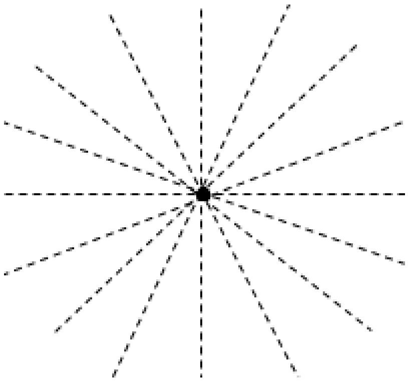


Fig. 45 a

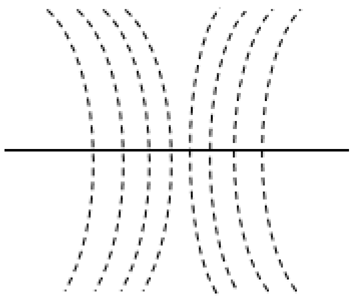


Fig. 46 a

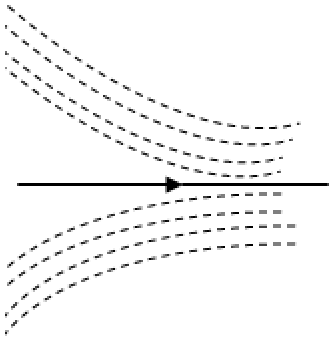


Fig. 47 a

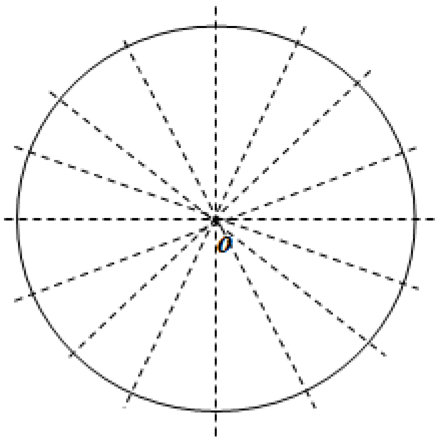


Fig. 45 b

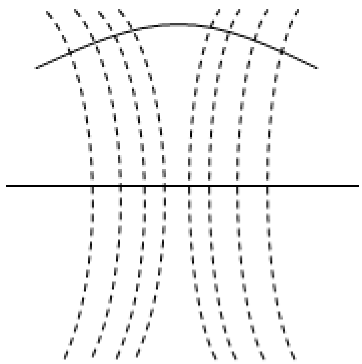


Fig. 46 b

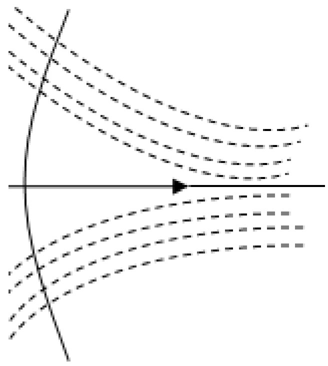


Fig. 47 b

Evident, primele două fascicole sunt determinate de două drepte a fascicolului dat, iar al treilea fascicol este determinat de o dreaptă pa care este indicată direcția. Evident, prin fiecare punct al planului (cu excepția a centrului fascicolului eliptic) trece câte o dreaptă și numai una singură ce aparține fascicolului dat.

Vom arăta, că fiecare dintre aceste trei fascicole este în legătură cu câte una dintre cele trei curbe de bază din planul hiperbolic, curbe de curbură constantă.

Cercul

Din cursul școlar de geometrie se cunoaște că mulțimea tuturor punctelor planului egal depărtate de la un punct (numit centru) se numește cerc. Această definiție aparține geometriei absolute și prin urmare, este acceptată atât în geometria euclidiană, cât și în geometria hiperbolică.

Multe teoreme referitoare la cerc, cunoscute din geometria școlară, rămân în vigoare și în planul hiperbolic. Unele din aceste teoreme sunt formulate în 3.1. Vom menționa și alte proprietăți ale cercului, care sunt juste în geometria absolută. Vom examina doar acele proprietăți care se referă la poziția punctelor cercului în raport cu fascicolul de drepte cu centrul în centrul cercului:

$\mathbf{1^0}$. Cercul este simetric în raport cu fiecare axă.

$\mathbf{2^0}$. În fiecare punct al cercului există tangenta, care este perpendiculară pe axa cercului, ce trece prin punctul de tangență.

Reeșind din această proprietate, noi putem afirma, că cercul intersectează axele sale sub unghi drept sau că cercul este traiectoria ortogonală a fascicolului de drepte cu centrul în centul cercului (fig. 45, b).

Definiția 3.5.1. Dreapta AB, unde $A \in a$, $B \in b$ se numește secantă de egală înclinație în raport cu dreptele a și b, dacă segmentul $[AB]$ formează cu aceste drepte unghiuri interne de aceiași parte congruente.

$\mathbf{3^0}$. Dreapta, ce conține coarda cercului, este secantă de egală înclinație față de axele cercului, ce trec prin extremitățile coardei.

$\mathbf{4^0}$. Mediatoarea oricărei coarde a cercului, este axă a cercului.

Bineînțeles că nu toate proprietățile cercului cunoscute din cursul școlar de geometrie, au loc și în planul hiperbolic. Așa, de exemplu, teorema ce afirmă, că unghiul înscris în cerc, care se sprijină pe diametru, este drept, nu mai este justă în planul hiperbolic. Într-adevăr, fie unghiul ACB este înscris în cercul cu centrul O și se sprijină pe diametrul AB (fig. 48). Construim raza OC și să cercetăm cele două triunghiuri isoscele obținute OAC și OBC.

Așa cum $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle ACO$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle BCO$, atunci $\hat{A} + \hat{B} = A\hat{C}O + B\hat{C}O = A\hat{C}B$. Prin urmare, $\sigma_{ABC} = \hat{A} + \hat{B} + A\hat{C}B = 2A\hat{C}B$. Așa, dar $A\hat{C}B = \frac{1}{2}\sigma_{ABC}$. Deoarece $\sigma_{ABC} < 2d$, urmează $\sphericalangle A\hat{C}B < d$, adică $\sphericalangle A\hat{C}B$ este ascuțit.

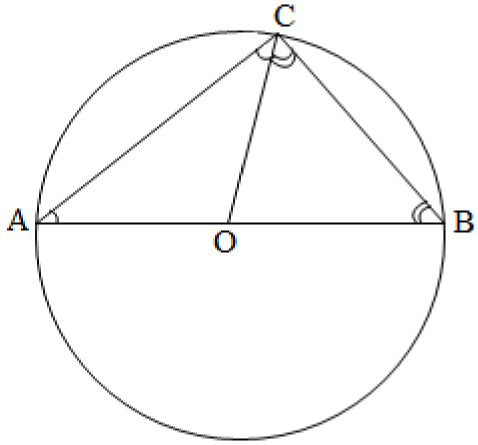


Fig. 48

Echidistanta

Echidistantă se numește figura, care constă din toate punctele semiplanului determinat de dreapta u, egal depărtate de la această dreaptă. Dreapta u se numește baza echidistantei, iar segmentul perpendicular dus din orice punct al echidistantei pe bază se numește înălțimea echidistantei. Se numește înălțime deasemenea și lungimea h a acestei perpendiculare.

Cu echidistanta este în legătură fascicolul de drepte divergente – mulțimea tuturor dreptelor perpendiculare pe baza echidistantei. Dreptele acestui fascicol se numesc axe ale echidistantei. Multe proprietăți ale echidistantei sunt analogice proprietăților cercului.

Să ne convingem că echidistanta este o linie curbă.

Teorema 3.5.2. Orice dreaptă, situată în planul echidistantei, intersectează echidistanta nu mai mul decât în două puncte.

Demonstrație. Să presupunem contrariul. Fie că o dreaptă oarecare are cu echidistanta trei puncte comune A, B și C, considerate astfel, încât $A - B - C$. Dacă A', B' și C' sunt proiecțiile acestor puncte pe baza echidistantei, atunci conform definiției echidistantei patrulaterele $ABB'A'$ și $BCC'B'$ sunt patrulaterele lui Saccheri (fig.49, a). Prin urmare, unghiurile ABB' și $B'BC$ sunt ascuțite, ca unghiuri de la baza de sus în patrulaterul Saccheri, iar pe de altă parte suma lor este egală cu $2d$. Contrazicerea primită demonstrează teorema.

Să mai deducem și alte proprietăți ale echidistantei.

$\mathbf{1^0}$. Echidistanta este simetrică în raport cu fiecare axă.

Demonstrație. Fie ϒ este echidistanta cu baza u, iar a una din axele sale (fig. 49, b).

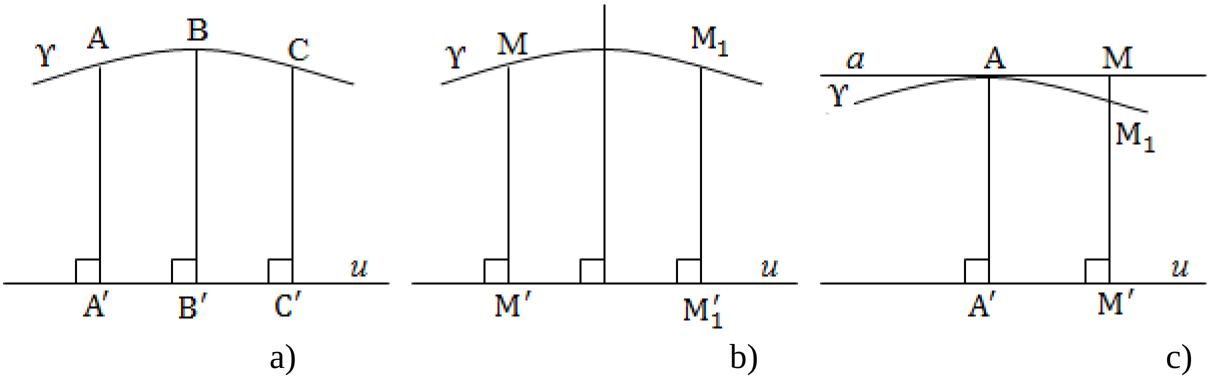


Fig. 49

Considerăm un punct arbitrar $M \in ϒ$. Fie M_1 este simetricul punctului M în raport cu dreapta a. Să demonstrăm că $M_1 \in ϒ$. Dacă M' și M_1' sunt proiecțiile punctelor M și M_1 pe dreapta u, atunci, evident că M' și M_1' sunt simetrice în raport cu dreapta a. Prin urmare, $MM' = M_1M_1'$, dar aceasta și înseamnă că $M_1 \in ϒ$. Afirmația 1^0 este demonstrată.

$\mathbf{2^0}$**.** În fiecare punct a echidistantei există tangența, care este perpendiculară pe axa echidistantei ce trece prin punctul de tangență.

Demonstrație. Fie A un punct arbitrar al echidistantei ϒ, iar A' proiecția punctului A pe baza u (fig. 50, c). Construim prin punctul A dreapta a perpendiculară pe dreapta AA'. Așa cum dreptele a și u au perpendiculara AA' comună, urmează că dreptele a și u sunt divergente. Deoarece distanța de la fiecare punct al dreptei a, diferit de punctul A până la dreapta u, este mai mare decât AA', urmează că punctul A este unicul punct comun a dreptei a cu echidistanta ϒ.

Fie M un punct variabil al dreptei a, M' proiecția punctului M pe dreapta u, iar M_1 punctul de intersecție a segmentului MM' cu echidistanta ϒ (fig.49, c). Dacă punctul M se apropie de punctul A, atunci MM_1 tinde la zero, iar secanta AM_1 are poziția limită – dreapta a. Prin urmare, dreapta a este tangenta la echidistanta ϒ în punctul A. Afirmația 2^0 este demonstrată.

Reeșind din această proprietate, putem afirma, că echidistanta este traiectoria ortogonală a fascicolului de drepte divergente, perpendiculare pe baza echidistantei (fig. 46, b).

Definiția 3.5.3. Orice segment ce unește două puncte a echidistantei se numește coardă a echidistantei.

3^0. Orice dreaptă ce conține coarda echidistantei este secantă de egală înclinație în raport cu axele echidistantei, ce trec prin extremitățile coardei.

Demonstrație. Fie AB o coardă a echidistantei, iar AA' și BB' axele echidistantei ce trec prin punctele A și B corespunzător, unde A' și B' sunt proiecțiile A și B pe baza echidistantei. Din definiția echidistantei $AA' = BB'$, dar atunci patrulaterul $ABB'A'$ este patrulaterul Saccheri și prin urmare $\measuredangle A'AB \equiv \measuredangle B'BA$. Afirmația 3^0 este demonstrată.

4^0. Mediatoarea oricărei coarde a echidistantei este axă a echidistantei.

Demonstrație. Fie AB o coardă arbitrară a echidistantei, iar A' și B' proiecțiile punctelor A și B pe baza echidistantei. Atunci $A'B'BA$ este patrulaterul Saccheri și mediatoarea bazei de sus este și mediatoare a bazei de jos, adică este axă a echidistantei. Afirmația 4^0 este demonstrată.

Oriciclul

Vom demonstra la început următoarea lemă.

Lema 3.5.4. Prin fiecare punct al uneia din două drepte paralele trece o secantă de egală înclinație și numai una singură în raport cu aceste drepte paralele.

Demonstrație. Fie $AA' \parallel BB'$ și $M \in AA'$. Să cercetăm axa de simetrie d a dreptei AA' și BB' (Lema 1.5.1). Dacă M_1 este punctul simetric cu punctul M în raport cu dreapta d, atunci MM_1 este secantă de egală înclinație în raport cu dreptele AA' și BB' (fig. 50). Pentru orice punct M_2 al dreptei BB', diferit de punctul M_1, $\measuredangle A'MM_2 \not\equiv \measuredangle B'M_2M$ (fig. 50).

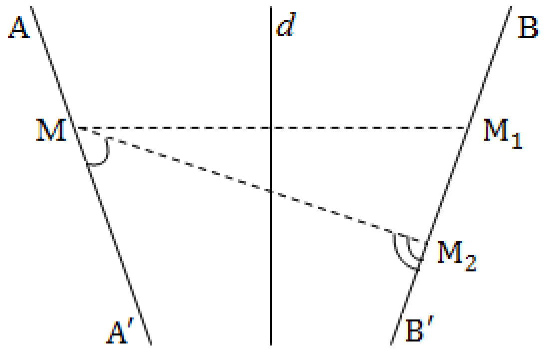


Fig. 50

Observăm, că $m\measuredangle A'MM_2 < m\measuredangle A'MM_1$ iar $m\measuredangle B'M_2M > m\measuredangle B'M_1M$, deoarece $\measuredangle B'M_2M$ este unghi exterior pentru triunghiul M_1MM_2. Prin urmare, MM_1 este unica secantă de egală înclinație în raport cu dreptele AA_1 și BB_1. Lema este demonstrată.

Fie acum în plan este dat un fascicolul de drepte paralele. În mulțimea Ω a tuturor punctelor planului introducem operația binară Δ. Vom spune că punctele A și B se află în relația Δ, dacă aceste puncte coincid sau dacă dreapta AB este secantă de egală înclinație în raport cu dreptele fascicolului ce trec prin punctele A și B corespunzător. Din această definiție urmează nemijlocit, că relația Δ satisface condițiilor de reflexivitate și de simetrie. Se poate demonstra că relația Δ satisface și condiției de tranzitivitate. Astfel, în raport cu relația Δ, toate punctele planului se împart în clase de echivalență. Fiecare din aceste clase se numește oriciclu. Dreptele acestui fascicol se numesc axele oriciclului. Dacă este dat un fascicol de drepte paralele, atunci prin fiecare punct A al planului trece un oriciclu și numai unul singur, care și reprezintă o clasă de echivalență în raport cu relația Δ. Această mulțime (acest oriciclu) constă din punctul A și toate punctele X a planului, astfel încât AX este secantă de egală înclinație în raport cu dreptele fascicolului, care trec prin punctele A și X. Din cele expuse mai sus urmează, că fiind dată o dreaptă orientată UV și un punct oarecare pe această dreaptă, atunci în mod univoc se determină oriciclul ce trece prin punctul A și are axa UV.

Proprietățile oriciclului sunt analogice cu proprietățile $1^0 - 4^0$ ale cercului și echidistantei.

Teorema 3.5.5. Orice dreaptă din planul oriciclului, are nu mai mult decât două puncte comune cu oriciclul.

Demonstrație. Să presupunem că o careva dreaptă are trei punct comune A, B și C. Notăm aceste puncte astfel, încât $A - B - C$. Să notăm prin AA', BB' și CC' axele oriciclului, care trec prin punctele A, B și C. Conform definiției $AA' \parallel BB'$ și $BB' \parallel CC'$, dar atunci punctele A', B' și C' se află în același semiplan în raport cu dreapta AB (fig. 51).

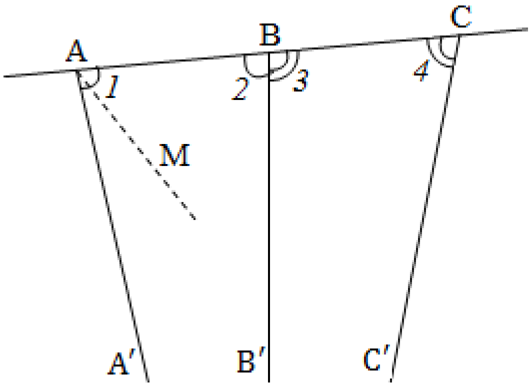


Fig. 51

Din definiția oriciclului $\measuredangle 1 \equiv \measuredangle 2$ și $\measuredangle 3 \equiv \measuredangle 4$ (fig. 51). Așa cum dreptele paralele n-au perpendiculare comune, urmează că unghiurile 1,2,3 și 4 nu pot fi unghiuri drepte. Nici unul dintre aceste unghiuri nu poate fi obtuz. Într-adevăr, dacă, de exemplu unghiurile 1 și 2 sunt obtuze, atunci $\measuredangle 3$ este ascuțit. Depunem de la semidreapta AB unghiul MAB congruent cu unghiul 3 (fig. 51) și obținem semidreapta AM, interioară unghiului $A'AB$ și care nu intersectează semidreapta BB' (Lema1, §). Această ultimă afirmație contrazice definiției paralelismului dreptelor AA' și BB'.

În așa fel, unghiurile 2 și 3 sunt ascuțite, dar fiindcă în sumă dau $2d$ obținem contrazicere cu teorema referitoare la suma unghiurilor megieșe (adiacente). Teorema este demonstrată.

Propunem cititorilor să demonstreze că oriciclul posedă proprietățile $1^0 - 4^0$ ale echidistantei (cercului).

Se poate demonstra că în planul hiperbolic oricare doi oricicli sunt congruenți.

3.6. Proprietățile mediatoarelor laturilor triunghiului in planul hiperbolic

Teorema 3.6.1. Trei perpendiculare la laturile triunghiului în mijlocurile laturilor sau se intersectează într-un punct, sau sunt divergente, fiind perpendiculare la o dreaptă oarecare, sau sunt paralele între ele într-o anumită direcție, adică aparțin sau unui fascicol eliptic, sau unui fascicol hiperbolic, sau unui fascicol parabolic.

Demonstrație. Fie A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt perpendicularele la laturile triunghiului ABC prin mijlocurile laturilor A_1, B_1 și C_1 corespunzător (fig. 52). Dacă două din aceste perpendiculare se intersectează, atunci ușor ne încredințăm că și a treia perpendiculară va trece prin punctul de intersecție a acestora. În acest caz cele trei perpendiculare aparțin unui fascicol eliptic.

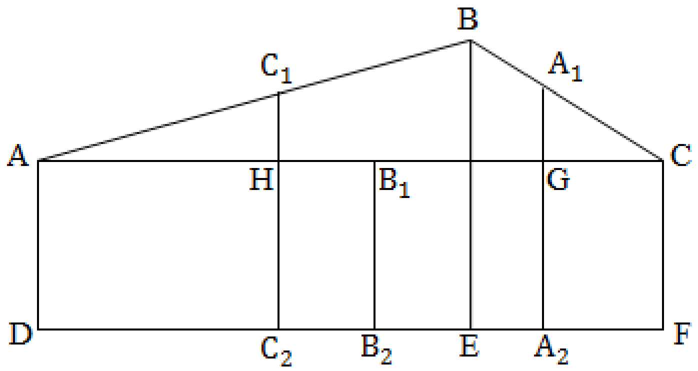


Fig. 52

Să presupunem că A_1A_2 și C_1C_2 sunt divergente. Atunci există unica lor perpendiculară comună, pe care o notăm prin DF. Fie D, E și F proiecțiile ortogonale ale vârfurilor triunghiului ABC pe dreapta DF.

Să demonstrăm că $AD = BE = CF$. Prin suprapunere, ne convingem că patrulaterele lui Lambert AC_1C_2D și C_1BEC_2 sunt congruente. Prin urmare, $AD = BE$. Analogic demonstrăm că $BE = CF$, dar atunci $AD = BE = CF$.

Să cercetăm acum patrulaterul Saccheri $ACFD$ cu baza de jos DF și laturile laterale $AD = CF$. După cum știm, în patrulaterul Saccheri mediatoarea B_1B_2 a bazei de sus este în același timp și mediatoarea bazei de jos, dar atunci $B_1B_2 \perp DF$. Prin urmare, A_1A_2, C_1C_2 și B_1B_2 sunt perpendiculare la dreapta DF, dar aceasta și înseamnă că aceste trei perpendiculare aparțin unui fascicol de drepte divergente cu baza DF. Totodată am demonstrat că vârfurile triunghiului ABC sunt egal depărtate de la baza DF.

Să presupunem acum că $C_1C_2 \parallel A_1A_2$. Atunci perpendiculara B_1B_2 nu poate nici să intersecteze pe A_1A_2 și C_1C_2, nici să fie divergentă cu ele, deoarece în caz contrar, în baza celor spuse mai sus A_1A_2 și C_1C_2, deasemenea s-ar intersecta ori ar fi divergente. Prin urmare, B_1B_2 este paralelă și la A_1A_2 și la C_1C_2.

Să demonstrăm acum că A_1A_2, C_1C_2 și B_1B_2 sunt paralele în una și aceiași direcție. Observăm la început, că latura mai mare a triunghiului ABC, fie aceasta este AC, intersectează toate aceste trei perpendiculare. Într-adevăr, să presupunem că C_1C_2 nu intersectează AC. Atunci, conform axiomei lui Pash, C_1C_2 va intersecta BC în careva punct K, dar atunci $BK = AK$. Dar $KC + KA > AC$, în timp ce $KC + CA = KC + KB = BC$ și deci, $BC > AC$, ceia ce contrazice presupuneri că AC este cea mai mare latură a triunghiului ABC. Analogic, demonstrăm că AC intersectează perpendiculara A_1A_2.

Fie A_1A_2, B_1B_2 și C_1C_2 intersectează latura AC corespunzător în punctele H, B_1și G și fie, de exemplu, $H - B_1 - G$. Atunci B_1B_2 va fi situată între paralelele A_1A_2 și C_1C_2. Prin urmare, B_1B_2 este paralelă la A_1A_2 și C_1C_2 în aceiași direcție. În acest caz cele trei perpendiculare aparțin unui fascicol parabolic. Teorema este demonstrată.

Consecință. În planul hiperbolic nu oricărui triunghi i se poate circumscri un cerc.

3.7.Congruența oriciclelor. Curbe de curbură constantă in planul hiperbolic

Fie A este un punct arbitrar al oriciclului (fig. 53) sau al echidistantei (fig. 54), ce aparține pe dreapta a a unui fascicol parabolic sau hiperbolic corespunzător. Fie l dreapta ce trece prin punctul A perpendiculară pe dreapta a. Considerăm un punct arbitrar B de pe oriciclu (echidistantă). Evident, dreapta AB este secantă de egală înclinație în raport cu dreapta a și dreapta b a fascicolului, care trece prin punctul B. Prin mijlocul D al coardei AB construim perpendiculara c la coarda AB.

În cazul oriciclului $c \parallel a, c \parallel b$ și din această cauză unghiul α dintre coarda AB și dreptele a sau b este unghiul de paralelism, ce corespunde segmentului $AD = BD = \frac{AB}{2}$, cu alte cuvinte $\alpha = \Pi(\frac{AB}{2}) < \frac{\pi}{2}$.

În cazul echidistantei, unghiurile de egală înclinație sunt ascuțite, ca unghiuri de la baza de sus a patrulaterului Saccheri A_1ABB_1 (A_1B_1-baza echidistantei), adică $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Așa cum a și b în acest caz sunt divergente, atunci $\alpha > \Pi(AD) = \Pi(\frac{AB}{2})$.

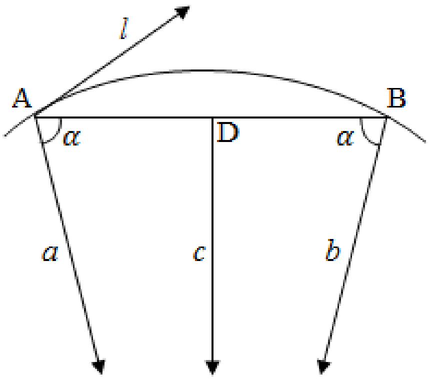


Fig. 53

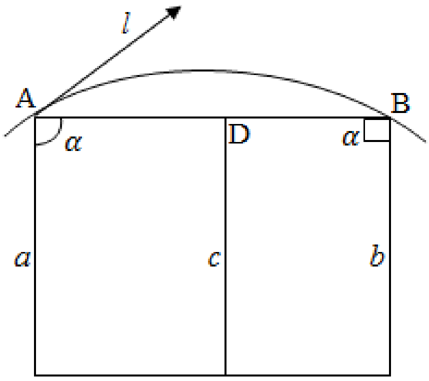


Fig. 54

Așa dar, am obținut ca pentru oriciclul $\alpha = \Pi(\frac{AB}{2})$, iar pentru echidistantă $\Pi(\frac{AB}{2}) < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Deoarece $\alpha < \frac{\pi}{2}$, urmează că toate punctele B ale ambelor curbe diferite de A sunt situate de aceiași parte în raport cu dreapta l. Dacă B se apropie nemărginit de punctul A, atunci $AB \to 0$ și din relațiile de mai sus obținem: $\lim_{AB\to 0} \alpha = \lim_{AB\to 0} \Pi\left(\frac{AB}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Aceasta înseamnă că perpendiculara l este poziția limită a secantei AB, atunci când B se apropie nemijlocit de A, adică l este tangenta la curbă în punctul A. Prin urmare, dreapta a a fascicolului este normala la curbă în punctul A. Evident, fiecare dreaptă a fascicolului eliptic cu centrul în centru cercului este normal la cerc în punctual corespunzător. Din cele stabilite mai sus, urmează :

toate normalele cercului se intersectează într-un punct și determină un fascicol eliptic. Toate normalele oriciclului sunt paralele în aceeași direcție și formează un fascicol parabolic; toate normalele echidistante sunt perpendiculare la o dreaptă (baza echidistantei) şi formează un fascicol hiperbolic ; coardele acestor puncte sunt secante de egală înclinație cu normalele ce trec prin extremitățile coardelor.

Totodată observăm că tangenta are cu cercul, oriciclul și echidistanta un singur punct comun.

Să aducem, o metodă de construcție a oriciclului, care îi aparține lui N. I. Lobacevski.

Luăm o dreaptă arbitrară orientată a și fixăm pe ea un punct oarecare A. Din punctul A vom construi diferite semidrepte, care să formeze unghiuri ascuțite cu semidreapta AA' a dreptei a (fig. 55). Pe fiecare din aceste semidrepte depunem segmentul AM, astfel încât unghiul α să fie unghiul de paralelism al jumătății acestui segment, adică $\alpha = \Pi(\frac{AB}{2})$. Locul geometric de puncte M și este oriciclul.

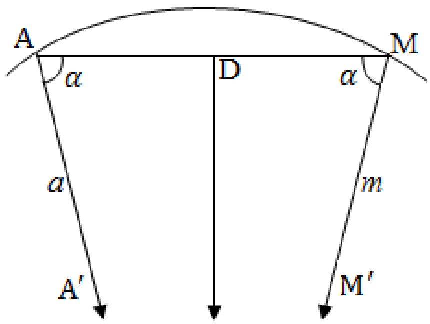


Fig. 55

Într-adevăr, construim prin punctul M dreapta m paralelă cu AA', iar prin mijlocul D al segmentului AM construim dreapta $DD' \perp AM$. Deoarece $\alpha = \Pi(AD)$, atunci $DD' \parallel AA'$ și prin urmare, $DD' \parallel MM'$. Așa cum $MD = AD$, urmează că $\measuredangle AMM' = \Pi(MD) = \Pi\left(\frac{AM}{2}\right) = \alpha$, iar AM este secantă de egală înclinație în raport cu dreptele paralele a și m și deaceia punctul M aparține oriciclului determinat de dreapta a și punctul A. Din construcție se vede că oriciclul este simetric față de normala (axa) a. Având în vedere că normala a a fost aleasă arbitrar, atunci oriciclul este simetric în raport cu fiecare normală (axă) a sa. Așa dar, oriciclul este complet determinat de o axă a și un punct ce aparține axei.

Definiți 3.7.1. Două curbe se numesc congruente, dacă între punctele acestor curbe se poate stabili o astfel de corespondență biunivocă la care fiecare coardă a unei curbe să fie egală cu coarda ce unește punctele corespunzătoare a celeilalte curbe.

Teorema 3.7.2. Toate oriciclilele sunt congruente între ele.

Demonstrație. Fie date două oricicle arbitrare. Luăm pe fiecare din ele cîte un punct arbitrar A și A' (fig. 56) și construim prin aceste puncte normalele a și a' a acestor oricicle.

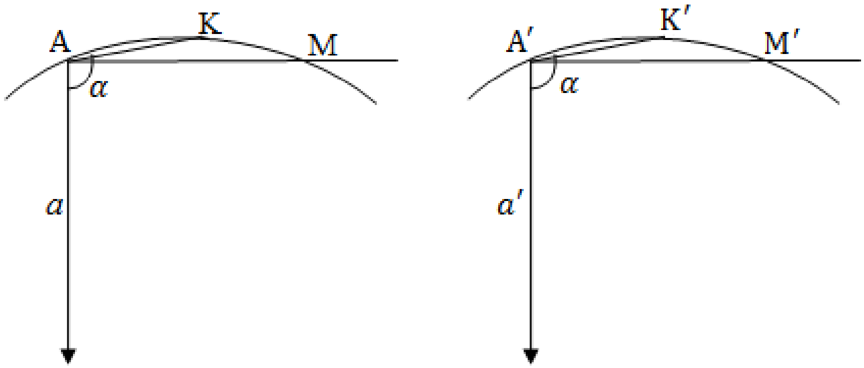


Fig. 56

Punem într-o corespondență biunivocă așa puncte M și M' a acestor oricicle, pentru care secantele AM' și $A'M'$ formează unghiuri egale α cu dreptele a și a'. Atunci, $AM = A'M'$, așa cum $\alpha = \Pi\left(\frac{AM}{2}\right) = \Pi\left(\frac{A'M'}{2}\right)$. Fie acum K, M și K', M' sunt perechi de puncte corespunzătoare ale acestor două oricicle. Atunci $AM = A'M'$, $AK = A'K'$, $m\measuredangle KAM = m\measuredangle K'A'M'$. Prin urmare, $\Delta AKM \equiv \Delta A'K'M'$, dar atunci $KM = K'M'$. Teorema este demonstrată.

Prin arc al oriciclului vom înțelege mulțimea tuturor punctelor oriciclului situate între două puncte ale oriciclului, numite extremitățile arcului.Din Teorema 3.7.2, urmează că arcele oriciclului determinate de coarde congruente sunt congruente și invers. Din teorema de mai sus urmează că oriciclul poate aluneca pe sine însuși fără deformații, la fel ca cercul și dreapta. Evident, așa proprietate posedă și echidistanta. Dacă vom face ca baza echidistantei să alunece pe sine însuși, atunci și echidistanta va aluneca pe sine însăși fără deformații, deoarece distanțele tuturor punctelor echidistantei până la bază sunt egale între ele.

În așa fel, în geometria hiperbolică există patru tipuri de linii de curbură constantă: dreapta, cercul, echidistanta și oriciclul. Ținând cont de Teorema 3.7.2, ușor ne putem încredința că în dependență de faptul, aparțin cele trei perpendiculare la laturile triunghiului duse prin mijlocurile acestora unui fascicol eliptic, hiperbolic sau parabolic, triunghiul se poate circumscri un cerc, o echidistantă sau un oriciclu, deoarece laturile triunghiului vor fi secante de egală înclinație în raport cu fascicolul corespunzător. Având în vedere că trei puncte pot să aparțină și unei drepte obținem justețea următoarei teoreme.

Teorema 3.7.3. Prin orice trei puncte ale planului trece o curbă de curbură constantă.

În această formulare teorema dată este justă și în geometria hiperbolică și în geometria euclidiană.

Să observăm, că în timp ce cercurile se deosebesc unul de altul prin lungimea razei, echidistantele – prin înălțimile lor, atunci toate oriciclurile sunt congruente.

Dacă dreapta în geometria euclidiană poate fi privită ca poziția limită a cercului, când centrul se îndepărtează nemărginit pe normală, atunci în geometria hiperbolică oriciclul este pe de o parte poziția limită a cercului, dacă centrul se îndepărtează nemărginit pe normală, iar pe de altă parte ca poziția limită a echidistantei, dacă baza echidistantei se îndepărtează nemărginit, rămânând perpendiculară la careva dreaptă a fascicolului hiperbolic.

3.8. Cerințele față de un sistem de axiome

Caracterul abstract și formal al axiomaticii lui Hilbert, posibilitatea de a înțelege prin nouțiunile de bază și axiome un conținut și sens concret și diferit, permite a da geometriei lui Euclid diferite tălmăciri.

În același timp, axiomatica ce determină geometria lui Euclid nu este univocă: este posibil de a alege alte noțiuni de bază și axiome, care determină aceiași geometrie euclidiană. Așa de exemplu, axioma paralelelor poate fi înlocuită cu orice afirmație echivalentă, axioma lui Dedekind poate fi înlocuită cu axiomele lui Arhimede și Cantor, noțiunea ”congruență” poate fi înlocuită cu noțiunea de ”mișcare”. Astfel, noi avem un anumit grad de libertate în alegerea noțiunilor de bază și axiomelor geometriei lui Euclid, fără a schimba sistemul geometric în esență.

Bineînțeles, noțiunile de bază și axiomele nu pot fi alese arbitrar, întâmplător, dar ele trebuie să satisfacă unor cerințe logice. Satisfacerea acestor cerințe trebuie să mărginească alegerea noțiunilor de bază și axiomelor, și de a îndreptăți această alegere.

În primul rând apare întrebarea: nu se poate oare cu sistemul ales de demonstrat două afirmații, care se contrazic? Suntem oare garantați că oricât n-am dezvolta consecințele sistemului ales, nu vom ajunge la două afirmații care se contrazic reciproc?

Această problemă, sau această cerință se numește problema compatibilității sistemului dat, sau problema ca sistemul dat să fie necontradictoriu.

În al doilea rând, reeșind din principiul deductiv de a construi știința matematică, de a deviza strict afirmațiile acestei teorii în axiome și teoreme apare întrebarea: suntem oare garantați că o axiomă sau alta din sistem nu va putea fi demonstrată cu ajutorul celorlalte axiome din sistemul dat?

Cu alte cuvinte, se pune întrebarea dacă careva din axiomele sistemului nu poate fi demonstrată ca teoremă și deci, să fie de prisos în lista axiomelor. Această problemă se numește problema independenței sistemului sau cerința ca sistemul să fie minimal. Este cazul să ne amintim de problema postulatului V a lui Euclid.

În sfârșit, apare întrebarea: este posibil oare cu ajutorul axiomelor sistemului ales, fără a apela la desen, la materiale ilustrative, la experimente, de demonstrat sau de respins orice afirmație, ce se referă la domeniul sistemului dat. Această cerință se numește cerința completitudinii sistemului de axiome. Exemplu de sistem incomplet de axiome, poate servi sistemul lui Euclid.

Așa dar, un sistem de axiome trebuie să satisfacă următoarelor trei cerințe:

1) Să fie compatibil;
2) Să fie independent;
3) Să fie complet.

Din aceste cerințe, principala cerință este ca sistemul să fie necontradictoriu. Sistemul contradictoriu nu este bun de nimic.

Ideia demonstrării compatibilității unui sistem de axiome se bazează pe faptul: dacă există așa un domeniu de lucruri, unele relații dintre care satisfac acestui sistem, atunci sistemul dat nu poate conține contraziceri logice.

Mulțimea obiectelor, în care sistemul dat de axiome se realizează, se numește ”model” sau ”interpretare” a sistemul dat de axiome.

Prin urmare, demonstrarea compatibilității sistemului de axiome se reduce la demonstrarea existenței măcar a unui model sau interpretare, în care se realizează axiomatica dată (sistemul dat).

Exemplul 3.8.1. Să demonstrăm că grupa I de axiome din sistemul lui Hilbert, este compatibilă. Pentru aceasta vom construi o interpretare a sistemului de axiome $\{I_1, I_2, \dots, I_8\}$.

Luăm o mulțime oarecare M, care constă din patru elemente a, b, c și d (fie, de exemplu, a, b, c și d sunt numere diferite). Fiecare element al mulțimii M, adică $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ și $\{d\}$, îl vom numi punct, fiecare submulțime a mulțimii M, ce constă din două elemente $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$ vom numi dreaptă iar fiecare submulțime a mulțimii M, ce constă din trei elemente, adică $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}$ și $\{b, c, d\}$ vom numi plan. Vom spune că punctul aparține dreptei (sau planului), dacă elementul corespunzător al mulțimii M aparține submulțimii corespunzătoare. De exemplu, punctul b aparține dreptei $\{b, d\}$, dar nu aparține planului $\{a, c, d\}$. Propunem cititorului să se convingă, că în acest model se realizează toate axiomele grupei I a sistemului lui Hilbert, adică axiomele $I_1 - I_8$.

Fie dat un sistem oarecare compatibil de axiome $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ și se cere de determinat dacă axioma A_i nu este o urmare logică a celorlalte axiome $U = \{A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n\}$. Pentru aceasta, cercetăm totalitatea axiomelor $U + \overline{A_\iota}$, unde $\overline{A_\iota}$ este negația axiomei A_i, adică A_i reprezintă afirmația: ”Axioma A_i nu este adevărată”. Dacă sistemul $U + \overline{A_\iota}$ este compatibil, atunci urmează că axioma A_i nu depinde de celelalte axiome U. Într-adevăr, dacă A_i ar fi consecință a sistemului U, atunci sistemul $U + \overline{A_\iota}$ ar fi fost contradictoriu, deoarece în acest sistem de axiome ar avea loc două afirmații, care se contrazic A_i și $\overline{A_\iota}$.

Așa dar, pentru a demonstra că o axiomă oarecare A nu este o consecință a celorlalte axiome ale sistemului dat, trebuie de construit un model (o interpretare), în care se realizează toate axiomele sistemului dat, dar axioma A nu se realizează.

Exemplul 3.8.2. Să cercetăm grupa I de axiome a lui Hilbert $\{I_1, I_2, \dots, I_8\}$ (vezi Exemplul 1) și să demonstrăm că axioma I_1 nu depinde de axiomele $I_2, I_3 - I_8$. Pentru aceasta este suficient de demonstrat compatibilitatea sistemului de axiome $\{\overline{I_1}, I_2, I_3, \dots, I_8\}$, unde $\overline{I_1}$ este negația axiomei I_1: există cel puțin două puncte, prin care nu trece nici o dreaptă.

Să demonstrăm că sistemul $\{\overline{I_1}, I_2, I_3, \dots, I_8\}$ este compatibil. Pentru aceasta, modificăm puțin interpretarea din exemplul 1. Punctele și planele le vom interpreta așa cum în exemplul 1, dar drepte vom numi doar următoarele cinci submulțimi: $\{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}$ și $\{c, d\}$. Evident, în așa mod se realizează toate axiomele sistemului $\{\overline{I_1}, I_2, \ldots, I_8\}$. Axioma $\overline{I_1}$ se realizează, deoarece prin punctele a și b nu trece nici o dreaptă. Satisfacerea axiomelor $I_2 - I_8$ este evidentă.

Dacă axioma A depinde de celelalte axiome ale unui sistem σ, atunci axioma A poate fi exclusă din lista axiomelor sistemului σ și de construit teoria, bazată doar pe sistemul $\sigma \setminus A$. Bineînțeles, este de dorit, de avut așa sistem de axiome σ, în care fiecare axiomă nu depinde de celelalte axiome ale sistemului dat. Așa sistem de axiome se numește sistem independent.

Să menționăm, că sistemul de axiome poate fi astfel, încât pentru unele axiome nici n-are sens de pus întrebarea, despre dependența sau independența lor de celelalte axiome ale sistemului dat. Așa, de exemplu, în sistemul de axiome a lui Hilbert, n-are sens să punem întrebarea, dacă axioma lui Pash nu depinde de celelalte axiome din sistemul lui Hilbert, deoarece pentru însăși formularea axiomelor de congruență noi avem nevoie de noțiunile de semidreaptă și semiplan, dar aceste noțiuni se introduc doar cu ajutorul axiomei lui Pash.

Două interpretări diferite ale unuia și aceluiași sistem de axiome se numesc izomorfe, dacă între obiectele de bază a acestor interpretări se poate stabili o corespondență biunivocă, astfel încât se satisface următoarea condiție: dacă unele sau altele obiecte sunt în legătură cu careva din relațiile de bază într-o interpretare, atunci obiectele corespunzătoare acestora sunt în legătură cu relațiile analogice în cealaltă interpretare.

De exemplu, dacă avem două interpretări izomorfe a sistemului de axiome a lui Hilbert, atunci acest fapt se exprimă în felul următor. Fie punctului A și dreptei a dintr-o interpretare se pune în corespondență punctul A' și dreapta a' din cealaltă interpretare și dacă punctul A aparține dreptei a, atunci și punctul A' aparține dreptei a'. Analogic, dacă punctul B este situat între punctele A și C într-o interpretare, atunci și pentru punctele lor corespunzătoare A', B' și C' din cealaltă interpretare, punctul B' este situat între punctele A'și C'. Analogic, pentru alte relații.

Evident, dacă două interpretări sunt izomorfe cu una și aceiași interpretare, atunci ele sunt izomorfe între ele.

Definiția 3.8.3. Sistemul de axiome se numește complet, dacă toate interpretările acestui sistem sunt izomorfe între ele.

Această definiție permite de cercetat, dacă sistemul dat de axiome este complet, indiferent de gradul de dezvoltare a teoriei, bazate pe acest sistem de axiome.

3.9. Demonstrația independenței postulatului V și compatibilității geometriei hiperbolice

Pentru a demonstra independența axiomei paralelelor (postulatul V a lui Euclid) de celelalte axiome a lui Hilbert, care formează geometria absolută, noi trebuie să construim un model în care se realizează toate axiomele lui Hilbert $I - IV$, dar nu se realizează axioma paralelelor V. Așa cum, din axiomele $I - IV$ urmează, că printr-un punct dat, ce nu aparține dreptei date, în planul determinat de acest punct și această dreaptă, trece măcar o dreaptă, care nu intersectează dreapta dată, atunci în acest model, în care se satisfac axiomele $I - IV$, dar nu se realizează postulatul V, neapărat trebuie să se realizeze axioma lui Lobacevski V^*. Prin urmare, demonstrația independenței postulatului V de celelalte axiome a geometriei absolute $I - IV$ se reduce la demonstrarea compatibilității geometriei hiperbolice.

Pentru a construi modelul în care se realizează geometria hiperbolică, ne vom folosi de faptul, că compatibilitatea geometriei lui Euclid este demonstrată. Dacă în spațiul euclidian vom determina așa figuri, între care au loc aceleași relații, care au loc între ele punctele, dreptele și planele în geometria hiperbolică, atunci aceste figuri pot servi obiecte pentru a construi modelul geometriei hiperbolice. În așa fel, compatibilitatea geometriei hiperbolice se reduce la compatibilitatea geometriei lui Euclid. Într-adevăr, așa o interpretate a geometriei hiperbolice în spațiul euclidian poate fi construită prin mai multe metode.

Să aducem o astfel de interpretare, care îi aparține lui A. Poincare. Ne vom limita doar la interpretarea planimetriei hiperbolice.

Fie în planul euclidian este dată o dreaptă XX (fig. 57). Cu ajutorul axiomelor, ce urmează, alcătuim ”vocabularul interpretării”, care determină sensul dat noțiunilor geometrice de bază.

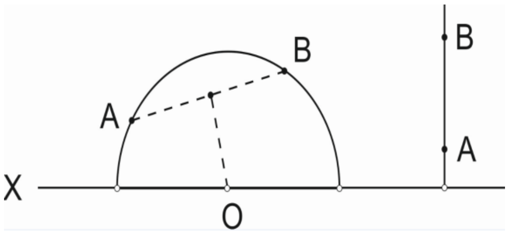


Fig. 57

Definiția 3.9.1. ”Plan Lobacevski” (L – plan) vom numi semiplanul euclidian de sus, determinat de dreapta XX. Însăși dreapta XX se omite.

Definiția 3.9.2. ”Puncte Lobacevski” (L – puncte) numim punctele euclidiene din semiplanul de sus, determinat de dreapta XX (punctele dreptei XX se omit).

Definiția 3.9.3. ”Drepte Lobacevski” (L – drepte) vom numi semicercurile euclidiene din semiplanul de sus, ortogonale la axa XX, adică, care au centrele pe această dreaptă și deasemenea toate semidreptele euclidiene perpendiculare pe dreapta XX, situate în semiplanul de sus, în raport cu dreapta XX, originile cărora aparțin dreptei XX.

Definiția 3.9.4. Vom spune, că ”careva L – punct este incident la careva L – dreaptă” sau că el ”este situat” pe L – dreaptă, dacă punctul euclidian corespunzător, în sensul obișnuit aparține semicercului sau semidreptei.

Verificarea realizării axiomelor de incidență $I_1 - I_3$

Axiomele I_1 și I_2 au loc. Într-adevăr, dacă A și B sunt două puncte din semiplanul de sus (fig. 57), atunci, după cum se vede din construcții, prin aceste puncte trece sau numai un semicerc, cu centrul pe dreapta XX, sau numai o semidreaptă perpendiculară pe dreapta XX și cu originea pe această dreaptă.

Prin urmare, în noua terminologie avem: *Prin orice două L – puncte trece o L – dreaptă și numai una singură.*

Axioma I_3 are loc. Justețea acestei afirmații urmează din faptul că pe fiecare semicerc și pe fiecare semidreaptă există câte o infinitate de puncte, iar în exteriorul acestora există puncte a semiplanului de sus.

Verificarea realizării axiomelor de ordine $II_1 - II_4$

Definiția 3.9.5. Fie A, B, C trei L – puncte, ce aparțin unei L – drepte a. Vom spune, că L – punctul C este situat între A și B, dacă punctul C este situat între punctele A și B corespunzător pe semicerc sau semidreaptă în sensul euclidian obișnuit.

Axiomele $II_1 - II_3$ au loc. Această afirmaţie rezultă din faptul, că ele au loc pentru punctele semicercului şi semidreptei.

În mod obişnuit se defineşte noţiunea de L – segment, de L – puncte interioare și exterioare L – segmentului.

Să demonstrăm satisfacerea axiomei II_4.

Vom cerceta ecuația cercului cu centrul pe dreapta XX, astfel încât originea de coordonate să aparțină dreptei XX, iar XX să coincidă cu axa absciselor:

$$\gamma = (x-a)^2 + y^2 - r^2 = 0. \quad (1)$$

Aici $(a, 0)$ – coordonatele centrului, r – raza cercului. Se știe că pentru punctele interioare cercului $\gamma < 0$, iar pentru punctele exterioare $\gamma > 0$. Vom lua doar semicercul de sus, în raport cu dreapta XX.

Se poate ușor demonstra, că pentru ca acest semicerc să intersecteze arcul AB a unui alt semicerc din semiplanul de sus și cu centrul pe dreapta XX într-un punct interior arcului, este necesar și suficient ca partea stângă a ecuației (1) γ să primească în punctele A și B valori de semne diferite.

Să cercetăm acum un triunghi curbliniu ABC, format de arcele a trei semicercuri din semiplanul de sus, în raport cu dreapta XX, centrele cărora aparțin dreptei XX și care se intersectează (fig. 58). Fie că un al patrulea semicerc γ_4 intersectează arcul AB într-un punct interior și nu trece nici prin unul din punctele A, B, C și fie că (1) este ecuația acestui al patrulea semicerc. Atunci γ_A și γ_B au semne diferite. Fie pentru determinare $\gamma_A > 0, \gamma_B < 0$. Așa cum $\gamma_C \neq 0$ (al patrulea semicerc nu trece prin punctul C), atunci sau $\gamma_C > 0$ sau $\gamma_C < 0$. În primul caz al patrulea semicerc intersectează arcul BC într-un punct interior, iar în al doilea caz intersectează arcul AC într-un punct interior.

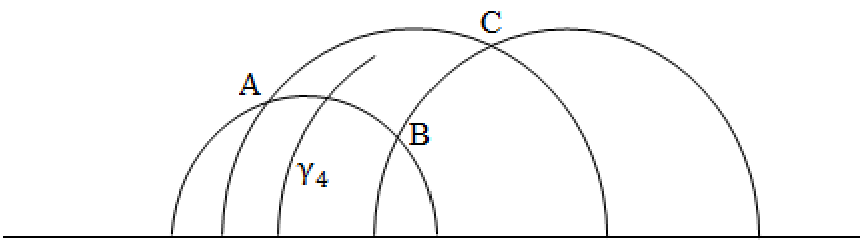


Fig. 58

Dacă exprimăm rezultatul obținut în noua terminologie, obținem conținutul axiomei II_4 pentru L – puncte și L – drepte.

În mod obișnuit se introduce noțiunea de L – semidreaptă și noțiunea de L – unghi.

Verificarea realizării axiomelor de congruență $III_1 - III_5$.

Definiția 3.9.6. Două L – segmente AB și CD se numesc congruente, dacă există așa un număr finit de inversiuni cu centrele pe dreapta XX, în rezultatul cărora arcul AB al unui semicerc euclidian să se transforme în arcul CD al altui semicerc euclidian.

Axioma III_1 are loc. Într-adevăr, fie date două semicercuri a și b, cu centrele pe dreapta XX. Să presupunem că pe primul semicerc este dat arcul AB, iar pe al doilea semicerc este fixat un punct C (fig. 59). Conform proprietății inversiunii, există inversiunea cu centrul pe dreapta XX, care transformă semicercul a pe semicercul b. Fie la această inversiune punctele A și B se aplică pe careva puncte A' şi B' de pe semicercul b.

Atunci, în baza proprietăţii inversiunii, există aşa inversiune cu centrul pe dreapta XX, care transformă semicercul b pe sine însuși, astfel încât ori punctul A' se aplică în punctul C, ori punctul B' se aplică în punctul C.

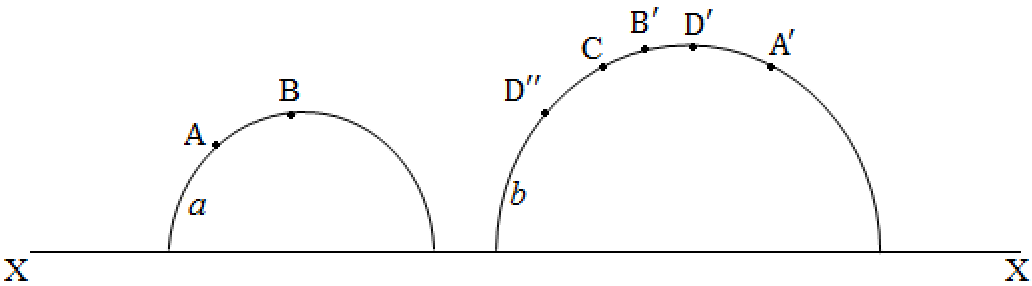


Fig. 59

În primul caz punctul B' trece în careva punct D' al semicercului b, iar în cazul doi punctul A' trece în punctul D'' al semicercului b. Punctele D' și D'' sunt situate de părți diferite față de punctul C. În corespundere cu definiția 6 a noțiunii de congruență a L – segmentelor vom avea $''AB'' \equiv ''CD'''$ și $''AB'' \equiv ''CD''''$.

Pentru a demonstra că $''AB'' \equiv ''BA''$, este suficient de aplicat semicercul a pe sine însuși, astfel încât punctele A și B să se aplice unul pe altul, ceia ce este posibil în baza proprietății inversiunii.

Demonstrația realizării III_2 și III_3 se propune cititorului.

Definiția 3.9.7. Două L – unghiuri (h, k) și (h', k') se numesc congruente, dacă există așa un șir de inversii cu centrele pe dreapta XX, astfel încât în rezultatul cărora, arcele semicercurilor ce reprezintă laturile primului L – unghi să se aplice pe arcele semicercurilor, ce reprezintă laturile celui de al doilea unghi.

Axioma III_4 are loc. Fie dat L – unghiul (h, k) cu vârful A și L – semidreapta h' cu originea A' (fig. 60). Folosind proprietățile inversiunii , noi determinăm așa un șir de inversiuni, în rezultatul efectuării cărora L – dreapta a trece în L – dreapta a', astfel încât, A trece în A' și L – semidreapta h trece în L – semidreaptă h'. Totodată L – dreapta b trece în careva L – dreaptă b', ce trece prin A', iar L – semidreapta k trece în L – semidreapta k' a L – dreptei b'. Conform definiției 7 L – unghiul (h, k) este congruent cu L – unghiul (h', k').

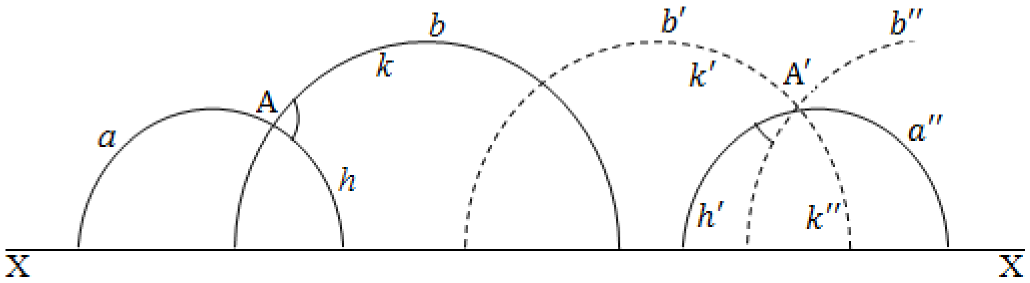


Fig. 60

Luând acum în calitate de cerc al inversiunii cercul a', noi aplicăm L – semidreapta k' în careva L–semidreaptă k'', situată de cealaltă parte a L – semidreptei h'. Conform definiției 7 L – unghiul (h, k) este congruent cu L – unghiul (h', k').

Cu ajutorul proprietăților inversiunii, se poate aplica L–semidreapta h pe semidreapta k și invers. Prin urmare, L – unghiul (h, k) este congruent cu L –unghiul (k, h). Repetând încă odată același șir de inversiuni, ne convingem, că L – unghiul (h, k) este congruent cu sine însăși.

Demonstrația realizării axiomelor III_5 o propunem cititorului.

Verificarea realizării axiomei de continuitate *IV*

Axioma lui Dedekind are loc**.** În Definiția 3.9.5 noi am redus noțiunea „a fi situat între" pentru L – punctele A, B, C, ce aparțin L – dreptei la noțiunea „a fi situat între" pentru punctele euclidiene A, B, C a semicercului de sus cu centrul pe XX. Ultima însă, ușor se reduce la noțiunea "a fi situat între" pentru proiecțiile lor ortogonale A', B', C' pe axa XX, dacă stabilim o corespondență biunivocă între punctele semicercului de sus și proiecțiile lor ortogonale pe axa XX. Așa cum, pentru punctele dreptei euclidiene XX

axioma lui Dedekind are loc, atunci ea în mod automat are loc și pentru punctele semicercului de sus, dar aceasta înseamnă că are loc și pentru L – punctele L – dreptei.

În așa fel, în interpretarea făcută, se satisfac toate axiomele geometriei absolute.

Verificarea realizării axiomei lui Lobacevski

Fie dat semicercul a de sus cu centrul pe dreapta XX și un punct A, ce nu aparține semicercului a (fig. 61). Există două și numai două semicercuri b și c (unul din ele poate să se transforme într-o semidreaptă, ortogonală la XX) cu centrele pe XX, care trec prin A şi sunt tangente la semicercul a în punctele M și N de pe axa XX. Evident, prin punctul A trec o infinitate de semicercuri de sus, cu centrele pe XX și care n-au puncte comune cu semicercul a (toate ele trec prin unghiurile curbilinii opuse la vârf și hașurate, formate de semicercurile b și c). Prin punctul A trec deasemenea o mulțime infinită de semicercuri de sus cu centrele pe XX, care intersectează semicercul a (toate trec prin interiorul unghiurilor nehașurate). În noua terminologie acest fapt se exprimă în felul următor:

În fascicolul de L – drepte, ce trec prin L – punctul $A \notin a$, există o mulțime infinită de L – drepte, ce nu intersectează L – dreapta a și o mulțime infinită de L – drepte, ce intersectează L – dreapta a.

Aceasta înseamnă, că în interpretarea construită se satisface axioma lui Lobacevski.

Rolul L–dreptelor de frontieră, adică a paralelelor lui Lobacevski, îl joacă semicercurile b și c, deoarece ele despart una de alta L – dreptele fascicolului ale celor două categorii (care intersectează și care nu intersectează dreapta a), iar aceste drepte b și c n-au puncte comune cu a, deoarece punctele M și N de pe axa XX, sunt omise.

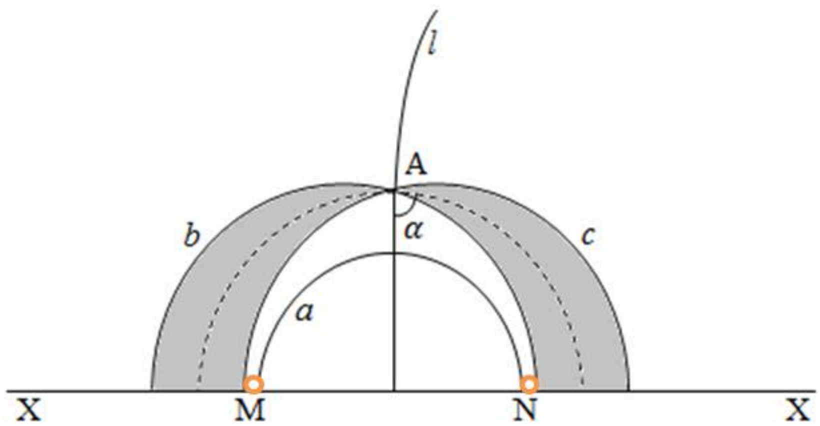


Fig. 61

Semicercul l, ce trece prin punctul A, ortogonal la dreapta a, joacă rolul perpendicularei, coborâte din L – punctul A pe L – dreapta a, iar L – unghiul α, format de această perpendiculară cu L – semidreapta AN sau AM, joacă rolul unghiului de paralelism în L – punctul A, în raport cu L – dreapta a.

În așa fel, noi într-adevăr, am obținut modelul geometriei hiperbolice, care se realizează în imaginile geometriei lui Euclid. În mod analogic, se poate construi modelul spațiului Lobacevski cu ajutorul semisferelor de sus a semispațiului euclidian, cu centrele pe planul, ce împarte spațiul euclidian în două semispații.

Din cele de mai sus, putem face următoarele concluzii:

1) Așa cum toate axiomele geometriei hiperbolice în interpretarea lui A. Poincare se reproduc în teoreme a geometriei lui Euclid, atunci și oricărei consecințe din axiomele lui Lobacevski, fiecărei teoreme din geometria hiperbolică îi corespunde o anumită teoremă din geometria lui Euclid. Prin urmare, dacă în geometria hiperbolică s-ar întâlni două afirmații care se contrazic reciproc, atunci s-ar întâlni și afirmațiile corespunzătoare din geometria lui Euclid, care se contrazic.

Așa dar, geometria hiperbolică este compatibilă în aceiași măsură, în care este compatibilă geometria lui Euclid. Așa cum, compatibilitatea geometriei lui Euclid se reduce la compatibilitatea aritmeticii, atunci și geometria hiperbolică este compatibilă în aceiași măsură, în care este compatibilă aritmetica numerelor reale.

2) Deoarece atât geometria euclidiană, cât și geometria hiperbolică sunt ambele compatibile, atunci cu axiomele geometriei absolute $I - IV$ este compatibilă atât axioma paralelelor lui Hilbert (Pleiffer) V, cât și axioma lui Lobacevski V^*. Aceasta înseamnă că axioma V, sau postulatul V, echivalent cu axioma V, nu depinde de axiomele $I - IV$ și prin urmare, nu poate fi demonstrat cu ajutorul acestor axiome.

3) Deoarece geometria hiperbolică are o realizare concretă în imaginile geometriei euclidiene, ea nu mai este „imaginară”, cum a numit-o creatorul ei, dar are aceiași valoare reală, cum și geometria euclidiană.

4) Construirea modelului geometriei hiperbolice, pune capăt la orice încercări de a demonstra postulatul V a lui Euclid, cu ajutorul axiomelor geometriei absolute și încercărilor de a respinge geometria hiperbolică.

3.10. Elemente din geometria eliptică a lui Riemann

Spre deosebire de geometria lui Euclid, în care printr-un punct ce nu aparține dreptei date, în planul determinat de această dreaptă și acest punct, trece o singură dreaptă paralelă la dreapta dată, iar geometria hiperbolică, în aceleași condiții, trec două drepte paralele la dreapta dată, apoi în geometria eliptică a lui Riemann în genere nu există drepte paralele. În geometria eliptică are loc următoarea axiomă:

Orice pereche de drepte, situate în același plan, se intersectează. (*)

Să vedem, ce schimbări urmează de făcut în sistemul de axiome a lui Hilbert, pentru a obține axiomatica geometriei eliptice.

Având în vedere, ca axiomatica geometriei absolute, adica axiomele lui Hilbert $I-IV$ sunt compatibile numai cu cele două axiome de paralelism (a lui Pleiffer și Lobacevski), atunci este clar, că pentru a construi sistemul de axiome a geometriei eliptice, este necesar de a face unele schimbări în axiomele primelor patru grupe $I-IV$. În ce privește axioma paralelelor lui Hilbert V, atunci, se vede, că ea rămâne în vigoare și în geometria eliptică (precum și postulatul V a lui Euclid), așa cum este o consecință a axiomei (*), a geometriei hiperbolice. Dar în așa caz, axioma paralelelor V trebuie omisă din lista axiomelor, iar axioma (*) de introdus în grupa axiomelor de incidență.

În așa fel, axioma V se omite, iar grupa I a axiomelor de incidență, va fi alcătuită din următoarele axiome:

I_1. Prin orice două puncte A și B trece o dreaptă.

I_2. Prin două puncte A și B trece nu mai mult decât o dreaptă.

I_3. Pe fiecare dreaptă există cel puțin două puncte. Există cel puțin trei puncte, care nu aparțin unei drepte.

I_4. Orice pereche de drepte, situate în același plan, se intersectează, adică au un punct comun.

Să vedem, ce proprietăți ale dreptei eliptice, urmează din axiomele de incidență.Planul, în care se satisfac axiomele geometriei eliptice se numește plan eliptic.

Fie în planul eliptic este dată o dreaptă a și un punct A, ce nu aparține dreptei a (fig. 62). Să cercetăm fascicolul de drepte, ce trec prin punctul A. Conform axiomei I_4 toate dreptele acestui fascicol intersectează dreapta a, inclusiv și dreapta b, perpendiculară pe dreapta AP, unde $AP \perp a$. Așa cum, conform axiomelor grupei I, două drepte se intersectează într-un singur punct, atunci între dreptele fascicolului și punctele dreptei a există o aplicație reciproc biunivocă. Fie dreapta b intersectează dreapta a în careva punct C.

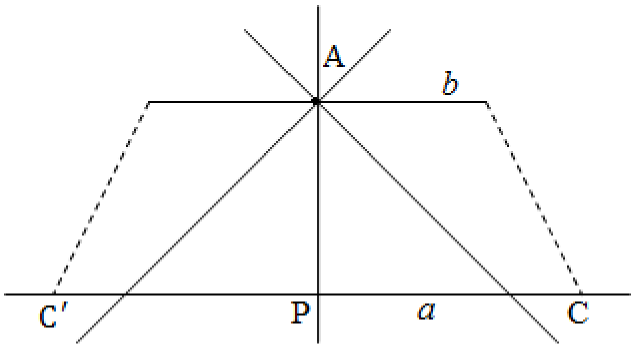


Fig. 62

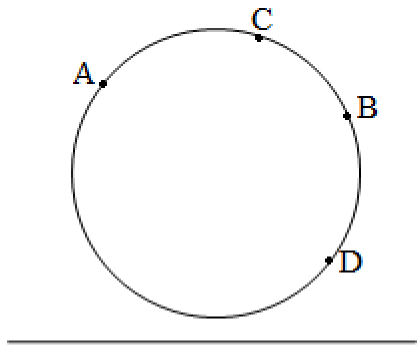


Fig. 63

În baza simetriei în raport cu dreapta AP aceiași dreaptă b trebuie să intersecteze dreapta a încă într-un punct C, simetric cu punctul C în raport cu AP. Prin urmare, dreptele a și b se intersectează în două puncte C și C', ceia ce contrazice axiomelor $I_1 - I_2$. Pentru a înlătura această contrazicere, noi trebuie să convenim, că punctele C și C' se contopesc într-un singur punct. Aceasta înseamnă, că dreapta a este închisă.

Așa dar, dreapta eliptică este închisă analogic cum cercul. Din faptul că dreapta eliptică este închisă urmează, că pentru trei puncte A, B și C noțiunea ”a fi situat între” își pierde anumit sens, deoarece fiecare din ele este situat între celelalte două, deaceia noțiunea ”a fi situat între” nu caracterizează poziția lor reciprocă.

Pentru a caracteriza poziția reciprocă a punctelor pe dreapta eliptică, se introduce altă noțiune de bază: ”separarea a două perechi de puncte”. Ilustrativ această noțiune este dată în Fig. 63. Fie A, B, C, D patru puncte diferite ale dreptei (dreapta eliptică o reprezentăm sub formă de cerc). Punctele A și B împart dreapta în două părți diferite. Dacă punctele C și D aparțin la părți diferite, atunci vom spune, că perechea A, B separă perechea C, D. Dacă însă, punctele C și D, ambele aparțin aceleiași părți a dreptei, atunci perechea A, B nu separă perechea C, D.

Dacă perechea A, B separă perechea C, D, atunci vom nota $AB|CD$.

Proprietățile de bază a noțiunii ”separarea a două perechi de puncte” se poate descrie, de exemplu, prin următoarea grupă de axiome, care înlocuiește grupa II de axiome a lui Hilbert.

Grupa II. Axiomele de ordine

II_1. Dacă $AB|CD$, atunci toate punctele A, B, C, D sunt diferite și aparțin unei drepte.

II_2. Dacă A și B sunt puncte diferite ale dreptei, atunci pe dreaptă există așa două puncte M și N, încât $AB|MN$.

II_3. Dacă $AB|CD$, atunci $CD|AB$.

II_4. Dacă $AB|CD$, atunci $AB|DC$.

II_5. Dacă $AB|CD$, atunci n-are loc $AC|BD$.

II_6. Dacă A, B, C, D sunt puncte diferite ale unei drepte, atunci are loc una și numai una separare: ori $AB|CD$, ori $AC|BD$, ori $AD|BC$.

II_7. Dacă $AB|CD$ și $AC|BE$, atunci $AC|DE$.

II_8 . Dacă patru drepte ale fascicolului intersectează careva două drepte corespunzător în punctele A, B, C, D și A_1, B_1, C_1, D_1 și dacă $AB|CD$, atunci $A_1B_1|C_1D_1$.

Sensul acestor axiome este ușor de clarificat, pe un desen, dacă reprezentăm dreapta eliptică sub formă de cerc.

Să aducem unele particularități caracteristice, care au loc în geometria eliptică.

Spre deosebire de geometria euclidiană și cea hiperbolică în geometria eliptică punctul nu mai împarte dreapta în două semidrepte, iar două puncte A și B pe dreaptă determină nu un segment, dar două segmente reciproc complementare (fig. 63).

O altă deosebire constă în faptul, că dreapta în planul eliptic nu împarte acest plan în două semiplane. Într-adevăr, pentru orice două puncte A și B, ce nu aparțin dreptei a (fig. 64), dreapta AB se împarte de aceste puncte în două segmente reciproc complementare, dintre care unul intersectează dreapta a, iar celălalt nu intersectează dreapta a. Din această cauză nu se poate afirma nici că punctele A și B sunt situate de aceiași parte în raport cu dreapta a, nici că punctele A și B sunt situate de părți diferite față de dreapta a.

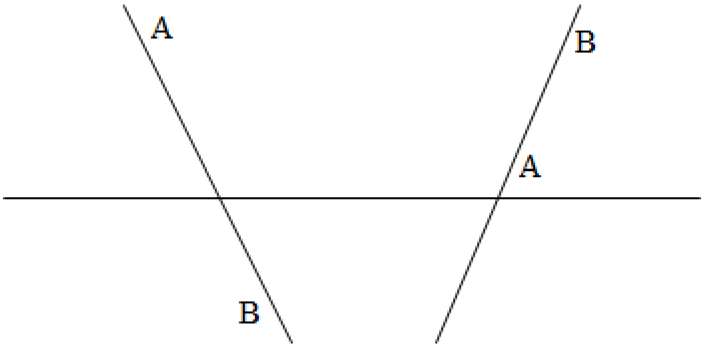


Fig. 64

Totuși, se poate afirma, că două drepte împarte planul în două părți (fig. 65), fiecare din care formează unghi. Prin urmare, în punctul O se formează două unghiuri reciproc complementare (I și III), care se numesc unghiuri alăturate. Dacă aceste unghiuri au mărimi egale, atunci ele se numesc unghiuri drepte. Suma acestor unghiuri este egală cu $2d$.

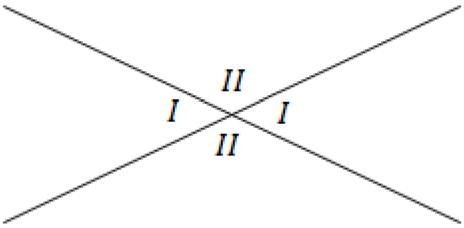


Fig. 65

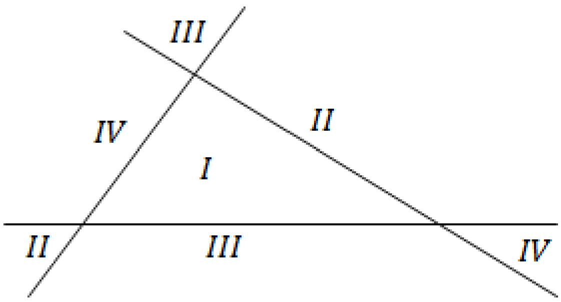


Fig. 66

Din faptul că dreapta eliptică este închisă și că două puncte o împart în două segmente reciproc complementare, urmează, că trei puncte A, B și C din planul eliptic, care nu aparțin unei drepte, determină nu un triunghi, dar patru triunghiuri, care împreună alcătuiesc tot planul (în fig. 66 aceste triunghiuri sunt numerotate).

Să mai menționăm, că pentru orice pereche de drepte în planul eliptic există unica perpendiculară comună.

Nu ne vom opri la axiomele de congruență în geometria eliptică, doar vom menționa, că și ele în unele relații se deosebesc de axiomele lui Hilbert. Axioma IV a lui Dedekind în geometria eliptică se păstrează ținând cont, că două puncte împart dreapta în două segmente.

Să mai formulăm câteva teoreme din geometria eliptică, care se deosebesc de teoremele corespunzătoare din geometria euclidiană și din geometria hiperbolică.

1) Locul geometric de puncte egal depărtate de la dreaptă, este un cerc.

2) Suma unghiurilor în triunghi este mai mare decât $2d$.

Aceasta înseamnă, că în geometria eliptică se realizează ipoteza unghiului obtuz a lui Saccheri.

În particular, în geometria eliptică există triunghiuri cu două și trei unghiuri drepte.

3) Lungimea oricărei drepte este egală cu π, adică dreapta eliptică este finită.

4) Perimetrul triunghiului este mai mic decât 2π.

5) Unghiul exterior al triunghiului sau este mai mic, sau este egal, sau este mai mare decât unghiul interior, nealăturat.

6) Aria triunghiului este egală cu defectul triunghiului, adică cu diferența dintre suma unghiurilor interioare și numărul π:

$$A(\Delta) = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.$$

7) Aria planului eliptic este egală cu 2π.

Pentru a ne încredința în compatibilitatea geometriei eliptice plane, este suficient să construim un model, folosind elemente din geometria euclidiană.

Să construim unul din aceste modele, în care se folosește suprafața sferică în spațiul euclidian.

Să cercetăm suprafața sferică unitară cu centrul în punctul O în spațiul euclidian (fig. 67).

În acest model multe particularități ale geometriei eliptice sunt bine ilustrate.

Definiția 3.10.1. Se numește ”punct” orice pereche de puncte diametral opuse de pe suprafața sferică.

Definiția 3.10.2. Se numește ”dreaptă” orice cerc mare de pe suprafața sferică.

Definiția 3.10.3. Se numește ”plan” însăși suprafața sferică.

Afirmația ”Punctul aparține dreptei date” înseamnă, că două puncte diametral opuse ale suprafeței sferice sunt situate pe cercul mare al suprafeței sferice.

În așa mod, ușor ne încredințăm, că toate cele patru axiome din grupa *I* se satisfac în acest model.

1) Prin orice două ”puncte” trece o dreaptă și numai una singură, deoarece prin orice două perechi de puncte diametral opuse ale suprafeței sferice trece un cerc mare și numai unul singur.

2) Pe fiecare ”dreaptă” există două ”puncte” (chiar o mulțime infinită de ”puncte”, deoarece pe fiecare cerc mare există două perechi (chiar o infinitate de perechi) de puncte diametral opuse. Analogic ne convingem, că există trei ”puncte”, ce nu aparțin unei ”drepte”.

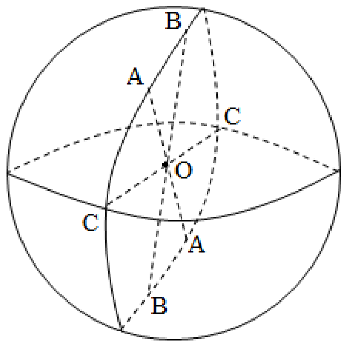


Fig. 67

3) Orice două ”drepte” diferite se intersectează într-un singur ”punct”, deoarece orice două cercuri mari se intersectează într-o singură pereche de puncte diametral opuse ale suprafeței sferice.

Proprietățile ”dreptei” de a fi închisă și finită sunt evidente, deoarece ”dreapta” este reprezentată de cercul mare al suprafeței sferice. Devine destul de iustrativă și noțiunea de ”separare a două perechi de puncte” și satisfacerea tuturor axiomelor grupei II în modelul construit.

Prin segment AB vom înțelege oricare din cele două perechi de arce opuse ale cercului mare, care trece prin punctele A și B. Pe modelul construit (fig. 67) se vede, că ”punctele” A și B determină două ”segmente”: unul se determină de o pereche de arce opuse, care nu conțin extremitățile diametrului CC, iar celălalt se determină de perechea de arce opuse, care conțin punctele diametral opuse C. Evident, devine și acel fapt, că ”dreapta” nu împarte ”planul” în două ”semiplane”. Într-adevăr, care n-ar fi ”punctele” A și B (fig. 67), care nu aparțin ”dreptei” a, ”dreapta” AB intersectează ”dreapta” a într-un singur ”punct” C. Prin urmare, numai unul din ”segmentele”, determinate pe ”dreapta”

AB de ”punctele” A și B, intersectând ”dreapta” a în ”punctul” C, celălalt nu intersectează ”dreapta” a.

În așa mod se poate verifica satisfacerea tuturor axiomelor și a oricărei teoreme din geometria eliptică plană în modelul construit.

Realizarea planimetriei eliptice pe suprafața sferică euclidiană ne permite să afirmăm, că geometria eliptică este tot atăt de necontradictorie,cît și geometria euclidiană.

Se poate observa, că există o corespondență biunivocă între mulțimea tuturor perechilor de puncte diametral opuse de pe suprafața sferică cu centrul în punctul O și mulțimea tuturor dreptelor fascicolului cu centrul în *O*. Deasemenea există o astfel de corespondență între mulțimea tuturor planelor acelueași fascicol și mulțimea tuturor cercurilor mari de pe suprafața sferică. Aceste corespondențe biunivoce ne permit să construim o altă interpretare a planimetriei eliptice în sistemul geometriei euclidiene cu ajutorul fascicolului de drepte și plane cu centrul în punctual *O*. În această interpretare prin ”punct” vom înțelege dreapta fascicolului, prin ”dreaptă” vom înțelege planul fascicolului, iar prin ”plan” – însăşi fascicolul ş.a.m.d. Aceasta înseamnă, că planimetria eliptică a lui Rieman poate fi privită ca geometria fasciclului de drepte în spatial euclidian tridimensional.

Anexa 1. Transformarea de inversiune și proprietățile ei

0.1. Transformarea de inversiune

Fie în plan este dat un cerc $\omega(O,R)$ și un punct arbitrar $X,$ diferit de punctul O (fig.1). Punctului X îi punem în corespondență un astfel de punct X', încât să se satisfacă următoarele condiții:

1) Punctul X'aparține semidreptei $[OX)$;

2) $OX \cdot OX' = R^2$.

Punctul X'care satisface acestor două condiții, se numește punct invers punctului X în raport cu cercul $\omega(O,R)$. Aplicația planului pe sine însuși la care fiecare punct se aplică pe punctul invers se numește inversiune. Cercul ω se numește cercul de bază al inversiunii, centrul cercului de bază se numește centrul inversiunii, iar raza acestui cerc se numește raza inversiunii.

Figura $F',$ formată din toate punctele inverse punctelor figurii F, se numește figură inversă pentru figura dată F.

Să observăm că nici un punct al planului nu este punct invers pentru centrul inversiunii. Cu alte cuvinte, aplicația de inversiune nu este o aplicație biunivocă a planului pe sine însăși, adică nu este o transformare a planului. De aceia, în viitor la studierea inversiunii vom avea în vedere, că din plan este înlăturat (exclus) punctul O, adică centrul inversiunii. Cu aşa condiţie, aplicaţia de inversiune devine o transformare a planului, pe care o vom numi transformare de inversiune. Așa de exemplu, dacă vom vorbi despre transformarea de inversiune a dreptei ce trece prin centrul inversiei O, vom avea în vedere toate punctele acestei drepte, în afară de punctul O.

Dacă $R = 1$, atunci $OX' = \dfrac{1}{OX}$. Prin urmare,

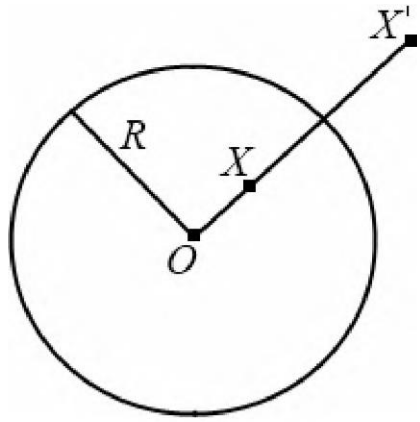


Fig.1

dacă punctul X'este punct invers pentru punctul X, atunci distanțele OX și OX' se exprimă prin numere reciproc inverse. Prin aceasta se lămurește că punctul X' se numește punct invers pentru punctul X, iar transformarea dată se numește transformarea razelor inverse sau distanțelor inverse.

Din definiția transformării de inversiune urmează nemijlocit următoarele proprietăți ale acestei transformări:

$\mathbf{1}^{\circ}$. Dacă punctul X' este inversul punctului X, atunci punctul X este inversul punctului X'.

$\mathbf{2}^{\circ}$. Dacă la transformarea de inversiune figura F se transformă în figura F', atunci figura F'se transformă în figura F.

$\mathbf{3}^{\circ}$. Fiecare punct al cercului de bază a inversiunii se aplică pe sine însuși.

$\mathbf{4}^{\circ}$. Dacă punctul X este exterior, în raport cu cercul de bază al transformării de inversiune, atunci punctul invers X' este interior în raport cu cercul de bază și invers.

$\mathbf{5}^{\circ}$. Dacă punctul X din exteriorul cercului de bază se îndepărtează nemărginit de la acest cerc, atunci punctul invers X' se apropie nemijlocit de centrul inversiunii.

$\mathbf{6}^{\circ}$. Transformarea de inversiune aplică semidreapta h ce pornește din centrul inversiunii pe sine însăși. Partea semidreptei h din interiorul cercului se aplică pe partea exterioară a semidreptei h și invers.

$\mathbf{7}^{\circ}$. Transformarea de inversiune aplică dreapta ce trece prin centrul inversiunii pe sine însăși (avem în vedere că centrul inversiunii este înlăturat din dreaptă).

Construirea punctului invers punctului dat poate fi efectuată cu ajutorul riglei și a compasului. Această construcție se bazează pe două teoreme bine cunoscute din geometria elementară:

1) Tangenta la cerc este perpendiculară pe diametrul (raza) cercului dus prin punctul de tangență.

2) Cateta triunghiului dreptunghic este media geometrică dintre ipotenuză și proiecţia acestei catete pe ipotenuză.

Pentru a construi punctul invers pentru punctul dat vom cerceta trei cazuri.

Cazul I. Punctul X aparține cercului de bază al inversiunii. În acest caz punctul invers X'coincide cu punctul X.

Cazul II. Punctul X aparține exteriorului cercului de baza $\omega(O, R)$ (fig.2). Prin punctul X construim tangenta XT la cercul de bază a inversiunii.

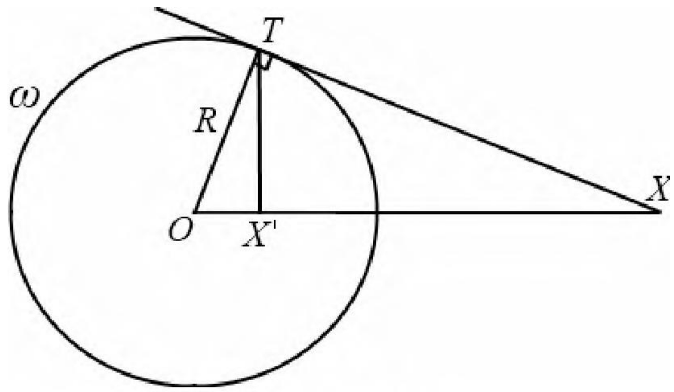


Fig.2

Din punctul de tangență T construim perpendiculara la dreapta OX. Piciorul acestei perpendiculare X' este punctul invers pentru punctului X.

Într-adevăr, din triunghiul dreptunghic OTX avem:

$OX \cdot OX' = R^2$.

Observaţie. Dacă punctul X este exterior cercului $\omega(O, R)$, atunci punctul invers X' poate fi construit în felul următor. Construim consecutiv (fig.3): semidreapta OX, cercul ω' cu diametrul OX, coarda TT_1, care unește punctele de intersecție ale cercurilor ω și ω'. Atunci punctul X' de intersecție a coardei TT_1 cu semidreapta OX și este punctul invers pentru punctul X.

Cazul III. Punctul X aparține interiorului cercului de bază $\omega(O, R)$.

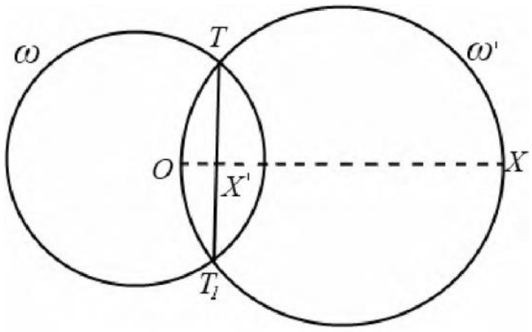


Fig.3

În baza proprietăţii 1° a transformării de inversiune în acest caz problema se reduce la construirea proimaginii dupa imagine în condiţiile cazului precedent. Așa dar, trebuie de construit în punctul X perpendiculara la dreapta OX, de aflat un punct de intersecție a acestei perpendiculare cu cercul de bază și în acest punct de construit tangenta la cercul de bază. Această tangentă va intersecta semidreapta OX în punctul X'.

0.2. Lema despre drepte antiparalele

Fie o dreapta oarecare a intersectează ambele laturi ale unui unghi oarecare (k, l) (fig.4, a). La intersecție cu una din laturile unghiului, de exemplu k, această dreaptă formează patru unghiuri, dintre care numai unul este interior triunghiului, tăiat de dreapta a din unghiul (k, l).

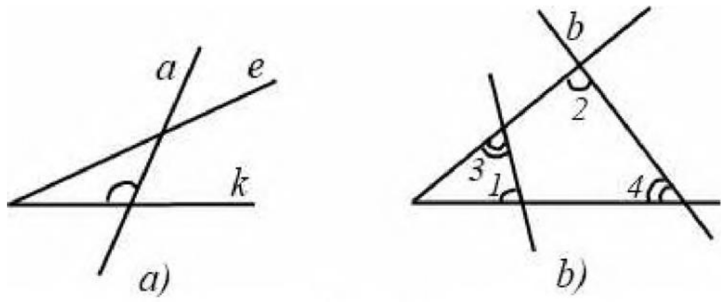


Fig.4

În viitor, când va fi vorba despre unghi dintre careva dreaptă și latura unghiului se va avea în vedere anume acest unghi.

Fie acum două drepte (fig.4, b) intersectează laturile unghiului, astfel încât una din ele formează cu una din laturile unghiului un unghi mărimea căruia este egală cu mărimea unghiului format de cealaltă dreaptă cu a doua latură a unghiului (în fig. 4, b $\measuredangle 1 \equiv \measuredangle 2$). Atunci și prima dreaptă formează cu a doua latură a unghiului un unghi mărimea căruia este egală cu mărimea unghiului format de a doua dreaptă cu prima latură a unghiului ($\measuredangle 3 \equiv \measuredangle 4$).

Definiţia 0.2.1. Două drepte, care intersectează laturile unui unghi, se numesc antiparalele în raport cu acest unghi, dacă una din aceste drepte formează cu o latura a acestui unghi, un unghi mărimea căruia să fie egală cu mărimea unghiului format de cealaltă dreaptă cu a doua latură a unghiului.

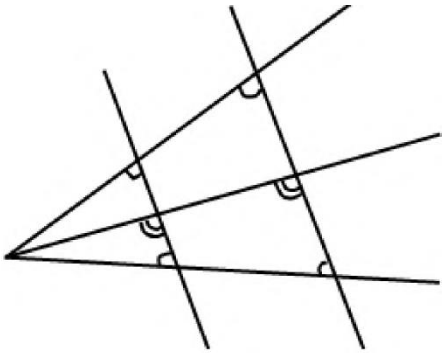


Fig.5

Dreptele antiparalele în genere nu-s paralele. Excepţie este doar în cazul când ambele drepte sunt perpendiculare pe bisectoarea unghiului dat (fig.5).

Teorema 0.2.2. (Lema despre drepte antiparalele). Dreapta ce trece prin două puncte A, B ale planului și dreapta ce trece prin punctele A', B' inverse corespunzător punctelor A, B sunt antiparalele în raport cu unghiul vârful căruia este în centrul inversiei, iar laturile căruia trec prin punctele A și B.

Demonstraţie. Fie $\omega(O, R)$ este cercul de bază, iar punctele A' și B' sunt corespunzător punctele inverse ale punctelor A și B (fig. 6).

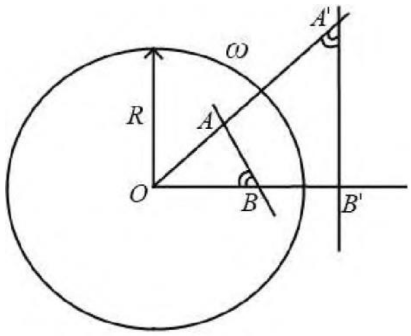


Fig.6

Atunci, $OA \cdot OA' = R^2$, $OB \cdot OB' = R^2$ și deci, $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ sau $OA : OB = OB' : OA'$. În triunghiurile AOB și $A'OB'$ unghiul O este comun. Prin urmare, triunghiurile

AOB și $A^{'}OB^{'}$ sunt asemenea, dar atunci $\measuredangle OBA \equiv \measuredangle OA^{'}B^{'}$. Așa dar, dreptele AB și $A^{'}B^{'}$ sunt antiparalele. Teorema este demonstrată.

Dacă într-un mod oarecare sunt date două puncte corespunzătoare A și A' la o transformare de inversiune, atunci lema demonstrată ne oferă posibilitatea să construim imaginea oricărui punct B (ce nu aparține dreptei OA). Pentru aceasta este suficient să unim punctele B cu A și să construim dreapta $A'B'$ astfel încât, $\measuredangle OA'B' \equiv \measuredangle OBA$. Cu ajutorul aceleiași leme se poate de construit și imaginea oricărui punct al dreptei OA, dacă se cunosc punctul A și imaginea A' a punctului A la transformarea de inversiune. Este suficient să construim imaginea B' a unui punct arbitrar B, care nu aparține dreptei OA, iar apoi având punctele reciproc inverse B și B' se poate de construit imaginea oricărui punct al dreptei OA (evident, diferit de punctul O).

0.3. Imaginea cercului, ce trece prin centrul inversiei la o transformare de inversiune

Fie un cerc oarecare γ trece prin centrul inversiunii-punctul O. La transformarea de inversiune toate punctele cercului γ, în afară de punctul O, se aplică pe careva alte puncte. Se pune întrebarea ce figură formează aceste puncte?

T**eorema 0.3.1.** Transformarea de inversiune aplică cercul, care trece prin centrul inversiei pe o dreaptă. Această dreaptă este perpendiculară pe linia centrelor cercului dat și a cercului de bază.

Demonstrație. Fie $\omega(O,R)$ este cercul de bază a inversiunii, $\gamma(O_1,R_1)$ un cerc care trece prin punctul O. Construim semidreapta OO_1. Fie cercul γ intersectează semidreapta OO' în punctul A (fig. 7). Să notăm prin A' punctul invers punctului A.

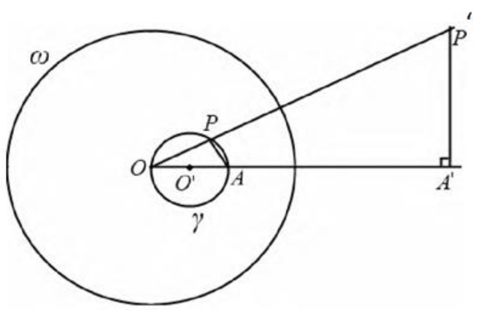


Fig. 7

Luăm pe cercul γ un punct arbitrar P și construim punctul P', inversul punctului P. Unim punctele P, A și P', A'. În baza lemei despre drepte antiparalele avem că $\measuredangle OA'P' \equiv \measuredangle OPA$. Să observăm că unghiul $\measuredangle OPA$ se sprijină pe diametrul cercului γ și prin urmare, este un unghi drept. Atunci și unghiul $OA'P'$ este drept. Prin urmare punctul P' aparţine dreptei ce trece prin punctul A' perpendicular la dreapta OO_1. Astfel ne convingem, că orice punct al cercului γ se aplică pe un punct al dreptei $A'P'$. Ușor ne convingem în justețea afirmației inverse: fiecare punct al dreptei $A'P'$ este invers pentru careva punct al cercului γ. Prin urmare, cercul γ se transformă la inversiune într-o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor cercului de bază și a cercului dat. Teorema este demonstrată.

Din această teoremă urmează metoda de construcție a dreptei inverse cercului dat, dacă ultimul trece prin centrul inversiei:

1) Construim dreapta OO_1, care trece prin centrul inversiunii şi centrul cercului dat;

2) Notăm punctul A de intersecție a acestei drepte cu cercul dat ($A \neq 0$);

3) Construim punctul A', inversul punctului A;

4) Prin punctul A' construim dreapta a, perpendicular pe dreapta OO_1. Dreapta a este dreapta căutată.

În cazul când cercul de bază intersectează cercul dat γ, construcţia dată devine mai simplă. Dreapta inversă cercului dat, este dreapta determinată de cele două puncte de intersecție a cercului γ cu cercul de bază (fig. 8).

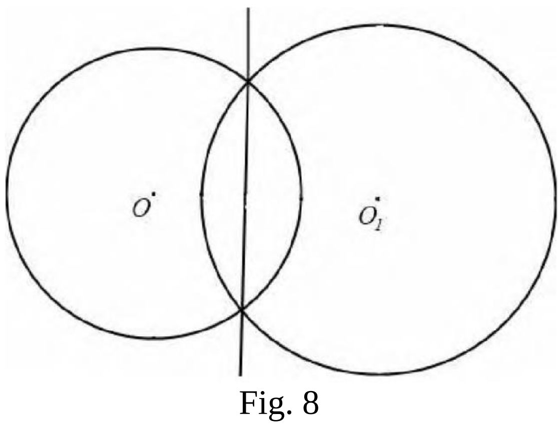


Fig. 8

Dacă cercul γ este tangent la cercul de bază ω, atunci γ se aplică pe tangenta comună a acestor două cercuri.

Dacă două cercuri se intersectează în centrul inversei, atunci transformarea de inversiune aplică aceste două cercuri pe două drepte paralele.

0.4. Imaginea cercului, care nu trece prin centrul inversiunii

Teorema 0.4.1. Transformarea de inversiune aplică cercul, care nu trece prin centrul inversiunii, pe un cerc.

Demontrație. Fie $\omega(O,R)$ este cercul de bază al inversiunii (fig. 9), $\gamma(O_1,R_1)$ un cerc arbitrar dat. Construim dreapta OO_1 și notăm punctele de intersecție ale cercului γ cu dreapta OO_1 prin A și B. Fie A' și B' sunt punctele inverse punctelor A și B corespunzător.

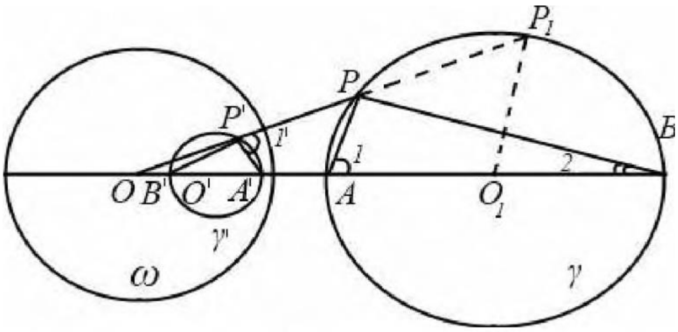


Fig. 9

Notăm prin P un punct arbitrar al cercului γ, iar prin P' punctul invers punctului P. Unim punctul P cu A și B, P' cu A' și B' Din lema despre drepte antiparalele urmează că $\measuredangle 1' \equiv \measuredangle 1,\ \measuredangle OP'B' \equiv \measuredangle 2.$ Deoarece $m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 = 90^{\circ}$, urmează că $m\measuredangle 1' + m\measuredangle 2' = 90^{\circ}$. Atunci, $m\measuredangle A'P'B' = 90^{\circ}$. Prin urmare, din punctul P' segmentul $[A'B']$ se vede sub un unghi drept. Aceasta înseamnă că punctul P' aparține cercului cu diametrul $A'B'$. Să notăm acest cerc prin γ'. Astfel, noi am demonstrat că fiecare punct al cercului γ, la inversiunea în raport cu cercul $\omega(O,R)$ se aplică pe un punct al cercului γ'. Din proprietățile 1° și 2° ale inversiunii urmează că fiecare punct al cercului γ' este imaginea unui punct oarecare a cercului γ la această transformare. Teorema este demonstrată.

Consecință. La inversiunea cercetată semicercul APB se aplică pe semicercul $A'P'B'$.

Din demonstrația acestei teoreme obținem următoarea metodă de construcţie a cercului, invers cercului dat (dacă ultimul nu trece prin centrul inversiunii):

1) Construim dreapta ce trece prin centrul inversiunii și prin centrul O_1 al cercului dat;

2) Notăm punctele A și B de intersecție a acestei drepte cu cercul γ;

3) Construim punctele inverse A' şi B' corespunzător punctelor A și B;

4) Construim cercul γ' pe segmentul $[A'B']$ ca pe diametru. Cercul γ'este cercul căutat.

Cercetând translația paralelă, rotația, simetria axială, omotetia ne-am convins că aceste transformări aplică cercul pe cerc, astfel încât centrul cercului dat se aplică pe centrul imaginii acestui cerc. S-ar părea că o astfel de legitate ramâne în vigoare și pentru transformarea de inversiune. Această presupunere însă nu-i adevărată. Dacă la inversiune cercul γ se transformă în cercul γ'', iar centrul O_1 al cercului γ se aplică pe punctul O_1', atunci punctul O_1' nu va fi centrul cercului γ''.

Teorema 0.4.2. Două cercuri corespunzător inverse unul altuia pot fi privite ca omotetice, astfel încât centrul de omotetie coincide cu centrul inversiunii, iar coeficientul de omotetie este egal cu raportul razelor.

Demonstraţie. Să apelăm la Fig. 9. Fie P_1 al doilea punct de intersecție a dreptei OP cu cercul γ. Atunci, $\measuredangle BPP_1 \equiv \measuredangle A'B'P'$ conform lemei despre dreptele antiparalele. Totodată $\measuredangle BPP_1 \equiv \measuredangle BAP_1$, deoarece ambele aceste unghiuri înscrise se sprijină pe același arc BP_1. Prin urmare, $\measuredangle A'B'P' \equiv \measuredangle BAP_1$. Atunci $P'O' \parallel P_1O_1$ și deci $OP' : OP_1 = O'P' : O_1P_1 = const.$ Așa dar, cercul γ' corespunde cercului γ la omotetia cu centrul O și coeficientul $k = O'P' : O_1P_1$. Această omotetie aplică punctul P_1 pe punctul P', însă inversiunea aplică punctul P pe punctul P'. Teorema este demonstrată.

0.5. Transformarea dreptei la inversiune

Din proprietăţile inversiunii se ştie că dreapta ce trece prin centrul inversiunii se aplică pe sine însăşi. Se pune întrebarea ce reprezintă imaginea dreptei, care nu trece prin centrul inversiunii?

Teorema 0.5.1. La transformarea de inversiune, dreapta ce nu trece prin centrul inversiunii se aplică pe un cerc, care trece prin centrul inversiunii.

Demonstrație. Fie $\omega(O, R)$ cercul de bază, iar a o dreaptă dată (fig. 10). Din punctul O construim perpendiculara OA pe dreapta a. Fie A' este punctul invers punctului A, iar γ este cercul cu diametrul OA'.

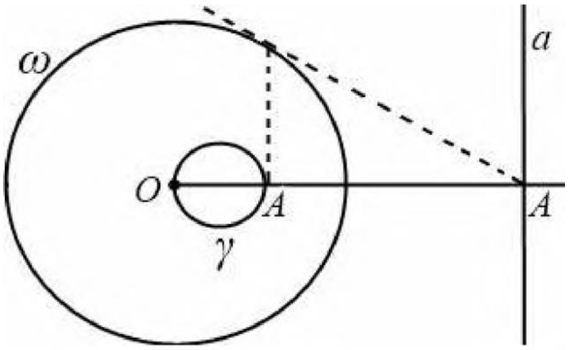


Fig. 10

La inversiune cercul γ se aplică pe dreapta a . În baza proprietății de reciprocitate dreapta a se aplică pe cercul γ. Teorema este demonstrată.

Din demonstrația acestei teoreme urmează și metoda de construire a cercului, invers dreptei date.

0.6. Cercuri invariante

Definiția 0.6.1. Se numește unghi dintre două linii în punctul lor de intersecție T, unghiul dintre tangentele duse la aceste linii în punctul T.

Definiția 0.6.2. Două cercuri se numesc ortogonale, dacă aceste cercuri se intersectează după un unghi drept.

Dacă doua cercuri sunt ortogonale, atunci razele lor, duse în punctul de tangență, sunt perpendiculare. Este justă și afirmația inversă. Din cele spuse urmează și metoda de construcție a cercului, ortogonal cercului dat ω în punctul dat T. Pentru aceasta este suficient pe tangenta t la cercul ω în punctul T de ales un punct arbitrar O_1 și de construit cercul $\omega_1(O_1, O_1T)$. Cercul ω_1 și va fi cercul căutat (fig. 11).

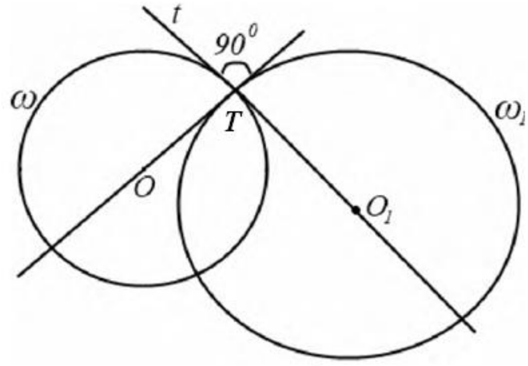


Fig. 11

La inversiune cercul de bază se aplică pe sine însăşi (§ 0.1, proprietatea 3°). Se pune întrebarea dacă mai există așa cercuri, care să posede așa proprietate?

Teorema 0.6.3. Pentru ca un cerc dat, diferit de cercul de bază, să se aplice la inversiune pe sine însuși, este necesar și suficient, ca cercul dat să fie ortogonal cu cercul de bază.

Demonstraţie. *1) Suficienţa.* Fie cercul $\gamma(O_1, R_1)$ (fig.12) este ortogonal cercului de bază $\omega(O, R)$. Să demonstrăm că cercul γ se aplică pe sine însuși la inversiunea în raport cu cercul ω. Fie P un punct arbitrar al cercului γ. Construim dreapta OP.

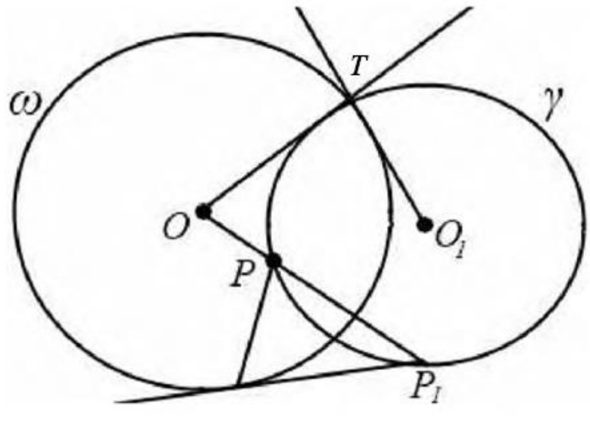


Fig. 12

Fie această dreaptă intersectează cercul γ încă într-un punct oarecare P_1 (dacă dreapta OP este tangentă la cercul γ, atunci, în loc de punctul P_1 luăm punctul P). Deoarece cercul γ este ortogonal cercului ω, atunci raza OT, care unește centrul inversiunii cu punctul de intersecție a cercurilor γ și ω, este tangenta la cercul γ. Atunci

$OP \cdot OP_1 = OT^2 = R^2$. Prin urmare, punctul P_1 este invers punctului P. Așa dar, la inversiunea în raport cu cercul ω fiecare punct P al cercului γ, se aplică pe un punct P_1, care deasemenea aparţine cercului γ.

Având în vedere proprietatea de reciprocitate a transformării de inversiune, se poate face concluzia că fiecare punct al cercului γ este imagine a căruiva punct al cercului γ. Prin urmare, la această inversie cercul γ se transformă în sine însuși.

2) Necesitatea. Fie cercul γ, diferit de cercul de bază al inversiunii, se transformă în sine însuși. Să demonstrăm că cercul γ este ortogonal cercului de bază. Deoarece cercul γ este diferit de cercul ω, atunci există punctul P care aparține cercului γ și punctul P nu aparţine cercului ω. Fie punctul P_1 este invers punctului P (fig. 12). Atunci unul din punctele P și P_1 este situat în exteriorul cercului ω, iar celălalt în interiorul cercului ω. Prin urmare, cercul γ intersectează cercul ω. Să notăm prin T unul din aceste puncte de intersecție. Să demonstrăm că OT este tangentă la cercul γ. Vom demonstra această afirmație de la contrariu. Să presupunem, că dreapta OT intersecteaza cercul γ încă într-un punct T_1, diferit de punctul T. Observăm ca punctele P și P_1 sunt situate de aceiași parte în raport cu punctul O, așa că punctul O este situat în exteriorul cercului γ. În baza proprietății secantelor, duse din acelați punct la cerc, avem:

$OT \cdot OT_1 = OP \cdot OP_1 = R^2$.

Deoarece $OT = R^2$, atunci și $OT_1 = R$. Prin urmare, punctul T_1 trebuie să coincidă cu punctul T, ceia ce contrazice presupunerii. Așa dar, OT este tangentă la cercul γ. Prin urmare, cercurile ω și γ sunt ortogonale. Teorema este demonstrată.

Teorema 0.6.4. Dacă cercul trece prin două puncte reciproc inverse, atunci la inversiune cercul se transformă în sine însuși.

Demonstraţie. Fie cercul γ trece prin punctele P și P', care sunt reciproc inverse în raport cu cercul $\omega(O, r)$. Atunci $OP \cdot OP' = r^2$. Evident, punctul O aparține exteriorului cercului γ. Fie Q un punct arbitrar al cercului γ (fig.13). Construim semidreapta OQ și fie că această semidreaptă intersecteaza cercul γ în punctele Q și Q' (dacă OQ este tangentă la cercul γ, atunci $Q' = Q$).

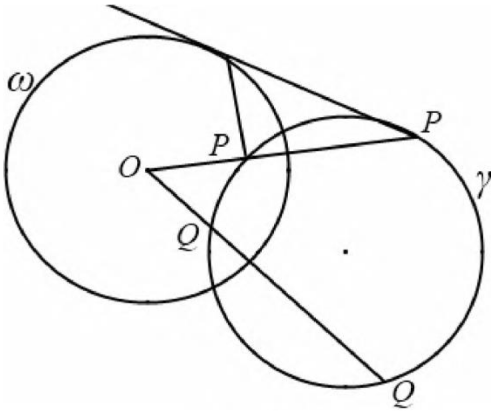


Fig. 13

Atunci $OQ \cdot OQ' = OP \cdot OP' = r^2$, adică punctele Q și Q' sunt reciproc inverse. Prin urmare, dacă careva punct aparţine cercului γ, atunci şi punctul invers acestui punct deasemenea aparţine acestui cerc. Aşa dar, la aceasta inversie cercul γ se transformă în sine însuși. Teorema este demonstrată.

Consecinţa 0.6.5. Cercul, care trece prin două puncte reciproc inverse, este ortogonal cercului de bază a transformării de inversiune. Toate cercurile, care trec prin două puncte reciproc inverse, formează un fascicol eliptic, format din toate cercurile ortogonale cercului de bază a inversiei.

0.7. Păstrarea unghiurilor la inversiune

Lema 0.7.1. Dacă la inversiunea în raport cu cercul $\omega(O, R)$ punctul M și curba γ ce trece prin punctul M se aplică corespunzător pe punctul M' și curba γ', atunci curbele γ și γ' în aceste puncte formează unghiuri congruente cu dreapta OM.

Demonstrație. Fie P un punct arbitrar al curbei γ, P' imaginea punctului P la inversiunea în raport cu cercul $\omega(O, R)$. Evident, punctul P' aparține cercului γ' (fig.14).

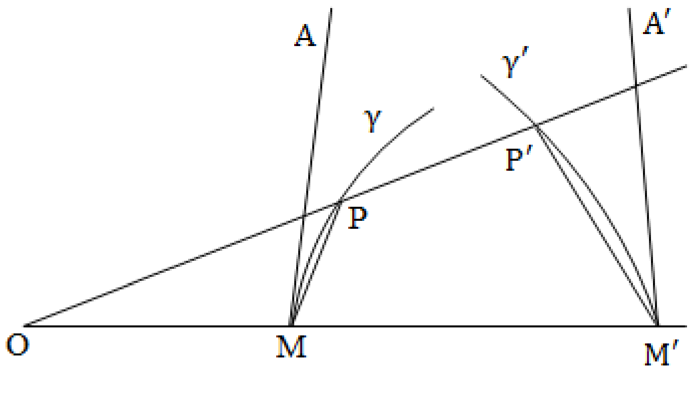


Fig. 14

Unim punctul M cu punctul P și punctul M' cu punctul P'. În baza lemei despre drepte antiparalele $m\measuredangle MM'P' = m\measuredangle MPO$ sau $m\measuredangle MM'P' = m\measuredangle M'MP - m\measuredangle MOP$ (1).

Fie că la apropierea nemijlocită a punctului P pe curba γ către punctul M, secanta MP tinde către poziția MA, așa că MA este tangenta liniei γ în punctul M. Fie $m\measuredangle M'MA = \alpha$. Atunci $\lim_{P\to M} m\measuredangle M'MP = \alpha$. În același timp, când punctul P tinde către punctul M, alunecând pe curba γ, mărimea unghiului MOP tinde la zero. Deaceia, conform relației (1), mărimea unghiului $MM'P'$ deasemenea tinde către o anumită limită, egală cu α. Prin urmare, când punctul P tinde către punctul M, alunecând pe curba γ (și deci punctul P' tinde către punctul M', alunecând pe curba γ'), secanta $M'P'$ tinde către o poziție limită $M'A'$ și $A'M'$ este tangenta la curba γ în punctul M'. Așa dar, $m\measuredangle MM'A' = \alpha$. Lema este demonstrată.

Teorema 0.7.2. Dacă două curbe γ_1, γ_2 și punctul lor de intersecție M se aplică la o oarecare inversiune corespunzător pe curbele γ_1', γ_2' și punctul M', atunci unghiurile dintre curbele γ_1, γ_2 în punctul M și dintre γ_1', γ_2' în punctul M', sunt congruente.

Demonstrație. Fie a_1 și a_2 tangentele la curbele γ_1, γ_2 în punctul M, iar a_1', a_2' tangentele la curbele γ_1', γ_2' în punctul M' (fig.15).

Să presupunem că nici una dintre dreptele a_1 și a_2 nu coincide cu dreapta OM, unde O este centrul inversiunii, deoarece în caz contrar, demonstrația devine evidentă. Dreapta MM' împarte planul în două semiplane. În unul din aceste semiplane, pe fiecare dreaptă a_1, a_2 și a_1', a_2', notăm corespunzător punctele A_1, A_2 și A_1', A_2'. În baza lemei

$$m\measuredangle M'MA_1 = m\measuredangle MM'A_1' \quad (2)$$

$$m\measuredangle M'MA_2 = m\measuredangle MM'A_2' \quad (3)$$

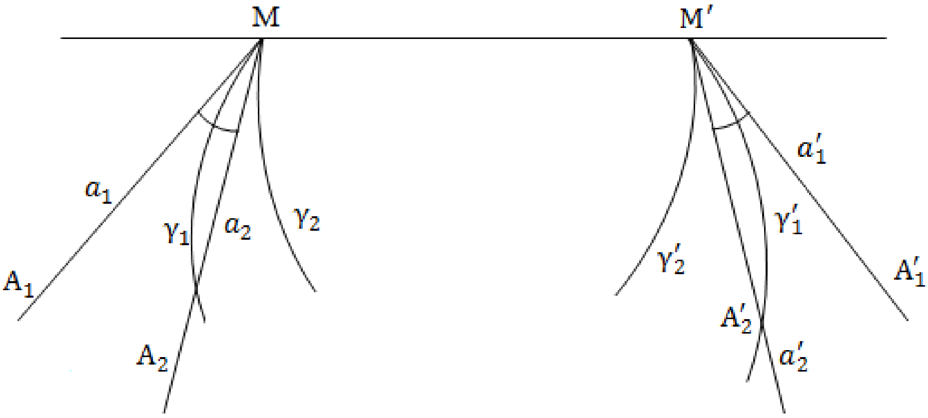


Fig.15

Fie $m\,\measuredangle M'MA_2 < m\,\measuredangle M'MA_1$, atunci $m\,\measuredangle A_2MA_1 = m\,\measuredangle M'MA_1 - m\,\measuredangle M'MA_2$ și $m\,\measuredangle A_2'M'A_1' = m\,\measuredangle MM'A_1' - m\,\measuredangle MM'A_2'$. În baza relațiilor (2), (3) $m\,\measuredangle A_1'M'A_2' = m\,\measuredangle A_1MA_2$. Teorema este demonstrată.

Consecință. Dacă două curbe sunt tangente în careva punct, diferit de centrul inversiunii, atunci la inversiune ele se aplică pe două curbe tangente în punctul corespunzător.

Unerori, teorema 1 se formulează în felul următor: la inversiune se păstrează unghiul dintre două curbe. Având astfel de proprietate, se mai spune că inversiunea este o transformare conformă (păstrează forma).

Din fig.15 se vede, că unghiurile A_1MA_2 și $A_1'M'A_2'$ sunt opus orientate. Acest fapt are un caracter general: la inversiune se păstrează mărimea unghiului, dar se schimbă orientația unghiului.

0.8. Aplicarea transformării de inversiune la rezolvarea problemelor

Exemplul 0.8.1. Prin două puncte date A și B de construit un cerc ortogonal cercului dat $\omega(O,r)$ (fig.16).

Rezolvare. Dacă considerăm cercul dat ω în calitate de cerc de bază, atunci la inversiunea în raport cu ω cercul căutat γ se aplică pe sine însuși, iar punctele A și B se aplică pe punctele A' și B' ale acestui cerc γ. Cercul γ este complet determinat de trei puncte ale acestui cerc, de exemplu A, B și A'.

Construcţia.

1) Construim punctul A', inversul punctului A în raport cu cercul ω.

2) Construim $\gamma(A,B,A')$. Cercul γ este cercul căutat.

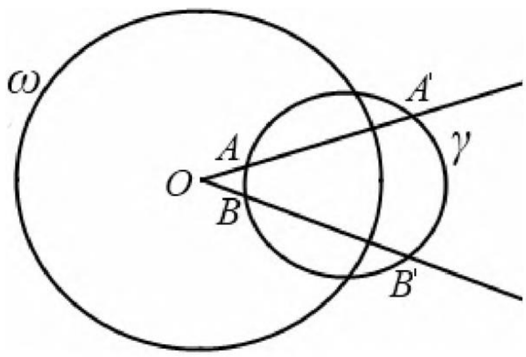


Fig.16

Dacă punctul A aparține cercului ω, atunci punctul A' coincide cu punctul A și prin urmare, metoda de rezolvare de mai sus nu permite soluția. În acest caz trebuie de efectuat o construcție analogică în raport cu punctul B. Dacă însă ambele puncte A, B aparțin cercului ω, atunci problema dată se rezolvă în felul următor: prin punctele A și B construim tangentele la cercul ω, atunci punctul O_1 de intersecție ale acestor tangente va fi centrul cercului căutat.

Construcțiile descrise mai sus nu pot fi efectuate în cazul, când punctele O, A și B aparțin unei drepte. Daca în așa caz punctele A și B nu-s reciproc inverse în raport cu ω, atunci problema n-are soluţii. Daca însă punctele A şi B sunt reciproc invese în raport cu ω, atunci problema are o infinitate de soluţii: toate cercurile ce trec prin punctele A şi B sunt ortogonale cercului ω.

Exemplul 0.8.2. Este dat un punct O și două drepte a şi b ce nu trec prin punctul O. Din punctul O de construit o semidreaptă astfel încât, produsul lungimilor segmentelor de la punctul O până la punctele de intersecție a acestei semidrepte cu dreptele date să fie egal cu pătratul lungimii segmentului dat.

Rezolvare.

Analiza. Fie O punctul dat, a şi b dreptele date, OAB semidreapta căutată, astfel încât $OA \cdot OB = r^2$, unde r este lungimea segmentului dat (fig.17). Inversiunea în raport cu cercul $\omega(O, r)$ aplică punctul A pe punctul B, iar dreapta a se aplică pe un cerc oarecare a', care trece prin punctul B. Prin urmare $\{B\} = a' \cap b$.

Construcţia.

1) $\omega(O, r)$.

2) imaginea a' a dreptei a la inversia în raport cu cercul ω.

3) $\{B\} = a' \cap b$.

4) semidreapta OB, care și satisface condiției problemei.

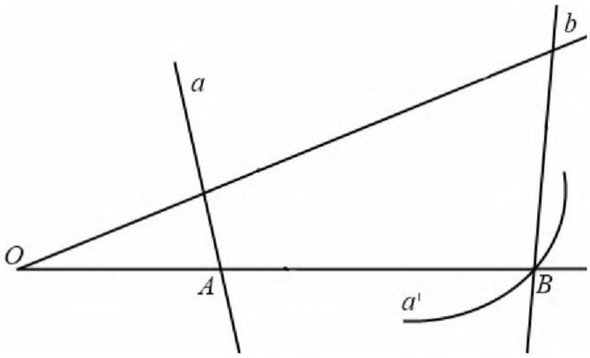


Fig.17

Demonstrație. Fie $[OB) \cap a = \{A\}$. Atunci punctul A este proimaginea punctului B la inversiunea în raport cu cercul $\omega(O, r)$, deoarece dreapta a este proimaginea cercului a'. Prin urmare, conform definiției transformării de inversiune, $OA \cdot OB = r^2$.

Cercetarea. Sunt posibile următoarele cazuri:

1) cercul a' intersecteaza dreapta b în două puncte; două soluții;

2) cercul a' este tangent la dreapta b; o soluție;

3) cercul a' n-are puncte comune cu dreapta b; problema n-are soluții.

Deoarece punctul B neapărat corespunde punctului A la inversiunea în raport cu cercul $\omega(O, r)$, atunci punctul B trebuie să fie punct comun al dreptei b și a cercului a'. Prin urmare, alte soluţii, decât cele determinate, nu pot să existe.

Exemplul 0.8.3. De construit un cerc, care să treacă prin două puncte date A şi B și care să fie tangent la o dreapta dată l.

Rezolvare.

Analiza. Evident, pentru a rezolva problema dată, este suficient de determinat punctul de tangență a cercului căutat cu dreapta dată l.

Fie cercul ω_1 (fig.18) este cercul căutat. Notăm prin C punctul de tangență a cercului cu dreapta l. Să cercetăm inversiunea, centrul căreia coincide cu unul din punctele date, de exemplu B, iar raza cercului de bază a inversiunii să fie egală cu lungimea segmentului AB. La această inversiune dreapta l se aplică pe cercul ω_2, care trece prin centrul inversiunii, adică prin punctul B, iar cercul se aplică pe o dreaptă m, care trece prin punctul A (deoarece A se aplică pe sine însuși) tangentă la cercul ω_2 în punctul C_1, unde C_1 este inversul punctului C la această inversiune.

Construcţia.

1) Construim ω_2- imaginea dreptei l la inversiunea în raport cu cercul $\omega(B, AB)$.

2) Construim AC_1 tangentă la cercul ω_2.

3) $AC_1 \cap \omega_2 = \{C_1\}$.

4) $[BC_1)$.

5) $[BC_1) \cap l = \{C\}$.

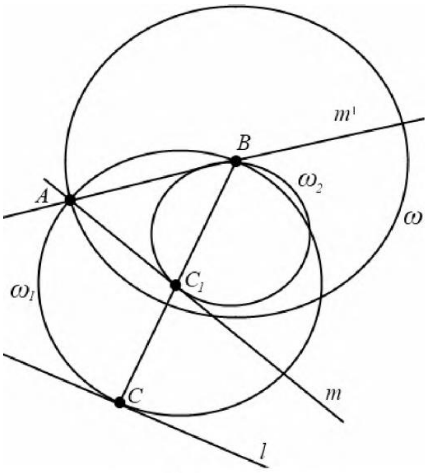


Fig.18

Punctul C este punctul căutat. Prin punctele A, B și C se construieşte cercul căutat.

Demonstrația rezultă nemijlocit din construcție.

Cercetarea. În dependenţă de poziţia punctului A și a cercului ω_1, problema are două, una sau nici o soluție.

Exemplul 0.8.4. De demonstrat că transformarea de inversiune păstreaza mărimea unghiurilor dintre drepte și cercuri.

Demonstraţie. Prin noțiunea de curbă vom înțelege o dreaptă sau un cerc.

Fie γ și γ_1 două curbe ce se intersecteaza în punctul P, iar γ' și $\gamma_1{}'$ sunt imaginile acestor curbe la transformarea de inversiune cu centrul O și P' imaginea punctului P (fig.19). Prin punctul O construim o dreaptă l ce intersectează curbele α și β în punctele A și B corespunzător, iar A' și B' sunt imaginile punctelor A și B.

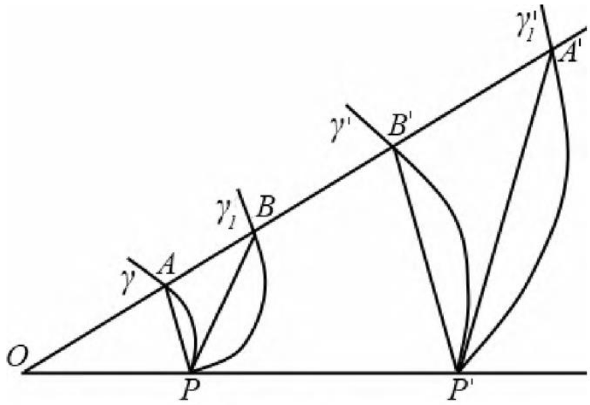


Fig.19

Astfel, obținem triunghiurile $OAP, OBP, OP'A'$ și $OP'B'$, la care lungimile laturilor satisfac egalitățile $OP \cdot OP' = OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$. Deci, triunghiurile OAP și OBP sunt asemenea cu triunghiurile $OP'A'$ și $OP'B'$ respectiv. Prin urmare, $\measuredangle APB \equiv \measuredangle A'P'B'$. Notăm, $\varphi = m\measuredangle POA$, $\measuredangle(\gamma, \gamma_1)$ - unghiul dintre curbele γ și γ_1, $\measuredangle(\alpha', \beta')$ - unghiul dintre curbele α' și β'. Atunci, când $\varphi \to 0$ dreptele $AP, BP, A'P'$ și $B'P'$ nemărginit se apropie de tangentele la curbele $\gamma, \gamma_1, \gamma'$ și $\gamma_1{}'$ respectiv, iar faptul că $\measuredangle APB \equiv \measuredangle A'P'B'$ se păstrează. Așa dar, $m\measuredangle(\gamma, \gamma_1) = m\measuredangle(\gamma', \gamma_1{}')$.

Anexa 2.

Probleme pentru activitate independentă

De demonstrat doar cu ajutorul primei grupe de axiome:

1. Prin două puncte A, B trece o dreaptă și numai una singură;
2. Prin trei puncte ce nu aparțin unei drece un plan și numai unul singur;
3. Două drepte nu pot avea mai mult decât un punct comun;
4. Două plane ori nu au nici un punct comun, ori au o dreaptă comună căreia îi aparțin toate punctele comune ale acestor două plane;
5. Printr-o dreaptă și un punct ce nu-i aparține trece un plan și numai unul singur;
6. Prin două drepte ce se intersectează trece unplan și numai unul singur;
7. Pe fiecare plan există trei puncte ce nu aparţin unei drepte;

8. Planul și dreapta ce nu-i aparține nu pot avea mai mult decât un punct comun.

De demonstrat doar cu ajutorul primelor două grupe de axiome:

1. Din trei puncte ale unei drepte, un punct și numai unul singur este situat între celelalte două;
2. Dacă $A - B - C$, iar $B - C - D$, atunci $A - B - D$ și $A - C - D$;
3. Dacă $A - B - C$, iar $A - C - D$, atunci $B - C - D$ și $A - B - D$;
4. Între orice două puncte ale unei drepte sunt situate o infinitate de puncte;
5. Fiecare dreaptă a din planul α împarte mulțimea tuturor punctelor planului ce nu aparțin dreptei a, astfel încât orice două puncte ce aparțin aceleiași clase sunt situate de aceeași parte de la dreapta a, iar orice două puncte ce aparțin la clase diferite sunt situate de părți diferite de dreapta a.

Cu ajutorul primelor trei grupe de axiome de demonstrat:

1. În triunghiul isoscel unghiurile de la bază sunt congruente;
2. Unghiurile opuse la vârf sunt congruente;
3. Dacă laturile corespunzătoare în triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt congruente, atunci aceste triunghiuri sunt congruente;
4. Unghiul exterior al triunghiului este mai mare decât fiecare unghi interior nealăturat;

Cu ajutorul primelor patru grupe de axiome de demonstrat:

1. Dreapta situată cu cercul în acelați plan și care trece printr-un punct interior cercului, intersectează acest cerc în două puncte;
2. Dacă două cercuri sunt situate în același plan astfel încât unul din ele trece printr-un punct interior și printr-un punct exterior față de celălalt, atunci aceste două cercuri au două puncte comune.

De demonstrat că în planul hiperbolic au loc următoarele afirmații:

1. Dacă două drepte sunt paralele la a treia dreapă, această încă nu înseamnă că primele două drepte sunt paralele;
2. Dacă o dreaptă intersectează una din două drepte paralele la aceeași dreaptă, atunci această dreaptă va intersecta și pe cealaltă dreaptă;
3. Dacă $AA' \parallel CC'$, $BB' \parallel CC'$, atunci $AA' \parallel BB'$;

4. Dacă dreapta CC' este situiată între dreptele AA' și BB' paralele într-o oarecare directive, dar nu le intersectează, atunci CC' este paralelă la ambele aceste drepte AA' și BB' în aceeași direcție;
5. Fie în planul hiperbolic dreptele a, b, c aparțin aceluiași fascicol, trec corespunzător prin punctele A, B, C și dacă AB este secantă de egală înclinație la dreptele a, b, iar BC este secantă de egală înclinație în raport cu dreptele b, c, atunci AC este secantă de egală înclinație pentru dreptele a, c;
6. Dacă la dreptele orientate a, b sunt duse secantele de egală înclinație AB și A_1B_1 atunci segentele AA_1și BB_1 sunt congruente;
7. Dacă AB este secantă de egală înclinație la dreptele paralele a, b , atunci perpendiculara la segmentul AB în mijlocul lui este paralelă la dreptele a, b în aceeași direcție.
8. Dacă dreapta AA' este paralelă la dreapta BB' în punctual M, atunci $AA' \parallel BB'$ în orice punct N al dreptei AA';
9. Fie pentru fascicolul dat, în dependență de tipul acestuia, este construit cercul,sau oriciclul sau echidistanta, atunci fiecare dreaptă a fascicolului este normala la curba corespunzătoare;
10. Suma unghiurilor interioare în triunghi este o mărime variabilă și depinde de forma și dimensiunile triunghiului;
11. Nu există triunghiuri asemenea și necongruente;
12. Arcele oriciclelor subântinse de coarde congruente, sunt congruente între ele și invers;
13. Fiecare axă a oriciclului intersectează oriciclul într-un punct și numai în unul singur.

Bibliografie

1. Forder H. G., Fundamentele geometriei euclidiene, Editura științifică, București, 1970, 474 p.

2. Mihaileanu N. N., Neumann M., Fundamentele geometriei, Didactica și Pedagogica, 1973, București, 1973, 180 p.

3. Mihaileanu N.N., Geometria neeuclidiană. Editura Academiei Republicii Socialiste România, București, 1983, 143 p.

4. Miron R., Brănzei D., Fundamentele aritmeticii şi geometriei. Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti,1983, 247 p.

5. Vrănceanu Gh., Teleman C., Geometria euclidiană, Geometrii neeuclidiene,Teoria relativității, Editura Științifică, 1965, 324p.

6. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия ч. II, Москва, Просвещение, 1987, 352с.

7. Аргунов Б. И., Балк М. Б., Геометрические построения на плоскости. Учпедгиз, 1957.

8. Гильберт Д., Основания геометрии, ГТТИ, 1948.

9. Ефимов Н. В., Высшая геометрия, Москва,Наука, 1978.

10. Каган В. Ф., Основания геометрии , ГТТИ, ч. II, 1956.

11. Кутузов Б. В., Геометрия, Учпедгиз, 1950.

12. Кутузов Б. В., Геометрия Лобачевского и елементы основании геометрии, Учпедгиз, Москва, 1955.

13. Трайнин Я. Л., Основания геометрии,Учпедгиз, 1961.