Ilie LUPU

Metodologia studierii numerelor complexe

EDITURA
PRUT

Prefață

Competențele și abilitățile matematice sunt deosebit de importante nu doar pentru cei care muncesc sau vor munci ulterior în domenii de activitate legate de științele reale. Adesea, pentru rezolvarea unor probleme din situații cotidiene, se cere aplicarea unei gândiri matematice. Din aceste considerente, matematica se studiază pe parcursul tuturor anilor învățământului preuniversitar.

În cursul liceal, numerele complexe se examinează în clasa a XI-a, oferind astfel o extindere a mulțimii tipurilor de probleme matematice, în special a ecuațiilor. Ulterior, în cursurile universitare, numerele complexe apar în diferite subdomenii din algebră, analiză matematică și geometrie.

Prezenta lucrare este o tratare metodologică a studiului numerelor complexe. Astfel, sunt examinate modalitățile de definire a numerelor complexe, a interpretării lor geometrice, a operațiilor cu numere complexe, precum și metodele de soluționare a diferitor sarcini în care apar numere complexe.

Majoritatea enunțurilor matematice sunt însoțite de demonstrații complete și de exemple sugestive, ce asigură asimilarea corectă a noțiunilor teoretice introduse. De asemenea, prin intermediul exercițiilor propuse, cititorul este invitat să-și verifice abilitatea de a lucra cu noțiunile și metodele de rezolvare prezentate în carte.

Atragem atenția că, pentru parcurgerea acestei lucrări, cititorul nu trebuie să consulte alte materiale, dar, fără îndoială, trebuie să cunoască cel puțin noțiunile matematice predate în învățământul gimnazial.

Astfel, cartea poate fi utilă elevilor de liceu, studenților de la facultățile cu profil real, profesorilor de matematică, precum și tuturor celor interesați de matematică.

Capitolul 1

Numere complexe

1.1. Scurtă privire istorică asupra numerelor complexe

Inițial, probabil, numerele complexe au apărut în lucrarea lui Girolamo Cardano (1501–1576) „Arta remarcabilă sau Despre regulile algebrice" (1545) pe care autorul le-a considerat inutile.

Utilitatea numerelor complexe la rezolvarea ecuațiilor de gradul al treilea a fost inițial apreciată în 1572 de către Rafaelle Bombelli (1530–1572). El a propus unele operații simple cu numere complexe.

În secolele XVI–XVII expresiile de forma $a + b\sqrt{-1}$, $b \neq 0$, care au apărut la rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea și al treilea, erau numite „imaginare". Pentru mulți savanți ai secolului XVII esența algebrică și geometrică a valorilor imaginare rămânea nedistinctă și chiar enigmatică și mistică. Se știe, de exemplu, că Isaac Newton (1643–1727) nu considera valorile imaginare drept numere.

Problema despre exprimarea rădăcinilor de ordinul *n* dintr-un număr dat a fost în principiu rezolvată de către Abraham de Moivre (1667–1754) în 1707, 1724 și de Roger Cotes în 1722. Simbolul $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ a fost propus de Leonhard Euler (1707–1783) în 1777 și publicat în 1794. În 1751 Euler a sugerat ideea că mulțimea numerelor complexe este un câmp algebric. La aceeași concluzie a ajuns și Jean Le Rond D' Alembert (1717–1783) în 1747, însă demonstrația strictă a acestui fapt îi aparține lui Carl Friedrich Gauss (1777–1855) în 1799. Denumirea *număr complex* a fost propusă de Lazare Nicolas Marguérite Carnot (1753–1823) în 1803 și datorită lui Carl Friedrich Gauss intră în circulație în 1828.

Numerele complexe au fost complet recunoscute de matematicieni și ulterior au avut o răspândire largă în matematică, hidrodinamică, electrodinamică, aerodinamică etc., după ce Caspar Wessel (1745–1818) în 1799, Jean Robert Argand (1768–1822) în 1806 și Carl Friedrich Gauss în 1831 au propus interpretarea geometrică a numerelor complexe ca puncte sau vectori în plan. William Rowan Hamilton (1805–1865) în 1837 a construit corpul numerelor complexe cu ajutorul perechilor ordonate $(a; b)$ de numere reale, definind operațiile de adunare și înmulțire astfel:

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Notând $(0; 1) = \mathrm{i}$ (unitate imaginară), $(a, 0) = a$, obținem forma algebrică a numărului complex $(a, b) = a + b\mathrm{i}$. Lui W. Hamilton îi aparține generalizarea spațială a numerelor complexe – cuaternioane (sau numere hipercomplexe).

1.2. Definirea numerelor complexe

Definiții

Se numesc ***numere complexe*** expresiile de forma $a + b\mathrm{i}$ (unde a și b sunt numere reale, iar i un simbol), dacă pentru aceasta sunt definite noțiunea de egalitate și operațiile de adunare și înmulțire astfel:

1) Două numere complexe $a + b\mathrm{i}$ și $c + d\mathrm{i}$ se consideră ***egale*** dacă $a = b$ și $b = d$.
2) ***Suma*** a două numere complexe $a + b\mathrm{i}$ și $c + d\mathrm{i}$ se numește numărul complex $(a + c) + (b + d)\mathrm{i}$.
3) ***Produsul*** a două numere complexe $a + b\mathrm{i}$ și $c + d\mathrm{i}$ se numește numărul complex $(ac - bd) + (ab + bc)\mathrm{i}$.

Egalitatea $z = a + bi$ exprimă faptul că numărul complex $a + b\mathrm{i}$ este notat prin litera z.

Pentru notarea operațiilor asupra numerelor complexe utilizăm aceleași simboluri ca și pentru notarea operațiilor asupra numerelor reale: $z' = z''$ exprimă egalitatea a două numere complexe z' și z''; suma numerelor z' și z'' se notează cu $z' + z''$, iar produsul lor cu $z' \cdot z''$ sau $z'z''$.

Astfel, definițiile adunării și înmulțirii a două numere complexe $a + b\mathrm{i}$ și $c + d\mathrm{i}$ se pot scrie astfel:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$,

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Numărul real a se numește ***partea reală*** a numărului complex $z = a + bi$ și se notează cu Re z. Pentru numărul complex $z = a + bi$, $\operatorname{Re} z = a$ sau $\operatorname{Re}(a + bi) = a$.

Numărul b se numește ***partea imaginară*** a numărului complex $z = a + bi$ și se notează prin Im z. Astfel, $\operatorname{Im}(a + bi) = b$. Simbolul i se numește ***unitate imaginară***.

Menționăm că în expresia $a + bi$ simbolul „ + ” deocamdată nu înseamnă operația de adunare, la fel cum și expresia bi este pur formală. Scrierea $a + bi$ nu este întâmplătoare. Ea rezultă din următoarele convenții:

$(a_1 + 0 \cdot i) + (a_2 + 0 \cdot i) = (a_1 + a_2) + 0 \cdot i$,

$(a_1 + 0 \cdot i)(a_2 + 0 \cdot i) = (a_1 a_2) + 0 \cdot i$, unde $a_1, a_2, \in \mathbb{R}$.

Astfel, la adunarea și înmulțirea a două numere de forma $a + 0 \cdot i$ am obținut numere de aceeași formă. Dacă convenim să scriem $a + 0 \cdot i = a$ (adică convenim să identificăm numărul $a + 0 \cdot i$ cu numărul real a), atunci observăm că operațiile asupra numerelor de forma $a + 0 \cdot i$ se efectuează la fel ca și asupra numerelor reale. Acest fapt ne permite să considerăm că fiecare număr real a se conține în mulțimea numerelor complexe, și anume $a = a + 0 \cdot i$. În particular, numărul $0 = 0 + 0 \cdot i$ îl vom numi, ca de obicei, ***zero***, iar numărul $1 = 1 + 0 \cdot i$ – ***unitate***.

Numerele de forma $0 + bi$ se numesc ***numere imaginare*** (sau ***pur imaginare***) și se notează prin bi. În particular, numărul $0 + 1 \cdot i$ se notează prin i. Menționăm că în baza acestei definiții, numărul $0 = 0 + 0 \cdot i$ de asemenea poate fi considerat pur imaginar. Astfel, 0 este unicul număr complex, care este și real, și imaginar.

Utilizând aceste notări, fiecare număr complex poate fi scris sub forma:

$a + bi = (a + 0 \cdot i) + (b + 0 \cdot i)(0 + 1 \cdot i)$.

Prin urmare, putem considera că simbolul „ + ” în definiția numărului complex $a + bi$ înseamnă operația de adunare a numerelor a și bi, iar bi înseamnă operația de înmulțire a numerelor b și i.

Calculăm i^2 nemijlocit reieșind din definiția înmulțirii numerelor complexe: $i^2 = i \cdot i = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = -1 + 0 \cdot i = -1$.
Astfel, $i^2 = -1$.

1.3. Proprietățile operațiilor asupra numerelor complexe

Să studiem proprietățile operațiilor asupra numerelor complexe. Este firesc să presupunem că operațiile de adunare și înmulțire a numerelor complexe au aceleași proprietăți ca și adunarea și înmulțirea numerelor reale. Mai mult decât atât, și proprietățile scăderii și împărțirii numerelor complexe sunt aceleași ca și pentru numerele reale.

Să demonstrăm următoarele teoreme:

Teorema 1. Adunarea în mulțimea numerelor complexe are următoarele proprietăți:

1°. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ pentru orice numere complexe z_1 și z_2 (legea comutativă a adunării);

2°. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ pentru orice numere complexe z_1, z_2, z_3 (legea asociativă a adunării);

3°. $z + 0 = z$ pentru orice număr complex z;

4°. Pentru orice două numere complexe z_1 și z_2 există un singur număr z, care verifică ecuația $z + z_2 = z_1$.

Demonstrație:

Demonstrăm proprietatea 1°. Fie $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Conform definiției adunării numerelor complexe, avem

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,\ z_2 + z_1 = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i.$$

Din proprietățile operațiilor cu numere reale, rezultă că $a_1 + a_2 = a_2 + a_1$, $b_1 + b_2 = b_2 + b_1$, adică numerele $z_1 + z_2$ și $z_2 + z_1$ au părțile reale egale și părțile imaginare egale. Prin urmare, din definiția numerelor complexe rezultă că $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Proprietățile 2° și 3° se demonstrează analogic. Recomandăm cititorului să le demonstreze independent. În baza proprietății 2° au sens expresiile $z_1 + z_2 + z_3$, $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ etc.

Să demonstrăm proprietatea 4°. Fie $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, $z = x + yi$, unde numerele reale x și y sunt necunoscute.

Conform definiției adunării, $z + z_2 = (x + a_2) + (y + b_2)i$. Egalitatea $z + z_2 = z_1$, conform definiției egalității numerelor complexe, are loc atunci și numai atunci când $x + a_2 = a_1$ și $y + b_2 = b_1$, de aici $x = a_1 - a_2$ și $y = b_1 - b_2$.

Astfel, am demonstrat că egalitatea $z + z_2 = z_1$ are loc atunci și numai atunci când $z = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathrm{i}$. (q.e.d.) ►

Să studiem operația de **scădere** a numerelor complexe. Scăderea se definește ca operația inversă adunării. Aceasta înseamnă că *diferența* a două numere complexe z_1 și z_2 se numește numărul z, care verifică ecuația $z + z_2 = z_1$; diferența numerelor complexe z_1 și z_2 se notează cu $z_1 - z_2$. Cu alte cuvinte, notația $z = z_1 - z_2$ are aceeași semnificație, după definiție, ca și notația $z + z_2 = z_1$. Din proprietatea 4 a teoremei 1 rezultă că diferența numerelor complexe se definește univoc cu ajutorul formulei $(a_1 + b_1\mathrm{i}) - (a_2 + b_2\mathrm{i}) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathrm{i}$.

Menționăm că diferența $0 - z$ (pentru orice număr complex z), ca și pentru numerele reale, se notează cu $-z$, adică $0 - z = -z$. De aici rezultă că diferența $z_1 - z_2$ poate fi scrisă sub forma $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Teorema 2. Înmulțirea în mulțimea numerelor complexe are următoarele proprietăți:

1°. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ pentru orice numere complexe z_1 și z_2 (legea comutativă a înmulțirii);

2°. $(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$ pentru orice numere complexe z_1, z_2, z_3 (legea asociativă a înmulțirii);

3°. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ pentru orice numere complexe z_1, z_2, z_3 (legea distributivă);

4°. $1 \cdot z = z$ pentru orice număr complex z;

5°. Pentru orice două numere complexe z_1 și z_2, unde $z_2 \neq 0$, există un singur număr z, care verifică ecuația $z \cdot z_2 = z_1$.

Demonstrăm proprietatea 5°.

Fie $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$, $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$, $z = x + y\mathrm{i}$, unde numerele reale x și y sunt necunoscute. Conform definiției înmulțirii, $zz_2 = (xa_2 - yb_2) + (xb_2 + ya_2)\mathrm{i}$.

Egalitatea $z \cdot z_2 = z_1$, conform definiției egalității numerelor complexe, are loc atunci și numai atunci când $xa_2 - yb_2 = a_1$ și $xb_2 + ya_2 = b_1$.

Am obținut un sistem liniar în raport cu x și y, care are determinantul $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, deoarece $z_2 \neq 0$.

Prin urmare, acest sistem are o singură soluție:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \; y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Astfel, am demonstrat că ecuația $zz_2 = z_1$ pentru orice numere complexe $z_1 = a_1 + b_1 \mathrm{i}$, $z_2 = a_2 + b_2 \mathrm{i}$ (unde $z_2 \neq 0$) este univoc rezolvabilă și are următoarea soluție:

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\mathrm{i}. \qquad (1)$$

Proprietatea 5° este demonstrată. ►

Proprietățile 1°–4° din teorema 2 se demonstrează ca și proprietățile 1°–3° din teorema 1. Propunem cititorului să le demonstreze independent.

Menționăm că numai după demonstrația proprietății 2° din teorema 2, expresiile $z_1 z_2 z_3$, $z^3 = z \cdot z \cdot z$ etc. au sens.

Să studiem operația de **împărțire** a numerelor complexe. *Împărțirea* este operația inversă înmulțirii. Prin urmare, câtul a două numere z_1 și z_2, unde $z_2 \neq 0$, se numește numărul z, care verifică ecuația $z \cdot z_2 = z_1$; câtul a două numere complexe z_1 și z_2 se notează cu $z_1 : z_2$ sau cu $\frac{z_1}{z_2}$.

Din proprietatea 5) a teoremei 2 rezultă că pentru oricare numere complexe $z_1 = a_1 + b_1 \mathrm{i}$, $z_2 = a_2 + b_2 \mathrm{i}$ (unde $z_2 \neq 0$) câtul se determină univoc și are următoarea formă:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 \mathrm{i}}{a_2 + b_2 \mathrm{i}} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\mathrm{i}.$$

Împărțirea la zero în mulțimea numerelor complexe, ca și în mulțimea numerelor reale, nu are sens, adică expresia $\frac{z}{0}$ nu are sens pentru niciun z.

Observație:

Din definiția numărului complex rezultă că formulele adunării și înmulțirii numerelor complexe formal au aceeași formă, ca și formulele de adunare și înmulțire a expresiilor algebrice de forma $a_1 + b_1 \mathrm{i}$, totodată în orice operație intermediară sau în rezultatul final numărul i^2 poate fi înlocuit cu numărul -1. În teoremele 1 și 2 am demonstrat că proprietățile de adunare și înmulțire a numerelor complexe și proprietățile operațiilor inverse (scăderea și împărțirea) sunt aceleași ca și pentru numerele reale.

***Exemplul* 1**

Să reprezentăm numărul complex $\frac{3-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ în formă algebrică, adică sub forma $a+b\mathrm{i}$.

Rezolvare:

Cu formula împărțirii numerelor complexe, obținem

$$\frac{3-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{3\cdot 1+(-2)\cdot 1}{1^2+1^2}+\frac{1\cdot(-2)-3\cdot 1}{1^2+1^2}\mathrm{i}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}.$$

Mai tîrziu vom indica un alt procedeu de efectuare a împărțirii numerelor complexe.

***Exemplul* 2**

Determinați părțile reale și imaginare ale numărului complex $(2+\mathrm{i})^3$.

Conform formulei cunoscute, avem

$(2+\mathrm{i})^3=2^3+3\cdot 2^2\cdot \mathrm{i}+3\cdot 2\cdot \mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3$.

Înlocuind i^2 prin -1, obținem $(2+\mathrm{i})^3=8+12\mathrm{i}-6-\mathrm{i}=2+11\mathrm{i}$.

Prin urmare, $\mathrm{Re}(2+\mathrm{i})^3=2, \mathrm{Im}(2+\mathrm{i})^3=11$.

1.4. Modulul numărului complex

Modulul unui număr complex $z=a+b\mathrm{i}$ se definește ca fiind ***numărul real*** $\sqrt{a^2+b^2}$ și se notează prin $|z|=|a+b\mathrm{i}|$. Modulul unui număr complex $z=a+b\mathrm{i}$ este nenegativ, el fiind egal cu zero dacă și numai dacă $a=b=0$.

Exemple:

$|3+4\mathrm{i}|=\sqrt{9+16}=5$;

$|1-\mathrm{i}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$;

$|3\mathrm{i}|=|0+3\mathrm{i}|=\sqrt{0+9}=3$;

$|5|=|5+0\mathrm{i}|=\sqrt{25+0}=5$.

Dacă z, z_1 și z_2 sunt numere complexe, atunci

$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, unde $z_2\neq 0$.

$|z^n| = |z|^n$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ (pentru $n < 0$ se presupune că $z \neq 0$).

• Demonstrați aceste relații.

1.5. Numerele complexe conjugate

Dacă $z = a + bi$ este un număr complex, atunci $a - bi$, notat prin $\overline{z}$ sau $\overline{a + bi}$, se numește ***conjugatul*** numărului z. Evident, conjugatul lui $\overline{z}$ este z. De aceea, numerele complexe z și $\overline{z}$ se numesc *conjugate*. Deci, $\overline{\overline{z}} = z$.

Dacă a este un număr real oarecare, atunci $a = a + 0 \cdot i = a - 0 \cdot i = \overline{a}$; deci a este egal cu conjugatul său. Mai mult, dacă $a + bi$ este un număr complex, astfel încât $a + bi = a - bi$, atunci $b = -b$, de unde $b = 0$. Deci, $a + bi = a + 0 \cdot i = a$ este un număr real.

Astfel, am arătat că, dintre toate numerele complexe, numerele reale (și numai ele) sunt egale cu conjugatele lor.

Să demonstrăm unele proprietăți ale numerelor complexe conjugate.

1°. $|\overline{z}| = |z|$.

Demonstrație:

Într-adevăr,

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$;

deci $|\overline{z}| = |z|$.

2°. Suma și produsul a două numere complexe conjugate sunt numere reale.

Demonstrație:

Fie $z = a + bi$, atunci $\overline{z} = a - bi$. Deci, $z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a$ (număr real) și $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

3°. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Demonstrație:

Avem $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Deci, $|z|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \overline{z}$.

4°. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Demonstrație:

Fie $z_1 = a + b\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\mathrm{i}$, atunci

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a - b\mathrm{i}) + (c - d\mathrm{i}) = (a + c) - (b + d)\mathrm{i} = [\overline{(a + c) + (b + d)\mathrm{i}}] = \overline{z_1 + z_2}$.

5°. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Demonstrație:

Într-adevăr, dacă $z_1 = a + b\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\mathrm{i}$, atunci

$z_1 \cdot z_2 = (a + b\mathrm{i}) \cdot (c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$

și $\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)\mathrm{i}$.

Însă, $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - b\mathrm{i}) \cdot (c - d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (-ad - bc)\mathrm{i} =$

$= (ac - bd) - (ad + bc)\mathrm{i}$, adică $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

6°. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$. Proprietatea 6° se demonstrează similar demonstrației proprietății 4°.

7°. Dacă $z_2 \neq 0$, atunci $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Demonstrație:

Fie $z_1 = a + b\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\mathrm{i}$, atunci $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}$

și $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}$.

Însă, $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{a - b\mathrm{i}}{c - d\mathrm{i}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-bc + ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}$.

Deci, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

8°. $(\overline{z^n}) = (\overline{z})^n$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație:

Să demonstrăm această proprietate prin metoda inducției matematice. Pentru $n = 1$ egalitatea 8° este evidentă: $\overline{z} = \overline{z}$. Admitem că egalitatea 8° este justă pentru $n = k$, adică admitem că este adevărată egalitatea $(\overline{z^k}) = (\overline{z})^k$ și vom demonstra că $(\overline{z^{k+1}}) = (\overline{z})^{k+1}$.

Într-adevăr, $(\overline{z^{k+1}}) = (\overline{z^k \cdot z}) = (\overline{z^k}) \cdot (\overline{z})$ (proprietatea 5°).

Însă, $(\overline{z^k}) = (\overline{z})^k$. Deci, $(\overline{z^k}) \cdot (\overline{z}) = (\overline{z})^k \cdot (\overline{z}) = (\overline{z})^{k+1}$.

Astfel, proprietatea 8° este demonstrată.

9°. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$, unde $z_2 \neq 0$.

Demonstrație:

Avem $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$. (2)

Formula (2) este des utilizată la împărțirea numerelor complexe. Astfel, rezolvăm exemplul 1 (pag. 10):

$$\frac{3-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(3-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{3-3\mathrm{i}-2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{|1+\mathrm{i}|^2} = \frac{3-5\mathrm{i}-2}{1^2+1^2} =$$
$$= \frac{1-5\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\mathrm{i}.$$

Formula (2) permite aflarea câtului a două numere complexe, fără aplicarea formulei (1).

***Exemplul* 3**

Să demonstrăm că pentru oricare două numere complexe z_1 și z_2 are loc relația $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

Demonstrație:

Utilizând proprietățile 5° și 1° ale numerelor complexe, obținem

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} =$$
$$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

■ 1.6. Puterile numărului i

Știm că $\mathrm{i}^2 = -1$, atunci se deduce succesiv:

$\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i} = (-1) \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}$,

$\mathrm{i}^4 = (\mathrm{i}^2)^2 = (-\mathrm{i})^2 = 1$.

În general, orice număr natural n poate fi reprezentat în una din formele: $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$, $n = 4k + 3$, unde k este un număr natural.

Deci:

a) dacă $n = 4k$, atunci $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4k} = 1^4 = 1$;

b) dacă $n = 4k + 1$, atunci $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4k+1} = \mathrm{i}^{4k} \cdot \mathrm{i} = 1 \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}$;

c) dacă $n = 4k + 2$, atunci $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4p+2} = \mathrm{i}^{4p} \cdot \mathrm{i}^2 = \mathrm{i}^2 = -1$;

d) $n = 4k + 3$, atunci $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4k+3} = \mathrm{i}^{4k} \cdot \mathrm{i}^3 = 1 \cdot (-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$.

Așadar, puterile cu exponent natural ale lui i sunt elementele mulțimii $\{-1; 1; -\mathrm{i}; \mathrm{i}\}$.

Exemple:

$\mathrm{i}^{21} = \mathrm{i}^{4 \cdot 5 + 1} = (\mathrm{i}^4)^5 \cdot \mathrm{i} = 1 \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}$;

$\mathrm{i}^{26} = \mathrm{i}^{4 \cdot 6 + 2} = (\mathrm{i}^4)^6 \cdot \mathrm{i}^2 = 1 \cdot (-1) = -1$;

$\mathrm{i}^{24} = (\mathrm{i}^4)^6 = 1^6 = 1$;

$\mathrm{i}^{19} = \mathrm{i}^{4 \cdot 4 + 3} = (\mathrm{i}^4)^4 \cdot \mathrm{i}^3 = 1 \cdot (-1) = -\mathrm{i}$.

1.7. Interpretarea geometrică a numerelor complexe

Amintim că numerele reale se pot reprezenta prin punctele unei axe. Mai exact, fie l o dreaptă pe care fixăm un punct O, numit origine, și o unitate de măsură. Dacă asociem fiecărui punct al dreptei l abscisa sa, se obține o funcție bijectivă de la punctele acestei drepte în mulțimea numerelor reale.

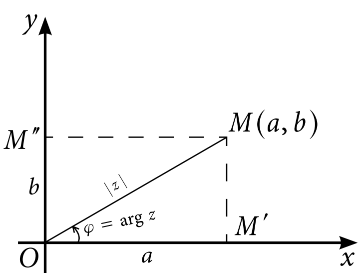

Fig. 1

Un număr complex $z = a + b\mathrm{i}$ este determinat prin două numere reale a și b. De aceea, este natural ca să reprezentăm geometric numerele complexe prin punctele unui plan.

Fie că avem un sistem cartezian de coordonate xOy. Fiecărui număr complex $z = a + b\mathrm{i}$ i se asociază punctul M de coordonate $(a; b)$ (fig. 1).

Observăm că între mulțimea numerelor complexe și mulțimea punctelor planului este stabilită o corespondență, care asociază fiecărui număr complex un singur punct și diferitor numere le corespund diferite puncte. Deci, pe plan nu este niciun punct căruia să nu i se asocieze un oarecare număr complex. Prin urmare, între mulțimea numerelor complexe și mulțimea punctelor planului există o corespondență biunivocă, deci putem considera că numărul complex $z = a + b\mathrm{i}$ este un punct pe plan cu coordonatele $(a; b)$.

Punctul $M\ (a;\ b)$ se numește ***imaginea geometrică*** a numărului complex $a + b\mathrm{i}$, iar numărul $a + b\mathrm{i}$ se numește ***afixul punctului*** M.

Conform teoremei lui Pitagora, așa cum triunghiul $OM'M$ este dreptungic, se deduce că $OM = \sqrt{OM'^2 + M'M^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. Această egalitate ne arată că lungimea segmentului OM este modulul numărului complex $z = a + b\mathrm{i}$.

Exemple:

Numerelor complexe $2 + 2\mathrm{i}$, $-2 + \mathrm{i}$, $3\mathrm{i}$, $-2\mathrm{i}$, 4 li se asociază respectiv punctele $M_1(2; 2)$, $M_2(-2; 1)$, $M_3(0; 3)$, $M_4(0; -2)$, $M_5(4; 0)$ (fig. 2).

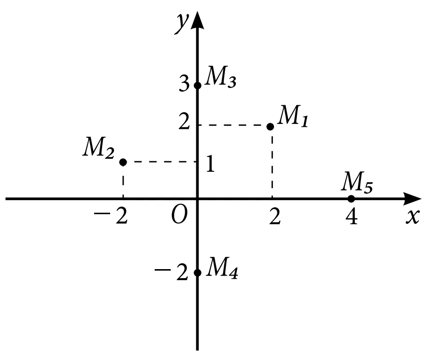

Fig. 2

Asocierea $z = a + b\mathrm{i} \to M(a; b)$ este o funcție bijectivă de la mulțimea numerelor complexe în mulțimea punctelor planului.

Prin această funcție, mulțimii numerelor reale îi corespunde axa Ox, iar mulțimii numerelor imaginare îi corespunde axa Oy. De aceea, axa Ox se numește ***axă reală***, iar Oy – ***axă imaginară***. Planul ale cărui puncte se identifică cu numerele complexe prin funcția bijectivă definită se numește ***plan complex***.

Numerele complexe au și o altă interpretare geometrică. Să asociem fiecărui punct M al planului vectorul $\overrightarrow{OM}$ (fig. 1), care are originea în O și extremitatea în punctul M.

Evident, această asociere este o funcție bijectivă de la mulțimea numerelor complexe în mulțimea vectorilor, care au originea în $O\ (0; 0)$. Astfel, fiecărui număr complex $a + b\mathrm{i}$ îi corespunde vectorul $\overrightarrow{OM}$, unde M are coordonatele $(a; b)$. Se spune că $(a; b)$ sunt coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$.

1.8. Interpretarea geometrică a adunării și scăderii numerelor complexe

Reprezentarea numerelor complexe cu ajutorul vectorilor ne dă o interpretare simplă a adunării numerelor complexe:

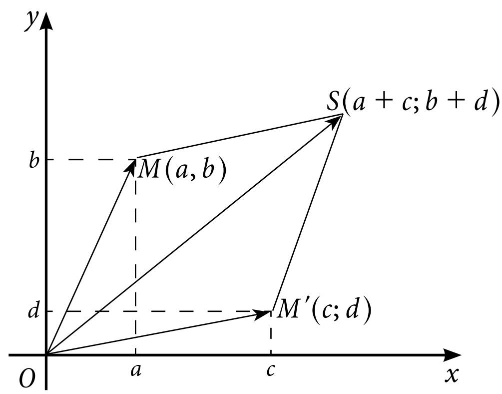

Fig. 3

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$

Este cunoscut faptul că la adunarea vectorilor coordonatele corespunzătoarelor se adună. De aceea, dacă vectorul $\overrightarrow{OM}$ (fig. 3) are coordonatele $(a; b)$, iar vectorul $\overrightarrow{OM'}$ are coordonatele $(c; d)$, atunci ***vectorul*** $\overrightarrow{OS}$ (S fiind al patrulea vârf al paralelogramului, care are celelalte trei vârfuri, respectiv M, O și M') are ***coordonatele*** $(a + c; b + d)$. Acest vector corespunde numărului complex $(a + c) + (b + d)i$, care este ***suma*** numerelor $a + bi$ și $c + di$.

Observăm, de asemenea, că opusul numărului $a + bi$, care este $-a - bi$, este reprezentat prin vectorul $\overrightarrow{OM_1}$, unde M_1 este simetricul punctului $M(a; b)$ față de origine (fig. 4). Astfel, se deduce ușor interpretarea geometrică a scăderii a două numere complexe. Cum $z' - z = z' + (-z)$, având în vedere interpretarea geometrică a adunării numerelor complexe, rezultă că D are coordonatele $(c - a; d - b)$ și vectorul $\overrightarrow{OD}$ corespunde diferenței $z' - z = (c - a) + (d - b)i$.

Avem $OM = |z|$, $OM' = |z'|$, $OD = |z' - z|$ și $OS = |z' + z|$.
Relațiile dintre laturi în triunghiurile OMS și OMM' dau respectiv:
$MS - OM \leq OS \leq MS + OM$;

$OM' - OM \leq MM' \leq OM' + OM$.

Dar cum $MS = OM'$ și $MM' = OD$, rezultă:

$|z'| - |z| \leq |z' + z| \leq |z'| + |z|$,

$|z'| - |z| \leq |z' - z| \leq |z'| + |z|$.

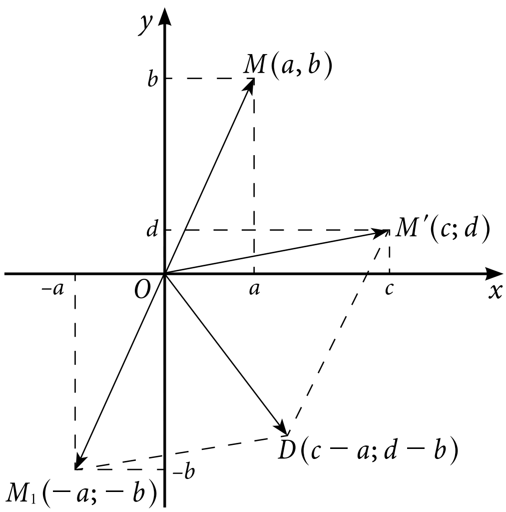

Fig. 4

1.9. Argumentul unui număr complex

Definiție

Se numește **argument al numărului complex** $z = a + b\mathrm{i}$, $z \neq 0$, unghiul orientat, format de axa Ox și vectorul $\overrightarrow{OM}$, unde $M(a, b)$ (fig. 1).

Argumentul numărului complex $z = a + b\mathrm{i}$ se notează prin $\arg z$. Pentru numărul $z = 0$ argumentul nu se definește.

Unghiul orientat $\varphi = \arg z$ se numește argument principal al numărului complex $z = a + b\mathrm{i}$, dacă $0 \leq \arg z < 2\pi$ (în unele cazuri $-\pi < \arg z \leq \pi$).

Argumentul oricărui număr $z \neq 0$ se definește neunivoc: dacă φ este argumentul principal al numărului z, atunci și unghiurile $\varphi + 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ sunt argumentele numărului z. Astfel, fiecărui număr complex z îi corespunde o mulțime infinită de argumente $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. Fiecare două dintre ele diferă cu un număr, multiplu al lui 2π.

Pentru a determina argumentul principal al numărului complex $z = a + b\mathrm{i}$, mai întâi stabilim în ce cadran este situat punctul $M(a; b)$, apoi rezolvăm ecuația $\mathrm{tg}\, \varphi = \frac{b}{a}\ (a \neq 0)$.

Exemple:

a) Să calculăm argumentul principal al numărului complex $z = -1 - \mathrm{i}$.

Punctul $M(-1; -1)$ este situat în cadranul III. De aceea, găsim soluția ecuației $\mathrm{tg}\, \varphi = 1$, care aparține acestui cadran. Deci, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

b) Numărul $z = a + 0 \cdot \mathrm{i}$ pentru $a > 0$ are argumentul $\varphi = 0^\circ$, iar pentru $a < 0$, $\varphi = 180^\circ$.

c) Numărul $z = 0 + b\mathrm{i}$ pentru $b > 0$ are argumentul $\varphi = 90^\circ$, iar dacă $b < 0$, atunci $\varphi = 270^\circ$.

1.10. Forma trigonometrică a numărului complex

Fie r modulul, iar φ argumentul numărului complex $a + b\mathrm{i}$, adică $r = |a + b\mathrm{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arg(a + b\mathrm{i})$.

Atunci $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ (fig. 1) și, prin urmare,
$a + b\mathrm{i} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$.

Ușor se demonstrează și afirmația inversă:
dacă $a + b\mathrm{i} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, unde $r > 0$,
atunci $r = |a + b\mathrm{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arg(a + b\mathrm{i})$.

Definiție

Scrierea numărului complex z sub forma $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, $r > 0$, se numește ***forma trigonometrică*** a numărului complex.

Din cele spuse mai sus rezultă că orice număr complex $z \neq 0$ poate fi scris sub forma trigonometrică $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, $r > 0$, dacă și numai dacă $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Atragem atenția că nu orice scriere a numărului complex prin funcții trigonometrice reprezintă forma trigonometrică a acestui număr.

De exemplu, pentru numărul $1 + \mathrm{i}$ expresia $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$ este forma trigonometrică a acestuia.

Însă, expresia $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ nu reprezintă forma trigonometrică a numărului $1 + \mathrm{i}$ (chiar dacă $\sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4}$).

Putem demonstra ușor că pentru două numere complexe
$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$, egalitatea $z_1 = z_2$ este justă atunci și numai atunci când $r_1 = r_2$ și $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3. Modulul produsului a două numere complexe este egal cu produsul modulelor lor, iar argumentul este egal cu suma argumentelor factorilor.

Demonstrație:

Reprezentăm numerele z_1 și z_2 în forma trigonometrică:

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$,

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$,

unde $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$. Calculăm produsul numerelor z_1 și z_2:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Deoarece $r_1 r_2 > 0$, rezultă că aceasta este forma trigonometrică a numărului $z_1 z_2$. Prin urmare, $\arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

Din acest raționament rezultă relația $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1|\cdot|z_2|$, ceea ce dă o nouă demonstrație a proprietății 1°, formulate anterior.

Observăm că formula

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

obținută la demonstrația teoremei 3, dă regula de înmulțire a numerelor complexe, scrise în forma trigonometrică.

Utilizând rezultatele teoremei 3, putem demonstra cu ușurință, prin metoda inducției matematice, că dacă $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ sunt, respectiv, argumentele numerelor $z_1, z_2, ..., z_n$, atunci $\arg(z_1 z_2 ... z_n) = \varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n$.

Teorema 4. Modulul produsului a două numere complexe z_1 și z_2 $(z_2 \neq 0)$ este egal cu câtul modulelor lor, iar argumentul este egal cu diferența argumentelor.

Demonstrație:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Din teorema 4 rezultă că formula de împărțire a două numere complexe
$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$ și
$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$, unde $z_2 \neq 0$,
poate fi scrisă sub forma

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Teorema 5. Pentru orice număr complex nenul $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ și orice număr întreg n are loc relația
$z^n = [r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$.
În particular, pentru orice număr φ și orice număr n natural are loc relația
$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi$ (formula lu Moivre).

Demonstrație:
1. Să demonstrăm formula

$$[r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) \qquad (1)$$

pentru orice n natural, utilizând metoda inducției matematice.

Pentru $n = 1$ formula este justă. Admitem că formula (1) este justă pentru $n = k$, adică

$$z^k = [r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)]^k = r^k(\cos k\varphi + \mathrm{i}\sin k\varphi) \qquad (2)$$

este adevărată. Să arătăm că din justețea egalității (2) rezultă că (1) este adevărată pentru $n = k + 1$. Avem

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = [r^k(\cos k\varphi + \mathrm{i}\sin k\varphi)] \cdot r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) =$$
$$= r^{k+1}[(\cos k\varphi\cos\varphi - \sin k\varphi\sin\varphi) + \mathrm{i}(\cos k\varphi\sin\varphi + \sin\varphi)] =$$
$$= r^{k+1}[\cos(k+1)\varphi + \mathrm{i}\sin(k+1)\varphi],$$

adică formula (1) este justă pentru $n = k + 1$. Prin urmare, în baza metodei inducției matematice formula (1) este justă pentru orice n natural.
2. Dacă $n = 0$ și $z \neq 0$, atunci conform definiției $z^0 = 1 \cdot (\cos 0\varphi + \mathrm{i}\sin 0\varphi)$, adică formula (1) este justă pentru $n = 0$. Fie $n = -1$. Utilizând definiția puterii cu exponent întreg negativ și teorema 4, obținem

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\cos 0 + \sin 0}{r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi)],$$

adică pentru $n = -1$ este justă formula (1).

Fie n un număr întreg negativ, atunci $n = -m$, unde $m = |n| \in \mathbb{N}$.

Utilizând inițial definiția puterii cu exponent întreg, apoi justețea formulei (1) pentru $n = -1$, apoi pentru orice m natural, obținem

$$z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^m = \left\{\frac{1}{r[\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi]}\right\}^m = \left\{\frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi)]\right\}^m =$$

$$= \left(\frac{1}{r}\right)^m [\cos(-m\varphi) + \mathrm{i}\sin(-m\varphi)].$$

Astfel, formula (1) este justă pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema este demonstrată.

***Exemplul* 1**

Să reprezentăm numărul $(1 - \mathrm{i})^8$ în formă algebrică.

Rezolvare:

Modulul numărului complex $1 - \mathrm{i}$ este egal cu $\sqrt{2}$, iar argumentul $\frac{7\pi}{4}$. Aplicând formula pentru ridicarea la o putere întreagă, obținem

$(1 - \mathrm{i})^8 = (\sqrt{2})^8(\cos 14\pi + \mathrm{i}\sin 14\pi) = 16.$

***Exemplul* 2**

Să exprimăm $\sin 3x$ și $\cos 3x$ prin $\sin x$ și $\cos x$.

Rezolvare:

Folosind formula lui Moivre, obținem:

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^3 = \cos 3x + \mathrm{i}\sin 3x.$$

Aplicăm formula binomului Newton:

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^3 = \cos^3 x + \mathrm{i}\cdot 3\cos^2 x\sin x + 3\cos x\cdot(\mathrm{i}\sin x)^2 + (\mathrm{i}\sin x)^3 =$$

$= (\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x) + \mathrm{i}(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$, de unde

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Utilizând formulele lui Moivre și Newton, putem calcula $\cos nx$ și $\sin nx$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Forma trigonometrică a numerelor complexe ne permite să demonstrăm proprietățile modulelor numerelor complexe:

1°. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$.

2°. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$, dacă $z_2 \neq 0$.

3°. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

4°. $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

5°. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

6°. $||z_1|-|z_2||\le|z_1-z_2|$.

Proprietatea 1° este demonstrată în teorema 3, iar proprietatea 2° – în teorema 4.

Demonstrăm proprietatea 3°.

Fie $z_1=r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)$.

Deoarece $(z_1+z_2)=(r_1\cos\varphi_1+r_2\cos\varphi_2)+\mathrm{i}(r_1\sin\varphi_1+r_2\sin\varphi_2)$, rezultă că

$|z_1+z_2|=(r_1^2\cos^2\varphi_1+2r_1r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2+r_2^2\cos^2\varphi_2+r_1^2\sin^2\varphi_1+$

$+2r_1r_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2+r_2^2\sin^2\varphi_2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Deoarece $\cos(\varphi_1-\varphi_2)\le 1$, rezultă că

$|z_1+z_2|\le\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2}=\sqrt{(z_1+z_2)^2}=z_1+z_2=|z_1|+|z_2|$.

Proprietatea 4° se demonstrează în același mod.

Proprietatea 5° rezultă din proprietatea 4°. Într-adevăr,
$|z_1|=|(z_1+z_2)-z_2|\le|z_1+z_2|+|z_2|$, de unde

$$|z_1|-|z_2|\le|z_1+z_2|. \qquad (1)$$

În mod analog,

$|z_2|=|(z_2+z_1)-z_1|\le|z_2+z_1|+|z_1|$,

de unde

$$|z_2|-|z_1|\le|z_2+z_1|. \qquad (2)$$

Din justețea inegalităților (1) și (2) rezultă că proprietatea 5° este adevărată.

Proprietatea 6° se demonstrează similar.

1.11. Rădăcinile din numere complexe și proprietățile lor

Știm că pentru orice număr dat a și orice număr natural dat n există numărul b, astfel încât $b^n = a$. Numărul b se numește **rădăcina de ordinul *n* din numărul *a***. Dacă numărul a este real pozitiv, iar n număr natural par, atunci există două numere reale b_1 și b_2, astfel încât $b_1^n = a$ și $b_2^n = a$; dacă a este un număr real, iar n număr natural impar, atunci există un singur număr real b, încât $b^n = a$.

Menționăm că este imposibil de a găsi în mulțimea numerelor reale așa număr, încât puterea pară a lui să fie egală cu un număr negativ. În mulțimea numerelor complexe așa ceva este posibil. Este justă afirmația mai generală: în mulțimea numerelor complexe putem găsi rădăcina de orice ordin natural din orice număr complex. Această afirmație este consecința următoarei teoreme.

Teorema 6. Fie z un număr complex, $z \neq 0$, iar n număr natural. Există n numere complexe diferite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ astfel încât $\alpha_i^n = z$, unde $i = 1, 2, 3, ..., n$. Aceste numere se numesc **rădăcinile de ordinul *n* din numărul complex *z***.

Demonstrație:

Pentru $n = 1$ teorema este evidentă. Fie $n \geq 2$ și $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Vom căuta numărul complex $\alpha = \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin n\psi)$, astfel încât $\alpha^n = z$. Vom arăta că așa număr α există. Mai mult decât atât, vom arăta că astfel de numere sunt o infinitate, însă doar n dintre ele sunt diferite.

Utilizînd formula lui Moivre, obținem:

$z = \alpha^n = \rho^n(\cos n\psi + \mathrm{i}\sin n\psi)$.

Conform definiției modulului numărului complex $|z| = \rho^n$, adică $r = \rho^n$, de unde $\rho = \sqrt[n]{r}$ (conform definiției modulului numărului complex $z \neq 0$, numerele r și ρ sunt pozitive, de aceea simbolul rădăcinii aritmetice aici este utilizat corect). Aplicând definiția egalității a două numere complexe, obținem

$$\begin{cases} \cos n\psi = \cos\varphi, \\ \sin n\psi = \sin\varphi. \end{cases}$$

Aceste două egalități sunt juste concomitent atunci și numai atunci când $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, adică $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Prin urmare, numerele α verifică egalitatea $\alpha^n = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ și pot fi scrise sub forma

$$\alpha = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right\},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Notând prin α_p rădăcina, calculată cu formula (1) pentru $k = p$, obținem:

$$\alpha_0 = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right\},$$

$$\alpha_1 = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right)\right\},$$

$$\alpha_2 = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi\cdot 2}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi\cdot 2}{n}\right)\right\},$$

$$\alpha_{n-1} = \sqrt[n]{r}\cos\left[\frac{\varphi + 2\pi\cdot(n-1)}{n}\right] + \mathrm{i}\sin\left[\frac{\varphi + 2\pi\cdot(n-1)}{n}\right],$$

$$\alpha_n = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi + 2n\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi + 2n\pi}{n}\right)\right\} = \alpha_0,$$

$$\alpha_{n+1} = \sqrt[n]{r}\cos\left[\frac{\varphi + 2\pi\cdot(n+1)}{n}\right] + \mathrm{i}\sin\left[\frac{\varphi + 2\pi\cdot(n+1)}{n}\right] = \alpha_1,$$

$\alpha_{2n} = \alpha_0$,
$\alpha_{-1} = \alpha_{n-1}$,
$\alpha_{-2} = \alpha_{n-2}$,

$\alpha_{-n} = \alpha_0$

Ușor putem observa că pentru orice p întreg egalitățile $\alpha_0 = \alpha_{pn}$, $\alpha_1 = \alpha_{pn+1}$, $\alpha_2 = \alpha_{pn+2}$, ..., $\alpha_{n-1} = \alpha_{pn+n-1}$.

Astfel, sunt exact n rădăcini diferite: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$, care pot fi calculate cu formula

$$\alpha_k = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right\}, \tag{2}$$

unde $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$.

Exemplu

Să calculăm rădăcina de ordinul 3 din numărul $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

Rezolvare:

Deoarece $r = 2$, iar $\varphi = \frac{\pi}{6}$, atunci

$$\alpha_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3}\right), \text{ unde } k = 0, 1, 2,$$

adică $\alpha_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{18}\right)$, $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18} + \mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{18}\right)$,

$\alpha_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18} + \mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{18}\right)$.

Să examinăm un caz particular: **calcularea rădăcinii de ordinul *n* din unitate**, adică să găsim numerele α_k, încât $\alpha_k^n = 1$. Deoarece $r = 1$ și $\varphi = 0$, rezultă că

$$\alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}, \text{ unde } k = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{3}$$

Dacă $n = 2m$ (număr par), atunci printre aceste rădăcini există două rădăcini reale: $\alpha_0 = 1$ și $\alpha_m = -1$.

Dacă $n = 2m + 1$ (număr impar), atunci există o singură rădăcină reală $\alpha_0 = 1$.

Propunem câteva proprietăți ale rădăcinilor α_k de ordinul *n* din unitate:

1° $|\alpha_k| = 1$;

2° $\alpha_k \alpha_m = \alpha_{k+m}$;

3° $\frac{\alpha_k}{\alpha_m} = \alpha_{k-m}$;

4° $\alpha_k^m = \alpha_{km}$, unde $m \in \mathbb{Z}$ (rădăcina α_n o calculăm cu formula (3), înlocuind *k* prin *n*).

Proprietatea 1° rezultă din definiția modulului numărului complex.

Pentru a demonstra proprietatea 2°, utilizăm teorema despre produsul numerelor complexe sub forma trigonometrică:

$$\alpha_k \cdot \alpha_m = \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) = a_{k+m}.$$

Proprietatea 3° se demonstrează în mod analog.

Să demonstrăm proprietatea 4°. Utilizând formula lui Moivre, obținem:

$$a_k^m = \cos\left[\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \cdot m\right] + \mathrm{i}\sin\left[\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \cdot m\right] = a_{km}.$$

Să examinăm acum **interpretarea geometrică a rădăcinilor de ordinul *n* din unitate**:

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$a_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{n},$$

$$a_3 = \cos\frac{6\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{n},$$

$$\ldots$$

$$a_{n-2} = \cos\frac{2\pi(n-2)}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi(n-2)}{n},$$

$$a_{n-1} = \cos\frac{2\pi(n-1)}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi(n-1)}{n}.$$

Este evident că punctele $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ vor fi vârfurile poligonului regulat cu n laturi, înscris în cercul unitar, unul dintre vârfurile căruia este punctul $A_0(1;0)$.

***Exemplul* 1**

Să reprezentăm geometric rădăcinile de ordinul 3 din unitate.

Rezolvare:

Dacă $n = 3$, atunci $a_0 = 1$, $a_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$, $a_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}$.

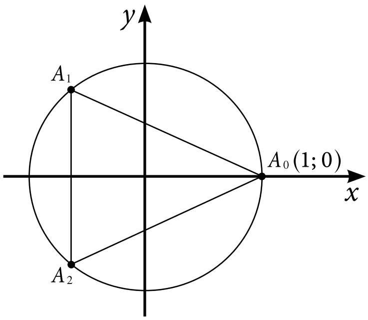

Fig. 5

Punctele $A_0(1;0)$, $A_1\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_2\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sunt vârfurile triunghiului regulat $A_0A_1A_2$ înscris în cercul unitar (fig. 5).

***Exemplul* 2**

Să reprezentăm geometric rădăcinile de ordinul 4 din unitate.

Rezolvare:

Dacă $n=4$, atunci $a_0=1$, $a_1=-\mathrm{i}$, $a_2=-1$, $a_3=-\mathrm{i}$. Punctele $A_0(1;0)$, $A_1(1;0)$, $A_2(-1;0)$, $A_3(0;-1)$ sunt vârfurile pătratului $A_0A_1A_2A_3$ înscris în cercul unitar (fig. 6).

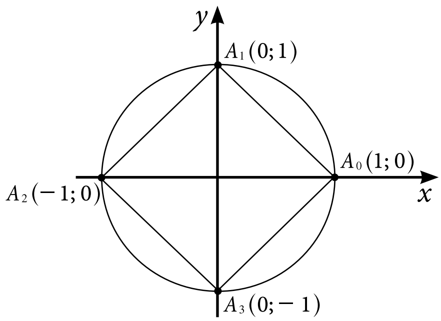

Fig. 6

Propunem formula pentru calcularea rădăcinilor de ordin n din numărul -1.

Deoarece $r=1$ și $\varphi=\pi$, atunci $a_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}$, unde $k=0,1,2,...,n-1$.

De aceea, este evident că dacă $n=2m$ (număr natural par), atunci între numerele α_k nu este niciun număr real. Dacă $n=2m+1$ (număr natural impar), atunci există un singur număr real $\alpha_m=-1$.

În general, pentru orice număr pozitiv a și pentru orice număr natural n par există numai două numere reale b_1 și b_2, astfel încât $b_1^n=b_2^n=a$.

Într-adevăr, deoarece pentru orice număr pozitiv a are loc relația $a=|a|\cdot(\cos 0^\circ+\mathrm{i}\sin 0^\circ)$, rezultă că toate rădăcinile de ordinul n din acest număr se calculează cu formula $b_k=\sqrt[n]{|a|}\left\{\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right\}$.

Dacă $n=2m$, atunci printre aceste numere numai două vor fi reale $b_0=\sqrt[n]{|a|}$ și $b_m=-\sqrt[n]{|a|}$, ceea ce am afirmat anterior.

***Exemplul* 3**

Să rezolvăm ecuația $z^3 = 8$.

Rezolvare:

Fie $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, iar $z_0 = 8(\cos 0^\circ + \mathrm{i}\sin 0^\circ)$. Rădăcinile ecuației $z^3 = 8$ le vom obține astfel:

$$z = \sqrt[3]{8(\cos 0^\circ + \mathrm{i}\sin 0^\circ)} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3}\right),$$

$$k = 0, 1, 2.$$

$$z_1 = 2;\ z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3};$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Punctele z_1, z_2, z_3 reprezintă vârfurile triunghiului echilateral înscris în cercul cu centrul în O de raza egală cu 2 (fig. 7).

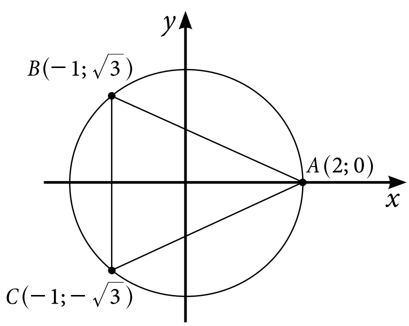

Fig. 7

Capitolul 2 Rezolvarea problemelor cu numere complexe

2.1. Probleme de calcul

În exercițiile 1–3 să calculăm partea reală și partea imaginară a numerelor complexe.

1. $z = (2+3i)^2 - (2-3i)^2$.

Rezolvare:

Aducem numărul complex dat la forma algebrică:

$z = (2+3i)^2 - (2-3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 - 4 + 12i = 24i$.

Astfel, Re $z = 0$, iar Im $z = 24$.

2. $z = \left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

Rezolvare:

$$\text{Avem } \frac{i^5+2}{i^{19}+1} = \frac{i^4 \cdot i + 2}{(i^4)^4 \cdot i^3 + 1} = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} =$$

$$= \frac{2+i+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot i.$$

$$\text{Astfel, } \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}i + \frac{9}{4}i^2 = -2 + \frac{3}{2}i.$$

Deci, Re $z = -2$, iar Im $z = \frac{3}{2}$.

3. $z = \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

Rezolvare:

$$\text{Avem } \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = \frac{1^5 + 5 \cdot 1^4 \cdot i + 10 \cdot 1^2 \cdot i^3 + 5 \cdot 1 \cdot i^4 + i^5}{1^3 - 3 \cdot i^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 - i^3} =$$

$$= \frac{1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5}{1 - 3i + 3i^2 - i^3} = \frac{-4-4i}{-2-2i} = \frac{-4(1+i)}{-2(1+i)} = 2.$$

Astfel, $\operatorname{Re} z = 2$, iar $\operatorname{Im} z = 0$.

4. Să calculăm numărul natural n, știind că $(1 + i)^n = (1 - i)^n$.

Rezolvare:

Din condițiile problemei rezultă că $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^n} = 1$, sau

$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$, sau $\left[\dfrac{(1+i)^2}{2}\right]^n = 1$, sau $i^n = 1$, deci

$n = 4k$, unde $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

5. Să calculăm valoarea expresiei $(\alpha - \alpha^2 + 2\alpha^3)\cdot(2 - \alpha + \alpha^2)$,

unde $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$.

Rezolvare:

Valoarea dată a lui $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ este una din rădăcinile ecuației $x^3 - 1 = 0$, sau $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$. De aceea, $\alpha^3 = 1$, $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, adică $\alpha^2 = -(\alpha + 1)$. Avem

$$(\alpha - \alpha^2 + 2\alpha^3)\cdot(2 - \alpha + \alpha^2) = (\alpha + \alpha + 1 + 2)\cdot(2 - \alpha - \alpha - 1) =$$
$$= (2\alpha + 3)\cdot(1 - 2\alpha) = 2\alpha + 3 - 4\alpha^2 - 6\alpha = 2\alpha + 3 + 4\alpha + 4 - 6\alpha = 7.$$

6. Să calculăm suma $S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^{19}$,

dacă $\alpha = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Rezolvare:

Cu formula pentru calcularea sumei termenilor unei progresii geometrice obținem:

$$S = \frac{\alpha^{20} - 1}{-1} = \frac{(\alpha^2)^{10} - 1}{\alpha - 1} = \frac{\left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]}{\frac{1+i}{\sqrt{2}} - 1} = \frac{(i^{10} - 1)\cdot\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} + i} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1 - i} =$$
$$= \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1 + i)}{(\sqrt{2} - 1)^2 + 1} = \frac{4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\cdot i}{4 - 2\sqrt{2}} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} i =$$
$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2} - 1}\cdot i = 1 + (\sqrt{2} + 1)\cdot i.$$

7. Să calculăm valoarea expresiei $z^{167} + \frac{1}{z^{167}}$, știind că z verifică ecuația $z + \frac{1}{z} = 1.$

Rezolvare:

Ecuația care este verificată de z o aducem la forma $z^2 - z + 1 = 0.$ Acum putem calcula ușor z^3, dacă descompunem în factori:

$z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1) = 0$, de unde $z^3 = -1.$

Deoarece $z^{167} = (z^3)^{55} \cdot z^2 = -z^2$, rezultă că trebuie să calculăm expresia

$$-z^2 - \frac{1}{z^2} = -\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right).$$

Ridicăm la pătrat ecuația $z + \frac{1}{z} = 1$ și obținem

$z^2 + \frac{1}{z^2} = -1$, deci $z^{167} + \frac{1}{z^{167}} = 1.$

8. Să calculăm produsul tuturor soluțiilor ecuației $x^n = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$

Rezolvare:

Avem $x = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$,

unde $k = 0, 1, 2, 3, ..., (n-1).$

De aceea,

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n = r\left\{\cos\left[n \cdot \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(0 + 1 + 2 + 3 + ... + n - 1)\right] + \right.$$

$$\left. + \mathrm{i}\sin\left[n \cdot \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(0 + 1 + 2 + 3 + ... + n - 1)\right]\right\} = r\{\cos[\varphi + (n-1)\pi] +$$

$$+ \mathrm{i}\sin[\varphi + (n-1)\pi]\} = (-1)^{n+1} \cdot r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Dacă n este număr *par*, atunci $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n = -r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$

În cazul în care n este număr *impar*, atunci

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

9. Să calculăm (cu ajutorul numerelor complexe) sumele

$S_1 = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots,\ S_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots.$

Rezolvare:

Ușor putem observa că $S_1 + \mathrm{i}S_2 = (1 + \mathrm{i})^n$. (1)

Pe de altă parte, $(1+\mathrm{i})^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$. (2)

Cu ajutorul formulei lui Moivre, din (1) și (2) rezultă

$S_1 + \mathrm{i}S_2 = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right).$

Utilizând condiția de egalitate a două numere complexe, calculăm

$S_1 = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4},\ S_2 = 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}.$

10. Să calculăm (cu ajutorul numerelor complexe) suma

$S = C_n^1 - 3C_n^3 + 3^2\cdot C_n^5 - 3^3\cdot C_n^7 + \ldots.$

Rezolvare:

Avem

$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n = 1 + C_n^1\cdot \mathrm{i}\sqrt{3} - C_n^2(\mathrm{i}\sqrt{3})^2 + C_n^3(\mathrm{i}\sqrt{3})^3 + \ldots = 1 - C_n^2\cdot 3 +$
$+ C_n^4\cdot 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}(C_n^1 - C_n^3\cdot 3 + C_n^5\cdot 3^2 - \ldots).$

Pe de altă parte, aplicând formula lui Moivre, obținem

$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{3}\right).$

Din egalitatea a două numere complexe și din (1) și (2) obținem

$S = \frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}.$

11. Să calculăm argumentul numărului complex $z_1 = z^2 - z$, dacă $z = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, unde $0 \le \varphi < 2\pi$.

Rezolvare:

Avem $z_1 = z(z-1)$. Conform condiției problemei $\arg z = \varphi$.

Fie $\arg(z-1) = \alpha$. Deoarece $z - 1 = (\cos\varphi - 1) + \mathrm{i}\sin\varphi$, atunci

$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$, dacă $\cos\varphi \ne 1$. Astfel, $\mathrm{tg}\varphi = -\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}$,

$$|z-1| = \sqrt{(\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi} = \sqrt{2(1-\cos\varphi)} = \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Însă, conform condiției $0 \le \frac{\varphi}{2} < \pi$, deci $|z-1| = 2\sin\frac{\varphi}{2}$.

1) Dacă $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$ (deci $\cos\frac{\varphi}{2} = 1$), atunci

$|z-1| = 0$ și $\arg(z-1)$ nu se definește.

2) Dacă $\sin\frac{\varphi}{2} \neq 0$, adică $0 < \frac{\varphi}{2} < \pi$ sau $0 < \varphi < 2\pi$, atunci

$$|z-1| = 2\sin\frac{\varphi}{2} > 0. \qquad (2)$$

În continuare,

$z-1 = -2\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(-\sin\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}\right) =$

$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right].$

Astfel,

$$z-1 = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right]. \qquad (3)$$

Din (2) și (3) rezultă $\arg(z-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}$.

Deoarece $\arg z_1 = \arg z + \arg(z-1)$, atunci

$\arg z_1 = \varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}.$

12. Să calculăm argumentul numărului complex

$z_1 = z^2 + \overline{z}$, dacă $z = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, unde $0 \le \varphi < 2\pi$.

Rezolvare:

Avem

$z_1 = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi) = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + \cos\varphi) +$

$+\mathrm{i}(\sin 2\varphi - \sin\varphi) = (\cos 2\varphi + \cos\varphi) + \mathrm{i}(\sin 2\varphi - \sin\varphi) =$

$= 2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 2\mathrm{i}\cos\frac{3\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{3\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\right).$

Din egalitatea obținută rezultă că $|z_1| = 2\left|\cos\frac{3\varphi}{2}\right|$.

1) Dacă $\cos\frac{3\varphi}{2} = 0$, adică $\varphi \in \left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$,

atunci $\arg z_1$ nu este definit.

2) Dacă $\cos\frac{3\varphi}{2} > 0$, adică $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{3}$ și

$$\pi \leq \varphi\frac{5\pi}{3}, \text{ atunci } |z_1| = 2\cos\frac{3\varphi}{2}. \tag{1}$$

Anterior am arătat că

$$z_1 = 2\cos\frac{3\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\right). \tag{2}$$

Din egalitățile (1) și (2) rezultă că $\arg z_1 = \frac{\varphi}{2}$.

3) Dacă $\cos\frac{3\varphi}{2} < 0$, adică $\frac{\pi}{3} < \varphi < \pi$ și $\frac{5\pi}{3} < \varphi < 2\pi$,

$$\text{atunci } |z_1| = -2\cos\frac{3\varphi}{2}. \tag{3}$$

Deci,

$$z_1 = -2\cos\frac{3\varphi}{2}\left[\cos\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right)\right]. \tag{4}$$

Din egalitățile (3) și (4) rezultă că

$\arg z_1 = \pi + \frac{\varphi}{2}$.

Răspuns: dacă $\varphi = \frac{\pi}{3}, \varphi = \pi, \varphi = \frac{5\pi}{3}$, atunci $\arg z_1$ nu este definit:

$z_1 = 0$.

Dacă $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{3}$ și $\pi \leq \varphi < \frac{5\pi}{3}$, atunci $\arg z_1 = \frac{\varphi}{2}$.

Dacă $\frac{\pi}{3} < \varphi < \pi$ și $\frac{5\pi}{3} < \varphi < 2\pi$, atunci $\arg z_1 = \pi + \frac{\varphi}{2}$.

13. Fie numărul complex $z = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, unde $\varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Să calculăm modulul și argumentul numărului complex $A = \frac{z+1}{z-1}$.

Rezolvare:

Avem

$$A=\frac{z+1}{z-1}=\frac{\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi+1}{\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi-1}=\frac{(1+\cos\varphi)+\mathrm{i}\sin\varphi}{-(1-\cos\varphi)+\mathrm{i}\sin\varphi}=$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{-2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2\mathrm{i}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Deoarece $\varphi\neq k\pi$, atunci $\sin\frac{\varphi}{2}\neq 0$; deci A poate fi scris astfel:

$$A=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}}{-\sin\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{-\mathrm{i}\left(-\sin\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{-\sin\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}}=-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Deci, $|A|=\left|\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right|$.

Dacă $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}>0$, adică $2k\pi<\varphi<(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$, atunci

$$A=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Prin urmare, în acest caz $\arg A=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$.

Dacă $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}<0$, adică $(2k-1)\pi<\varphi<2k\pi$, $k\in Z$, atunci

$A=-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Prin urmare, $\arg A=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

14. Să calculăm toți argumenții numărului imaginar $z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, dacă $z+\frac{1}{z}=a$, unde a este numărul real negativ dat. Pentru care valori ale parametrului a problema are soluții?

Rezolvare:

$$z+\frac{1}{z}=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)+[r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)]^{-1}=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)+$$

$$+\frac{\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi}{r}=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi+\mathrm{i}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Expresia $\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \mathrm{i}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi = a$ este număr real atunci și numai atunci când $\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi = 0$.

Însă, în condiția problemei se spune că z este un număr imaginar, de aceea $\sin\varphi \neq 0$. Prin urmare, $r-\frac{1}{r}=0$, de unde $r^2=1, r=1$.

Astfel, $z+\frac{1}{z}=a$ ia forma $2\cos\varphi = a$, de unde $\cos\varphi = \frac{a}{2}$, care are soluții pentru $-2 \le a \le 2$. Însă, $a<0$, deci pentru $-2 \le a < 0$

$\varphi = \pm \arccos\frac{a}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $r=1, \varphi = \pm\arccos\frac{a}{2}+2k\pi$ pentru $-2 \le a < 0, k \in \mathbb{Z}$.

15. Să calculăm

$\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^{59}+\mathrm{i}^{270}+\mathrm{i}^{100}+(-\mathrm{i})^{10}+(-\mathrm{i})^{23}+(-\mathrm{i})^{34}-\mathrm{i}-(-\mathrm{i})^{43}$.

Rezolvare:

Notăm suma prin S și obținem

$$S=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^{59}+\mathrm{i}^{270}+\mathrm{i}^{100}+(-\mathrm{i})^{10}+(-\mathrm{i})^{23}+(-\mathrm{i})^{34}-\mathrm{i}-(-\mathrm{i})^{43}=$$
$$=\mathrm{i}-1+(\mathrm{i}^4)^{14}\cdot\mathrm{i}^3+(\mathrm{i}^4)^{67}\cdot\mathrm{i}^2+(\mathrm{i}^4)^{25}+(\mathrm{i}^4)^2\cdot\mathrm{i}^2-(\mathrm{i}^4)^5\cdot\mathrm{i}^3+(\mathrm{i}^4)^8\cdot\mathrm{i}^2-$$
$$-\mathrm{i}+(\mathrm{i}^4)^{10}\cdot\mathrm{i}^3=\mathrm{i}-1+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^2+1+\mathrm{i}^2-\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^2-\mathrm{i}+\mathrm{i}^3=-3-\mathrm{i}.$$

16. Calculați $\sqrt{3-4\mathrm{i}}$.

Rezolvare:

Utilizând formula

$$\sqrt{a+b\mathrm{i}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

avem $\sqrt{3-4\mathrm{i}}=\pm\left(\sqrt{\frac{5+3}{2}}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{5-3}{2}}\right)=\pm(2-\mathrm{i})$.

17. Să calculăm $\mathrm{i}^n+\mathrm{i}^{n+1}+\mathrm{i}^{n+2}+\mathrm{i}^{n+3}$.

Rezolvare:

$$\mathrm{i}^n+\mathrm{i}^{n+1}+\mathrm{i}^{n+2}+\mathrm{i}^{n+3}=\mathrm{i}^n+\mathrm{i}^n\cdot\mathrm{i}^1+\mathrm{i}^n\cdot\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^n\cdot\mathrm{i}^3=$$
$$=\mathrm{i}^n(1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3)=\mathrm{i}^n(1+\mathrm{i}-1-\mathrm{i})=0.$$

18. Să calculăm $\dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{(1+\mathrm{i})^{n-2}}$, dacă $n > 2, n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

$$\frac{(1+\mathrm{i})^n}{(1+\mathrm{i})^{n-2}} = \frac{(1+\mathrm{i})^n}{(1+\mathrm{i})^n \cdot (1+\mathrm{i})^{-2}} = \frac{(1+\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^n} \cdot (1-\mathrm{i})^2 =$$

$$= \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^n \cdot (-2\mathrm{i}) = \mathrm{i}^n \cdot (-2\mathrm{i}) = A.$$

Răspuns: dacă $n = 4k$, atunci $A = -2\mathrm{i}$;

dacă $n = 4k+1$, atunci $A = 2$;

dacă $n = 4k+2$, atunci $A = 2\mathrm{i}$;

dacă $n = 4k+3$, atunci $A = -2$.

19. Să calculăm $\sqrt[3]{\dfrac{625}{(-3+4\mathrm{i})^2} + 17 \cdot \left(\dfrac{5+6\mathrm{i}}{6-5\mathrm{i}}\right)^{114}}$.

Rezolvare:

Aducem expresia de sub radical la o formă mai simplă:

$$\frac{625}{(-3+4\mathrm{i})^2} + 17 \cdot \left(\frac{5+6\mathrm{i}}{6-5\mathrm{i}}\right)^{114} = \frac{625}{-7-24\mathrm{i}} + 17 \cdot \mathrm{i}^{114} =$$

$$= \frac{625(-7+24\mathrm{i})}{49+576} + 17 \cdot (\mathrm{i}^4)^{28} \cdot \mathrm{i}^2 = -7 + 24\mathrm{i} - 17 = -24 + 24\mathrm{i}.$$

Astfel, obținem

$$\sqrt[3]{-24+24\mathrm{i}} = \sqrt[3]{24(-1+\mathrm{i})} = \sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{-1+\mathrm{i}}.$$

Știm că $-1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ și

$$\sqrt[3]{-1+\mathrm{i}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right], \text{ unde } k = 0, 1, 2.$$

Astfel, obținem $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{-1+\mathrm{i}} =$

$$= 2\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{-1+\mathrm{i}} = 2\sqrt[6]{9} \cdot \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= 2\sqrt[6]{18}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right], \text{ unde } k = 0, 1, 2.$$

20. Să calculăm $(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n$.

Rezolvare:

$$1 + \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 2^n\cdot\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right).$$

21. Să calculăm numerele complexe care corespund vârfurilor pătratului cu centrul în originea de coordonate cu laturile de lungimea 1 paralele la axele de coordonate.

Punctului $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ îi corespunde numărul complex $\frac{1}{2} + i\cdot\frac{1}{2}$;

$B\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \rightarrow -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{1}{2}$;

$C\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right) \rightarrow -\frac{1}{2} - i\cdot\frac{1}{2}$;

$D\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{2} - i\cdot\frac{1}{2}$.

Răspuns: $\pm\frac{1}{2} \pm i\cdot\frac{1}{2}$.

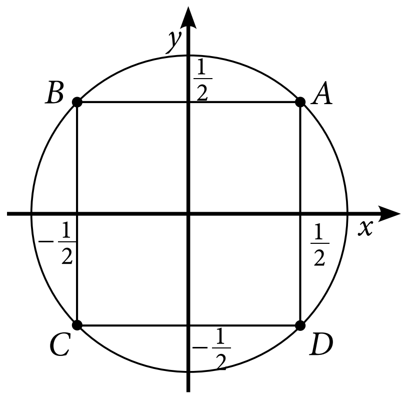

Fig. 8

22. Să calculăm $\dfrac{-[(-3i)(2-4i)-(2+4i)\cdot 3i]^2}{(1-i)(1+i)^2 - \left[\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)-\frac{1+2i}{1-2i}\right] - 4i}$.

Rezolvare:

$$\frac{-[(-3i)(2-4i)-(2+4i)\cdot 3i]^2}{(1-i)(1+i)^2 - \left[\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)-\frac{1+2i}{1-2i}\right] - 4i} =$$

$$= \frac{-[-6i-12-(6i-12)]^2}{2+2i-\left[\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i-\left(-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\right]-4i} = \frac{-(-12i)^2}{2+2i-(1-i)-4i} =$$

$$= \frac{-144i^2}{1-i} = \frac{144}{1-i} = \frac{144(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{144(1+i)}{2} = 72 + 72i.$$

23. Să calculăm $\dfrac{\left|\left\{\left(\dfrac{|5-\mathrm{i}|^2}{5-\mathrm{i}}-\mathrm{i}\right)+[(5+\mathrm{i})\cdot \mathrm{i}^{125}]\right\}-(2-3\mathrm{i})\right|}{\left|\left(\dfrac{|3+4\mathrm{i}|^2}{3-4\mathrm{i}}-4\mathrm{i}\right)(\mathrm{i}-4)+10+5\mathrm{i}\right|}$.

Rezolvare:

$$\frac{\left|\left\{\left(\dfrac{|5-\mathrm{i}|^2}{5-\mathrm{i}}-\mathrm{i}\right)+[(5+\mathrm{i})\cdot \mathrm{i}^{125}]\right\}-(2-3\mathrm{i})\right|}{\left|\left(\dfrac{|3+4\mathrm{i}|^2}{3-4\mathrm{i}}-4\mathrm{i}\right)(\mathrm{i}-4)+10+5\mathrm{i}\right|}=$$

$$=\frac{\left|\left\{\left(\dfrac{26}{5-\mathrm{i}}-\mathrm{i}\right)+[(5+\mathrm{i})\cdot \mathrm{i}]\right\}-(2-3\mathrm{i})\right|}{\left|\left(\dfrac{25}{3-4\mathrm{i}}-4\mathrm{i}\right)(\mathrm{i}-4)+10+5\mathrm{i}\right|}=$$

$$=\frac{|\{(5+\mathrm{i}-\mathrm{i})+5\mathrm{i}-1\}-(2-3\mathrm{i})|}{|3(\mathrm{i}-4)+10+5\mathrm{i}|}=$$

$$=\frac{|5+5\mathrm{i}-1-2+3\mathrm{i}|}{|8\mathrm{i}-2|}=\frac{|2+8\mathrm{i}|}{|8\mathrm{i}-2|}=\frac{\sqrt{68}}{\sqrt{68}}=1.$$

24. Să scriem sub forma trigonometrică numerele complexe:

a) $z=1$; b) $z=-3$; c) $z=\mathrm{i}$;

d) $z=1+\mathrm{i}$; e) $z=-1+\mathrm{i}$; f) $z=\left(\dfrac{1}{\mathrm{i}-1}\right)^{100}$.

Rezolvare:

a) $z=|z|=1; \arg z=0^\circ$, deci $z=\cos 0^\circ+\sin 0^\circ$.

b) $|z|=3; \arg z=\pi$, deci $z=3(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$.

c) $|z|=1; \arg z=\dfrac{\pi}{2}$, deci $z=\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}$.

d) $|z|=\sqrt{2}; \arg z=\dfrac{\pi}{4}$, deci $z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

e) $|z|=\sqrt{2}; \arg z=\dfrac{3\pi}{4}$, deci $z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

f) $z = \left(\frac{1}{i-1}\right)^{100} = \left[\frac{i+1}{(i-1)(i+1)}\right]^{100} = \frac{(i+1)^{100}}{2^{100}} =$

$= \frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{100}}{2^{100}} = \frac{2^{50}(\cos 25\pi + i\sin 25\pi)}{2^{100}} =$

$= \frac{-\cos\pi}{2^{50}} = -\frac{1}{2^{50}}.$

25. Utilizând forma trigonometrică a numerelor complexe, să calculăm:

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-8i}$; c) $\sqrt[4]{-1}$; d) $\sqrt{i}$; e) $\sqrt[4]{-16}$.

Rezolvare:

a) Calculăm: $r = 2$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Astfel, $2i = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]$.

Prin urmare, $\sqrt{2i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right]$.

Pentru $k = 0, 1$ obținem:

$\alpha_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i;$

$\alpha_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i.$

Răspuns: $\pm(1 + i)$.

b) Calculăm: $r = 8$; $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Astfel, $-8i = 8\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]$.

Prin urmare, $\sqrt{-8i} = \sqrt{8}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right)\right]$.

Pentru $k = 0, 1$ obținem:

$\alpha_0 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2(-1 + i);$

$\alpha_1 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2(1 - i).$

Răspuns: $\pm 2(1 - i)$.

c) Calculăm: $r = 1; \varphi = \pi$.

Astfel, $-1 = \cos(\pi + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi + 2k\pi)$,

iar $\sqrt[4]{-1} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$.

Pentru $k = 0, 1, 2, 3$ obținem:

$\alpha_0 = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})$;

$\alpha_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \mathrm{i})$;

$\alpha_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})$;

$\alpha_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \mathrm{i})$.

Răspuns: $\pm\frac{1 \pm \mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

d) Calculăm: $r = 1; \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Astfel, $\mathrm{i} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, iar

$\sqrt[4]{\mathrm{i}} = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)$.

Pentru $k = 0, 1, 2, 3$ obținem:

$\alpha_0 = \cos\frac{\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}$;

$\alpha_1 = \cos\frac{5\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{8}$;

$\alpha_2 = \cos\frac{9\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{8}$;

$\alpha_3 = \cos\frac{13\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{8}$.

e) **Metoda I.** Scriem –16 în forma trigonometrică:

$-16 = 16[\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)]$.

Acum $\alpha_k = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)$.

Pentru $k = 0, 1, 2, 3$ obținem:

$\alpha_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(1 + i)$;

$\alpha_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(-1 + i)$;

$\alpha_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}(1 + i)$;

$\alpha_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(1 - i)$.

Metoda II. $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{-1} \cdot \sqrt[4]{16} = 2\sqrt[4]{-1}$. Luând în considerare 25 c), obținem $\alpha = \pm\sqrt{2}(1 \pm i)$.

Răspuns: $\alpha = \sqrt{2}(\pm 1 \pm i)$.

26. Să calculăm $\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}$.

Rezolvare:

$r = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = 16$; $\cos\varphi = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$,

$\sin\varphi = -\frac{8\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi = \frac{4\pi}{3}$.

Astfel, $-8 - 8\sqrt{3}i = 16[\cos(240^\circ + 360^\circ k) + i\sin(240^\circ + 360^\circ k)]$.

Prin urmare,

$\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}} = 2[\cos(60^\circ + 90^\circ k) + i\sin(60^\circ + 90^\circ)]$.

Pentru $k = 0, 1, 2, 3$ obținem

$\alpha_0 = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 1 + i\sqrt{3}$;

$\alpha_1 = 2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) = -\sqrt{3} + i$;

$\alpha_2 = 2(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ) = -1 - i\sqrt{3}$;

$\alpha_3 = 2(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ) = \sqrt{3} - i$.

27. Să efectuăm calculele:

a) $2(\cos 12^\circ + i\sin 12^\circ)\cdot 4(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ) = 8(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) =$

$= 8(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{3} + 4i;$

b) $6(\cos 19^\circ + i\sin 19^\circ)\cdot 8(\cos 31^\circ + i\sin 31^\circ)\cdot\frac{1}{24}(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ) =$

$= 6\cdot 8\cdot\frac{1}{24}(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = 2i;$

c) $3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15}\right) =$

$= 15\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 15\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

28. Să efectuăm calculele:

a) $[3(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)]^3 = 3^3\cdot(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 27\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$

b) $[2(\cos 9^\circ + i\sin 9^\circ)]^5 = 2^5(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) =$

$= 32\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 32\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = 16\sqrt{2}(1+i);$

c) $\sqrt[15]{3}(\cos 6^\circ + i\sin 6^\circ)^{30} = 9(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = -9;$

d) $(1+i)^{20} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{20} =$

$= \sqrt{2}^{20}\cdot(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = -2^{10}.$

29. Să calculăm $\sqrt{3+4i}$.

Rezolvare:

Utilizând formula

$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$, obținem

$\sqrt{3+4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{5+3}{2}} + i\sqrt{\frac{5-3}{2}}\right) = \pm(2+i).$

30. Să calculăm cea mai mică valoare naturală a lui n, pentru care $(1-\mathrm{i})^n$ este un număr real pozitiv.

Rezolvare:

$$(1-\mathrm{i})^n=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{7\pi n}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi n}{4}\right).$$

Pentru ca acest număr să fie pozitiv, este necesar și suficient ca

$\cos\frac{7\pi n}{4}>0$ și $\sin\frac{7\pi n}{4}=0$, de unde $\frac{7\pi n}{4}=2k\pi, 7n=8k$, deci $n=8$.

Într-adevăr, pentru $n=8, (1-\mathrm{i})^n=2^4\cdot\cos 14\pi=2^4=16$.

Deci, $n=8$ este cea mai mică valoare naturală a lui n pentru care $(1-\mathrm{i})^n$ este număr pozitiv.

Rezolvați problemele:

1. Calculați argumentul numărului complex $z_1=z^3+z^2$, dacă $z=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$, unde $0\le\varphi<2\pi$.

2. Determinați coordonatele vârfurilor unui poligon regulat cu n laturi, dacă centrul lui este situat în punctul $z=0$, iar unul dintre vârfurile lui z este cunoscut.

3. Punctele z_1 și z_2 sunt vârfuri megieșe ale poligonului regulat cu n laturi. Găsiți vârful z_3 megieș cu z_2 $(z_3\neq z_1)$.

4. Care este condiția ca trei puncte (fiecare două sunt diferite) z_1, z_2, z_3 să aparțină unei drepte?

5. Punctele $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$ pe plan corespund numerelor complexe $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ și $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ $(x_1, x_2, y_1, y_2$ sunt numere reale). Unde este situat punctul corespunzător numărului $z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$?

6. Trei vârfuri ale unui paralelogram sunt situate în punctele care corespund numerelor complexe z_1, z_2, z_3. Găsiți numărul complex care îi corespunde vârfului al patrulea al paralelogramului.

7. Găsiți condiția ca patru puncte, diferite fiecare două, z_1, z_2, z_3, z_4 sunt situate pe un cerc sau pe o dreaptă.

8. Pentru care valori reale ale lui x și y numerele $z=-3+x^2y\mathrm{i}$ și $w=x^2+y+4\mathrm{i}$ sunt complexe conjugate?

9. Calculați:

a) $3(\mathrm{i}-3)^2+\frac{12}{\mathrm{i}-3}+\frac{1}{\mathrm{i}-2}+\frac{1}{\mathrm{i}-1}+\mathrm{i}+\frac{1}{\mathrm{i}+1}+\frac{2-\mathrm{i}}{5}$;

b) $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+...+\mathrm{i}^n+\mathrm{i}^{n+1}+\mathrm{i}^{n+3}+\mathrm{i}^{n+4}, n\geq 4, n\in\mathbb{N}$;

c) $\frac{1}{\mathrm{i}^{13}}-\frac{1}{\mathrm{i}^{21}}+\frac{1}{\mathrm{i}^{25}}-\frac{1}{\mathrm{i}^{238}}+\frac{1}{\mathrm{i}^{80}}-\frac{1}{\mathrm{i}^{81}}$.

10. Calculați valoarea expresiei

$E(z)=z^4-z^3+z^2+z+1$ pentru $z=2-\mathrm{i}$.

11. Aflați toate numerele complexe, fiecare dintre care au conjugatul egal cu
a) pătratul său;
b) cubul său.
Indicație:
Fie $z=x+\mathrm{i}y$ numărul complex căutat, atunci $\overline{z}=x+\mathrm{i}y$. Din condiția problemei $z^2=\overline{z}$, adică $(x+\mathrm{i}y)^2=x-\mathrm{i}y$.

Răspuns:

a) $z_1=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3=0, z_4=1$;

b) $z_1=0, z_2=1, z_3=-1, z_4=\mathrm{i}, z_5=-\mathrm{i}$.

12. Calculați cea mai mică valoare naturală a lui n, pentru care $(1-\mathrm{i})^n$ este numărul pozitiv.

Răspuns: $n=8$.

13. Calculați $(1-\mathrm{i})^k,\ k\in\mathbb{Z}$.

14. Fie numerele complexe

$$z_1=\frac{2}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{5}\right)\text{ și } z_2=\frac{3}{4}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{9}\right).$$

Calculați: $z_1^3; z_2^4; \frac{z_1^2}{z_2^3}$.

15. Găsiți formulele care exprimă $\cos nx$ și $\sin nx$ prin $\cos x$ și $\sin x$.

16. Calculați suma $S = 1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} + z^n$,

unde $z = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$.

Indicație:

Este evident că $z^n = 1$. Notăm: $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = S$.

Atunci $Sz = z + z^2 + ... + z^{n-1} + z^n = (S - 1) + 1 = S$.

Deci, $S = 0$, dacă $z \neq 0$, și $S = n$, dacă $z = 1$.

17. Calculați:

a) $\sqrt[5]{\dfrac{(-\sqrt{12} + 2\mathrm{i})^2}{16 \cdot \mathrm{i}^{117}}}$;

b) $\sqrt[10]{\dfrac{(3\sqrt{3} + 4) - \mathrm{i}(4\sqrt{3} - 3)}{3 - 4\mathrm{i}}}$.

18. Calculați:

a) $\sqrt{-15 + 8\mathrm{i}}$; b) $\sqrt{-3 - 4\mathrm{i}}$; c) $\sqrt{-11 + 60\mathrm{i}}$;

d) $\sqrt{-8 + 6\mathrm{i}}$; e) $\sqrt{-8 - 6\mathrm{i}}$; f) $\sqrt{8 - 6\mathrm{i}}$; g) $\sqrt{8 + 6\mathrm{i}}$.

19. Calculați $\dfrac{(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)}{2(1 - \mathrm{i})(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)}$.

Răspuns: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right)\right]$.

20. Calculați:

a) $(1 + \mathrm{i})^{25}$; b) $\left(\dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}}\right)^{20}$; c) $\left(1 - \dfrac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{2}\right)^{24}$;

d) $\dfrac{(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{15}}{(1 - \mathrm{i})^{20}} + \dfrac{(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^{15}}{(1 + \mathrm{i})^{20}}$.

21. Găsiți numerele complexe care corespund:

a) vârfurilor unui triunghi echilateral cu centrul în originea de coordonate, cu o latură paralelă la axa ordonatelor și un vârf situat pe semiaxa negativă reală, iar raza cercului circumscris egală cu 1;

b) vârfurilor unui hexagon regulat cu centrul în punctul $2 + i\sqrt{3}$, cu o latură paralelă la axa absciselor și raza cercului circumscris egală cu 2;

c) vârfurilor unui poligon regulat cu n laturi cu centrul în originea coordonatelor, iar unul dintre vârfuri este numărul 1.

Răspuns:

a) $-1;\ \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $4 + i\sqrt{3};\ 3 + 2i\sqrt{3};\ 1 + 2i\sqrt{3};\ i\sqrt{3};\ 1;\ 3.$

■ 2.2. Probleme de determinare a mulțimilor de puncte

În problemele 1–8 să determinăm mulțimea punctelor care satisfac condiția indicată (z este număr complex).

1. $|z + i| = |z + 2|$.

Rezolvare:

Fie $z = x + iy$, atunci $z + i = x + iy + i = x + (y + 1)i$,

iar $|z + i| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$; $z + 2 = x + iy + 2 = (x + 2) + iy$,

iar $|z + 2| = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$. Reieșind din condiția problemei, avem

$\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$, sau $x^2 + (y + 1)^2 = (x + 2)^2 + y^2$,

sau $x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2$,

sau $2y = 4x + 3$, de unde $y = 2x + \frac{3}{2}$.

2. $|z - 3| = 5$.

Rezolvare:

Fie $z = x + iy$, atunci

$z - 3 = x + iy - 3 = (x - 3) + iy$, iar $|z - 3| = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2}$.

Reieșind din condiția problemei, $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=5$, sau $(x-3)^2+y^2=25$. Astfel, mulțimea de puncte care verifică condiția problemei sunt punctele situate pe cercul cu centrul în punctul $(3;0)$ de raza 5.

3. $3 \le |z+i| \le 5$.

Rezolvare:

Numărul $|z+\mathrm{i}|=|z-(-\mathrm{i})|$ este egal cu distanța dintre punctul căutat z și punctul $(-\mathrm{i})$. Conform condiției, această distanță nu este mai mică decât 3 și nu este mai mare decât 5. De aceea, condiția $3 \le |z+\mathrm{i}| \le 5$ o verifică acele și numai acele puncte care sunt situate în interiorul inelului mărginit de cercurile concentrice cu centrul în punctul $(0;-1)$ și de razele $R_1=3$ și $R_2=5$ inclusiv pe acestea.

4. $\mathrm{Re}\, z \ge 2$.

Rezolvare:

Dacă $z=x+\mathrm{i}y$, atunci $\mathrm{Re}\, z=x$. Deci, conform condiției, $x \ge 2$. Toate punctele căutate sunt situate în semiplanul din dreapta, mărginit de dreapta perpendiculară la axa reală și care trece prin punctul $(2;0)$ și pe această dreaptă. Orice punct din acest semiplan, inclusiv punctele dreptei indicate, reprezintă numărul complex z, pentru care $\mathrm{Re}\, z \ge 2$.

5. $|z-z_1|=|z-z_2|$, unde z_1 și z_2 sunt puncte date.

Rezolvare:

Modulul $|z-z_1|$ este distanța de la punctul z până la punctul fix z_1; modulul $|z-z_2|$ este distanța de la punctul z până la punctul fix z_2. Din condițiile problemei rezultă că aceste distanțe sunt egale. De aceea, toată mulțimea de puncte z prezintă mediatoarea segmentului z_1z_2.

6. $|z+2|+|z-2|=5$.

Rezolvare:

Ușor putem observa că mulțimea de puncte căutată constă din toate punctele M, pentru care $AM+BM=5$, unde $A(-2;0)$ și $B(2;0)$. Această mulțime reprezintă o elipsă cu focarele în A și B, a cărei ecuație este

$$\frac{36x^2}{225}+\frac{100y^2}{225}=1. \qquad (1)$$

Într-adevăr, fie $z = x + \mathrm{i}y$, atunci

$|z+2| = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$, iar $|z-2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$.

Din condiția problemei avem $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 5$, de unde obținem ecuația elipsei (1).

7. $|z| = \mathrm{Re}\,z + 1$.

Rezolvare:

Fie $z = x + \mathrm{i}y$, atunci $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathrm{Re}\,z = x$.

Deci, $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1$, sau $x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1$, sau $y^2 = 2x + 1$. Astfel, $y^2 = 2x + 1$ este o parabolă cu vârful în $z = -\frac{1}{2}$ și axa – porțiunea din axa reală la dreapta de vârful ei.

8. $|z-1| > |z-\mathrm{i}|$.

Rezolvare:

Fie $z = x + \mathrm{i}y$. Atunci $z - 1 = (x-1) + \mathrm{i}y$ și $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, iar $z - \mathrm{i} = x + \mathrm{i}(y-1)$ și $|z-\mathrm{i}| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$. Utilizând condiția problemei, obținem $(x-1)^2 + y^2 > x^2 + (y-1)^2$, de unde $y > x$.

Răspuns: Toate punctele planului situate mai sus de bisectoarea cadranelor unu și trei.

9. Să determinăm locul geometric de puncte z ale planului complex pentru care $\mathrm{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 0$.

Rezolvare:

Fie $z = x + \mathrm{i}y$. Atunci

$$\mathrm{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \mathrm{Re}\left(z - \frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = x - \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2}.$$

Însă, $\mathrm{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 0$. Astfel, obținem sistemul $\begin{cases} x(x^2 + y^2 - 1) = 0, \\ x^2 + y^2 \neq 0. \end{cases}$

Dacă $x = 0$, atunci $y \neq 0$. Aceasta este axa imaginară fără originea sistemului de coordonate, sau $x^2 + y^2 = 1$, adică cercul unitar.

Răspuns: cercul unitar și axa imaginară fără originea sistemului de coordonate.

10. Să aflăm locul geometric de puncte z ale planului complex pentru care $\operatorname{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$, unde z_1 și z_2 sunt puncte date.

Rezolvare:

Din condiția problemei rezultă că $\frac{z-z_1}{z-z_2}=k$, unde $k\in\mathbb{R}$ și $z\neq z_2$. Dacă $k=0$, atunci $z=z_1$.

Fie $k\neq 0$. Atunci $z-z_1=k(z-z_2)$. Considerând ultima egalitate ca egalitate a doi vectori, conchidem că vectorii $z-z_1$ și $z-z_2$ sunt coliniari, de aceea punctele z, z_1, z_2 sunt situate pe aceeași dreaptă. Însă, $z\neq z_2$. De aceea, mulțimea tuturor punctelor z este dreapta ce trece prin punctele z_1 și z_2, din care se exclude punctul z_2.

11. Să determinăm locul geometric de puncte z, pentru care $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=a$, unde z_1 și z_2 sunt numere complexe date $(z_1\neq z_2)$ și a un număr pozitiv diferit de 1.

Rezolvare:

Din condiția problemei $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=a.$ (1)

Deoarece $|z-z_1|$ și $|z-z_2|$ sunt numere, respectiv egale cu distanțele de la punctul z până la punctele fixe z_1 și z_2, atunci din (1) rezultă că problema se reduce la determinarea locului geometric de puncte, pentru care raportul distanțelor până la două puncte date este constant (diferit de 1).

Locul geometric de puncte care posedă această proprietate este cercul lui Apollonious cu punctele de bază z_1 și z_2.

Construcția. Prin punctele A și B, ce reprezintă respectiv numerele z_1 și z_2, ducem dreapta MN. Apoi construim punctele C și D, dintre care primul împarte segmentul AB interior astfel: $AC:CB=a$ *și* $AD:BD=a$. Cercul cu diametrul $[CD]$ reprezintă locul geometric de puncte căutat.

12. Să determinăm punctele care reprezintă numerele complexe z, pentru care $|z-1|=|z+1|=|z-i\sqrt{3}|$.

Rezolvare:

Fie $z=x+iy$, atunci

$|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$; $|z+1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$;

$|z - i\sqrt{3}| = \sqrt{x^2 + (y - \sqrt{3})^2}$.

Din condiția problemei rezultă

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}, \\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - \sqrt{3})^2}, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2, & (1) \\ (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y - \sqrt{3})^2. & (2) \end{cases}$$

Din ecuația (1) avem $(x-1)^2 = (x+1)^2$, de unde $x = 0$. (3)

Înlocuind în ecuația (2) valoarea lui $x = 0$, obținem

$$1 + y^2 = y^2 - 2y\sqrt{3} + 3, \text{ de unde } y = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (4)$$

Din egalitățile (3) și (4) rezultă că $z = 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}i = \frac{1}{\sqrt{3}}i$. De aceea, există un singur număr complex $z = \frac{1}{\sqrt{3}}i$, care verifică condiția problemei. Acestui număr în planul complex îi corespunde punctul $\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Geometric, punctul găsit $\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ este centrul cercului circumscris triunghiului cu vârfurile $1, -1, i\sqrt{3}$.

13. Să găsim mulțimea de puncte situate în planul de coordonate *Oxy* pentru care $|z + i - 2| \leq 2$, unde *z* este număr complex.

Rezolvare:

Scriem numărul complex z în forma algebrică $z = x + iy$. Atunci $z + i - 2 = (x - 2) + i(y + 1)$. Conform definiției modulului numărului complex $|z + i - 2| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$.

Astfel, inecuația $|z + i - 2| \leq 2$ ia forma

$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 4$.

Deci, mulțimea punctelor din planul *xOy* care verifică ultima inecuație reprezintă mulțimea tuturor punctelor situate în interiorul cercului de raza 2 cu centrul în punctul $(2; -1)$ și pe acesta.

14. Să determinăm mulțimea punctelor în planul de coordonate xOy, pentru care partea reală a numărului $(1 + i)z^2$, unde z este un număr complex, este pozitivă.

Rezolvare:

Fie $z = x + yi$, atunci $z^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$, iar

$$(1 + i)z^2 = (1 + i)[x^2 - y^2 + i(2xy)] = (x^2 - 2xy - y^2) + i(x^2 + 2xy - y^2).$$

Din condițiile problemei, partea reală a numărului complex $(1 + i)z^2$ este pozitivă:

$$x^2 - 2xy - y^2 > 0. \tag{1}$$

Admitem că $y \neq 0$ și împărțind ambii membri ai inecuației (1) la y^2, obținem inecuația

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) - 1 > 0.$$

Rezolvând această inecuație de gradul doi, obținem

$$\frac{x}{y} > 1 + \sqrt{2}, \ \frac{x}{y} < 1 - \sqrt{2}. \tag{2}$$

Pentru $y > 0$, scriem inecuațiile (2) astfel:

$$y < \frac{1}{1 + \sqrt{2}}x, \ y < \frac{1}{1 - \sqrt{2}}x.$$

Mulțimea punctelor planului xOy, care verifică aceste condiții, sunt indicate în figura 8 (părțile hașurate).

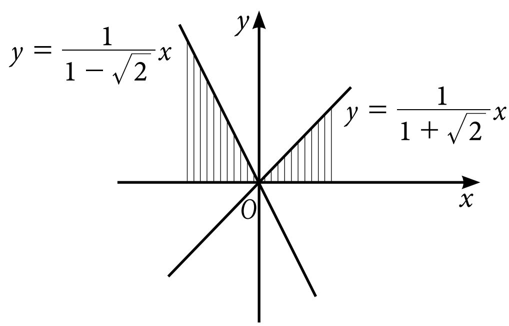

Fig. 8

Pentru $y<0$, scriem inecuațiile (2) astfel:

$$y>\frac{1}{1+\sqrt{2}}x,\ y>\frac{1}{1-\sqrt{2}}x.$$

Și mulțimea punctelor planului xOy, care verifică aceste inecuații, sunt indicate (hașurat) în fig. 9.

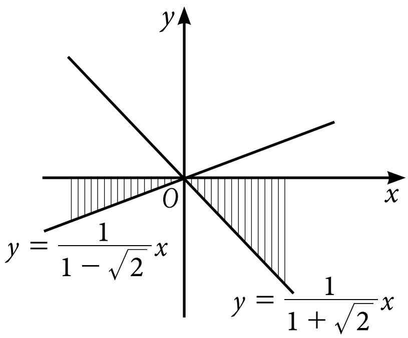

Fig. 9

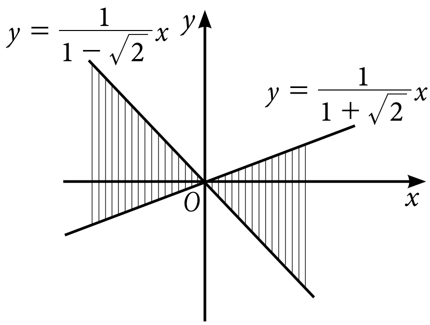

Fig. 10

Pentru $y=0$ este imposibil de a împărți ambii membri ai inecuației (1) la y^2, însă pentru $y=0$ inecuația (1) ia forma $x^2>0$, ale cărei soluții sunt orice număr real x, diferit de zero, adică soluțiile inecuației (1) reprezintă orice punct al axei Ox, afară de zero.

Unind aceste trei cazuri, obținem: mulțimea căutată este interiorul unghiurilor, care conțin axa Ox, fără laturile lor $y=\frac{1}{1+\sqrt{2}}x$ și $y=\frac{1}{1-\sqrt{2}}x$ (fig. 10).

În problemele 15–17 să determinăm locul geometric de puncte z ale planului complex pentru care:

15. $\arg z=\frac{\pi}{3}$.

Rezolvare:

Observăm că soluția problemei este raza, care începe din originea sistemului de coordonate xOy (fără punctul O) și formează cu axa Ox unghiul de $\frac{\pi}{3}$.

16. $|z+1|=|z-1|$.

Rezolvare:

Fie $z = x + yi$, atunci $z + 1 = x + yi + 1 = (x+1) + yi$,
iar $z - 1 = x + yi - 1 = (x-1) + yi$.
$|(x+1)+yi| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$; $|(x-1)+yi| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

Din condițiile problemei,
$(x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2$, $x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1$, $4x = 0$, $x = 0$.

Răspuns: axa Oy.

17. $0 \le \mathrm{Re}(\mathrm{i}z) \le 1$.

Rezolvare:

Fie $z = x + yi$, atunci $\mathrm{i}z = \mathrm{i}(x + yi) = -y + x\mathrm{i}$.

$$0 \le -y \le 1,\ -1 \le y \le 0.$$

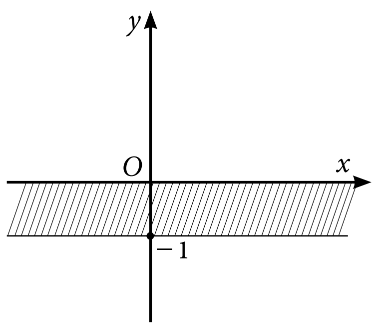

Fig. 11

Răspuns: Toate punctele situate între dreptele $y = 0$ și $y = -1$ și pe acestea.

Probleme pentru rezolvare independentă

Găsiți mulțimea de puncte z ale planului complex care verifică condiția:

1. $2 \leq |z| < 5$.

2. $\operatorname{Im}(z) \leq 3$.

3. $|z-2|-|z+2| > 3$.

4. $\operatorname{Re} z \geq a$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5. $\operatorname{Im} z < a$, unde $a \in \mathbb{R}$.

6. $0 < \operatorname{Re}(\mathrm{i}z) < 1$.

7. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$.

8. $\operatorname{Re} \dfrac{z-z_1}{z-z_2} = 0$.

9. $|z-1| = |z-\mathrm{i}|$.

10. $|z+\mathrm{i}| \leq 1$.

11. $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1$.

12. $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|} < 2$.

13. $|z-1|+|z+1| = 3$.

14. $|z+2|-|z-2| = 3$.

15. $|\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| < 1$.

16. $|z-2| = \operatorname{Re} z + 2$.

17. $1 < |z+\mathrm{i}| < 2,\ \dfrac{\pi}{4} \leq \arg z < \dfrac{\pi}{2}$.

18. $2 < |z| \leq 3,\ \dfrac{\pi}{8} < \arg z \leq \dfrac{4\pi}{3}$.

19. $|z| \leq \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$.

20. $||z| + \mathrm{i}| < 10$.

21. $1 \leq |z + \mathrm{i}| \leq 4$.

22. Găsiți mulțimea tuturor punctelor $M(x; y)$ din plan, ale căror coordonate x și y verifică condiția: numărul $z^2 + z + 1$ este real și pozitiv, unde $z = x + \mathrm{i}y$.

23. $(1 - \mathrm{i})\overline{z} = (1 + \mathrm{i})z$.

■ 2.3. Probleme de demonstrație

1. Se știe că numărul complex $z \neq \pm 1$. Să demonstrăm că numărul $\frac{z-1}{z+1}$ este pur imaginar atunci și numai atunci când $|z| = 1$.

Demonstrație:

Fie $z = a + b\mathrm{i}$. Atunci

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(a-1)+b\mathrm{i}}{(a+1)+b\mathrm{i}} = \frac{[(a-1)+b\mathrm{i}]\cdot[(a+1)-b\mathrm{i}]}{[(a+1)+b\mathrm{i}]\cdot[(a+1)-b\mathrm{i}]} = \frac{(a^2-1+b^2)+2b\mathrm{i}}{(a+1)^2+b^2}.$$

Astfel, $\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1} = \frac{a^2-1+b^2}{(a+1)^2+b^2}$,

iar $\operatorname{Im}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2b}{(a+1)^2+b^2}$.

Deci, numărul $\frac{z-1}{z+1}$ va fi pur imaginar atunci și numai atunci când

$$a^2 - 1 + b^2 = 0,\ 2b \neq 0,\ (a+1)^2 + b^2 \neq 0.$$

Dacă $b = 0$ și $a^2 - 1 + b^2 = 0$, atunci $z = a = \pm 1$, ceea ce contrazice condiția problemei. De aceea, rămâne numai condiția $a^2 - 1 + b^2 = 0$, de unde $a^2 + b^2 = 1$, adică $|z| = 1$. (q.e.d.)

2. Fie numerele complexe z_1, z_2 și z_3, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

Să demonstrăm că $\arg\dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \dfrac{1}{2}\arg\dfrac{z_2}{z_1} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Demonstrație:

Fie $z_1 = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$, $z_2 = r(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$, $z_3 = r(\cos\gamma + \mathrm{i}\sin\gamma)$.

Avem:

$$z_3 - z_2 = r[(\cos\gamma - \cos\beta) + \mathrm{i}(\sin\gamma - \sin\beta)] =$$
$$= 2r\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\left(\sin\frac{\beta+\gamma}{2} - \mathrm{i}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right).$$

a) Dacă $\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2} > 0$, atunci

$$z_3 - z_2 = 2r\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right].$$

b) Dacă $\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2} < 0$, atunci

$$z_3 - z_2 = 2r\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right].$$

În mod analog găsim:

c) Dacă $\sin\dfrac{\alpha-\gamma}{2} > 0$, atunci

$$z_3 - z_1 = 2r\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right].$$

d) Dacă $\sin\dfrac{\alpha-\gamma}{2} < 0$, atunci

$$z_3 - z_1 = 2r\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right].$$

În cazurile a), c) și b), d),

$$\arg\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}\right) - \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1},$$
$$\arg\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}.$$

În cazurile a), d),

$$\arg\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\beta + \gamma}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha + \gamma}{2}\right) = \frac{\beta - \alpha}{2} + \pi = \frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1} + \pi.$$

În cazurile b), c),

$$\arg\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta + \gamma}{2}\right) - \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha + \gamma}{2}\right) = \frac{\beta - \alpha}{2} - \pi = \frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1} - \pi.$$

(q.e.d.)

3. Fie numerele complexe z_1, z_2 și z_3. Să demonstrăm că dacă $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, atunci punctele z_1, z_2, z_3 sunt vârfurile unui triunghi echilateral, înscris în cercul unitar.

Rezolvare:

Între numerele z_1, z_2, z_3 nu sunt două egale, deoarece, presupunând că $z_1 = z_2$, obținem $2z_1 = -z_3$. Această egalitate este imposibilă, deoarece $|2z_1| = 2|z_1| = 2$, iar $|-z_3| = 1$.

Fie $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha,\ z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$,

$$z_3 = \cos\gamma + i\sin\gamma, \text{ unde } 2\pi > \alpha > \beta > \gamma \geq 0. \qquad (1)$$

Din condiția problemei $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și de aceea

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0, \\ \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0, \end{cases}. \qquad (2)$$

de unde

$$\begin{cases} 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} = -\cos\gamma, \\ 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} = -\sin\gamma. \end{cases} \qquad (3)$$

Ridicând la pătrat egalitățile (3) și adunându-le, obținem

$4\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2} = 1$ sau $2[1 + \cos(\alpha - \beta)] = 1$,

de unde $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}$.

Deoarece $0 < \alpha - \beta < 2\pi$, rezultă că $\alpha - \beta = \frac{2\pi}{3}$ sau $\alpha - \beta = \frac{4\pi}{3}$.

Fie $\alpha - \beta = \frac{2\pi}{3}$, atunci $\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

De aceea, din egalitățile (3), obținem

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} = -\cos\gamma, \\ \sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} = -\sin\gamma, \end{cases} \tag{4}$$

de unde, ținând cont de (1), avem $\frac{\alpha + \beta}{2} = \gamma + \pi$, deoarece $\frac{\alpha + \beta}{2} > \gamma$.

Deci, $\frac{\alpha + \beta}{2} = \gamma + \pi$, $\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{3}$; de aceea,

$\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} = (\gamma + \pi) - \frac{\pi}{3}$ sau $\alpha - \beta = \frac{2\pi}{3}$.

Astfel, $\alpha - \beta = \beta - \alpha = \frac{2\pi}{3}$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$; de aceea, punctele z_1, z_2, z_3 sunt vârfurile triunghiului echilateral, înscris în cercul unitar.

2) Fie $\alpha - \beta = \frac{4\pi}{3}$. Atunci $\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Astfel, din egalitățile (3), rezultă:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} = \cos\gamma, \\ \sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} = \sin\gamma. \end{cases} \tag{5}$$

Egalitățile (5) sunt posibile, considerând (1) numai pentru $\frac{\alpha + \beta}{2} = \gamma$, ceea ce contrazice inegalității $\frac{\alpha + \beta}{2} > \gamma$. De aceea, $\alpha - \beta \neq \frac{4\pi}{3}$. Astfel, este posibil numai cazul 1), când $\alpha - \beta = \frac{2\pi}{3}$.

Rezolvarea geometrică (fig. 12).

Dacă adunăm vectorii ce reprezintă numerele z_1, z_2, z_3, obținem un triunghi echilateral, fiindcă $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. În figura 11 este reprezentat cercul unitar și triunghiul echilateral, OCD, obținut prin adunarea vectorilor z_3, z_1 și z_2. Construind diametrul DOB și raza $OA \parallel CD$, obținem punctele A, B, C, care reprezintă, respectiv, numerele z_1, z_2, z_3. Ele sunt vârfurile triunghiului echilateral înscris în cercul unitar. (q.e.d.)

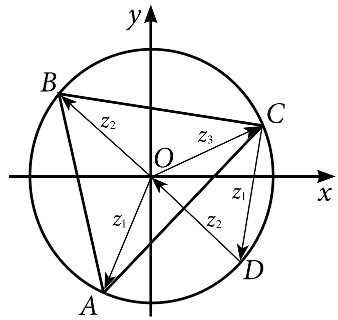

Fig. 12

4. Să demonstrăm că dacă $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$, atunci punctele z_1, z_2, z_3, z_4 sunt vârfurile unui dreptunghi sau două câte două coincid.

Demonstrație:

Metoda I. Fie $z_1 = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$, $z_2 = r(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$,

$z_3 = r(\cos\gamma + \mathrm{i}\sin\gamma)$, $z_4 = r(\cos\delta + \mathrm{i}\sin\delta)$.

Deoarece $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, rezultă că

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta = 0, \\ \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta = 0, \end{cases} \text{sau}$$

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\dfrac{\gamma+\delta}{2}\cos\alpha\dfrac{\gamma-\delta}{2} = 0, \\ 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2}\cos\alpha\dfrac{\gamma-\beta}{2} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

1) Dacă $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 0$, adică $\alpha - \beta = \pi + 2k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$, atunci și $\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2} = 0$, adică $\gamma - \delta = \pi + 2n\pi$, unde $n \in \mathbb{Z}$. Să ne convingem de justețea acestei afirmații. Admitem că pentru $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 0$ valoarea $\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2} \neq 0$. Atunci din egalitățile (1) rezultă $\cos\dfrac{\gamma+\delta}{2} = 0$ și $\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2} = 0$, ceea ce este imposibil.

Astfel, din egalitățile $\alpha - \beta = \pi + 2k\pi$ și $\gamma - \delta = \pi + 2n\pi$, considerând egalitatea modulelor, rezultă că punctele z_1, z_2, z_3, z_4 sunt vârfurile unui dreptunghi. În cazul în care $\alpha - \gamma = 2m\pi$, unde $m \in \mathbb{Z}$, obținem $\delta - \beta = 2l\pi$, unde $l \in \mathbb{Z}$, adică punctele, două câte două, coincid.

2) Dacă $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$, atunci $\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2} \neq 0$. Presupunând $\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2} = 0$, ușor demonstrăm (în mod analog cu 1), relația $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 0$.

Astfel, din (1) avem

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} = -\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2}\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2}, \\ \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} = -\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2}\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

a) Dacă $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 0$, atunci $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \neq 0$; de aceea, ambele părți ale primei egalități din sistemul (2) sunt diferite de zero. Împărțind egalitatea a doua a sistemului la prima, obținem $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma+\delta}{2}$, de unde $\alpha + \beta = \gamma + \delta + 2k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$.

b) Dacă $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \neq 0$, atunci, împărțind termen la termen egalitățile (2), obținem $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{\gamma+\delta}{2}$, deci $\alpha + \beta = \gamma + \delta + 2k\pi$.

Astfel, am demonstrat că egalitatea (3) este justă atât pentru $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 0$, cât și pentru $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \neq 0$. Ridicând la pătrat, iar apoi adunând egalitățile (2), obținem $\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \cos^2\dfrac{\gamma-\delta}{2}$, sau

$\dfrac{1}{2}[1 + \cos(\alpha-\beta)] = \dfrac{1}{2}[1 + \cos(\gamma-\delta)]$, sau

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\gamma-\delta). \tag{4}$$

Considerând (3) și (4), obținem:

1) $\begin{cases} \alpha - \beta = \gamma - \delta + 2m\pi, \\ \alpha + \beta = \gamma + \delta + 2k\pi, \end{cases}$

2) $\begin{cases} \alpha - \beta = \delta - \gamma + 2m\pi, \\ \alpha + \beta = \delta + \gamma + 2k\pi, \text{unde } m, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Prin urmare,

$\alpha = \gamma + (k+m)\pi,\ \beta = \delta + (k-m)\pi;$

$\alpha = \delta + (k+m)\pi,\ \beta = \gamma + (k-m)\pi.$

În ambele cazuri, ținând cont de aceeași paritate $(k+m)$ și $(k-m)$, observăm că punctele z_1, z_2, z_3, z_4 sunt vârfurile unui triunghi sau două câte două coincid.

Metoda II. *Rezolvarea geometrică.* Dacă adunăm vectorii corespunzători numerelor z_1, z_2, z_3, z_4, deoarece $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, obținem un patrulater închis cu laturile congruente, fiindcă $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$. Acest patrulater este un romb (fig. 13). Punctele *A, B, C, D* sunt, respectiv, imaginile numerelor z_1, z_2, z_3, z_4. În patrulaterul *ABCD* diagonalele sunt congruente, și în punctul de intersecție se împart în jumătăți. Prin urmare, *ABCD* este dreptunghi.

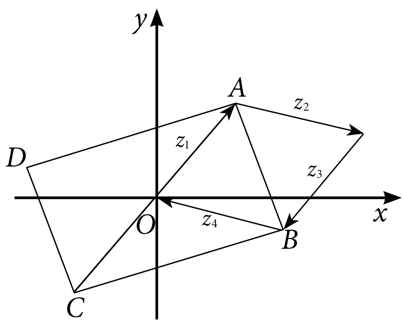

Fig. 13

Dacă însă $z_1 = z_4 = -z_2 = -z_3$, atunci punctul z_1 coincide cu z_4, iar z_2 – cu z_3.

5. Să demonstrăm că suma tuturor rădăcinilor de ordinul n (n este număr natural mai mare ca 1) din orice număr complex este egală cu zero.

Demonstrație:

Fie $z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Pentru $z = 0$ concluzia problemei este evidentă. În continuare vom considera $z \neq 0$. Notând rădăcinile de ordinul n din z prin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$, obținem

$$\alpha_{k+1} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

unde $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

Atunci $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} = \dfrac{\alpha_3}{\alpha_2} = ... = \dfrac{\alpha_n}{\alpha n - 1} = \cos\dfrac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$,

de aceea șirul $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ este o progresie geometrică cu primul termen egal cu $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\varphi}{n}\right)$ și cu rația egală cu $\left(\cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

$$S_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi\pi}{n}\right)\cdot\frac{1 - \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n}{1 - \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\right)} =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\frac{1 - (\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi)}{1 - \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\right)} = 0,$$

deoarece $1 - (\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi) = 1 - 1 = 0$,

iar $1 - \left(\cos\dfrac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}\right) \neq 0$, fiindcă $n > 1$.

6. Să demonstrăm (cu ajutorul numerelor complexe) că dacă fiecare din numerele m și n este egal cu suma pătratelor a două numere întregi, atunci produsul lor este egal cu suma pătratelor a două numere întregi.

Demonstrație:

Fie $m = a^2 + b^2$, $n = c^2 + d^2$, unde *a, b, c, d* sunt numere întregi. Atunci

$m = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})$, $n = (c + d\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})$.

De unde

$$mn = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i})(c - d\mathrm{i}) =$$
$$= [(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i})]\cdot[(a - b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})] =$$
$$= [(ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}]\cdot[(ac - bd) - (ad + bc)\mathrm{i}] =$$
$$= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Deci, afirmația problemei este justă.

Putem grupa factorii și altfel:

$$mn = [(a + bi)(c - di)] \cdot [(a - bi)(c + di)] =$$
$$= [(ac + bd) + (bc - ad)i] \cdot [(ac + bd) - (bc - ad)i] =$$
$$= (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2.$$

7. Să demonstrăm că $\frac{1}{2^{100}} \cdot \sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k} (\sqrt{3}i)^k = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

Demonstrație:
Avem

$$\frac{1}{2^{100}} \cdot \sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k} (\sqrt{3}i)^k = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{100-k} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^k = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}.$$

Însă, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

Deci,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100} = \cos\frac{100\pi}{3} + i\sin\frac{100\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} =$$
$$= -\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

8. Să demonstrăm că dacă
$F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ este un polinom de $z = x + iy$ cu coeficienții reali $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, atunci $\overline{F(z)} = F(\overline{z})$, unde $\overline{F(z)}$ și $\overline{z}$ sunt numere complexe, respectiv conjugatele numerelor $F(z)$ și z.

Demonstrație:

Metoda I.

Fie $F(z) = F(x + iy) = p + iq$, (1) unde p și q sunt numere reale. Atunci $F(\overline{z}) = F(x - iy) = p + q \cdot (-i) = p - iq$, deoarece $F(x - iy)$ se obține prin înlocuirea în polinomul $F(x + iy)$ a numărului i prin numărul $-i$. Considerând că toți coeficienții polinomului $F(z)$ sunt numere reale, avem $\overline{F(z)} = p - qi$, deci $\overline{F(z)} = F(\overline{z})$.

Metoda II.

Substituind z din membrul drept al egalității

$F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_{n-1} z + a_n$ cu expresia $x + \mathrm{i}y$ și grupând termenii care conțin puterile numărului i, ai căror exponenți sunt congruenți modulo 4, obținem:

$$F(z) = b + d \cdot \mathrm{i}^{4k+1} + e \cdot \mathrm{i}^{4k+2} + m \cdot \mathrm{i}^{4k+3} = (b - e) + (d - m)\mathrm{i}. \qquad (2)$$

Pentru a calcula $F(\overline{z})$ în egalitatea (2) înlocuim numărul i prin numărul $(-\mathrm{i})$:

$F(\overline{z}) = b + d \cdot (-\mathrm{i})^{4k+1} + e \cdot (-\mathrm{i})^{4k+2} + m \cdot (-\mathrm{i})^{4k+3} =$

$= (b - e) + (d - m)\mathrm{i} = \overline{F(z)}$, adică $\overline{F(z)} = F(\overline{z})$. (q.e.d.)

Metoda III.

Fie $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Atunci

$\overline{z} = r(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin) = r[\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi)]$.

Prin urmare, $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$,

$(\overline{z})^k = r^k[\cos\varphi(-k\varphi) + \mathrm{i}\sin(-k\varphi)] = r^k(\cos k\varphi - \mathrm{i}\sin k\varphi)$.

Astfel, $(\overline{z})^k = \overline{z^k}$. Deoarece numărul a_{n-k} este real, rezultă că $a_{n-k}(\overline{z})^k = \overline{a_{n-k} \cdot z^k}$ (pentru orice $k = 1, 2, 3, ..., n$).

Știm că $\overline{z_1 + z_2 + ... + z_m} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + ... + \overline{z_m}$.

Deci,

$$\begin{aligned} F(\overline{z}) &= a_0(\overline{z})^n + a_1(\overline{z})^{n-1} + ... + a_{n-1}\overline{z} + a_n = \\ &= \overline{a_0 z^n} + \overline{a_1 z^{n-1}} + ... + \overline{a_{n-1} z} + \overline{a_n} = \\ &= \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n} = \overline{F(z)}. \end{aligned}$$

9. Să demonstrăm că expresia $\cos(7\arccos x)$, unde $|x| \leq 1$, este un polinom de gradul al 7-lea în raport cu x.

Demonstrație:

Fie $\arccos x = \varphi$. Atunci $\cos\varphi = x$. (1)

Transformând egalitatea evidentă

$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^7 = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^7$

cu formula lui Moivre și formula lui Newton, obținem, respectiv,

$$\cos 7\varphi + \mathrm{i}\sin 7\varphi = \cos^7\varphi + 7\mathrm{i}\cos^6\varphi\sin\varphi - \\ -21\cos^5\varphi\sin^2\varphi - 35\mathrm{i}\cos^4\varphi\sin^3\varphi + 35\cos^3\varphi\sin^4\varphi + \\ +21\mathrm{i}\cos^2\varphi\sin^5\varphi - 7\cos\varphi\sin^6\varphi - \mathrm{i}\sin^7\varphi$$

și

$$\cos 7\varphi + \mathrm{i}\sin 7\varphi = (\cos^7\varphi - 21\cos^5\varphi\sin^2\varphi + \\ +35\cos^3\varphi\sin^4\varphi - 7\cos\varphi\sin^6\varphi) + \mathrm{i}(7\cos^6\varphi\sin\varphi - \\ -35\cos^4\varphi\sin^3\varphi - 21\cos^2\varphi\sin^5\varphi - \sin^7\varphi). \quad (2)$$

Din formula (2), utilizând condiția de egalitate a numerelor complexe, avem

$$\cos 7\varphi = \cos^7\varphi - 21\cos^5\varphi\sin^2\varphi + 35\cos^3\varphi\sin^4\varphi - 7\cos\varphi\sin^6\varphi,$$

sau

$$\cos 7\varphi = \cos^7\varphi - 21\cos^5\varphi(1-\cos^2\varphi) + \\ +35\cos^3\varphi(1-2\cos^2\varphi+\cos^4\varphi) - \\ -7\cos\varphi(1-3\cos^2\varphi+3\cos^4\varphi-\cos^6\varphi),$$

sau

$$\cos 7\varphi = 64\cos^7\varphi - 112\cos^5\varphi + 56\cos^3\varphi - 7\cos\varphi. \quad (3)$$

Din egalitățile (1) și (3) rezultă

$$\cos(7\arccos x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x.$$

Probleme pentru rezolvare independentă

1. Demonstrați că valorile $\sqrt{z^2 - 1}$ sunt situate pe dreapta care trece prin originea sistemului de coordonate și este paralelă cu bisectoarea unghiului triunghiului cu vârfurile în punctele $-1, 1$ și z, dusă din vârful z.

2. Demonstrați că dacă ecuația
$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, unde $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ sunt numere reale, are soluția $x = p + \mathrm{i}q$, unde $q \neq 0$, atunci ea are și soluția conjugată $x = p - \mathrm{i}q$.

3. Demonstrați că
$(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})(1 + \mathrm{i})(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \varphi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \varphi\right)\right]$.

4. Demonstrați că dacă $|z| < \frac{1}{2}$, atunci $|(1 + \mathrm{i})z^3 + \mathrm{i}z| < \frac{3}{4}$.

5. Demonstrați că:

a) $(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

b) $(\sqrt{3} - \mathrm{i})^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{6}\right)$.

6. Demonstrați că dacă $z + \frac{1}{2} = 2\cos\theta$, atunci $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\theta$.

7. Demonstrați că $\left(\frac{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1 + \mathrm{i}\cdot\mathrm{tg}n\alpha}{1 - \mathrm{i}\cdot\mathrm{tg}n\alpha}$.

8. Demonstrați că:

a) $(1 + \mathrm{i})^{8n} = 2^{4n}$, unde $n \in \mathbb{Z}$;

b) $(1 + \mathrm{i})^{4n} = (-1)^n \cdot 2^{2n}$, unde $n \in \mathbb{Z}$.

2.4. Ecuații care conțin numere complexe

1. Să rezolvăm ecuația $z^2 + \overline{z} = 0$.

Rezolvare:

Fie $z = x + yi$, atunci $z = x - yi$. Ecuația dată ia forma

$(x + yi)^2 + (x - yi) = 0$, de unde $(x^2 - y^2 + x) + (2xy - y)i = 0$.

Din condiția de egalitate a două numere complexe, avem

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0, \\ 2xy - y = 0, \end{cases} \text{echivalent cu} \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0, & (1) \\ y(2x - 1) = 0. & (2) \end{cases}$$

Din ecuația (2) rezultă că $2x - 1 = 0$ sau $y = 0$.

1) $2x - 1 = 0, x = \frac{1}{2}$. Înlocuind valoarea $x = \frac{1}{2}$ în ecuația (1), obținem

$\frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} = 0,\ y^2 = \frac{3}{4},\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Obținem $z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $y = 0$. Substituind $y = 0$ în ecuația (1), obținem

$x^2 + x = 0,\ x(x + 1) = 0$, de unde:

a) $x = 0,\ z = 0$;

b) $x = -1,\ z = -1$.

Răspuns: $z_1 = 0,\ z_2 = -1,\ z_{3,4} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Să rezolvăm ecuația $\overline{z} = -4z$.

Rezolvare:

Fie $z = x + yi$. Atunci $\overline{z} = x - yi$ și ecuația dată ia forma $x - yi = -4x - 4yi$ sau $5x + 3yi = 0$, de unde $5x = 0$,, $3y = 0$, adică $x = 0,\ y = 0$.

Obținem $z = x + yi = 0 + 0 \cdot i = 0$.

Răspuns: $z = 0$.

3. Să rezolvăm ecuația $z^2 + |z| = 0$.

Rezolvare:

Fie $z = x + y\mathrm{i}$, atunci $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\mathrm{i}$, iar $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Scriem ecuația dată astfel:

$x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} + 2xy\mathrm{i} = 0$, de aici $\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0, \\ 2xy = 0. \end{cases}$

Din ecuația a doua a sistemului obținem $x = 0$ sau $y = 0$.

1) $x = 0$. Substituind $x = 0$ în prima ecuație a sistemului, obținem

$-y^2 + |y| = 0$ sau

$|y|^2 - |y| = 0$, de unde:

a) $|y| = 1, y = \pm 1, z = \pm \mathrm{i}$;

b) $|y| = 0, y = 0, z = 0$.

2) $y = 0$. Substituind $y = 0$ în prima ecuație a sistemului, obținem

$x^2 + |x| = 0$ sau $|x|^2 + |x| = 0$,

de unde $|x| = 0$, adică $x = 0, z = 0$.

Răspuns: $z = \pm \mathrm{i}, z = 0$.

4. Să rezolvăm ecuația $(3 + 4\mathrm{i})^{x-1} - (1 + \mathrm{i})^4 = 5^x$, unde $x \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

Deoarece $(1 + \mathrm{i})^4 = [(1 + \mathrm{i})^2]^2 = (2\mathrm{i})^2 = -4$, ecuația dată ia forma $(3 + 4\mathrm{i})^{x-1} = 5^x - 4$, de unde $|(3 + 4\mathrm{i})^{x-1}| = |5^x - 4|$. Ținând cont că $|3 + 4\mathrm{i}| = \sqrt{9 + 16} = 5$ și $5^x - 4 \geq 1$, obținem ecuația $5^{x-1} = 5^x - 4$, $5^x - 5^{x-1} = 4$, $5^{x-1}(5 - 1) = 4$, $5^{x-1} = 1$, de unde $x - 1 = 0, x = 1$.

Răspuns: $\{1\}$.

5. Să rezolvăm ecuația $z|z| + az + \mathrm{i} = 0$, unde $a \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

Fie $z = x + y\mathrm{i}$, atunci $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, și ecuația dată ia forma

$(x + y\mathrm{i})\sqrt{x^2 + y^2} + a(x + y\mathrm{i}) + \mathrm{i} = 0$, de aici

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2}+ax=0, \\ y\sqrt{x^2+y^2}+ay+1=0. \end{cases}$$

Scriem prima ecuație astfel: $x(\sqrt{x^2+y^2}+a)=0$.

I. Dacă $x=0$, atunci ecuația a doua a sistemului ia forma $y|y|+ay+1=0$.

Dacă $y\geq 0$, obținem ecuația $y^2+ay+1=0$ cu soluțiile $y_{1,2}=\frac{1}{2}(-a\pm\sqrt{a^2-4})$, care sau nu există, sau sunt negative (deoarece $a\geq 0$), ceea ce contrazice condiția $y\geq 0$. Prin urmare, pentru $y\geq 0$ soluții nu există.

Când $y<0$, obținem ecuația $y^2-ay-1=0$ cu soluțiile $y_{1,2}=\frac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2+4})$.

Deoarece $a\geq 0$, rezultă că restricția $y<0$ verifică doar soluția $y_1=\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2+4})<0$.

Deci, $z=\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\mathrm{i}$.

II. Examinăm cazul: $\sqrt{x^2+y^2}+a=0$. Deoarece $a\geq 0$, rezultă că această egalitate are loc doar dacă $x=y=a=0$. Însă, în acest caz nu este verificată ecuația a doua a sistemului $y\sqrt{x^2+y^2}+ay+1=0$.

Răspuns: $z=\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\mathrm{i}$.

6. Pentru fiecare valoare reală a numărului $a\geq 1$ să rezolvăm ecuația $z+a|z+1|+\mathrm{i}=0$.

Fie $z=x+y\mathrm{i}$, atunci $z+1=(x+1)+y\mathrm{i}$, iar $|z+1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$, și ecuația ia forma $x+y\mathrm{i}+a\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\mathrm{i}=0$.

Prin urmare,

$$x+a\sqrt{(x+1)^2+y^2}+(y+1)\mathrm{i}=0,$$

de unde

$$\begin{cases} x + a\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 0, & (1) \\ y + 1 = 0. & (2) \end{cases}$$

Ecuația (2) are soluția $y = -1$.

Substituind $y = -1$ în ecuația (1), obținem

$$x + a\sqrt{(x+1)^2 + 1} = 0. \quad (3)$$

a) Dacă $a = 1$, atunci din ecuația (3) rezultă că

$x + \sqrt{(x+1)^2 + 1} = 0$, sau $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = -x > 0$,

sau $x^2 + 2x + 2 = x^2$, adică $x = -1$.

Astfel, pentru $a = 1$, $z = -1 - \mathrm{i}$.

b) Dacă $a > 1$, atunci din ecuația (3) obținem

$a\sqrt{x^2 + 2x + 2} = -x > 0$,

sau $a^2(x^2 + 2x + 2) = x^2$,

de unde

$$(a^2 - 1)x^2 + 2a^2x + 2a^2 = 0. \quad (4)$$

Pentru ca x să fie număr real, este necesar și suficient ca

$$a^4 - 2a^2(a^2 - 1) \geq 0, \quad (5)$$

de unde $a^2 \leq 2$, adică $|a| \leq \sqrt{2}$. Considerând condiția $a > 1$, avem $1 < a \leq \sqrt{2}$. De aceea, pentru orice a care verifică inegalitatea $1 < a < \sqrt{2}$, obținem soluțiile ecuației (3):

$$x_1 = \frac{-a^2 + a\sqrt{2 - a^2}}{a^2 - 1} \text{ și } x_2 = \frac{-a^2 - a\sqrt{2 - a^2}}{a^2 - 1}.$$

Deci, pentru $1 < a < \sqrt{2}$,

$$z_1 = \frac{-a^2 + a\sqrt{2 - a^2}}{a^2 - 1} - \mathrm{i},\ z_2 = \frac{-a^2 - a\sqrt{2 - a^2}}{a^2 - 1} - \mathrm{i}.$$

c) Dacă $a = \sqrt{2}$, atunci $z = -2 - \mathrm{i}$.

d) Pentru $a > \sqrt{2}$ ecuația $z + a|z+1| + \mathrm{i} = 0$ nu are soluții.

7. Să rezolvăm ecuația $2|z| - 4az + a\mathrm{i} = 0$, unde $a \geq 0$.

Rezolvare:

Fie $z = x + y\mathrm{i}$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ecuația dată ia forma

$2\sqrt{x^2+y^2} - 4ax + 1 - (4ay - a)\mathrm{i} = 0$,

de unde

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2+y^2} - 4ax + 1 = 0, & (1) \\ a(4y-1) = 0. & (2) \end{cases}$$

Dacă în ecuația (2) admitem $a = 0$, atunci din (1) rezultă $2\sqrt{x^2+y^2} + 1 = 0$, ceea ce nu este posibil pentru x și y real.

Prin urmare, din (2) reiese că $4y - 1 = 0$, adică $y = \frac{1}{4}$. (3)

Astfel, ecuația (1) ia forma $2\sqrt{x^2 + \frac{1}{16}} - 4ax + 1 = 0$, sau

$$\sqrt{16x^2+1} = 8ax - 2, \qquad (4),$$

de unde se vede ușor că $x \neq 0$. Așa cum $\sqrt{16x^2+1} > 1$,

obținem $8ax - 2 > 1$, adică

$$x > \frac{3}{8a} > 0. \qquad (5)$$

În plus, $\sqrt{16x^2+1} > 4x$, deci $8ax - 2 > 4x$ sau $(4a-2)x > 1$. Din (5) rezultă că $x > 0$, de aceea $4a - 2 > 0$, $a > \frac{1}{2}$.

Astfel, pentru $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ ecuația dată nu are soluții.

Din ecuația (4) rezultă $16x^2 + 1 = 64a^2x^2 - 32ax + 4$,

sau

$$16(4a^2-1)x^2 - 32ax + 3 = 0. \qquad (6)$$

$\Delta = 16(4a^2 + 3) > 0$ pentru orice a.

Ecuația (6) are 2 soluții pozitive:

$x_1 = \dfrac{4a - \sqrt{4a^2 + 3}}{4(4a^2 - 1)}$ și $x_2 = \dfrac{4a + \sqrt{4a^2 + 3}}{4(4a^2 - 1)}$.

Deoarece $a > \dfrac{1}{2}$, rezultă că $\sqrt{4a^2 + 3} > 2$ și

$x_1 < \dfrac{4a - 2}{4(4a^2 - 1)} = \dfrac{1}{2(2a + 1)} = \dfrac{3}{12a + 6} < \dfrac{3}{8a}$, fapt ce contrazice inegalitatea (5).

În continuare, $\sqrt{4a^2 + 3} > 2a$,, de aceea

$x_2 > \dfrac{4a + 2a}{4(4a^2 - 1)} = \dfrac{6a}{16a^2 - 4} > \dfrac{6a}{16a^2} = \dfrac{3}{8a}$.

Deci, pentru $a > \dfrac{1}{2}$ avem $x = \dfrac{4a + \sqrt{4a^2 + 3}}{4(4a^2 - 1)}$. (7)

Astfel, pentru $a > \dfrac{1}{2}$ din egalitățile (3) și (7) obținem

$z = \dfrac{4a + \sqrt{4a^2 + 3}}{4(4a^2 - 1)} + \dfrac{1}{4}\mathrm{i}$.

Răspuns: Pentru $0 \leq a \leq \dfrac{1}{2}$ ecuația dată nu are soluții; pentru $a > \dfrac{1}{2}$ ecuația are soluția $z = \dfrac{4a + \sqrt{4a^2 + 3}}{4(4a^2 - 1)} + \dfrac{1}{4}\mathrm{i}$.

8. Să rezolvăm ecuația $(z + 1)^m - (z - 1)^m = 0$, unde $m \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

Scriem ecuația dată astfel: $(z + 1)^m = (z - 1)^m$.

Din egalitatea a două numere complexe rezultă egalitatea modulelor lor. Deci, $|(z + 1)^m| = |(z - 1)^m|$ sau $|z + 1|^m = |z - 1|^m$,

sau $|z + 1| = |z - 1|$. (1)

Fie $z = x + y\mathrm{i}$. Considerând (1), obținem

$|x + 1 + y\mathrm{i}|^2 = |x - 1 + y\mathrm{i}|^2$, sau $(x + 1)^2 + y^2 = (x - 1)^2 + y^2$,

de unde $x = 0$, deci $z = y\mathrm{i}$.

Astfel, ecuația dată se reduce la forma

$$(1 + y\mathrm{i})^m = (-1 + y\mathrm{i})^m. \tag{2}$$

Scriem numerele complexe $1 + y\mathrm{i}$ și $-1 + y\mathrm{i}$ în forma trigonometrică:

$1 + y\mathrm{i} = \sqrt{1 + y^2}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$,

$-1 + y\mathrm{i} = \sqrt{1 + y^2}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$,

unde

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}, \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}},$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}, \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}. \tag{3}$$

Din aceste egalități rezultă că $\theta = \pi - \varphi$. De aceea, ecuația (2) o scriem astfel:

$(\sqrt{1 + y^2})^m(\cos m\varphi + \mathrm{i}\sin m\varphi) =$

$= (\sqrt{1 + y^2})^m(\cos m(\pi - \varphi) + \mathrm{i}\sin m(\pi - \varphi))$,

de unde $\cos m\varphi + \mathrm{i}\sin m\varphi = \cos m(\pi - \varphi) + \mathrm{i}\sin m(\pi - \varphi)$.

Deci, $m\varphi = m(\pi - \varphi) + 2k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$, adică

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m}. \tag{4}$$

În formula (4) pentru valoarea dată a lui m, considerăm doar valorile lui k, pentru care

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} > 0. \tag{5}$$

1) Din egalitățile (3) și (4) avem:

$$\sqrt{1+y^2} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1}{-\sin\dfrac{k\pi}{m}}, \text{ sau}$$

$$1+y^2 = \operatorname{cosec}^2\frac{k\pi}{m}, \text{ sau } y^2 = \operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{m}, \text{ adică}$$

$$|y| = \left|\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}\right|, \tag{5}$$

unde $k = 1, 2, 3, ..., (m-1)$, deoarece

$$0 < \frac{k\pi}{m} < \pi. \tag{6}$$

2) $\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \cos\dfrac{k\pi}{m}$, de aici rezultă că $\cos\dfrac{k\pi}{m}$ și y au aceleași semne. Prin urmare, în baza condițiilor (5) și (6), $-\operatorname{ctg}\dfrac{k\pi}{m}$ și y au aceleași semne, $y = -\operatorname{ctg}\dfrac{k\pi}{m}$; de aceea $z = y\mathrm{i} = -\mathrm{i}\operatorname{ctg}\dfrac{k\pi}{m}$, unde $k = 1, 2, 3, ..., (m-1)$.

Răspuns:

$\mathrm{i}\operatorname{ctg}\dfrac{k\pi}{m}$, unde $k = 1, 2, 3, ..., (m-1)$.

9. Să rezolvăm ecuația $z^2 - (1+\mathrm{i})z + 6 + 3\mathrm{i} = 0$.

Rezolvare:

$$z = \frac{(1+\mathrm{i}) \pm \sqrt{(1+\mathrm{i})^2 - 4(6+3\mathrm{i})}}{2} = \frac{(1+\mathrm{i}) \pm \sqrt{-24-10\mathrm{i}}}{2} =$$

$$= \frac{(1+\mathrm{i}) \pm \sqrt{24+10\mathrm{i}}}{2} = \frac{(1+\mathrm{i}) \pm \mathrm{i}(5+\mathrm{i})}{2};$$

$$z_1 = \frac{1+\mathrm{i}+5\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2} = \frac{6\mathrm{i}}{2} = 3\mathrm{i};$$

$$z_2 = \frac{1+\mathrm{i}-5\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2} = \frac{2-4\mathrm{i}}{2} = 1-2\mathrm{i}.$$

Răspuns:

$3\mathrm{i}, 1-2\mathrm{i}$.

10. Să determinăm perechile $(x; y)$ din plan pentru care $|\sqrt{x^2+3}+\mathrm{i}\sqrt{y-1}| = 3.$

Rezolvare:

Ecuația $|\sqrt{x^2+3}+\mathrm{i}\sqrt{y-1}| = 3$ este echivalentă cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+3}+\mathrm{i}\sqrt{y-1}=3\\ \sqrt{x^2+3}+\mathrm{i}\sqrt{y-1}=-3\end{array}\right. \text{ sau } \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+3}-3+\mathrm{i}\sqrt{y-1}=0\\ \sqrt{x^2+3}+3+\mathrm{i}\sqrt{y-1}=0.\end{array}\right. \qquad (1)$$

Din prima ecuație a totalității (1) rezultă sistemul

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+3}-3=0,\\ \sqrt{y-1}=0,\end{cases} <=> \begin{cases}x^2=6,\\ y=1.\end{cases}$$

Obținem $x=\pm\sqrt{6}$; $y=1$, adică soluțiile

$(\sqrt{6};1)$ și $(-\sqrt{6};1)$.

Din ecuația a doua a totalității (1) rezultă sistemul

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+3=0,\\ \sqrt{y-1}=0.\end{cases}$$

Prima ecuație a acestui sistem nu are soluții, deci nici sistemul nu are soluții.

Răspuns: $(\sqrt{6};1),(-\sqrt{6};1)$.

Probleme pentru rezolvare independentă

1. Rezolvați ecuația:

a) $x^3 = 8$; b) $x^3 = -8$; c) $x^4 = 2$;

d) $z^2 = \overline{z}$; e) $\overline{z} = z^2 - 2z + 2$; f) $z^2 = 1 + i$;

g) $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$; h) $z^3 = 1 - i$; i) $z^3 = i$;

j) $z^4 - 1 - i = 0$; k) $z^4 - 1 - i\sqrt{3} = 0$; l) $z^6 = 1 - i$;

m) $z^6 - i = 0$; n) $|z| - 2z = -1 - 8i$; o) $|z| - 3z = 1 - 12i$;

p) $2z = |z| + 2i$.

2. Rezolvați ecuația:

a) $(2 + i)z^2 - (5 - i)z + 2 - 2i = 0$;

b) $|z| - iz = 1 - 2i$;

c) $z^2 = (\overline{z})^3$;

d) $(x + y)^2 + 6 + ix = 5(x + y) + i(y + 1)$, unde $x; y \in \mathbb{R}$.

e) $|z| - 2z = -1 - 8i$;

f) $|z| - 3z = -1 - 12i$.

3. Rezolvați ecuația:

a) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$;

b) $z^2 - (2i - 7)z + 13 - i = 0$;

c) $(z + 1)^n + (z - 1)^n = 0$;

d) $(z + i)^n + (z - i)^n = 0$.

4. Să se determine perechile $(x; y)$ din plan pentru care:

a) $\left|\sqrt{x + y} + i\sqrt{x - 2y}\right| = 1$;

b) $\left|\sqrt{3x - 2y} - i\sqrt{x + 3y}\right| = 5$.

5. Pentru fiecare valoare reală a parametrului a, $a \geq 1$, găsiți toate numerele complexe z care verifică ecuația $z + a|z + 1| + \mathrm{i} = 0$.

6. Pentru care valori reale ale parametrului a cel puțin un număr complex $z = x + \mathrm{i}y$ care satisface ecuația $|z + \sqrt{2}| = a^2 - 3a + 2$ verifică concomitent și inecuația $|z + \sqrt{2}| < a^2$?

7. Pentru care valori reale ale parametrului a cel puțin un număr complex $z = x + \mathrm{i}y$ care satisface ecuația $|z - ai| = a + 4$ verifică concomitent și inecuația $|z - 2| < 1$?

8. Găsiți numărul complex z cu cel mai mic modul care verifică ecuația $|z - 2 + 2\mathrm{i}| = 1$.

9. Rezolvați ecuația $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$.

Răspuns: $z = 1, z = \mathrm{i}, z = -\mathrm{i}$.

2.5. Sisteme de ecuații

1. Să rezolvăm sistemul de ecuații

$$\begin{cases} ix - 2y = -i, \\ (1+i)x - (1-2i)y = 3+i. \end{cases}$$

Rezolvare:

Din prima ecuație $y = \dfrac{ix+i}{2} = \dfrac{i(x+1)}{2}$. Înlocuind în ecuația a doua a sistemului, obținem $(1+i)x - (1-2i)\cdot\dfrac{i(x+1)}{2} = 3+i$,

sau $2x(1+i) - (1-2i)(ix+i) = 6+2i$,

$(2+2i)x - (1-2i)x\cdot i - i(1-2i) = 6+2i$,

$(2+2i)x - x(i+2) - i - 2 = 6+2i$,

$xi = 8+3i$,

$x = \dfrac{8+3i}{i} = \dfrac{i(8+3i)}{i^2} = \dfrac{8i-3}{-1} = 3-8i.$

Deci, $x = 3-8i,$, $y = \dfrac{i(3-8i)+i}{2} = 4+2i.$

Răspuns: $(3-8i; 4+2i)$.

2. Să rezolvăm sistemul

$\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i, \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i \end{cases}$, unde z_1 și z_2 sunt numere complexe.

Rezolvare:

Din prima ecuație a sistemului $z_1 = \dfrac{(2+i)z_2 - i}{2}$.

Înlocuind în ecuația a doua z_1, obținem

$(4-2i)\cdot\dfrac{(2+i)z_2 - i}{2} - 5z_2 = -1-2i,$

$(2-\mathrm{i})[(2+\mathrm{i})z_2-\mathrm{i}]-5z_2=-1-2\mathrm{i},$

$5z_2-\mathrm{i}(2-\mathrm{i})-5z_2=-1-2\mathrm{i}.$

$0\cdot z_2=0,$ de unde z_2 este orice număr complex. Deci, soluțiile sistemului vor fi $z_1=\dfrac{(2+\mathrm{i})z_2-\mathrm{i}}{2}$, unde $z_2\in\mathbb{C}$.

3. Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases}(1+\mathrm{i})z_1+(1-\mathrm{i})z_2=1+\mathrm{i},\\(1-\mathrm{i})z_1+(1+\mathrm{i})z_2=1+3\mathrm{i},\end{cases}$$

unde z_1 și z_2 sunt numere complexe.

Rezolvare:

Înmulțim prima ecuație a sistemului cu $1+\mathrm{i}$, iar a doua ecuație – cu $-(1-\mathrm{i})$:

$$\begin{cases}(1+\mathrm{i})^2z_1+(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})z_2=(1+\mathrm{i})^2,\\-(1-\mathrm{i})^2z_1-(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})z_2=-(1-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i}),\end{cases}$$

$$\begin{cases}2iz_1+2z_2=2i,\\2iz_1-2z_2=-(4+2\mathrm{i}).\end{cases}$$

$4\mathrm{i}z_1=2\mathrm{i}-4-2\mathrm{i},$

$4\mathrm{i}z_1=-4,\ \mathrm{i}z_1=-1,\ z_1=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=\mathrm{i}.$ $z_1=\mathrm{i}$, iar

$$z_2=\frac{(1+\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})z_1}{1-\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}.$$

Răspuns: $z_1=\mathrm{i},\ z_2=1+\mathrm{i}.$

Probleme pentru rezolvare independentă

Rezolvați sistemele de ecuații (z_1 și z_2 sunt numere complexe):

1. $\begin{cases} (1-\mathrm{i})x-(1+\mathrm{i})y=-1+\mathrm{i}, \\ (-2+2\mathrm{i})x-2y=-4. \end{cases}$

Răspuns: $x=\mathrm{i}$, $y=1-\mathrm{i}$.

2. $\begin{cases} \mathrm{i}z_1+(1+\mathrm{i})z_2=2+2\mathrm{i}, \\ 2\mathrm{i}z_1+(3+2\mathrm{i})z_2=5+3\mathrm{i}. \end{cases}$

Răspuns: $z_1=2$, $z_2=1-\mathrm{i}$.

3. $\begin{cases} (1-\mathrm{i})z_1-3z_2=-\mathrm{i}, \\ 2z_1-(3+3\mathrm{i})z_2=3-\mathrm{i}. \end{cases}$

Răspuns: $\varnothing$.

4. $\begin{cases} z_1^{13}\cdot z_2^{19}=1, \\ z_1^{5}\cdot z_2^{7}=1, \\ z_1^{2}+z_2^{2}=-2. \end{cases}$

Răspuns: $(\mathrm{i};\mathrm{i});(-\mathrm{i};-\mathrm{i})$.

Cuprins

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

Lupu, Ilie

Metodologia studierii numerelor complexe / Ilie Lupu. –
Ch.: Prut Internațional, 2015 (F.E.-P. „Tipografia Centrală"). – 84 p.

ISBN 978-9975-54-205-0
CZU 511.4
L 95

Corector: *Nina Artin*
Copertă: *Adrian Grosu*
Paginare computerizată: *Dumitru Nicuță*

Editura *Prut Internațional*, str. Alba Iulia nr. 23, bl. 1A,
Chișinău, MD 2051
Tel./fax: (022) 74 93 18; tel.: (022) 75 18 74; e-mail: editura@prut.ro

Imprimat la F.E.-P. *Tipografia Centrală*. Comanda nr. 6179

CZU 511.4
L 95
ISBN 978-9975-54-205-0