Universitatea de Stat din Tiraspol

Catedra Algebra, Geometrie si Topologie

Laurenţiu Calmuţchi

METODOLOGIA REZOLVĂRII PROBLEMELOR CU PARAMETRI

Chişinău 2016

C.Z.U.: 37.016.046:512.6

C 14

Lucrarea a fost recomandată pentru tipar de Senatul Universităţii de Stat din Tiraspol: proces verbal nr. 10 din 09 iunie 2015.

Recenzenţi:

Andrei Hariton, doctor în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar,
Universitatea de Stat din Tiraspol

Valeriu Bordan, doctor în ştiinţe fizico-matematice, conferenţiar universitar,
Universitatea de Stat din Tiraspol

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

Metodologia rezolvării problemelor cu parametri / ***Laurenţiu Calmuţchi;*** Univ. de Stat din Tiraspol. Catedra Algebră, Geometrie şi Topologie.
- Chişinău: US Tiraspol, 2016. – 284 p. 200 ex.
Bibliografia. p. 277-278. (16 titluri)
ISBN 978-9975-76-155-0

C.Z.U.: 37.016.046:512.6

C 14

Tiparul:

ISBN 978-9975-76--155-0

Cuvînt înainte

Problemele cu parametri reprezintă un test de control al nivelului de cultură matematică și care dau răspuns la întrebarea dacă există sau nu există această cultură. Studierea legităților fizice, chimice, economice și a multor altor legități deseori se reduc la rezolvarea problemelor cu parametri, la cercetarea proceselor în dependență de anumiți parametri.

În lucrarea dată sunt clasificate unele tipuri de ecuaţii, inecuaţii şi sisteme de ecuaţii şi inecuaţii cu parametri. Aceste probleme pot fi rezolvate cu elevii în cadrul orelor de matematică, la cursurile facultative sau la şedinţele cercurilor de matematică. Pe parcursul rezolvării problemelor cu parametri permanent este necesar de alcătuit pentru sine o schemă logică a problemei rezolvate. Deaceia, astfel de probleme reprezintă un mijloc de neînlocuit pentru antrenarea gîndirii logice. Rezolvarea acestor probleme permite inţelegerea mai profundă a problemelor obişnuite, iar cunostinţele obţinute vor permite aplicarea acestora în continuare.

În manualele actuale de matematică se întâlnesc un număr insuficient de probleme cu parametri, deşi la examenele de bacalaureat în fiecare an se propun astfel de probleme. Deseori însăşi profesorii şcolari ocolesc aceste probleme din cauză că şi ei întâlnesc unele greutăţi în procesul rezolvării ecuaţiilor sau inecuaţiilor de acest tip.

În problemarul dat sunt cercetate metodele principale și unele idei de rezolvare a problemelor cu parametri.

Problemarul conține cele mai importante teme a cursului școlar de matematică: trinomul pătrat, funcții, grafice, ecuații și inecuații raționale și iraționale, ecuații și inecuații exponențiale, logaritmice și trigonometrice. În unele cazuri sunt lăsate unele etape intermediare ale rezolvării, pe care cel care rezolvă să le restabilească de sinestătător.

Activând un timp îndelungat profesor de matematică în şcoala medie, în colegiu, fiind conducător al practicii pedagogice timp îndelungat, participând mai mulţi ani la cursurile de reciclare a profesorilor de matematică, am selectat mai multe exerciţii care pot fi de folos studenţilor, tinerilor profesori de matematică şi tuturor celor pasionaţi de această ştiinţă.

În lucrare la fiecare din temele cercetate sunt rezolvate probleme diferite şi totodată la fiecare temă sunt propuse un anumit număr de probleme pentru lucrul independent.

Voi fi foarte bucuros, dacă această lucrare o să Vă ajute mai încrezut să folosiţi în toate domeniile de încercări la matematică şi să ieşiţi din ele învingător. Lucrarea dată este una din cele mai apropiate sufletului meu, este rodul muncii mele de zeci de ani şi este consacrată celor mai scumpe fiinţe din lume, părinţilor mei, mamei Elena şi tatălui Nicu Calmuţchi, care au trecut în nefiinţă.

CUPRINS

Cuvînt înainte 3
Cuprins 5
§1. Ecuaţii echivalente 6
§2. Ecuaţii cu parametri 20
§3. Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii algebrice şi iraţionale 28
§4. Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii exponenţiale şi logaritmice.. 106
§5. Ecuaţii trigonometrice şi sisteme de ecuaţii trigonometrice 136
§6. Inecuaţii echivalente.. 170
§7. Inecuaţii algebrice, iraţionale şi sisteme de inecuaţii 207
§8. Inecuaţii şi sisteme de inecuaţii exponenţiale şi logaritmice 213
§9. Inecuaţii şi sisteme de inecuaţii trigonometrice 235
§10. Introducerea parametrului la rezolvarea ecuaţiilor 247
§11. O metodă de schimbare a parametrilor la rezolvarea problemelor 251
§12. Probleme cu parametri 254
Bibliografie 276
Universitatea de Stat din Tiraspol – prina instituţie de învăţământ superior din Republica Moldova......................... 278

§1Ecuaţii echivalente

Două ecuaţii $f_1(x) = g_1(x)$ şi $f_2(x) = g_2(x)$ se numesc echivalente, dacă ambele n-au soluţii sau dacă soluţiile lor coincid. Prin urmare, pentru a rezolva o ecuaţie se poate de rezolvat o altă ecuaţieechivalentă cu cea dată. Noţiunea de echivalenţă a ecuaţiilor posedă proprietatea de tranzitivitate: dacă ecuaţia $f_1(x) = g_1(x)$ este echivalentă cu ecuaţia $f_2(x) = = g_2(x)$, iar ecuaţia $f_2(x) = g_2(x)$ este echivalentă cu ecuaţia $f_3(x) = g_3(x)$, atunci ecuaţia $f_1(x) = g_1(x)$ este echivalentă cu ecuaţia $f_3(x) = g_3(x)$. Înlocuirea unei ecuaţii cu o ecuaţie echivalentă, sau înlocuirea unei ecuaţii cu o totalitate de ecuaţii echivalente cu ecuaţia dată vom numi-o trecere echivalentă.

Exemplul 1. 1. Ecuaţia $x = 9$ este echivalentă cu ecuaţia $\sqrt{x} = 3$, deoarece numărul 9 este rădăcină a fiecărei din aceste două ecuaţii şi nici una din aceste ecuaţii nu admite alte rădăcini.

Exemplul 1. 2. Ecuaţiile $x(x + 5) = 0$ şi $x(x - 3)(x + 5) = 0$ nu sunt echivalente, deoarece numărul 3 este rădăcină a unei ecuaţii, dar nu este rădăcină a celeilalte ecuaţii. În definiţia echivalenţei a două ecuaţii nu se spune nimic despre mulţimea valorilor admisibile (MVA) a acestor ecuaţii. Astfel, din Exemplul 1. 1 se vede că ecuaţiile echivalente pot avea diferite mulţimi de valori admisibile. Ecuaţia $x = 9$ are în calitate de valori admisibile mulţimea tuturor numerelor reale, pe cînd ecuaţia $\sqrt{x} = 3$ - mulţimea numerelor reale nenegative.

Exemplul 1. 2 ne demonstrează că deşi MVA ale ambelor ecuaţii coincid (mulţimea numerelor reale) totuşi ecuaţiile pot să nu fie echivalente. La rezolvarea ecuaţiilor deseori în loc de echivalenţa ecuaţiilor se foloseşte noţiunea de echivalenţă a ecuaţiilor pe o mulţime: două ecuaţii se numesc echivalente pe o anumită mulţime M, dacă coincid mulţimile rădăcinilor acestor ecuaţii pe mulţimea M, sau dacă pe această mulţime ambele n-au soluţii. Două ecuaţii pot să nu fie echivalente, dar pot fi echivalente pe o anumită mulţime.

Exemplul 1. 3. Ecuaţiile $x - 2 = 0$ şi $|x| = 2$ sunt echivalente pe mulţimea numerelor reale pozitive, dar nu sunt echivalente pe mulţimea numerelor reale.

O ecuaţie este echivalentă cu o totalitate de ecuaţii pe o mulţime M, dacă mulţimea tuturor rădăcinilor acestei ecuaţii ce aparţin mulţimii M coincide cu mulţimea tuturor soluţiilor totalităţii de ecuaţii ce aparţin mulţimii M.

Exemplul 1. 4. Este oare ecuaţia

$$(x^2 + x + 1)(5x + 4)(-7x + 2)(3x - \sqrt{5}) = 0$$

echivalentă cu totalitatea de ecuaţii:

$$\left[\begin{array}{l} 5x + 4 = 0, \\ -7x + 2 = 0, \\ 3x - \sqrt{5} = 0. \end{array}\right.$$

pe mulţimea numerelor reale?

Rezolvare. Deoarece $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, atunci pentru orice x avem că $x^2 + x + 1 > 0$. Prin urmare, ecuaţia iniţială este echivalentă cu ecuaţia

$$(5x + 4)(-7x + 2)(3x - \sqrt{5}) = 0.$$

Fiecare rădăcină a acestei ecuaţii transformă în zero măcar unul din binoamele factori, adică este rădăcină măcar a unei ecuaţii din totalitate. Evident, orice rădăcină a totalităţii este şi rădăcină a ecuaţiei date. Aşadar, ecuaţia dată este echivalentă cu totalitatea dată pe mulţimea numerelor reale.

Exemplul 1. 5. Este oare ecuaţia $3\log_3|-x| = \log_3 x^2$ echivalentă cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-1=0 \\ \quad x=0 \end{array}\right.$$

pe mulţimea de valori admisibile a ecuaţiei date?

Rezolvare. Evident, MVA a ecuaţiei date este mulţimea $R/\{0\}$. Pe această mulţime totalitatea dată are două rădăcini: $x=1$ şi $x=-1$. Aceste două numere, şi numai ele, sunt rădăcini ale ecuaţiei iniţiale. Prin urmare, ecuaţia dată şi totalitatea dată sunt echivalente pe MVA a ecuaţiei date.

Dacă pentru perechea dată de ecuaţii $f_1(x) = g_1(x)$ şi $f_2(x) =$ $= g_2(x)$ orice rădăcină a primei ecuaţii este şi rădăcină a ecuaţiei a doua, atunci ecuaţia a doua se numeşte consecinţă (urmare) a primei ecuaţii şi se notează:

$f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$.

Dacă înlocuim ecuaţia cu o consecinţă a ei, atunci mulţimea soluţiilor ecuaţiei a doua va conţine toate rădăcinile ecuaţiei iniţiale şi înafară de ele mai poate să conţină şi alte numere, numite rădăcini străine a ecuaţiei iniţiale. De aceea, dacă în procesul rezolvării se trece de la ecuaţie la o consecinţă a ei, atunci la sfîrşit trebuie de verificat care din rădăcinile obţinute satisfac ecuaţiei date. Aşa de exemplu $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^4-1} \Rightarrow$ $x^2-1 = x^4-1$.

Rezolvând cea de a doua ecuaţie determinăm $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, dar $x=0$ nu e rădăcină a primei ecuaţii. Acest exemplu ne arată că rădăcina străină $x_2=0$ a apărut datorită faptului că MVA a ecuaţiei a doua s-a lărgit faţă de MVA a primei ecuaţii. Să menţionăm că la trecerea de la ecuaţie la consecinţa ei nu întotdeauna se lărgeşte MVA (vezi Exemplu 1.2). Procesul de rezolvare a unei ecuaţii, de regulă, constă în înlocuirea ecuaţiei cu o ecuaţie mai simplă sau prin înlocuirea ei cu o totalitate de ecuaţii(inecuaţii). Efectuînd unele transformări în una sau în ambele părţi ale ecuaţiei obţinem o nouă ecuaţie cu care o înlocuim pe cea iniţială. Vom arăta că unele şi aceleaşi transformări ale ecuaţiei pot aduce atît la o ecuaţie echivalentă, cît şi la o ecuaţie neechivalentă cu ecuaţia dată.

Exemplul 1. 6. Ecuaţia:

$$21-3x+\frac{18}{7-x}-\frac{18}{7-x}=14-2x$$

după reducerea termenilor asemenea în partea stîngă se înlocuieşte cu ecuaţia $21-3x=14-2x$, ultima însă, nu este echivalentă cu ecuaţia iniţială, deoarece $x=7$ este unica soluţie a ecuaţiei $21-3x=14-2x$, dar $x=7$ nu este rădăcină a ecuaţiei iniţiale.

Exemplul 1. 7. Ecuaţia:

$$8x-5+\frac{17}{x-9}-\frac{17}{x-9}=13-10x$$

după reducerea termenilor asemenea se înlocuieşte cu ecuaţia $8x-5=13-10x$, care este echivalentă cu ecuaţia iniţială. Întradevăr, numărul 1 este unica rădăcină atît a ecuaţiei $8x-5=13-10x$, cît şi a ecuaţiei iniţiale.

Exemplul 1. 8. Ecuaţia:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

după simplificarea prin $x-1$ se înlocuieşte cu ecuaţia $x+1=2$ care nu este echivalentă cu ecuaţia iniţială. Întradevăr , numarul 1 este unica rădăcină a ecuaţiei consecinţă $x+1=2$, dar nu este rădăcină a ecuaţiei iniţiale.

Exemplul 1. 9. Ecuaţia:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=5$$

după simplificarea prin $x-1$ se înlocuieşte cu ecuaţia $x+1=5$, echivalentă cu ecuaţia iniţială. Întradevăr, numărul 4 este unica rădăcină atît a ecuaţiei $x+1=5$, cît şi a ecuaţiei iniţiale.

Exemplul 1. 10. Ecuaţia:

$$10-2x=3x-5$$

după ridicarea ambelor părţi la pătrat se înlocuieşte cu ecuaţia $(10-2x)^2=(3x-5)^2 \Leftrightarrow x^2+2x-15=0$.

Observăm că ecuaţia $x^2+2x-15=0$ nu este echivalentă cu ecuaţia iniţială, deoarece una din rădăcinile ecuaţiei x^2+2x- $-15=0$, şi anume $x=-5$, nu este rădăcină a euaţiei iniţiale.

Exemplul 1. 11. Ecuaţia $\sqrt{x+5}=\sqrt{2-x}$ după ridicarea ambelor părţi la pătrat se înlocuieşte cu ecuaţia $x+5=2-x$, echivalentă cu cea iniţială.

Într-adevăr, $x=-\frac{3}{2}$ este unica rădăcină atît a ecuaţiei $x+5=$ $=2-x$, cît şi a celei iniţiale.

Unele afirmaţii despre echivalenţa ecuaţiilor:

1. Ecuaţiile $f(x)=g(x)$ şi $f(x)-g(x)=0$ sunt echivalente.
2. Ecuaţiile $f(x)=g(x)$ şi $f(x)+\alpha=g(x)+\alpha$ sunt echivalente pentru orice α.
3. Ecuaţiile $f(x)=g(x)$ şi $\alpha f(x)= \alpha g(x)$ sunt echivalente pentru orice $\alpha \neq 0$.
4. Ecuaţiile $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ $(a>0, a\neq 1)$ şi $f(x)=g(x)$ sunt echivalente.

5. Fie funcţiile $y = f(x)$ şi $y = g(x)$ sunt nenegative pe careva mulţime M. Atunci pe mulţimea M ecuaţiile $f(x) = g(x)$ şi $f^n(x) = g^n(x)$ $(n \in N)$ sunt echivalente.
6. Fie funcţiile $y = f(x)$ şi $y = g(x)$ primesc valori pozitive pe careva mulţime M. Atunci, pe mulţimea M ecuaţiile $\log_a f(x) = \log_a g(x) (a > 0, a \neq 1)$ şi $f(x) = g(x)$ sunt echivalente. În particular, dacă $b > 0$, atunci ecuaţiile $a^{h(x)} = b$ şi $h(x) = log_a b$ sunt echivalente.
7.Fie funcţia $y = \varphi(x)$ este definită şi nu primeşte valoarea zero în nici un punct din mulţimea M ce aparţine mulţimii valorilor admisibile ale ecuaţiei $f(x) = g(x)$. Atunci, pe mulţimea M ecuaţiile $f(x) = g(x)$ şi $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ sunt echivalente. Mulţimea M poate şi să coincidă cu mulţimea valorilor admisibile a ecuaţiei $f(x) = g(x)$.
Afirmaţii despre consecinţe:
1. Ecuaţia $f^{2n}(x) = g^{2n}(x)$ $(n \in N)$ este consecinţă a ecuaţiei $f(x) = g(x)$.
2. Ecuaţia $f(x) = g(x)$ este consecinţă a ecuaţiei $\log_a f(x) = \log_a g(x) (a > 0, a \neq 1)$.
3. Ecuaţia $f(x) = g(x)\varphi(x)$este consecinţă a ecuaţiei$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = g(x)$.
4. Ecuaţia $f(x) = g(x)$ este consecinţă a ecuaţiei $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$.
5. Toalitatea $\left[\begin{matrix} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{matrix}\right.$ este consecinţă a ecuaţiei $f(x) \cdot g(x) = 0$.

Exemplul 1. 12. Sunt oare ecuaţiile

$2x - 7 + \frac{17}{x-10} = 3 + x + \frac{17}{x-10}$ şi $2x - 7 = 3 + x$ echivalente?

Rezolvare. Observăm că a doua ecuaţie se primeşte din prima ecuaţie dacă adăugăm în ambele părţi ale acesteia expresia $\frac{17}{x-10}$, care nu este determinată pentru $x = 10$. Aceasta înseamnă că numărul 10 nu poate fi rădăcină a ecuaţiei a doua. Prin urmare, aceste două ecuaţii nu sunt echivalente.

Exemplul 1. 13. Sunt oare echivalente ecuaţiile

$\frac{2(x-10)}{x^2-13x+30} = 1$ şi $x^2 - 15x + 50 = 0$?

Rezolvare. Rezolvăm prima ecuaţie. Înmulţim ambele părţi ale acestei ecuaţii la expresia $x^2 - 13x + 30$ şi în rezultat obţinem $2(x - 10) = x^2 - 13x + 30$. Rădăcinile ultimei ecuaţii sunt $x_1 = 5$ şi $x_2 = 10$. În rezultatul transformării efectuate puteau să apară rădăcini străine şi deci, e necesar de a efectua verificarea. Uşor ne convingem că $x_2 = 10$ este rădăcină străină şi prin urmare, prima ecuaţie are doar o singură rădăcină $x = 5$. Ecuaţia $x^2 - 15x + 50 = 0$ are două rădăcini: $x_1 = 5$ şi $x_2 = 10$. Aşadar, ecuaţia a doua este consecinţă a primei ecuaţii.

Exemplul 1. 14. Sunt oare ecuaţiile $\sqrt{3x^2 - 5x + 7} = \sqrt{x - 4}$ şi $x^2 + 2x - 10 = 2x - 1$ echivalente?

Rezolvare. Observăm că rădăcinile ecuaţiei a doua sunt numerele 3 şi -3. Observăm deasemenea că nici 3 şi nici -3 nu aparţin MVA a primei ecuaţii. Prin urmare, aceste două ecuaţii nu sunt echivalente.

Exemplul 1. 15. Sunt oare echivalente ecuaţiile:

$2\sqrt{x + 5} = x + 2$ şi $4(x + 5) = (x + 2)^2$?

Rezolvare. Mulţimea rădăcinilor ecuaţiei a doua sunt numerele 4 şi -4. Observăm însă, că numărul -4 nu este rădăcină a primei ecuaţii şi deci, aceste ecuaţii nu sunt echivalente. Totodată observăm că -4 satisface condiţiei $x \geq -5$, adică intră în MVA a primei ecuaţii. Prin urmare, aceste ecuaţii nu sunt echivalente pe MVA a primei ecuaţii. Se observă că aceste ecuaţii sunt echivalente , de exemplu, pe mulţimea $x \geq -2$, deoarece pe această mulţime numărul 4 este unica rădăcină atît a primei ecuaţii cît şi a celei de a doua.

Exemplul 1. 16. Sunt oare echivalente ecuaţiile $\lg(x^2-4) = \lg(4x-7)$ şi $x^2 - 4 = 4x - 7$?

Rezolvare. Ecuaţia a doua arerădăcinile $x_1 = 1$ şi $x_2 = 3$. Observăm însă, că numărul 1 nu este soluţie a primei ecuaţii şi deci, aceste două ecuaţii nu sunt echivalente. Acest exemplu ne arată, că trecerea de la ecuaţia $\log_a f(x) = \log_a g(x) (a > 0, a \neq 1)$ la ecuaţia $f(x) = g(x)$, în genere, nu aduce la o ecuaţie echivalentă, dar aduce doar la o consecinţă şi deci, efectuînd potenţierea trebuie de făcut şi verificarea. Ecuaţia $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ este echivalentă cu ecuaţia $f(x) = g(x)$ doar pe MVA a ecuaţiei $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Prin urmare, ecuaţia $\lg(x^2-4) = \lg(4x-7)$ şi $x^2 - 4 = 4x - 7$ sunt echivalente doar pe MVA a primei ecuaţii, adică pe mulţimea $x > 2$.

Exemplul 1. 17. Sunt oare ecuaţiile

$tg2x - ctgx = 0$ şi $\frac{2tgx}{1-tg^2x} - \frac{1}{tgx} = 0$

echivalente?

Rezolvare. Mulţimea tuturor soluţiilorprimei ecuaţii constă din trei mulţimi de soluţii:$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z;\ x_m = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in Z;\ x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z$. Observăm că soluţiile $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ nu sunt soluţii pentru ecuaţia a doua. Aşadar, aceste două ecuaţii nu sunt echivalente. Aceste două ecuaţii nu sunt echivalente pe MVA a primei ecuaţii, dar sunt echivalente pe MVA a celei de a doua ecuaţii.

Exemplul 1. 18. Să rezolvăm ecuaţia:

$$\sqrt{x^2(x-1)} = |x|$$

Rezolvare:

Metoda I. MVA a ecuaţii date se determină prin condiţia $x^2(x-1) \geq 0$, adică reprezintă $x = 0$ şi $x \geq 1$. Împărţim MVA în două părţi: $x = 0$ şi $x \geq 1$. Dacă $x = 0$ ecuaţia iniţială se transformă într-o egalitate numerică adevărată. Prin urmare, $x = 0$ este rădăcină a ecuaţiei date. Dacă $x \geq 1$, atunci $|x| = x$ şi $\sqrt{x^2(x-1)} = x\sqrt{x-1}$. Aşa dar, în acest caz ecuaţia iniţială are forma $x\sqrt{x-1} = x$. Putem împărţi ambele părţi la x şi obţinem $\sqrt{x-1} = 1$ sau $x = 2$. Reuniunea soluţiilor determinate pe ambele părţi ale MVA a ecuaţiei date $x_1 = 0$ şi $x_2 = 2$ şi sunt rădăcinile ei.

Metoda II. Ecuaţia $\sqrt{\alpha(x)} = \beta(x)$ este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} \beta(x) \geq 0, \\ \alpha(x) = \beta^2(x) \end{cases}$.

Conform definiţiei, modulul numărului este nenegativ, dar atunci:

$$\sqrt{x^2(x-1)} = |x| \Leftrightarrow x^2(x-1) = x^2 \Leftrightarrow x^2(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Metoda III. Deoarece $f(x) = g(x) \Rightarrow f^2(x) = g^2(x)$, atunci:

$$\sqrt{x^2(x-1)} = |x| \Leftrightarrow x^2(x-1) = x^2 \Leftrightarrow x^2(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

În procesul rezolvării am folosit trecerea la consencinţă şi deci trebuie de făcut verificarea. Înlocuim $x = 0$ şi $x = 2$ în ecuaţia iniţială şi ne convingem că ambele sunt rădăcini ale ecuaţiei date.

Exemplu 1. 19. Să rezolvăm ecuaţia:

$$\sqrt{x-2}(x^2 - 4x + 3) = 0$$

Rezolvare:

Metoda I. Ecuaţia $f^2(x) = 0$ este consecinţă a ecuaţiei $f(x) = 0$. Prin urmare,

$$\sqrt{x-2}(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2 - 4x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)^2(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Deoarece am folosit trecerea la consecinţă trebuie de efectuat verificarea. Verificarea arată că $x = 2$ şi $x = 3$ sunt rădăcinile ecuaţiei date.

Metoda II. Având în vedere că totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$$

este consecinţă a ecuaţiei $f(x)g(x) = 0$, avem:

$$\left[\begin{array}{c} \sqrt{x-2} = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Prin verificare ne convingem că $x = 2$ şi $x = 3$ sunt rădăcinile ecuaţiei date.

Metoda III. MVA pentru ecuaţia dată este determinată de condiţia $x \geq 2$.

Prin urmare,

$$\sqrt{x-2}(x^2-4x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}=0 \\ x^2-4x+3=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3. \end{array}\right.$$

Aşadar, $x=2$ şi $x=3$ sunt rădăcinile ecuaţiei date.

Exerciţii propuse pentru lucrul independent.

1. Sunt oare echivalente ecuaţiile?

1)$x^2=x^3$şi $x=1$;

2) $x^2=1$ şi $\sqrt{x}=1$;

3)$x+2=0$ şi $(x^2+1)(x+2)=0$;

4) $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}=1$şi $\sqrt{x^2}=1$;

5)$x^2+2x+1=0$ şi $x+1=0$;

6) $\sqrt{x}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$ şi $\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{2}$;

7) $\frac{x-2}{x^2-5x+6}=1$ şi $x-2=x^2-5x+6$;

8)$\frac{1}{x(x+1)}+x^4-\frac{1}{x(x+1)}=x^2$ şi $x^2=x^4$;

9)$4x+1-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-3}=11-x$ şi $4x+1=11-x$;

10)$(2x+1)\sqrt{2x^2+5}=(3x-1)\sqrt{2x^2+5}$ şi $2x+1=3x-1$;

11) $(3x-2)\sqrt{1-x}=(6-x)\sqrt{1-x}$ şi $3x-2=6-x$;

12) $(x^2-1)(x+2)=0$ şi $x^2-1=0$;

13) $(x^2-4)(x-2)=0$ şi $x^2-4=0$;

14) $x-1=5-2x$ şi $(x-1)^2=(5-2x)^2$;

15)$|x-3|=|1-x|$ şi $(x-3)^2=(1-x)^2$;

16) $\sqrt{x-2}(x^2+3)=4x\sqrt{x-2}$ şi $x^2+3=4x$;

17) $3^{\log_3 x}=x^2$ şi $x^2=x$;

18) $\log_2 x(x+1)=1$ şi $\log_2 x+\log_2(x+1)=1$;

19)$\log_{x^2}(x-4)^2=1$ şi $\log_x(x-4)$;

20) $\log_2 x^2 = 1$ şi $2\log_2 x = 1$;
21)$\log_2 x^3 = 0$ şi $3\log_2 x = 0$;
22) $x - 2 = 0$ şi $(x-2)2^{\log_2\left(\frac{1}{8}-x\right)}$;
23) $x^2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$şi $x^2 = 1$;
24) $\log_2(x^2 - 6) = \log_2(4x - 9)$ şi $x^2 - 6 = 4x - 9$;
25) $sinx = cosx$ şi $sin^2x = cos^2x$;
26) $|sinx| = |cosx|$ şi $sin^2x = cos^2x$.

II. Sunt oare echivalente pe mulţimea numerelor întregi, următoarele ecuaţii?

1) $\frac{2x-3}{x-1} = \frac{5-2x}{x-1}$ şi $2x - 3 = 5 - 2x$;
2)$(3-x)(x-1) = (x+2)(x-1)$ şi $3 - x = x + 2$;
3)$\frac{x^2-1}{x+1} = -2$ şi $x - 1 = 2$;
4)$\frac{x^2-9}{x+3} = 6 + 2x$ şi $x - 3 = 6 + 2x$.

III. Sunt oare echivalente pe mulţimea numerelor raţionale, următoarele ecuaţii?

1) $\frac{x^2-4}{x-2} = 4$ şi $x + 2 = 4$;
2) $\frac{x^2-1}{x-1} = 5$ şi $x + 1 = 5$;
3)$\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} - \sqrt{2} = 1$ şi $x = 1$;
4) $x^3 = \frac{9x^2}{x}$ şi $x^3 = 9x$.

IV. Sunt oare echivalente pe mulţimea numerelor reale, următoarele ecuaţii?

1. $2x - 5 + \frac{1}{x-4} = 4 - x + \frac{1}{x-4}$ şi $2x - 5 = 4 - x$;
2. $x + 12 + \sqrt{x} = 18 - x + \sqrt{x}$ şi $x + |x| = 18 - x$;
3. $\frac{2x-5}{x^2+4} = 0$ şi $2x - 5 = 0$;

4. $\frac{x^2+5x+5}{x+3} = 0$ şi $x^2 + 5x + 6 = 0$;

5. $\log_2(x^2 - x) = \frac{1}{2}\log_2 x$ şi $x^2 - x = 2$;

6. $\log_2(x^2 + 2x + 3) = 1$ şi $x^2 + 2x + 3 = 2$;

7. $\log_2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$ şi $\log_2(x + \sqrt{3}) +$
$+\log_2(x - \sqrt{3}) = 0$

8. $\log_2(x^2 - 3) = 0$ şi $\log_2|x + \sqrt{3}| + \log_2|x - \sqrt{3}| = 0$

V. Care din cele două ecuaţii este consecinţă a celeilalte?

1. $3 - \frac{4-x}{x-2} = \frac{18}{2-x}$ şi $3(x - 2) - (4 - x) = -18$;
2. $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x-1}{x+3}$ şi $(x - 3)(x + 3) = (x + 1)(x - 1)$;
3. $\frac{x+2}{x-1} = \frac{x-2}{x-2}$ şi $(x + 2)(x - 2) = (x - 1)(x - 2)$;
4. $\frac{x-1}{x} = \frac{x-2}{x-1}$ şi $(x - 1)^2 = x(x - 2)$;
5. $\log_3 x^2 = 2$ şi $2\log_3(-x) = 2$;
6. $\log_2 x^3 = 3$ şi $3\log_3 x = 3$;
7. $\log_3 x^4 = 4$ şi $4\log_3 x = 4$;
8. $\sqrt{x - 2}\sqrt{2x + 3} = 3$ şi $\sqrt{2x^2 - x - 6} = 3$;
9. $x^2 - x - 1 = 1$ şi $\log_2(x^2 - x - 1) = \log_2 1$;
10. $\log_2(x2 + 2x + 2) = \log_2 1$ şi $x^2 + 2x + 2 = 1$;
11. $3\log_2(-x) + \log_2 x^2$ şi $-x^3 = x^2$;
12. $\sqrt{(x - 1)^2(x - 3)} = x - 1$ şi $|x - 1|\sqrt{x - 3} = x - 1$;
13. $\sqrt{x + 2} = x + 1$ şi $x + 2 = (x + 1)^2$;
14. $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}(x^3 - 4x) = 0$ şi $x^3 - 4x = 0$;
15. $x + \log_2 x + \log_2 \frac{1}{x} = 1$ şi $x^3 - 1 = 0$;
16. $\log_2(x^2 + 3x + 2) = \log_2(x + 1)$ şi$x^2 + 3x + 2 = x +$
1;

17. $\log_2 x(x+9) + \log_2 \frac{x+9}{x}$ şi $2log_2|x+9| = 0$;

18. $\frac{tg\ 2x}{\cos\ 2x} = 0$ şi $tg2x = 0$;

19. $\sqrt{cos^2 x} = 1$ şi $|cos\,x| = 1$;

20. $\sqrt{sin^2 x} = 1$ şi $|sin\,x| = 1$;

21. $\frac{sin\ 2x}{cos\ 3xcos\ \ 5x} = 0$ şi $sin\,2x = 0$.

Răspunsuri:

1. 1) nu; 2) nu; 3) da; 4) nu; 5) da; 6) nu; 7) nu; 8) nu; 9) da; 10) da; 11) nu; 12) nu; 13)da; 14) nu; 15) da; 16) nu; 17) nu; 18) nu; 19) nu; 20) nu; 21) da; 22) nu;
23) nu; 24) nu; 25) da.

2. 1) da; 2) nu; 3) nu; 4) da.

3. 1) nu; 2) da; 3) da; 4) nu.

4. 1) da; 2) da; 3) da; 4) nu; 5) da; 6) da; 7) nu; 8) nu.

5. 1)⇔; 2)⇔; 3)⇒; 4)⇔; 5)⇐; 6)⇔; 7)⇐;
8)⇒; 9)⇐; 10)⇔; 11)⇒; 12)⇔; 13)⇒;
14) nici una nu este consencinţă a celeilalte
15)⇔;16)⇒;17)⇔;18)⇔;19)⇔;20)⇐;21)⇒.

§2. Ecuaţii cu parametri

Fie dată ecuaţia $F(x,t)=0$ (1).

Dacă se pune problema de determinat toate perechile (x,t) care satisfac ecuaţiei date, atunci ecuaţia (1) reprezintă o ecuaţie cu două variabile x şi t.

Exemplul 2. 1. De determinat toate perechile (x,t), care satisfac ecuaţiei

$2x-7t=0.$

Rezolvare. $(2x-7t=0) \Leftrightarrow (2x=7t) \Leftrightarrow \left(x=\frac{7}{2}t\right)$.

Aşa dar ecuaţia dată este satisfăcută de toate perechile, $\left(\frac{7}{2}t,t\right)$ unde $t \in R$.

Aceste perechi în sistemul *xot* sunt coordonatele punctelor dreptei $x=\frac{7}{2}t$ (fig. 1).

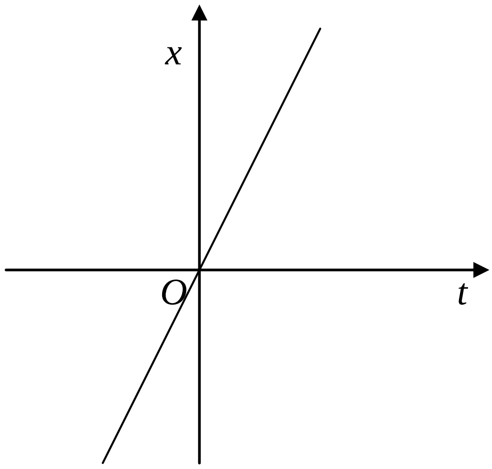


Fig. 1

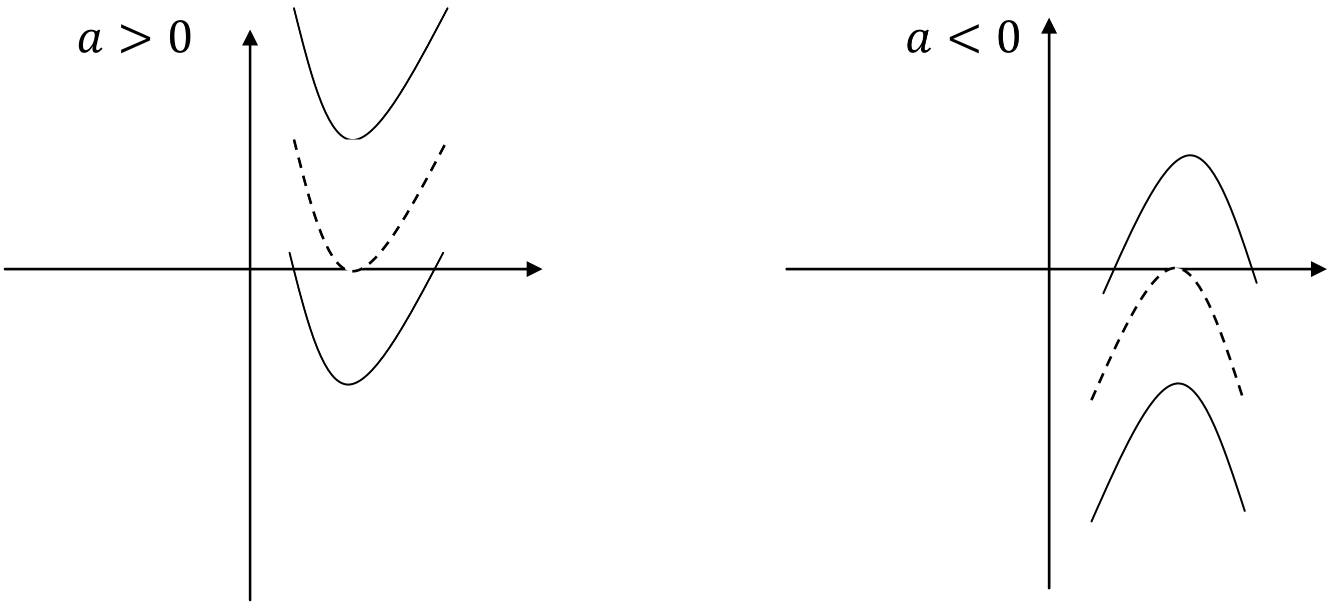
Se poate însă pune problema şi în alt mod. Aşa de exemplu, se poate de dat variabilei t o anumită valoare fixată şi atunci ecuaţia (1) poate fi privită ca o ecuaţie cu o singură variabilă x, însă soluţiile acestei ecuaţii depind de valorile fixate pentru t. Dacă se pune problema ca pentru fiecare valoare t din careva mulţime numerică A de rezolvat ecuaţia (1) în raport cu x, atunci ecuaţia (1) se numeşte ecuaţie cu o singură variabilă x şi cu un parametru t, iar mulţimea A se numeşte domeniul de variaţie a parametrului t.

Convenim ca în această lucrare ecuaţia (1) să fie privită nu ca o ecuaţie cu două variabile, dar ca o ecuaţie cu o singură variabilă x şi un parametru t.

Ecuaţia (1), în aşa caz, reprezintă înscrierea prescurtată a unei familii (totalităţi) de ecuaţii, care se primesc din ecuaţia (1) pentru diferite valori numerice concrete a parametrului t.
Coeficienţii din ecuaţii(inecuaţii) de pe lîngă necunoscute sau termenii liberi exprimaţi nu prin valori numerice concrete, dar notaţi prin litere se numesc *parametri*.
În matematică avem un exemplu frumos de ecuaţie cu parametri, bine cunoscut de elevi din clasa a VIII-a. Aceasta este ecuaţia trinomului patrat: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$. În dependenţă de coeficienţii a, b, c şi discriminantul $D = b^2 - -4ac$, graficul acestei ecuaţii poate avea diferite poziţii pe planul de coordonate (Fig. 2).

$$y = ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

$a > 0$ $a < 0$



$D = 0$ (o rădăcină)$D < 0$ (nu-s rădăcini)$D > 0$ (două rădăcini)

Fig. 2

Exemplul 2. 2. Fie dată ecuaţia

$$3t(t-5)x = t + 2 \qquad (1).$$

Să presupunem că domeniul de valori a parametrului este mulţimea $A = \{-2; 0; 1; 2; 5; 8\}$. Atunci ecuaţia (1) reprezintă înscrierea prescurtată a următoarei totalităţi de ecuaţii:

$$\left[\begin{array}{c} 42x = 0, \text{pentru } t = -2, \\ 0x = 2, \text{pentru } t = 0, \\ -12x = 3, \text{pentru } t = 1, \\ -9x = 2, \text{pentru } t = 2, \\ 0x = 7, \text{pentru } t = 5, \\ 72x = 10, \text{pentru } t = 8 \end{array}\right.$$

Ne învoim ca în viitor prin domeniu de valori a parametrului (dacă nu se indică special) să înţelegem mulţimea tuturor numerelor reale, iar problema rezolvării ecuaţiei cu parametru vom formula în felul următor: a rezolva ecuaţia (1) cu parametrul t înseamnă a rezolva pe mulţimea numerelor reale totalitatea ecuaţiilor care se obţin din ecuaţia (1) pentru diferite valori a parametrului t.

Din faptul că fiecare ecuaţie cu parametri reprezintă de obicei o familie infinită de ecuaţii şi este imposibil de a o scrie ne vom stărui să determinăm unele valori „speciale” ale parametrului. Aceste valori ale parametrului le vom numi valori de control. Aceste valori de control sunt aşa valori în care, sau trecînd prin care, se schimbă calitativ ecuaţia. Pentru a înţelege ce înseamnă valoare de control vom aduce următorul exemplu:

Exemplul 2. 3. Fie dată ecuaţia

$$(t-5)x^2 + (2t^2 - 4)x - (7t - 3) = 0 \qquad (1).$$

În cazul dat valoarea de control a parametrului este $t = 5$, deoarece pentru $t = 5$ ecuaţia (1) este o ecuaţie liniară, iar pentru $t \neq 5$ ecuaţia (1) este o ecuaţie pătrată. În aceasta şi consta schimbarea calitativă a ecuaţiei (1) la trecerea prin valoarea $t = 5$.

Mai concret la această întrebare ne vom opri la rezolvarea a unor ecuaţii concrete. Să menţionăm doar că atît la rezolvarea ecuaţiilor cu parametri, cît şi a inecuaţiilor cu parametri valorile de control a parametrilor joacă un rol deosebit. Să subliniem faptul că la rezolvarea ecuaţiilor şi inecuaţiilor este necesar de a cerceta absolut toate valorile posibile ale parametrilor. Dacă ecuaţia (inecuaţia) nu este cercetată măcar pentru o valoare a parametrului, atunci rezolvarea ecuaţiei (inecuaţiei) se consideră incompletă.

Priceperile și deprinderile de a rezolva probleme cu parametri servesc un criteriu de cunoaștere profundă a matematicii. Mulți elevi (chiar și profesori) nici nu încearcă să rezolve astfel de probleme, fiind încrezuți că oricum nimic nu se va primi. De multe ori însă pentru a rezolva probleme cu parametri este doar suficient de a folosi „gîndirea sănătoasă".

Să determinăm acele valori ale parametrului $a < 1$ pentru care soluțiile inecuației $x^2 - (a + 1)x + a \leq 0$ formează un segment, lungimea căruia este mai mare ca 3.

Ce să facem? Cum să rezolvăm? După cum s-a spus mai sus, trebuie să folosim „gîndirea sănătoasă". Dacă în calitate de parametrul a în problema dată ar fi fost un careva număr concret, de exemplu -4, atunci inecuația inițială ar fi avut forma $x^2 + 3x - 4 \leq 0$. Astfel de inecuații noi le rezolvăm destul de ușor. Într-adevăr, determinăm rădăcinile ecuației $x^2 + 3x - 4 == 0$, anume $x_1 = -4, x_2 = 1$ și transformăm inecuația inițială la forma $(x + 4)(x - 1) \leq 0$. Pentru a rezolva ultima inecuație folosim cunoscuta metodă a intervalelor și obținem $x \in [-4; 1]$. Lungimea acestui segment este egală cu 5 și prin urmare, numărul -4 satisface condiția problemei. Să procedăm acum după aceeași schemă și în cazul general, cu parametrul variabil a. Determinăm rădăcinile polinomului $x^2-(a+1)x+a$, pentru aceasta rezolvăm ecuația x^2- $-(a+1)x+a=0$. Discriminantul acestei ecuații $D=$ $=(a+1)^2-4a=(a-1)^2$ și deci $x_{1,2}=\frac{a+1\pm(a-1)}{2}$, atunci $x_1=a$ și $x_2=1$. Prin urmare inecuația inițială poate fi scrisă sub forma $(x-a)(x-1)\leq 0$. După condiția problemei $a<1$ și folosind iarăși metoda intervalelor, obținem că soluția acestei inecuații este segmentul $[a;1]$. Lungimea acestui segment este egală cu $1-a$ și condiția problemei se satisface pentru $1-a>3$, adică pentru $a<-2$.

Această rezolvare nu este chiar așa de simplă, dar nici foarte complicată și o considerăm accesibilă pentru majoritatea doritorilor de a rezolva astfel de probleme.

La rezolvarea problemelor cu parametri se cere o atenție deosebită și o analiză profundă. În procesul rezolvării acestora urmează a fi rezolvate corect trei probleme principale:

- o regulă specială de a scrie răspunsul,
- determinarea mulțimii valorilor admisibile,
- determinarea domeniului de aplicare a formulelor.

Pentru fiecare valoare a parametrului sau parametrilor de arătat dacă problema are soluție și dacă are, atunci de determinat toate soluțiile. Dacă măcar pentru o valoare a parametrului sau pentru un ansamblu de valori a parametrilor din înscrierea răspunsului nu se vede dacă problema are soluții sau nu, ori nu este clar cum arată soluția, atunci cercetarea dată nu este completă.

Exemplul 2. 4. Rezolvați ecuația $ax=b$.

Răspuns. $\emptyset$, dacă $a = 0, b \neq 0; x \in R$,dacă $a = 0, b = 0$; $\frac{b}{a}$ dacă $a \neq 0$.

Exemplul 2. 5. Rezolvați ecuația $(a^2 - 9)x = (a-1)(a+3)$.

Răspuns. $x \in R$, dacă $a = -3$; $\emptyset$,dacă $a = 3$; $\frac{a-1}{a-3}$, dacă $a \neq -3,\ a \neq 3$.

Exemplul 2. 6. Rezolvați ecuația $ax + by = k$.

Răspuns. (α, β), dacă $a = b = k = 0;\emptyset$, dacă $a = b = 0, k \neq 0$; $\left(\alpha, \frac{(k-\alpha a)}{b}\right)$, dacă $b \neq 0$; $\left(\frac{k-\beta b}{a}, \beta\right)$, dacă $a \neq 0$, unde $\alpha, \beta \epsilon R$.

Exemplul 2. 7. Rezolvați inecuația $ax < b$.

Răspuns.$\emptyset$, dacă $a = 0, b \leq 0$; $x \in R$, dacă $a = 0, b > 0$; $\left(-\infty, \frac{b}{a}\right)$, dacă $a > 0$; $\left(\frac{b}{a}, +\infty\right)$, dacă $a < 0$.

Exemplul 2. 8. Rezolvați inecuația $\log_a x > \log_a 5$.

Răspuns.$\emptyset$, dacă $a < 0$ sau $a = 1$;

$(0, 5)$ pentru $0 < a < 1$;

$(5, +\infty)$ pentru $a > 1$.

La rezolvarea ecuațiilor obișnuite determinarea mulțimii valorilor admisibile nu este obligatorie. În ecuațiile cu parametri însă, de obicei, este necesară, iar de multe ori determinarea mulțimii soluțiilor admisibile ne dă soluția problemei.

Exemplul 2. 9. Rezolvați ecuația $\frac{a}{\sqrt{x}+7} = \sqrt{x} - 7$.

Rezolvare. Evident, $x \geq 0$ și ecuația dată este echivalentă cu ecuația $a = x - 49$; $x = a + 49$; $a + 49 \geq 0$.

Răspuns. $\emptyset$, pentru $a < -49$; $a + 49$ pentru $a \geq -49$.

Să menționăm că o greșeală tipică la rezolvarea exemplelor de tipul ultimului exemplu constă în faptul că nu se ține cont de domeniul valorilor admisibile ale ecuației. În cazul dat, de obicei mulți elevi dau răspunsul $x = a + 49$. Însă pentru $a < -49$ valoarea parametrului x nu satisface ecuației date.

Exemplul 2. 10. Pentru ce valori a parametrului a ecuația $2ax^2 - 4(a+1)x + 4a + 1 = 0$ are o singură rădăcină.

Rezolvare. Pentru $a = 0$ obținem o ecuație liniară $-4x + +1 = 0$, care are o singură rădăcină $x = \frac{1}{4}$. Pentru $a \neq 0$ obținem o ecuație pătrată care are o singură soluție dacă discriminantul ei este egal cu zero, dacă $4(a+1)^2 - -2a(4a+1) = 0$, $2a^2 - 3a - 2 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = 2$.

Răspuns. $\left\{0; -\frac{1}{2}; 2\right\}$.

Greșeala tipică rezolvând astfel de probleme constă în pierderea rădăcinilor, în cazul dat rădăcina 0. Greșeala constă în faptul că rezolvarea se reduce doar la determinarea condițiilor pentru care discriminantul D este egal cu zero. Însă formulele $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$ de aflare a rădăcinilor ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ pot fi folosite doar în cazul când $a \neq 0$, adică numai atunci când ecuația este pătrată. Din această cauză pentru a folosi formulele pentru rădăcinile ecuației pătrate este necesar de a determina acele valori ale parametrului, pentru care coeficientul de pe lângă parametrul variabilei este diferit de zero.

În literatura actuală se întîlnesc diferite probleme cu parametri. Noi considerăm că încercările de ai învăţa pe elevi a rezolva probleme, dacă le demonstrăm cele unsprezece cazuri posibile de poziţie reciprocă a două parabole pe plan, şaptesprezece metode de rezolvare ale inecuaţiilor iraţionale şi altele, atunci în cele din urmă ne convingem că aceasta este echivalent cu faptul să învăţăm elevii a cînta la sacsafon după fotografiile muzicanţilor. Evident, dacă nu cunoşti metodele de rezolvare a anumitor probleme nu poate fi vorba de mari succese. Cunoaşterea acestor metode este doar un minim necesar, dar nu suficient. Deseori elevul nu dispune de timp să se gîndească la ce tip de probleme se referă problema dată. Metodele necesare trebuie să fie înfăptuite ca un mers natural, ca un rezultat de pregătire practică, dar nu ca o recetă din cartea de culinărie. Necătînd la aceasta vom formula cîteva cerinţe (sfaturi) pe care elevii trebuie să le cunoască neapărat.

1. Nu uitaţi Teorema lui Viete.
2. Nu uitaţi de metoda grafică de rezolvare a problemelor. În problemele în care necunoscutele sau parametrii se conţin sub semnul modulului sau radicalului, metoda grafică deseori este mai eficientă.
3. Nu uita: $\sqrt{a^2} = |a|$, $\log_a x^2 = 2\log_a |x|$.
4. Nu împărţi la zero.
5. Nu extrage rădăcina de ordin par din numere negative.
6. Nu calculaţi logaritmul din numere nepozitive.
7. Nu calculaţi $\arcsin x$ şi $\arccos x$ pentru $|x| > 1$.

§3. Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii algebrice şi iraţionale

Exemplul 3. 1. De rezolvat ecuaţia
$\frac{ax-1}{x-1}+\frac{b}{x+1}=\frac{a\left(x^2+1\right)}{x^2-1}$.

Rezolvare. Trecem toţi termenii de aceiaşi parte şi aducem la numitorul comun, obţinem:
$\frac{(ax-1)(x+1)+b(x-1)-a\left(x^2+1\right)}{x^2-1}=0, \frac{ax+bx-x-1-b-a}{x^2-1}=0,$
$\frac{(a+b-1)x-a-b-1}{x^2-1}=0,$
$(a+b-1)x=a+b+1.$
Această ecuaţie este o consecinţă a celei iniţiale. Dacă $a+b-$ $-1=0$, adică $a+b=1$, atunci această ecuaţie n-are soluţii. Prin urmare, pentru $a+b=1$ n-are soluţie nici ecuaţia iniţială. Dacă însă $a+b\neq 1$, atunci din ecuaţia $(a+b-1)x=a+$ $b+1$, obţinem: $x=\frac{a+b+1}{a+b-1}$
Apare întrebarea: Va fi oare această soluţie şi soluţie a ecuaţiei iniţiale? Observăm că aceasta va fi soluţie a ecuaţiei iniţiale dacă $\frac{a+b+1}{a+b-1}\neq \pm 1$, deoarece pentru $x=\pm 1$ termenii din ecuaţia iniţială pierd sensul. Observăm că $\frac{a+b+1}{a+b-1}$ nu poate fi egală cu 1, deoarece în caz contrar am obţine $1=-1$. Egalitatea $\frac{a+b+1}{a+b-1}=$ $=-1$ are loc dacă $a+b+1=-(a+b)+1$, $2(a+b)=0$, $a+b=0$.
Răspuns. Dacă, $a+b\neq 1$, atunci ecuaţia are o singură soluţie $x=\frac{a+b+1}{a+b-1}$; dacă $a+b=1$ sau $a+b=0$, atunci ecuaţia n-are soluţii.

Exemplul 3. 2. De rezolvat ecuaţia
$3t(t-5)x=t-5(1).$

Rezolvare. În cazul dat valorile de control a parametrului t sunt acele valori pentru care coeficientul pe lîngă x se transformă în zero, adică $t = 0$ şi $t = 5$. Pentru aceste valori a parametrului nu se poate de împărţit ambele părţi ale ecuaţiei (1) la coeficientul de pe lîngă x, pe cînd pentru $t \neq 0$ şi $t \neq 5$ această împărţire este posibilă. Prin urmare, se cere a fi cercetată ecuaţia (1) pentru următoarele valori ale parametrului:

1) $t = 0$; 2) $t = 5$; 3) $\begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq 5 \end{cases}$

Pentru $\boldsymbol{t = 0}$ ecuaţia $(\mathbf{1})$ are forma $\mathbf{0 \cdot \boldsymbol{x} = -5}$. Această ecuaţie n-are rădăcini.

Pentru $\boldsymbol{t = 5}$ ecuaţia $(\mathbf{1})$ are forma $\mathbf{0 \cdot \boldsymbol{x} = 0}$. Orice număr real este rădăcină a acestei ecuaţii.

Pentru $\boldsymbol{t \neq 0}$ şi $\boldsymbol{t \neq 5}$ din ecuaţia $(\mathbf{1})$ obţinem $\boldsymbol{x = \frac{t-5}{3t(t-5)}}$ sau $\boldsymbol{x = \frac{1}{3t}}$.

Răspuns:

1) Dacă $t = 0$ ecuaţia (1) n-are rădăcini.

2) Dacă $t = 5$, orice număr real este soluţie a ecuaţiei (1).

3) Dacă $t \neq 0$, $t \neq 5$, atunci $x = \frac{1}{3t}$.

Exemplul 3. 3. De rezolvat ecuaţia

$(a^3 - a^2 - 4a + 4)x = a - 1$ (2).

Rezolvare. Descompunem coeficientul de pe lîngă x în factori liniari şi obţinem:

$\big(a^2(a-1) - 4(a-1)\big)x = a - 1sau(a-1)(a-2)$
$\cdot (a+2)x = a - 1$.

Evident, valorile de control sunt: $a = 1$, $a = 2$, $a = -2$.

1. Pentru $a = 1$ ecuaţia are forma $0 \cdot x = 0$. Orice număr real este rădăcină a acestei ecuaţii.

2. Pentru $a = 2$ ecuaţia are forma $0 \cdot x = 1$. Această ecuaţie n-are soluţii.

3. Pentru $a = -2$ ecuaţia are forma $0 \cdot x = -3$.
Această ecuaţie de asemenea n-are soluţii.

4. Dacă $a \neq 1$, $a \neq 2$, $a \neq -2$ din ecuaţia primim

$x = \frac{a-1}{(a-1)(a+2)(a-2)}$ sau $x = \frac{1}{(a+2)(a-2)}$.

Răspuns. $x \in R$, dacă $a = 1$. Pentru $a = \pm 2$ ecuaţia n-are soluţii. Pentru $a \neq 1$, $a \neq 2$, $a \neq -2$; $x = \frac{1}{a^2-4}$.

Exemplul 3. 4. De rezolvat ecuaţia

$(t-1)^2 + 2(2t+1)x + 4t + 3 = 0$ (1).

Rezolvare.

În cazul dat prima valoare de control a parametrului este valoarea $t = 1$, deoarece pentru $t = 1$ ecuaţia (1) este liniară, iar pentru $t \neq 1$ ecuaţia (1) este ecuaţie pătrată. Aşa dar, vom cerceta două cazuri: $t = 1$ şi $t \neq 1$.

1. Pentru $t = 1$ ecuaţia (1) are forma:

$6x + 7 = 0$şi deci $x = -\frac{7}{6}$.

2. În cazul $t \neq 1$ determinăm acele valori ale parametrului pentru care discriminantul ecuaţiei (1) se transformă în zero, deoarece dacă discriminantul D primeşte valoarea zero pentru careva $t = t_0$ şi la trecerea prin acest punct îşi schimbă semnul (de exemplu, $D < 0$ pentru $t < t_0$ şi, $D > 0$ pentru $t > t_0$), atunci la trecerea prin punctul $t = t_0$ se schimbă numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei pătrate (în cazul dat pentru $t < t_0$ ecuaţia n-are rădăcini, iar pentru $t > t_0$ ecuaţia are două rădăcini). Din această cauză valorile parametrului, pentru care $D = 0$, de asemenea sunt valori de control. Alcătuim discriminantul D al ecuaţiei (1):

$D = 4(2t+1)^2 - 4(t-1)(4t+3)$ sau $D = 4(5t+4)$.

Egalăm discriminantul cu zero şi obţinem a doua valoare de control a parametrului $t = -\frac{4}{5}$. Dacă $t < -\frac{4}{5}$, atunci $D < 0$, iar dacă $\begin{cases} t \geq -\frac{4}{5}, \\ t \neq 1 \end{cases}$ atunci $D \geq 0$.

Prin urmare, rămîne să rezolvăm ecuaţia (1) în fiecare din următoarele cazuri:

$t < -\frac{4}{5}$; $\begin{cases} t \geq -\frac{4}{5}. \\ t \neq 1 \end{cases}$

Dacă $t < -\frac{4}{5}$, atunci ecuaţia (1) n-are soluţii reale; dacă $\begin{cases} t \geq -\frac{4}{5}, \\ t \neq 1 \end{cases}$ atunci:

$$x_{1,2} = \frac{-(2t+1) \pm \sqrt{5t+4}}{t-1}$$

Răspuns:

1) Dacă $t < -\frac{4}{5}$ ecuaţia n-are rădăcini;

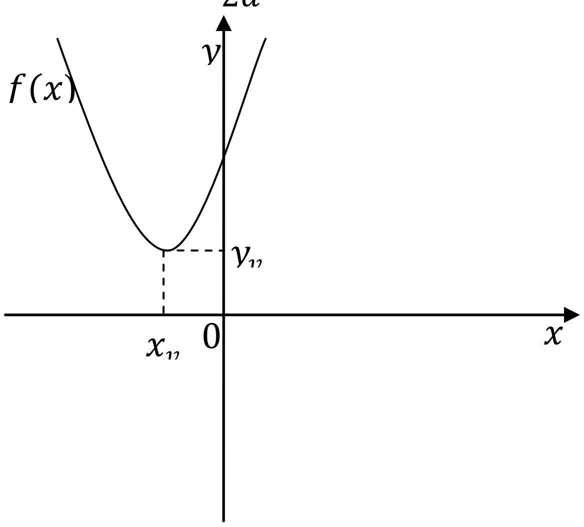
2)Dacă $t = 1$, atunci $x = -\frac{7}{6}$;

3)Dacă $\begin{cases} t \geq -\frac{4}{5}, \\ t \neq 1 \end{cases}$ atunci $x_{1,2} = \frac{-(2t+1) \pm \sqrt{5t+4}}{t-1}$.

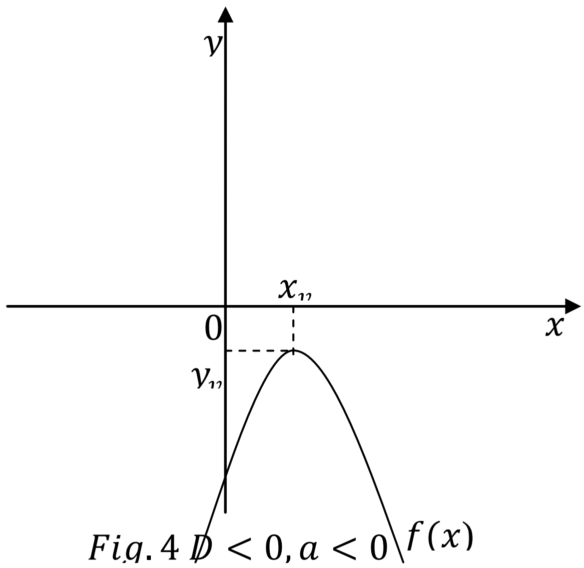
Un rol deosebit la rezolvarea multor probleme matematice revine cunoașterii proprietăților trinomului pătrat. Considerăm important faptul, ca rezolvînd probleme care se reduc la cercetarea ecuațiilor pătrate trebuie să ținem cont de interpretarea geometrică a ecuațiilor pătrate. Așa de exemplu, pentru $a \neq 0$ avem: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) =$ $= a(x - x_v)^2 + y_v$, unde $x_v = -\frac{b}{2a}, y_v = c - \frac{b^2}{4a}$. Astfel determinăm vîrfurile parabolei. Pentru $a > 0$ ramurile parabolei sunt îndreptate în sus. În acest caz abscisa vîrfului parabolei este punct de minimum. Pentru $a < 0$ ramurile parabolei sunt îndreptate în jos, iar abscisa vîrfului parabolei este punct de maximum.

Pentru ecuația pătrată vom deosebi 3 cazuri:

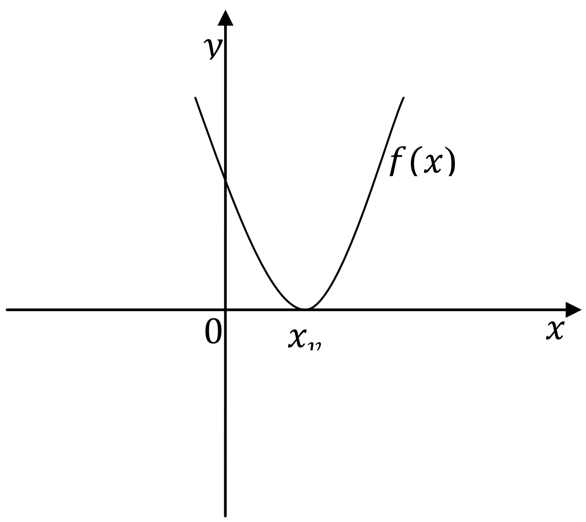
1. Dacă $D = b^2 - 4ac < 0$, atunci ecuația dată n-are soluții reale.
2. Dacă $D = b^2 - 4ac = 0$, atunci soluția ecuației date are forma $x = -\frac{b}{2a}$.
3. Dacă $D = b^2 - 4ac > 0$, atunci ecuația dată are două rădăcini și pentru aceste două rădăcini are loc relația $x_{1,2} = = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.



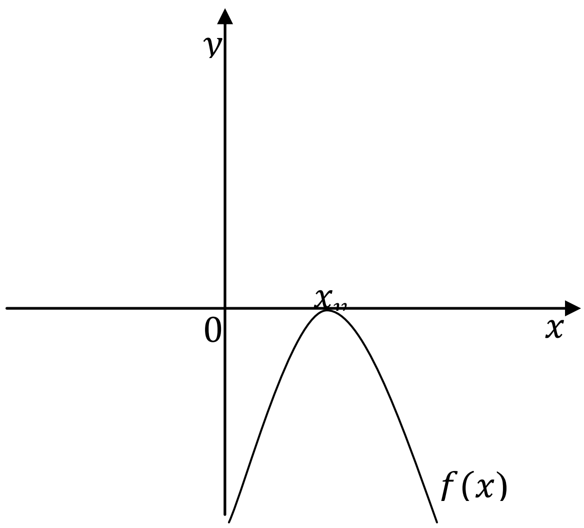
$Fig. 3\ D < 0, a > 0$



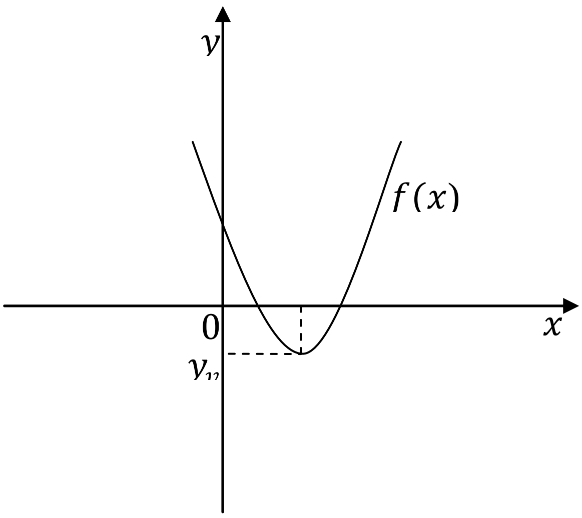
$Fig. 4\ D < 0, a < 0$



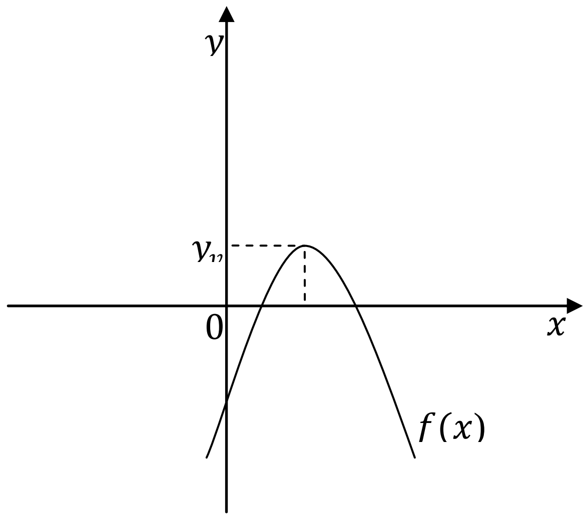
$Fig. 5\ D = 0, a > 0$



$Fig. 6\ D = 0, a < 0$



$Fig.7\ D > 0, a > 0$



$Fig.8\ D > 0, a < 0$

Exemplul 3. 5. Pentru ce valori a parametrului t o rădăcină a ecuaţiei $x^2 - \frac{15}{4}x + t = 0$ este egală cu pătratul celeilalte rădăcini?

Rezolvare.

Scriem teorema lui Viete şi condiţia problemei sub forma unui sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{15}{4} \\ x_1 x_2 = t \\ x_2 = {x_1}^2 \end{cases}.$$

Rezolvînd acest sistem obţinem:

$t_1 = -\frac{125}{8}, t_2 = \frac{27}{8}.$

Răspuns: $t_1 = -\frac{125}{8}, t_2 = \frac{27}{8}.$

Exemplul 3. 6. Pentru ce valori a parametrului t ecuaţia

$$(t+1)x^2 - tx + t - 3 = 0$$

are nu mai mult decît o rădăcină?

Rezolvare.

Să cercetăm la început cazul cînd ecuaţia dată nu este pătrată. În acest caz ecuaţia poate avea o infinitate de rădăcini sau nici una. Aceasta va fi, evident, pentru $t = -1$. În acest caz ecuaţia are forma: $x - 4 = 0, x = 4$.

Aşa dar pentru $t = -1$ ecuaţia are o rădăcină. Rămîne să cercetăm cazul, cînd rădăcinile ecuaţiei pătrate coincid ($D = 0$) şi cînd ecuaţia dată n-are rădăcini ($D < 0$).

Avem:

$$D = t^2 - 4(t+1)(t-3) = t^2 - 4t^2 + 8t + 12 =$$
$$= -3t^2 + 8t + 12.$$

Rezolvăm inecuaţia $-3t^2 + 8t + 12 \leq 0$ sau $3t^2 - 8t - 12 \geq$ ≥ 0.

Soluţiile acestei inecuaţii sunt:

$t \in \left(-\infty, \frac{4-2\sqrt{13}}{3}\right] \cup \left[\frac{4+2\sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$.

Răspuns: $t \leq \frac{4-2\sqrt{13}}{3}, t = -1, t \geq \frac{4+2\sqrt{13}}{3}$.

Exemplul 3. 7. Pentru ce valori a parametrului t rădăcinile ecuaţiei $(t+1)x^2 + 2tx + t + 3 = 0$ sunt pozitive?

Rezolvare. În primul rînd pentru ca rădăcinile ecuaţiei date să fie pozitive, ele trebuie să existe. Prin urmare, discriminantul D al acestei ecuaţii trebuie să fie nenegativ.

$D = 4t^2 - 4(t+1)(t+3) = 4t^2 - 4t^2 - 16t - 12 \geq 0$, sau $t \leq -\frac{3}{4}$.

În al doilea rînd scriem condiţiile pentru care aceste rădăcini satisfac teoremei lui Viète. Obţinem sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2t}{t+1} > 0 \\ x_1 x_2 = \dfrac{t+3}{t+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{t+1} < 0 \\ \frac{t+3}{t+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (-1, 0) \\ t \in (-\infty, 3) \cup (-1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow t \in (-1, 0).$$

Avînd în vedere, că $t \leq -\frac{3}{4}$, obţinem $t \in \left(-1, -\frac{3}{4}\right]$.

Rămâne să cercetăm cazul, cînd ecuaţia nu este pătrată, adică cazul $t = -1$.

În acest caz ecuaţia iniţială are forma:

$-2x - 1 + 3 = 0$ sau $x = 1$.

Această rădăcină este pozitivă.

Răspuns. $t \in \left[-1, -\frac{3}{4}\right]$.

Exemplul 3. 8. Pentru ce valori a parametrului t ecuaţiile $x^2 + (t^2 - 5t + 6)x = 0$ şi $x^2 + 2(t - 3)x +$

$$+(t^2 - 7t + 12) = 0$$

sunt echivalente?

Rezolvare. Observăm că $x = 0$ este rădăcină a primei ecuaţii. Prin urmare, $x = 0$ trebuie să fie şi rădăcină celei de a doua ecuaţie şi deci, $t^2 - 7t + 12 = 0$, adică $t = 3$, $t = 4$.

Fie $t = 3$. Atunci prima ecuaţie are forma $x^2 = 0$. Aşa dar, pentru $t = 3$ ecuaţiile date sunt echivalente. Fie acum $t = 4$. Şi în acest caz ambele ecuaţii au aceiaşi formă: $x^2 + 2x = 0$.

Răspuns: $t = 3$, $t = 4$.

Exemplul 3. 9. Pentru ce valoare a parametrului a parabola $y = 4ax^2 - 8x + 25$ are două puncte comune cu axa Ox?

Rezolvare. Trinomul pătrat dat are două rădăcini reale diferite, dacă au loc condițiile:

$$\begin{cases} 4a \neq 0, \\ \frac{D}{4} = 16 - 100a > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ a < \frac{4}{25}. \end{cases}$$

Răspuns. $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{4}{25})$.

Exemplul3. 10. Pentru ce valori a parametrului m trinomul pătrat $y = (m-1)x^2 + (m+4)x + m + 7$ poate fi scris sub forma unui pătrat complet?

Rezolvare. Trinomul pătrat $ax^2 + bx + c$ poate fi scris sub forma $a(x - x_0)^2$, dacă rădăcinile lui sunt egale $x_1 = x_2 = x_0$, adică atunci când discriminantul este egal cu zero. În exemplul dat $D = (m+4)^2 - 4(m-1)(m+7) = 0$. Rezolvând ultima ecuație, obținem $m = -\frac{22}{3}$ și $m = 2$.

Răspuns. $m \in \left\{-7\frac{1}{3}; 2\right\}$.

Exemplul 3. 11. Pentru ce valori ale parametrului a toate rădăcinile ecuației $ax^2 - 2(a+1)x + a - 3 = 0$ sunt negative?

Rezolvare. Pentru $a = 0$ ecuația are o singură rădăcină $x = -\frac{3}{2}$ și această rădăcină satisface condiției problemei.

Să cercetăm cazul $a \neq 0$. Pentru ca ambele rădăcini ale ecuației să fie negative este necesar și suficient să se satisfacă condițiile

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

Folosim teorema lui Viète și scriem condițiile date sub forma

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} = (a+1)^2 - a(a-3) \geq 0, \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2(a+1)}{a} < 0, \\ x_1 x_2 = \dfrac{a-3}{a} > 0. \end{cases}$$

Rezolvând ultimul sistem determinăm că $a \in \left[-\frac{1}{5}; 0\right)$. Această mulțime include și cazul cercetat la început.

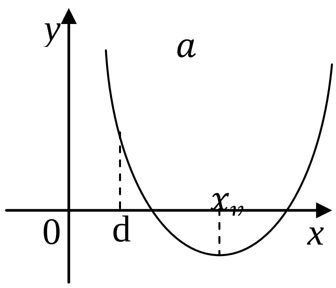
Răspuns. $a \in \left[-\frac{1}{5}; 0\right)$.

Exemplul 3. 12. Pentru ce valori a parametrului a toate rădăcinile ecuației $ax^2 - (2a+1)x + 3a - 1 = 0$ sunt mai mari ca 1?

Rezolvare. Pentru $a = 0$ ecuația dată are o singură rădăcină $x = -1$, care nu satisface condiției problemei.

Să cercetăm cazul $a \neq 0$. Să observăm că metoda de rezolvare din exemplul precedent nu poate fi folosită în acest caz deoarece compararea sumei și produsului rădăcinilor cu 1 sunt condiții necesare dar nu și suficiente.

Vom descrie o metodă generală de rezolvare a asemenea probleme. Pentru ca ambele rădăcini ale trinomului pătrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ să fie mai mari ca numărul d, este necesar și suficient să se îndeplinească condițiile (vezi fig. 9):



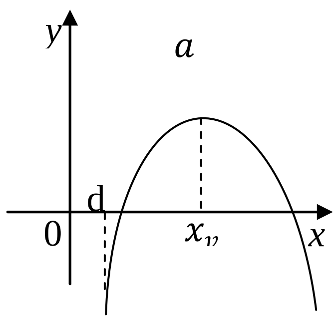


Fig. 9

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_v = -\dfrac{b}{2a} > d, \\ a \cdot f(d) > 0. \end{cases}$$

Analogic, cerința ca rădăcinile să fie mai mici ca numărul d, înseamnă satisfacerea condițiilor

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_v = -\dfrac{b}{2a} < d, \\ a \cdot f(d) > 0. \end{cases}$$

În problema dată condițiile au forma

$$\begin{cases} (2a+1)^2 - 4a(3a-1) \geq 0, \\ \dfrac{2a+1}{2a} > 1, \\ a(a - 2a - 1 + 3a - 1) > 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, obținem $a \in \left(1; \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

Răspuns. $a \in \left(1; \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

Exemplul 3. 13. Pentru ce valori ale parametrului a raportul rădăcinilor ecuației $2x^2 + (a-10)x + 6 = 0$ este egal cu 12?

Rezolvare. Ecuația are rădăcini pentru $D \geq 0$ și deoarece $x_2 = 12x_1$, atunci după teorema lui Viète alcătuim sistemul

$$\begin{cases} \mathrm{D} = (\mathrm{a}-10)^2 - 48 \geq 0, \\ \mathrm{x}_2 = 12\mathrm{x}_1, \\ \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 = -\frac{\mathrm{a}-10}{2}, \\ \mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{x}_2 = 3, \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{a}^2 - 20\mathrm{a} + 52 \geq 0, \\ \mathrm{x}_2 = 12\mathrm{x}_1, \\ 13\mathrm{x}_1 = \frac{10-\mathrm{a}}{2} \\ 12\mathrm{x}_1^2 = 3. \end{cases},$$

Soluțiile ultimului sistem sunt valorile $a = -3$ și $a = 23$.

Răspuns. $a \in \{-3; 23\}$.

Exemplul 3. 14. Pentru ce valori ale parametrului a ecuația $x^4 + (a-5)x^2 + (a+2)^2 = 0$ are exact patru rădăcini reale diferite? Pentru ce valori a parametrului aceste patru rădăcini vor forma o progresie aritmetică?

Rezolvare. Fie $y = x^2$, atunci ecuația dată are forma $y^2 + +(a-5)y + (a+2)^2 = 0$. Prima condiție a problemei inițiale va fi satisfăcută, dacă ultima ecuație va avea două rădăcini pozitive și diferite $y_1 > y_2 > 0$. Aceasta va avea loc dacă și numai dacă

$$\begin{cases} D > 0, \\ y_1 + y_2 > 0, \\ y_1 \cdot y_2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-5)^2 - 4(a+2)^2 > 0, \\ 5 - a > 0, \\ (a+2)^2 > 0. \end{cases}$$

Rezolvând ultimul sistem, obținem $a \in (-9; -2) \cup (-2; \frac{1}{3})$.

Pentru aceste valori a parametrului a rădăcinile ecuației vor avea forma

$$-\sqrt{y_1};\ -\sqrt{y_2}; \sqrt{y_2};\ \sqrt{y_1}.$$

Aceste valori a rădăcinilor formează o progresie aritmetică, dacă diferența dintre ele este o mărime constantă. Prin urmare,

$$\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} = \sqrt{y_2} - \left(-\sqrt{y_1}\right) = -\sqrt{y_2} - (-\sqrt{y_1}).$$

Din aceste egalități urmează $\sqrt{y_1} = 3\sqrt{y_2}$ sau $y_1 = 9y_2$. Analogic exemplului precedent cu ajutorul teoremei lui Viete alcătuim sistemul

$$\begin{cases} y_1 = 9y_2, \\ y_1 + y_2 = 5 - a, \\ y_1 \cdot y_2 = (a+2)^2. \end{cases}$$

Soluțiile acestui sistem sunt $a = -\frac{5}{13}$ și $a = -5$.

Răspuns. $a \in \left\{-\frac{5}{13}; -5\right\}$.

Exemplul 3. 15. Pentru ce valori a parametrului a ecuația $x(x^{12} - ax^6 + a^4) = 0$ are exact cinci rădăcini care formează o progresie aritmetică?

Rezolvare. Evident, o rădăcină a ecuației este $x = 0$. Efectuăm substituția $y = x^6$ pentru $x \neq 0$. Atunci ecuația are forma $f(y) = y^2 - ay + a^4 = 0$. Această ecuație pătrată va avea rădăcini pozitive diferite, dacă se îndeplinesc condițiile:

$$\begin{cases} D = a^2 - 4a^4 > 0, \\ y_v = \dfrac{a}{2} > 0, \\ f(0) = a^4 > 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, obținem soluția $a \in \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$. Să cercetăm acum condiția, pentru care rădăcinile ecuației inițiale formează o progresie aritmetică. Fie $y_1 > 0, y_2 > 0$ rădăcinile ecuației după substituție. Atunci cele cinci rădăcini care formează o progresie aritmetică vor fi valorile x de forma $-\sqrt[6]{y_2};\ -\sqrt[6]{y_1};\ 0;\ \sqrt[6]{y_1};\ \sqrt[6]{y_2}$, unde pentru determinare considerăm $y_2 > y_1 > 0$. Atunci, conform proprietății progresiei aritmetice, diferența

$$d = \sqrt[6]{y_2} - \sqrt[6]{y_1} = \sqrt[6]{y_1} - 0.$$

Din ultima expresie obținem $\sqrt[6]{y_2} = 2\sqrt[6]{y_1}$ sau $y_2 = 64y_1$.
Din ecuația $y^2 - ay + a^4 = 0$, urmează

$$\begin{cases} y_2 = 64y_1, \\ y_1 + y_2 = a, \\ y_1 \cdot y_2 = a^4. \end{cases}$$

Din acest sistem aflăm $y_1 = \frac{a^2}{8}, y_2 = 8a^2$. Înlocuind expresiile pentru y_1 și y_2 în ecuația a doua a sistemului obținem egalitatea $\left(\frac{a^2}{8}, +8a^2 = a\right) \Leftrightarrow (65a^2 = 8a) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a(65a - 8) = 0)$. Evident, $a_1 = 0$ și $a_2 = \frac{8}{65}$. Observăm că $a = 0$ nu satisface condițiilor problemei.
Răspuns. Cinci rădăcini pentru $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$; pentru $a = \frac{8}{65}$ aceste rădăcini formează o progresie aritmetică.

Exemplul 3. 16. Pentru ce valori a parametrului t o singură rădăcină a ecuaţiei $x^2 + 2tx - 2t - 1 = 0$ satisface inecuaţiei $x > 2$?

Rezolvare. Observăm că discriminantul acestei ecuaţii $D = 4t^2 + 8t + 4 = 4(t^2 + 2t + 1) = 4(t + 1)^2 \geq 0$ pentru orice $t \in R$. Rădăcinile acestei ecuaţii sunt $x_1 = 1$ şi
$x_2 = -2t - 1$.
Prin urmare, x_2 trebuie să fie mai mare decît 2.
Atunci $-2t - 1 > 2, -2t > 3, t < -\frac{3}{2}$.
Răspuns. $t < -\frac{3}{2}$.

Exemplul 3. 17. De aflat toate valorileparametrului t pentru care ecuaţia $t^3 + t^2|t + x| + |t^2x + 1| = 1$are nu mai puţin decît patru soluţii în numere întregi.

Rezolvare. Ecuaţia dată poate fi scrisă sub forma:

$$|t^2x + 1| + |t^3 + t^2x| = t^2x + 1 - (t^3 + t^2x).$$

Din proprietăţilevalorii absolute se ştie că egalitatea $|a| + |b| =$
$= a - b$ este adevărată atunci şi numai atunci, cînd $\alpha \geq 0$ şi

$b \leq 0$. Prin urmare, ecuaţia iniţială este echivalentă cu sistemul de inecuaţii

$$\begin{cases} t^2x + 1 \geq 0 \\ t^3 + t^2x \leq 0 \end{cases}$$

Valoarea $t = 0$ satisface condiţiei problemei puse, deoarece în acest caz atît sistemul dat, cît şi ecuaţia iniţială au soluţii toate numerele reale, adică $x \in R$.

Fie $t \neq 0$. Atunci sistemulde mai sus va fi echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{t^2} \\ x \leq -t \end{cases}$$

Prin urmare, este necesar de aflat acele valori a parametrului t, pentru care ultimul sistem are nu mai puţin de patru soluţii în mulţimea numerelor întregi. Săcomparăm numerele $-t$ şi $-\frac{1}{t^2}$.

Pentru aceasta aflăm diferenţa

$$-\frac{1}{t^2} - (-t) = t - \frac{1}{t^2} = \frac{t^3 - 1}{t^2} = \frac{(t-1)(t^2 + t + 1)}{t^2}.$$

Deoarece $t^2 + t + 1 > 0$ pentru orice t, înseamană că $t^2 + t + 1$ nu influienţiază la semnul diferenţei numerelor date. Prinmetoda intervalelor determinăm semnul pentru expresia $\frac{t-1}{t^2}$:

dacă $t < 1, t \neq 0$, atunci $-\frac{1}{t^2} < -t$;

dacă $t = 1$, atunci $-\frac{1}{t^2} = -t = -1$;

dacă $t > 1$ atunci $-\frac{1}{t^2} = -t$.

Prin urmare:

1. dacă $t > 1$ atunci ultimul sistemnu are soluţii şi deci, nici ecuaţia iniţială nu are soluţii;

2. dacă $t = 1$, atunci ultimul sistem este echivalent cu $x = -1$ şi are deci o singură soluţie, ceia ce nu satisface condiţiei problemei iniţiale;

3. dacă $0 < t < 1$ atunci $-1 < -t < 0$.

Astfel, segmentul $\left[-\frac{1}{t^2}; -t\right]$ va conţine nu mai puţin de patru numere întregi, dacă va fi justă ineglitatea $-\frac{1}{t^2} \leq -4$. Pentru aceasta rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 0 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{t^2} \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1 \\ 1 - 4t^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1 \\ (1-2t)(1+2t) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1 \\ (\dfrac{1}{2} - t)(\dfrac{1}{2} + t) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1 \\ t \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{2}.$$

Aşa dar, pentru $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ ecuaţia iniţială va avea nu mai puţin decît patru soluţii în mulţimea numerelor întregi;

4. dacă $-1 < t < 0$, atunci $0 < -t < 1$ şi segmentul $\left[-\frac{1}{t^2}; -t\right]$ va conţine cel puţin patru numere întregi, dacă va fi justăinegalitatea $-\frac{1}{t^2} \leq -3$.

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} -1 < t < 0 \\ -\dfrac{1}{t^2} \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t < 0 \\ -1 \leq -3t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{3}}{3} \leq t \leq 0$$

Aşa dar, dacă $\frac{-\sqrt{3}}{3} \leq t \leq 0$, ecuaţia iniţială are nu mai puţin de patru soluţii întregi;

5. dacă $t = -1$ atunci segmentul $[-1; 1]$ conţine doar trei numere întregi şi prin urmare, condiţia problemeiiniţiale nu se îndeplineşte;

6. dacă $t < -1$ atunci $-1 < t^2 < 0$ şi pentru ca segmentul $\left[-\frac{1}{t^2}; -t\right]$ să conţină nu mai puţin de patru numere întregi este necesar să fie justă inegalitatea $-t \geq 3$, adică $t \leq -3$. Aşa dar, pentru $t \leq -3$ inecuaţia dată are numai puţin de patru soluţii întregi.

Răspuns:$(-\infty; -3] \cup \left[\frac{-\sqrt{3}}{3}; \frac{1}{2}\right]$.

După definiţie

$|a| = a$, dacă $a \geq 0$,

$|a| = -a$, dacă $a < 0$.

La rezolvarea ecuaţiilor, care conţin semnul valorii absolute (semnul modulului), de regulă, trebuie de descompus MVA ale ecuaţiei în mulţimi, în fiecare din care expresiile de sub semnul modulului îşi păstrează semnul. Se rezolvă ecuaţia pe fiecare din aceste intervale. Reuniunea soluţiilor determinate pentru fiecare interval din MVA şi alcătuiesc mulţmea soluţiilor ecuaţiei date. Cele mai simple ecuaţii cu module sunt ecuaţiile de forma:$f(|x|) = g(x)(1)$, unde $f(x)$ şi $g(x)$ sunt careva funcţii. Pentru a rezolva ecuaţia (1), trebuie la început de aflat toate soluţiile ecuaţiei $f(x) = g(x)$, care aparţin mulţimii $x \geq 0$, iar apoi de rezolvat ecuaţia $f(-x) = g(x)$ pe mulţimea $x < 0$. Reuniunea mulţimilor de soluţii astfel determinate alcătuiesc mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1). Cu alte cuvinte, ecuaţia (1) este echivalentă cu totalitatea sistemelor:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) = g(x) \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) = g(x) \\ x < 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

Ecuaţia $|f(x)| = g(x)(2)$, de regulă, se rezolvă prin două metode:

Metoda I. Ecuaţia (2) este echivalentă cu totalitalte sistemelor:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

Metoda II. Ecuaţia (2) este echivalentă cu totalitalte sistemelor:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

Dacă în ecuaţia (2) funcţia $f(x)$ are o formă mai simplă decît $g(x)$, atunci ecuaţia (2) se rezolvă prin prima metodă, iar dacă o formă mai simplă are funcţia $g(x)$, atunci se foloseşte a doua metodă.

În particular, ecuaţia:

$|f(x)| = b, b \in R$

pentru $b < 0$ n-aresoluţii;

pentru $b = 0$ este echivalentă cu ecuaţia $f(x) = 0$;

pentru $b > 0$ este echivalentă cu totalitatea :

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = b \\ f(x) = -b \end{array}\right.$$

Ecuaţia de forma:

$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)| = g(x)$, de regulă, se rezolvă prin metoda intervalelor.

Exemplul 3. 18. Pentru ce valori a parametrului t ecuaţia $7|x-3|-4|x+2|+10x+5=3t-4$ are trei rădăcini?

Rezolvare. Să construim graficul funcţiei
$y=7|x-3|-4|x+2|+10x+5.$
Cu acest scop calculăm:
$y(-2)=35-20+5=20;$
$y(3)=-20+30+5=15.$
Calculăm adăugător:
$y(-4)=49-8-40+5=6;$
$y(4)=7-32+40+5=52-32=20.$
Construim graficul acestei funcţii:

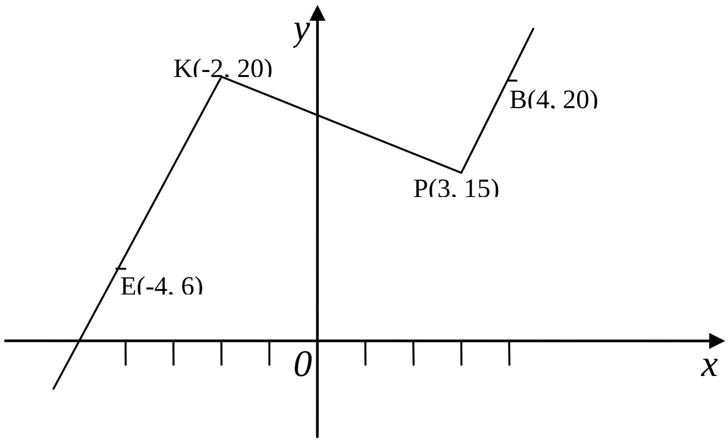


Fig. 10

Cercetînd acest grafic ne convingem că ecuaţia iniţială va avea trei rădăcini atunci şi numai atunci, cînd se va îndeplini inegalitatea dublă: $15<3t-4<20$; $6\frac{1}{3}<t<8$.

Răspuns. $t\in\left(6\frac{1}{3};8\right)$.

Exemplul 3. 19. Determinaţi numărul rădăcinilor ecuaţiei $|x+5|+3|x-1|-4|x-3|-5x=t^2-4$ în dependenţă de valorile parametrului t.

Rezolvare. Construim schematic graficul funcţiei $y = |x+5| + +3|x-1| - 4|x-3| - 5x$. Pentru aceasta calculăm:
$y(-5) = 18 - 32 + 25 = 11;$
$y(1) = 6 - 8 - 5 = -7;$
$y(3) = 8 + 6 - 15 = -1.$
Calculăm adăugător:
$y(-6) = 1 + 21 - 36 + 30 = 16;$
$y(4) = 9 + 9 - 4 - 20 = -6.$
Graficul acestei funcţii schematic este reprezentat în fig. 11

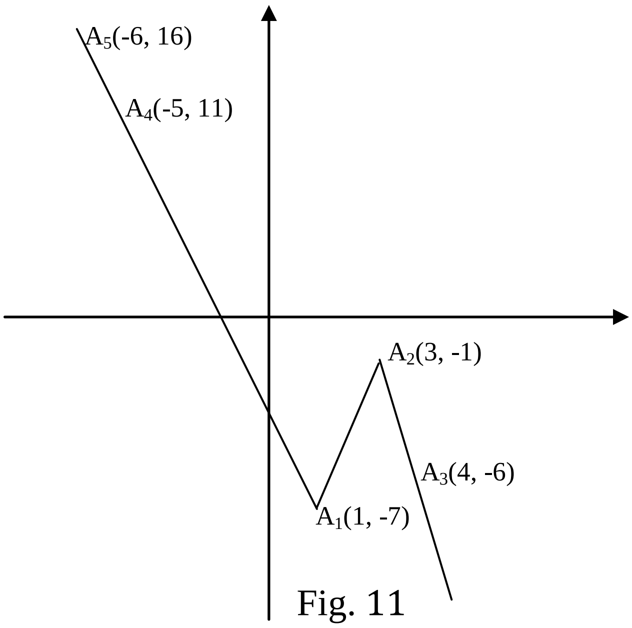


Fig. 11

Din grafic se observă că ecuaţia dată va avea trei rădăcini dacă şi numai dacă are loc inegalitatea dublă

$$-7 < t^2 - 4 < -1 \Leftrightarrow -3 < t^2 < 3 \Leftrightarrow t^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < t < \sqrt{3}$$

Ecuaţia are două rădăcini, dacă:

$$\left[\begin{array}{l} t^2 - 4 = -1 \\ t^2 - 4 = -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = 3 \\ t^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow t^2 = 3 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{3}.$$

În celelalte cazuri ecuaţia are o singură soluţie.

Răspuns. Dacă $t \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, atunci ecuaţia are trei rădăcini. Dacă $t = \pm\sqrt{3}$, atunci ecuaţia are 2 rădăcini. Dacă $t \epsilon (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, atunci ecuaţia dată are o singură rădăcină.

Exemplul 3. 20. De cercetat numărul rădăcinilor ecuaţiei

$$|x^2 - 3x - 4| - x^2 + 5x + 12 = \frac{1}{4t}$$

în dependenţă de valorile parametrului t.

Rezolvare. Construim schematic graficul funcţiei
$y = |x^2 - 3x - 4| - x^2 + 5x + 12$.
Rădăcinile trinomului $x^2 - 3x - 4$ sunt numerele 4 şi-1. Prin urmare, dacă $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$, atunci $y = x^2 - 3x - -4 - x^2 + 5x + 12 = 2x + 8$, iar dacă $x \in (-1,4)$, atunci $y = -x^2 + 3x + 4 - x^2 + 5x + 12 = -2x^2 + 8x + 16$.
Aşa dar, pe segmental $[-1; 4]$ funcţia dată reprezintă parabola $y = -2x^2 + 8x + 16$. Să determinăm coordonatele vîrfului şi axa parabolei.
$y'(x) = -4x + 8; y'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
Axa parabolei are ecuaţia $x = 2$. Calculăm $y(2) = -8 + 16 + +16 = 24$. Prin urmare vîrful parabolei este punctul $A(2,24)$.
Calculăm valorile funcţiei în punctele $x = -1, x = 4$. Avem: $y(-1) = -2 - 8 + 16 = 6, B_1(-1,6)$ şi $y(4) = -2 \cdot 16 + 8 \cdot 4 + 16 = -32 + 32 + 16$, $B_2(4,16)$. Evident, funcţia este continuă. Graficul acestei funcţii reprezintă reuniunea a două semidrepte care aparţin dreptei $y = 2x + 8$ şi care au originile în punctele, $B_1(-1,6)$,

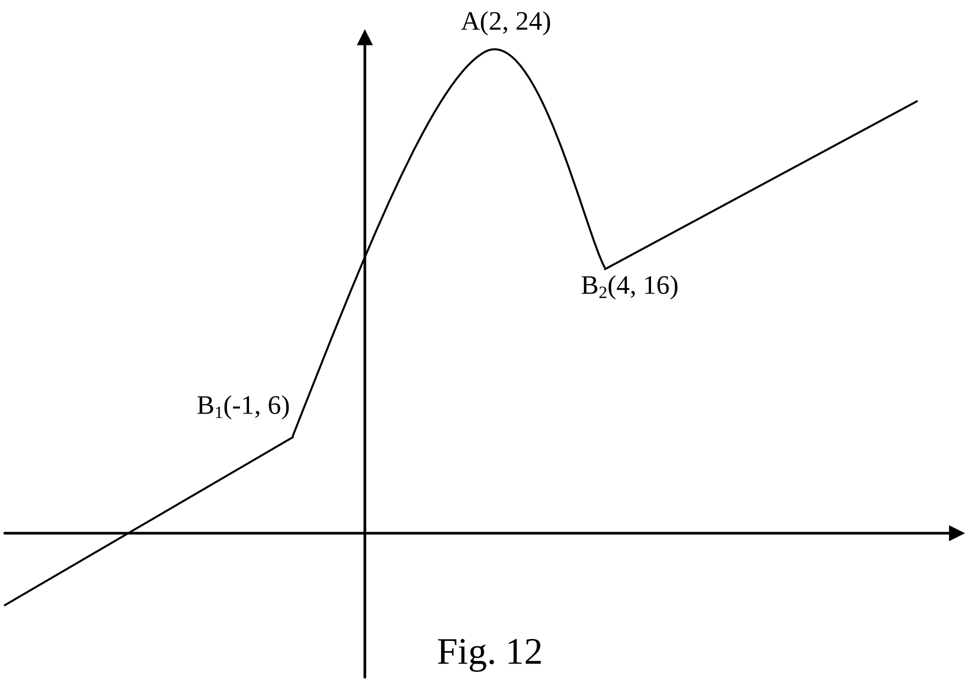


Fig. 12

$B_2(4,16)$ şi o parte a parabolei B_1AB_2 Fig.12. Din acest grafic se vede, că ecuaţia dată are trei rădăcini, dacă şi numai dacă $16 < \frac{1}{4t} < 24 \Leftrightarrow \frac{1}{96} < t < \frac{1}{64}$ şi are două rădăcini atunci şi numai atunci, cînd $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{4t} = 16 \\ \frac{1}{4t} = 24 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{64} \\ t = \frac{1}{96} \end{array}\right.$.

În celelalte cazuri ecuaţia are o singură rădăcină.

Răspuns. dacă $t\epsilon\left(\frac{1}{96}, \frac{1}{64}\right)$, atunci ecuaţia are trei rădăcini; dacă $t\epsilon\left\{\frac{1}{96}, \frac{1}{64}\right\}$, atunci ecuaţia are două rădăcini;

dacă $t\epsilon\left(-\infty; \frac{1}{96}\right) \cup \left(\frac{1}{64}; +\infty\right)$ ecuaţia are o singură rădăcină.

Exemplul 3. 21. Să rezolvăm ecuaţia $x|x+1| + a = 0$.

Rezolvare. Vom cerceta două cazuri: $x < -1$ şi $x \geq -1$. În primul caz ecuaţia ia forma $x(-x-1) + a = 0$ sau $x^2 + x - a = 0$.

Ecuaţia pătrată obţinută are rădăcini reale dacă discriminantul este nenegativ: $D = 1 + 4a \geq 0$ sau $a \geq -\frac{1}{4}$

Aşa dar, pentru $a \geq -\frac{1}{4}$ ecuaţia $x^2 + x - a = 0$ are rădăcinile reale $x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$.

Dintre aceste două rădăcini noi vom alege acele rădăcini, care satisfac condiţiei $x < -1$.

Pentru aceasta vom rezolva inecuaţiile $\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} < -1$ şi $\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2} < -1$.

Din prima inecuaţie avem $1 + \sqrt{1 + 4a} < 0$, care nu se satisface nici pentru o valoare a parametrului a. Din a doua inecuaţie obţinem $1 < \sqrt{1 + 4a}$, care se satisface pentru $a > 0$.

Prin urmare, pentru $a > 0$ ecuaţia iniţială are o rădăcină reală $x = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$ ce satisface condiţiei $x < -1$, iar pentru $a \leq 0$ nu există aşa rădăcină.

În cazul doi, adică pentru $x \geq -1$, ecuaţia iniţială are forma: $x^2 + x + a = 0$.

Această ecuaţie are rădăcini reale dacă $D = 1 - 4a \geq 0$ sau $a \leq \frac{1}{4}$. Rămîne ca pentru $a \leq \frac{1}{4}$ să determinăm acele valori a parametrului a, pentru care rădăcinile ecuaţiei $x^2 + x + a = 0$ să satisfacă condiţiei $x \geq -1$, adică să rezolvăm inecuaţiile $\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} \geq -1$ şi $\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2} \geq -1$.

Prima inecuaţie se aduce la forma $1 + \sqrt{1 - 4a} \geq 0$ şi este satisfăcută pentru orice $a \leq \frac{1}{4}$. A doua inecuaţie se aduce la forma $1 - \sqrt{1 - 4a} \leq 1$ şi este satisfăcută pentru $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$.

Aşa dar, pentru $0 \le a \le \frac{1}{4}$ ecuaţia iniţială pentru $x \ge -1$ are două rădăcini reale $x_1' = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$ şi $x_2' = \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$, iar pentru $a < 0$ o singură rădăcină reală $x = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$.

Dacă $a > \frac{1}{4}$, atunci în domeniul $x \ge -1$ ecuaţia iniţială n-are rădăcini reale.

Răspuns. Pentru $a < 0$, $x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$, $x_3 = \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$(pentru $a = 0$ avem $x_1 = x_3$; pentru $a = \frac{1}{4}$ avem $x_2 = x_3$); pentru $a > \frac{1}{4}$, $x = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$.

Exemplul 3. 22. De rezolvat ecuaţia $x^2 - |x-1| = t$.

Rezolvare. Să menţionăm, că ecuaţia dată poate fi rezolvată ca o ecuaţie pătrată $x^2 - |x-1| - t = 0$, cercetînd două cazuri: $x \le 1$ şi $x > 1$.

După părerea noastră rezolvarea grafică este mai ilustrativă. Evident, dacă $x \ge 1$, atunci $t = x^2 + x - 1$, iar dacă $x < 1$, atunci $t = x^2 + x - 1$. În sistemul xot construim graficele funcţiilor $t = x^2 - x + 1$, dacă $x \ge 1$ şi $t = x^2 + x - 1$, dacă $x < 1$ (Fig. 13).

Dacă $t \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$, atunci ecuaţia n-are rădăcini.

Dacă $t = -\frac{5}{4}$, atunci $x = -\frac{1}{2}$; pentru $t \in (1; +\infty)$ $x_1{}' = \frac{-1-\sqrt{5+4t}}{2}$ şi $x_2{}' = \frac{1+\sqrt{4t-3}}{2}$; dacă $t \in \left(-\frac{5}{4}; 1\right)$, atunci $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5+4t}}{2}$.

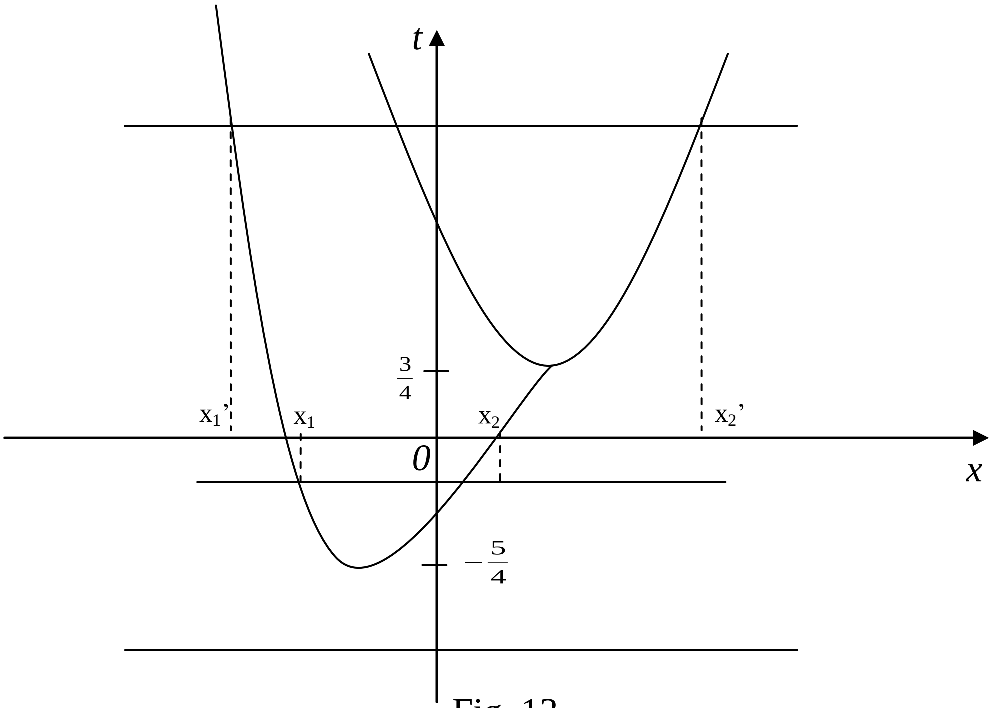


Fig. 13

Răspuns. Dacă $t < -\frac{5}{4}$, atunci ecuaţia n-are rădăcini;

dacă $t = -\frac{5}{4}$, atunci $x = -\frac{1}{2}$;

dacă $t \in \left(-\frac{5}{4};\ 1\right)$, atunci $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5+4t}}{2}$;

dacă $t \geq 1$, atunci

$x_1{}' = \frac{-1-\sqrt{5+4t}}{2}$ şi $x_2{}' = \frac{1+\sqrt{4t-3}}{2}$.

Exemplul 3. 23. De aflat toate valorile parametrului a pentru care ecuația $5|x - 3a| + |x - a^2| + 4x = a$

1) are o infinitate de soluții,

2) nu are soluții.

Rezolvare. Ecuația dată poate fi înlocuită cu totalitatea a patru sisteme

$$\begin{cases} 5(x-3a) + (x-a^2) + 4x = a, \\ x \geq 3a, \\ x \geq a^2; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} 5(3a-x)+(x-a^2)+4x=a, \\ x \le 3a, \\ x \ge a^2; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 5(x-3a)+(a^2-x)+4x=a, \\ x \ge 3a, \\ x \le a^2; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 5(3a-x)+(a^2-x)+4x=a, \\ x \le 3a, \\ x \le a^2. \end{cases} \quad (4)$$

Transformăm sistemul (1):

$$\begin{cases} x=\frac{1}{10}(a^2+16a) \\ \frac{1}{10}(a^2+16a) \ge 3a \\ \frac{1}{10}(a^2+16a) \ge a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a^2+16a}{10}, \\ a(a-14) \ge 0, \\ a(-9a+16) \ge 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a^2+16a}{10}, \\ a \in (-\infty; 0] \cup [14; +\infty), \\ a \in \left[0; \frac{16}{9}\right]. \end{cases}$$

Acest sistem este compatibil numai pentru $a=0$. În așa caz și $x=0$.

Sistemul (2) este echivalent cu următorul sistem:

$$\begin{cases} 14a-a^2=0, \\ x \le 3a, \\ x \ge a^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a=14. \end{array}\right. \\ x \le 3a, \\ x \ge a^2. \end{cases}$$

care de asemenea este compatibil numai pentru $a=0$ și are unica soluție $x=0$.

Sistemul (3) este echivalent cu următorul sistem:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8}(16a - a^2), \\ \frac{1}{8}(16a - a^2) \geq 3a, \\ \frac{1}{8}(16a - a^2) \leq a^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16a - a^2}{8}, \\ a(a+8) \leq 0, \\ a(9a - 16) \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16a - a^2}{8}, \\ a \in [-8; 0], \\ a \in \left(-\infty; 0] \cup [\frac{16}{9}; +\infty\right). \end{cases}$$

Ultimele două mulțimi din ultimul sistem determină segmentul $-8 \leq a \leq 0$. Pentru fiecare valoare a parametrului a din acest segment ecuația ultimului sistem ne dă cîte o singură valoare pentru x.

Sistemul (4) este echivalent cu următorul sistem:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(a^2 + 14a), \\ \frac{1}{2}(a^2 + 14a) \leq 3a, \\ \frac{1}{2}(a^2 + 14a) \leq a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2 + 14a}{2}, \\ a(a+8) \leq 0, \\ a(-a + 14) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2 + 14a}{2}, \\ a \in [-8; 0], \\ a \in (-\infty; 0] \cup [14; +\infty). \end{cases}$$

Ultimele două mulțimi de asemenea determină segmentul $-8 \leq a \leq 0$. Pentru fiecare valoare a parametrului a din aceste segment deasemenea primim cîte o singură valoare pentru x. În așa fel am ajuns la următoarea concluzie: pentru $a < -8$ cît și pentru $a > 0$ nici unul din sistemele 1)-4) nu are soluție și prin urmare nici ecuația inițială n-are soluție pentru aceste valori a parametrului a; pentru $-8 \leq a < 0$ au soluții sistemele 3) și 4); pentru $a = 0$ au soluții toate sistemele 1)-4). Rămîne să

observăm că mulțimea soluțiilor fiecărui sistem pentru fiecare valoare fixată a parametrului din segmentul $-8 \le a \le 0$ este finită și prin urmare, ecuația inițială nu poate avea o mulțime infinită de soluții nici pentru o valoare a parametrului a.
Răspuns.
1) Ecuația nu are o mulțime infinită de soluții nici pentru o valoare a parametrului a.
2) Pentru $a \in (-\infty; -8) \cup (0; +\infty)$ ecuația n-are soluții.

Exemplul 3. 24. De rezolvat ecuaţia

$$\frac{x^2+1}{t^2x-2t} - \frac{1}{2-tx} = \frac{x}{t} \quad (1).$$

Rezolvare. Prima valoare de control a parametrului t este valoarea $t = 0$. În acest caz ecuaţia (1) n-are soluţii. Să presupunem că $t \neq 0$. După transformarea ecuaţiei (1) obţinem: $(1-t)x^2 + 2x + t + 1 = 0 \quad (2)$.
Egalînd cu zero coeficientul pe lîngă x^2, determinăm a doua valoare de control a parametrului t şi anume: $t = 1$. Pentru această valoare ecuaţia (2) are forma: $2x + 2 = 0$ şi deci, $x = -1$. Dacă $t \neq 0$ şi $t \neq 1$, atunci din ecuaţia (2) obţinem: $x_1 = -1, x_2 = \frac{t+1}{t-1}$.
Verificare. La trecerea de la ecuaţia (1) la ecuaţia (2) s-a lărgit domeniul de definiţie a ecuaţiei şi prin urmare au putut apărea rădăcini străine şi anume aşa valori pentru x încît numitorii unor fracţii din ecuaţia (1) să se transforme în zero. În cazul dat este o singură valoare $x = \frac{2}{t}$. Se poate întîmpla aşa încît pentru careva valoare a parametrului t să obţinem $x_1 = \frac{2}{t}$. Atunci x_1 va fi rădăcină străină. Se poate de asemenea întîmpla că pentru oarecare valoare a parametrului t să fie $x_2 = \frac{2}{t}$. Atunci x_2 va fi

rădăcină străină. Să determinăm pentru ce valori a parametrului t are loc egalitatea $x = \frac{2}{t}$.

Fie $\frac{2}{t} = -1$, atunci $t = -2$. Aceasta înseamnă că pentru $t = -2$ rădăcina $x_1 = -1$ este străină. În acest caz $x_2 = \frac{t+1}{t-1} = \frac{-2+1}{-2-1} = \frac{1}{3}$. Să determinăm acum pentru ce valori a parametrului t vom avea $x_2 = \frac{2}{t}$. Fie $\frac{t+1}{t-1} = \frac{2}{t}$. Atunci $t^2 - t + 2 = 0$. Ultima ecuaţie n-are rădăcini reale. Aceasta înseamnă că $x_2 = \frac{t+1}{t-1}$ nu este rădăcină străină nici pentru o valoare a parametrului t. Noi am verificat pentru $t \neq 0$, $t \neq 1$. Dacă $t = 0$, atunci după cum am văzut, ecuaţia n-are rădăcini. Dacă $t = 1$, atunci ecuaţia (1) are rădăcina $x = -1$. Deoarece pentru $t = 1$ şi $x = -1$ egalitatea $x = \frac{2}{t}$ nu se îndeplineşte, atunci rădăcina $x = -1$ determinată în cazul cînd $t = 1$ nu este străină.

Răspuns. Dacă $t = 0$, atunci ecuaţia n-are rădăcini;

dacă $t = 1$, atunci $x = -1$;

dacă $t = -2$, atunci $x = \frac{1}{3}$;

dacă $\begin{cases} t \neq 2, \\ t \neq 0 \\ t \neq 1. \end{cases}$, atunci $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{t+1}{t-1}$.

Exemplul 3. 25. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-ac}{a+c} + \frac{x-bc}{b+c} = a + b + c.$$

Rezolvare. Transformăm ecuaţia în felul următor:

$$\left(\frac{x-ab}{a+b} - c\right) + \left(\frac{x-ac}{a+c} - b\right) + \left(\frac{x-bc}{b+c} - a\right) = 0;$$

$$\frac{x-(ab+ac+bc)}{a+b} + \frac{x-(ab+ac+bc)}{a+c} + \frac{x-(ab+ac+bc)}{b+c} = 0;$$

$$\big(x - (ab + ac + bc)\big)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right) = 0,$$

Răspuns. Dacă $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=0$, atunci $x \in R$.

Dacă $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\neq 0$, atunci $x=ab+ac+bc$.

Ecuaţiile ce conţin necunoscuta sub semnul rădăcinii se numesc ecuaţii iraţionale.

Toate rădăcinile de ordin par, care se conţin în ecuaţie, sunt aritmetice. Astfel, dacă expresia de sub rădăcină de ordin par este negativă, atunci rădăcina n-are sens. Dacă expresia de sub rădăcină este egală cu zero, atunci şi rădăcina este egală cu zero. Dacă expresia de sub rădăcină este pozitivă, atunci şi rădăcina este pozitivă.

Toate rădăcinile de ordin impar, care se conţin în ecuaţie, sunt determinate pentru orice valoare reală a expresiei de sub semnul rădăcinii. Această rădăcină va fi negativă, egală cu zero sau pozitivă, dacă expresia de sub rădăcină va fi corespunzător negativă, egală cu zero sau pozitivă.

Ecuaţia: $f^{2n}(x)=g^{2n}(x)$, $n \in N$ este o consecinţă a ecuaţiei $f(x)=g(x)$.

Din această cauză, dacă ambele părţi ale unei ecuaţii iraţionale se ridică la o putere pară, atunci fiecare rădăcinăobţinută trebuie verificată dacă este ea rădăcină a ecuaţiei iniţiale sau nu este.

Exemplul 3. 26. Să se rezolve ecuaţia

$$(t+x)^{\frac{2}{3}}+4(t-x)^{\frac{2}{3}}-5(t^2-x^2)^{\frac{1}{3}}=0.$$

Rezolvare. Scoatem $(t-x)^{\frac{2}{3}}$ în afara parantezei şi obţinem:

$$(t-x)^{\frac{2}{3}}\left(\left(\frac{t+x}{t-x}\right)^{\frac{2}{3}}-5\left(\frac{t+x}{t-x}\right)^{\frac{1}{3}}+4\right)=0.$$

Fie $\left(\frac{t+x}{t-x}\right)^{\frac{1}{3}}=a$. Atunci $a^2-5a+4=0$; $a_1=1$, $a_2=4$.

În aşa fel, avem:

1. $\left(\frac{t+x}{t-x}\right)^{\frac{1}{3}} = 1; \frac{t+x}{t-x} = 1; x = 0.$

2. $\left(\frac{t+x}{t-x}\right)^{\frac{1}{3}} = 4; \frac{t+x}{t-x} = 64; x = \frac{63}{65}t.$

Răspuns: $x = 0, x = \frac{63}{65}t.$

Exemplul 3. 27. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{x} + \sqrt{t} = \sqrt{1-(x+t)}(1)$$

Rezolvare. Prima valoare de control este $t = 0$, deoarece pentru $t < 0$ partea stîngă a ecuaţiei nu este definită, iar pentru $t \geq 0$ este definită.

Să cercetăm aceste cazuri.

1. Evident, dacă $t < 0$, ecuaţia (1) n-are rădăcini.
2. Fie $t \geq 0$. Ridicăm ambele părţi ale ecuaţiei (1) la pătrat şi obţinem:

$$2\sqrt{tx} = 1 - 2x - 2t \ (2).$$

În (2) nu observăm alte valori de control şi iarăşi ridicăm ambele părţi ale ecuaţiei (2) la pătrat şi după unele transformări, obţinem:

$$4x^2 + 4(t-1)x + 4t^2 - 4t + 1 = 0 \ (3).$$

Discriminantul ecuaţiei (3)

$$\frac{D}{4} = 4(t-1)^2 - 4(4t^2 - 4t + 1).$$

Rezolvînd ecuaţia $D = 0$, obţinem cele de al doilea valori de control a parametrului $t_1 = 0$ şi $t_2 = \frac{2}{3}$. Observăm că $D < 0$, dacă $t > \frac{2}{3}$. Deoarece noi cercetăm cazul $t \geq 0$ vom cerceta cazurile:

1) $t > \frac{2}{3}$;

2) $0 \leq t \leq \frac{2}{3}$.

În cazul 1) ecuaţia (3) n-are soluţii, iar în cazul 2) obţinem: $x_{1,2} = \frac{1-t\pm\sqrt{2t-3t^2}}{2}$.

În aşa fel noi am ajuns la următorul rezultat: dacă $t < 0; t > \frac{2}{3}$, atunci ecuaţia n-are rădăcini, iar dacă $0 \leq t \leq \frac{2}{3}$, atunci rădăcini ale ecuaţiei (1) pot să fie

$$x_{1,2} = \frac{1-t\pm\sqrt{2t-3t^2}}{2}.$$

Rezolvînd ecuaţia (1) am ridicat ambele părţi la pătrat, fapt care putea aduce la apariţia rădăcinilor străine. Verificarea însă în cazul dat este foarte migăloasă (voluminoasă). Vom merge pe altă cale.

Domeniul de definiţie al ecuaţiei (1) se determină de sistemul de inecuaţii:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-(x+t) \geq 0 \end{cases}.$$

Din ecuaţia (2) urmează că $1-2x-2t \geq 0$.

Prin urmare, rădăcinile ecuaţiei (1) satisfac sistemelor

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-(x+t) \geq 0 \\ 1-2x-2t \geq 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x \geq 0 \\ x+t \leq 1 \\ x+t \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+t \leq \frac{1}{2} \end{cases} (4).$$

Verificăm dacă x_1 satisface sistemul (4), obţinem:

$$\begin{cases} \frac{1-t+\sqrt{2t-3t^2}}{2} \geq 0 \\ \frac{1-t+\sqrt{2t-3t^2}}{2} + t \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ecuaţia a doua a acestui sistem este echivalentă cu inecuaţia $\sqrt{2t-3t^2} \leq -t$, care în cazul cercetat $\left(0 \leq t \leq \frac{2}{3}\right)$ are o singură rădăcină $t = 0$.

Deoarece această rădăcină satisface şi inecuaţia întîia, atunci sistemul dat are o singură soluţie $t=0$.

Aceasta înseamnă că $x_1=\frac{1-t+\sqrt{2t-3t^2}}{2}$ pentru $t=0$ este rădăcină a ecuaţiei (1) şi anume: dacă $t=0$, atunci $x_1=\frac{1}{2}$. Dacă însă $t\neq 0$, atunci x_1 este rădăcină străină.

Să verificăm dacă x_2 satisface (4). Cercetăm sistemul

$$\begin{cases}\frac{1-t-\sqrt{2t-3t^2}}{2}\geq 0\\ \frac{1-t-\sqrt{2t-3t^2}}{2}+t\leq\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2t-3t^2}\leq 1-t\\ \sqrt{2t-3t^2}\geq t\end{cases}.$$

Atunci $\begin{cases}4t^2-4t+1\geq 0\\ 4t^2-2t\leq 0\end{cases}$ sau $\begin{cases}(2t-1)^2\geq 0\\ 4t\left(t-\frac{1}{2}\right)\leq 0\end{cases}$, deci $0\leq t\leq\frac{1}{2}$.

Aşa dar, $x_2=\frac{1-t-\sqrt{2t-3t^2}}{2}$ este rădăcină a ecuaţiei (1), dacă t satisface sistemului: $\begin{cases}0\leq t\leq\frac{2}{3}\\ 0\leq t\leq\frac{1}{2}\end{cases}$, adică $0\leq t\leq\frac{1}{2}$.

Prin urmare, soluţiile ecuaţiei (1) pot fi scrise în felul următor:

1. Dacă $t<0; t>\frac{1}{2}$, ecuaţia n-are rădăcini;
2. Dacă $t=0$, atunci $x_1=\frac{1-t+\sqrt{2t-3t^2}}{2}$, $x_2=\frac{1-t-\sqrt{2t-3t^2}}{2}$;
3. Dacă $0\leq t\leq\frac{1}{2}$, atunci $x=\frac{1-t-\sqrt{2t-3t^2}}{2}$.

Observăm că pentru $t=0$ avem: $x_1=x_2$

Răspuns:

1) dacă $t<0,\ t>\frac{1}{2}$, ecuaţia n-are rădăcini;

2) dacă $0\leq t\leq\frac{1}{2}$, atunci $x=\frac{1-t-\sqrt{2t-3t^2}}{2}$.

Exemplul 3. 28. Rezolvați ecuația $|x+3|-a|x-1|=4$.

Rezolvare. Se observă ușor că pentru orice valoare a parametrului a există rădăcina $x = 1$. Dacă $x = -3$, atunci $a = -1$, adică pentru $a = -1$ există rădăcina $x = -3$. Mai observăm că pentru $a = -1$ toate valorile $x = [-3; 1]$ satisfac ecuației. Pentru $a = 1$ ecuației inițiale satisfac toate valorile $x \geq 1$.

Fie $x < -3$. Atunci ecuația inițială are forma $(a-1)x = a+7$ și dacă $a \neq 1$, atunci $x = \frac{a+7}{a-1}$. Având în vedere că $\frac{a+7}{a-1} < -3$ urmează că $(-1 < a < 1)$.

Pentru $-3 < x < 1$ ecuația primește forma $(a+1)x = a+1$. Dacă $a \neq 1$, atunci $x = 1$ și nu aparține intervalului dat.

Pentru $x > 1$ ecuația are forma $x + 3 - a(x-1) = 4$ sau $(a-1)x = a-1$. Dacă $a \neq 1$, atunci $x = 1$ și nu aparține intervalului dat.

Răspuns. $\frac{a+7}{a-1}$ pentru $a \in (-1; 1)$;

1 , pentru $a \in (-\infty; +\infty)$;

$[1, +\infty)$, pentru $a = 1$;

$[-3,1]$, pentru $a = -1$.

Exemplul 3.29. Pentru fiecare valoare a parametrului a rezolvaţi inecuația

$$x^4 - 2(a+1)x^3 + (a^2 + 4a + 2)x^2 - 2a(a+2)x + 2a^2 \leq 0$$

Rezolvare. Transformăm inecuația dată în felul următor:

$$(x^4 - 2(a+1)x^3 + (a^2 + 4a + 2)x^2 - 2a(a+2)x + 2a^2 \leq 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a^2(x^2 - 2x + 2) - (2x^2 - 4x^2 + 4x)a + x^2 - 2x^3 + 2x^2 \leq 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a^2(x^2 - 2x + 2) - 2ax(x^2 - 2x + 2) + x^2(x^2 - 2x + 2) \leq 0)$$
$$\Leftrightarrow ((x^2 - 2x + 2)(a^2 - 2ax + x^2) \leq 0).$$

Deoarece $x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1 \geq 1$ urmează că $a^2 - 2ax + x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \cdots (x-a)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \cdots x = a$

Răspuns. Pentru $a \in R$, $x = a$.

Exemplul 3. 30. Să se rezolve ecuaţia $\frac{t+5}{\sqrt{x+9}} = 1$.

Rezolvare. Avînd în vedere că partea stîngă trebuie să fie pozitivă urmează că $t > -5$. Pentru $t \leq -5$ ecuaţia n-are rădăcini.

Fie $t > -5$. Ridicăm ambele părţi la pătrat şi obţinem:

$\frac{(t+5)^2}{x+9} = 1$; $\frac{(t+5)^2-x-9}{x+9} = 0$;

$x = (t+5)^2 - 9 = t^2 + 10t + 16 = (t+2)(t+8)$.

Evident, $x \neq -9$. Prin urmare, $(t+2)(t+8) \neq -9$; $t^2 + 10t + 16 \neq -9$; $t^2 + 10t + 25 \neq 0$; $(t+5)^2 \neq 0$;$t \neq -5$. Noi însă am cercetat cazul $t > -5$.

Răspuns. Pentru $t \leq -5$ ecuaţia n-are soluţii, iar pentru $t > -5$, $x = (t+2)(t+8)$.

Exemplul 3. 31. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt[4]{\frac{a-x}{b+x}} + \sqrt[4]{\frac{b+x}{a-x}} = 2.$$

Rezolvare. Fie $\sqrt[4]{\frac{a-x}{b+x}} = t$. Atunci ecuaţia dată are forma: $t + \frac{1}{t} = 2$;$\frac{t^2-2t+1}{t} = 0$; $t = 1$.

Prin urmare, $\sqrt[4]{\frac{a-x}{b+x}} = 1$; $a - x = b + x$, $x = \frac{a-b}{2}$. Numitorii fracţiilor trebuie să fie diferiţi de zero, de aceea $\frac{a-b}{2} \neq -b$ şi $\frac{a-b}{2} \neq a$. Aceste condiţii se satisfac dacă $a + b \neq 0$.

Răspuns. Pentru $a + b = 0$ ecuaţia n-are rădăcini, iar pentru $a + b \neq 0$, $x = \frac{a-b}{2}$.

Exemplul 3. 32. Aflați toate valorile parametrului $a \neq 0$, pentru care graficul funcțiilor $y_1 = |x^2 + 3ax|$ și $y_2 = -3a$ au numai două puncte comune.

Rezolvare. Să observăm la început că ecuația $|x^2 + 3ax| = -3a$ poate avea soluții numai pentru $a < 0$ ($a \neq 0$ după condiție). Graficul $y_1 = |x^2 + 3ax|$ se obține din parabola $y = x^2 + 3ax$ fiind reflectată partea negativă simetric față de axa Ox (Fig. 14). Rădăcinile acestei parabole, adică punctele de intersecție a parabolei date cu axa Ox, sunt $x_1 = 0$ și $x_2 = -3a > 0$. Vârful acestei parabole se află în punctul $x_v = -\frac{3a}{2} > 0$ și $y_1 = \left|\left(-\frac{3a}{2}\right)^2 - 3a \cdot \frac{3a}{2}\right| = \frac{9a^2}{4}$. Graficul $y_2 = -3a$ reprezintă o dreaptă, paralelă la axa Ox.

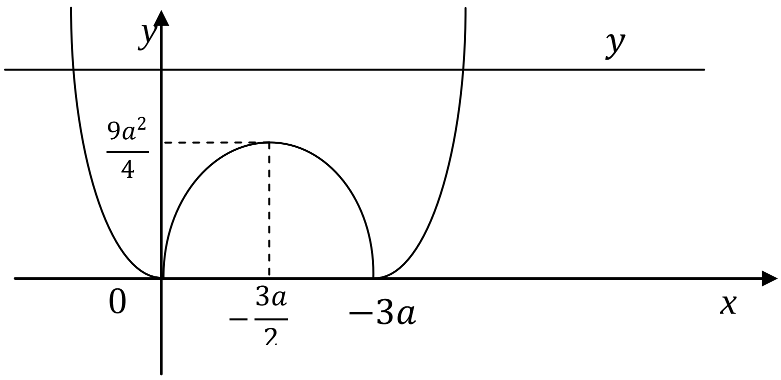


Fig. 14

Din Fig. 14 urmează, că graficele y_1 și y_2 au două puncte comune ($a \neq 0$), dacă $-3a > y_v \Rightarrow -3a > \frac{9a^2}{4} \Rightarrow 3a^2 + 4a <$ $< 0 \Rightarrow a \in \left(-\frac{4}{3}; 0\right)$.

Răspuns. $a \in \left(-\frac{4}{3}; 0\right)$.

Exemplul 3. 33. Pentru ce valoare a parametrului a, toate rădăcinile ecuației $2\sqrt{x^2 - 2ax + a^2} + a - 4 + x = 0$ satisfac inecuației $0 \leq x \leq 4$?

Rezolvare. Ecuația dată este echivalentă cu ecuația $2|x - a| + x + a - 4 = 0$. Soluțiile ultimei ecuații sunt valorile

$x = 3a - 4$ pentru $x < a$ și $x = \frac{1}{3}(a+3)$ pentru $x \geq a$. Problema inițială se reduce la rezolvarea a două sisteme de inecuații

$$\begin{cases} 3a - 4 < a, \\ 3a - 4 \geq 0, \\ 3a - 4 \leq 4, \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \frac{a+4}{3} \geq a, \\ \frac{a+4}{3} \geq 0, \\ \frac{a+4}{3} \leq 4. \end{cases}$$

Primului sistem satisfac toate valorile $a \in \left[\frac{4}{3}; 2\right)$, iar celui de al doilea sistem satisfac toate valorile $a \in [-4; 2]$. Intersecția acestor două mulțimi reprezintă $a \in \left[\frac{4}{3}; 2\right)$. Să mai observăm că pentru $a = 2$ ecuația inițială are o rădăcină $x = 2$, care satisface condiției problemei.

Răspuns. $a \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

Exemplul 3. 34. În dependență de valorile parametrului a aflați numărul soluțiilor sistemului

$$\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}.$$

Rezolvare. Din punct de vedere geometric numărul soluțiilor sistemului reprezintă numărul de puncte de intersecție a curbelor, determinate de ecuațiile sistemului, pentru fiecare valoare fixată a parametrului.

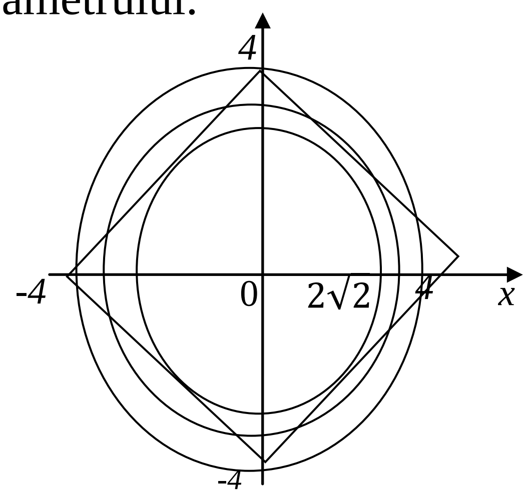


Fig. 15

Examinând în prima ecuație cele patru cazuri $(x \geq 0, y \geq 0;\ x \leq 0, y \leq 0;\ x \geq 0, y \leq 0;\ x \leq 0, y \geq 0;)$ ne convingem că această ecuație determină laturile unui pătrat(Fig. 15).

Ecuația a doua reprezintă o familie de cercuri de rază $\sqrt{a}(a > 0)$ cu centrele în originea de coordonate. Dacă $a = 0$ cercul se transformă intr-un punct(originea de coordonate). Din Fig. 15urmează, că atunci când cercul este tangent din interior (pătratul este circumscris), adică pentru $\sqrt{a} = 2\sqrt{2}\ (a = 8)$ și pentru $\sqrt{a} = 4\ (a = 16)$ (cercul trece prin vârfurile pătratului) sistemul are patru soluții.

Pentru $8 < a < 16$ cercul și pătratul au opt puncte comune. Pentru $a < 8$ și $a > 16$ soluții nu există.

Răspuns. Dacă $a = 8;\ a = 16$ – 4 soluții;

dacă $a \in (8; 16)$ - 8 soluții;

dacă $a \in (-\infty; 8) \cup (16; +\infty)$ - soluții nu există.

Exemplul 3. 35. Să se rezolve ecuaţia

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{x^2+2t-3}} = \left(\sec\frac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{x+t-1}}.$$

Rezolvare. $\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{x^2+2t-3}} = \left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{-\sqrt{x+t-1}}.$

Împărţim ambele părţi la $\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{-\sqrt{x+t-1}}$, care întotdeauna este diferită de zero şi obţinem:

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{x^2+2t-3}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{x+t-1}} = 1;$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{x^2+2t-3}+\sqrt{x+t-1}} = 1;\ \sqrt{x^2+2t-3} + \sqrt{x+t-1} = 0.$$

Suma a două numere nenegative este egală cu zero, atunci şi numai atunci, cînd ambele simultan sunt egale cu zero. Aşa dar,

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+2t-3}=0\\ \sqrt{x+t-1}=0\end{cases};\begin{cases}x^2+2t-3=0\\ x+t-1=0\end{cases};\begin{cases}x^2+2t-3=0\\ x=1-t\end{cases}.$$

Înlocuim valoarea pentru x din a doua ecuaţie în prima şi obţinem:

$(t-1)^2+2t-3=0;\ t^2-4=0;\ t=\pm 2.$

Răspuns. $x=1-t$ pentru $t=\pm\sqrt{2}$. Pentru alte valori a parametrului t, ecuaţia n-are rădăcini.

Exemplul 3. 36. De aflat toate valorile parametrului b, pentru care ecuația $x-2=\sqrt{2(b-1)x+1}$ are o singură soluție.

Rezolvare. Transformăm ecuația:

$$\begin{cases}x\geq 2\\ (x-2)^2=2(b-1)x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ x^2-2(b+1)x+3=0\end{cases}.$$

Ramurile parabolei $f(x)=x^2-2(b+1)x+3$ sunt îndreptate în sus și prin urmare, ecuația inițială poate avea o singură soluție în următoarele cazuri (vezi figurile I-III):

$$I.\begin{cases}D>0,\\ f(2)<0;\end{cases}\quad II.\begin{cases}D>0,\\ f(2)=0,\\ x_v<2;\end{cases}\quad III.\begin{cases}D=0\\ x_v\geq 2.\end{cases}$$

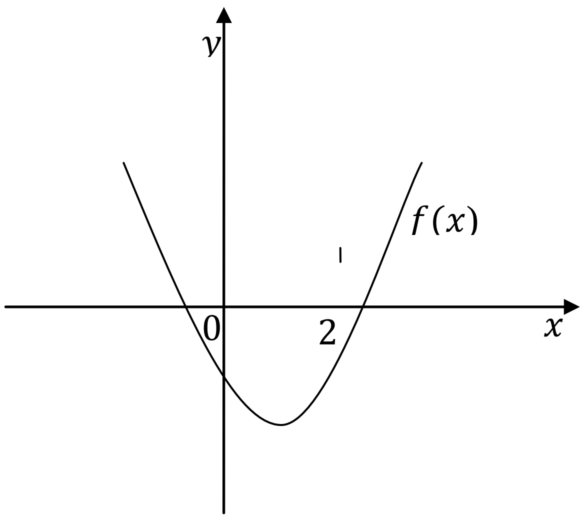


*Fig.*16

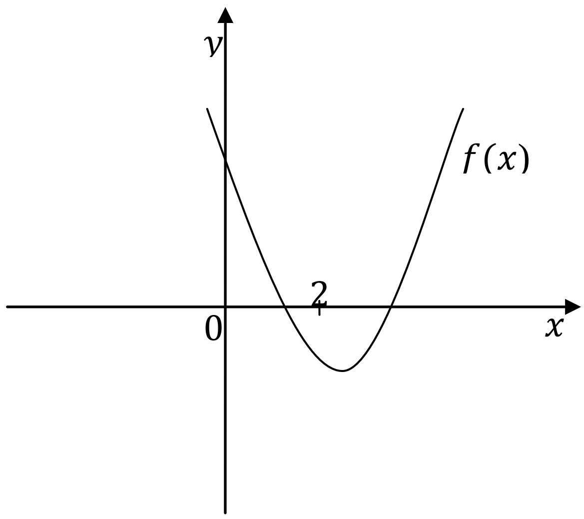
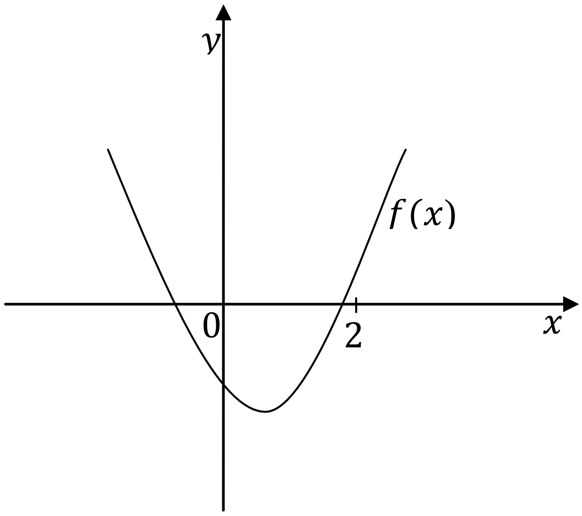
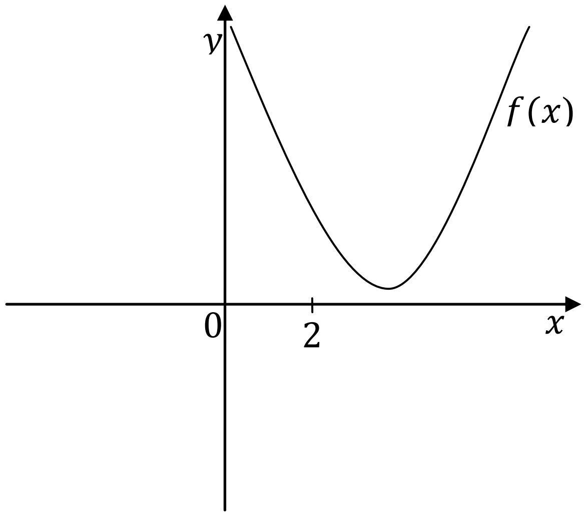


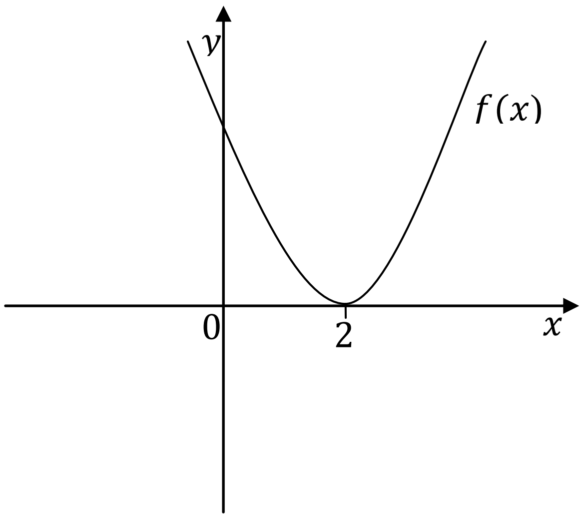
*Fig.*17



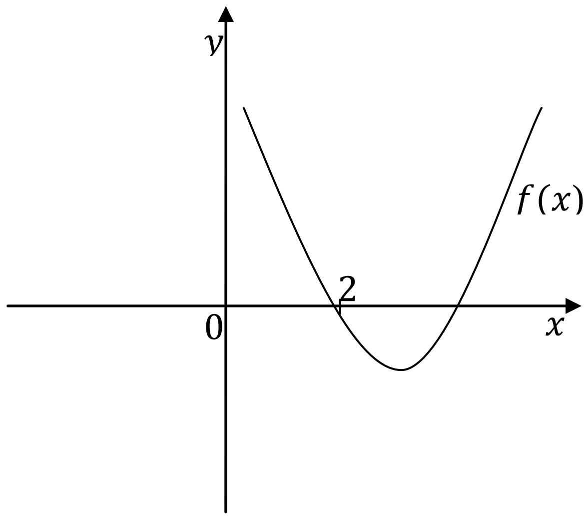
$fig. 18$



$fig. 19$



$Fig. 20$



$Fig. 21\ D > 0, f(2) = 0$

Să aflăm discriminantul ecuației $f(x) = 0$:

$$D = 4(b+1)^2 - 4 \cdot 3 = 4b^2 + 8b + 4 - 12 =$$

$$= 4(b^2 + 2b - 2) = 4\left(b + 1 - \sqrt{3}\right)\left(b + 1 + \sqrt{3}\right).$$

Vom cerceta acum fiecare din cele trei cazuri:

$$I. \begin{cases} D > 0, \\ f(2) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \left(-\infty; -1 - \sqrt{3}\right) \cup \left(-1 + \sqrt{3}; +\infty\right), \\ 4 - 4(b+1) + 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \in \left(-\infty; -1 - \sqrt{3}\right) \cup \left(-1 + \sqrt{3}; +\infty\right), \\ b > \dfrac{3}{4} \end{cases}.$$

Să comparăm numerele $-1+\sqrt{3}$ și $\frac{3}{4}$:

$-1+\sqrt{3} \vee \frac{3}{4}$,

$\sqrt{3} \vee \frac{7}{4}$,

$4\sqrt{3} \vee 7$,

$48 < 49$.

Prin urmare, soluția în primul caz este mulțimea tuturor valorilor $b > \frac{3}{4}$.

Să cercetăm al doilea caz. De fapt, cazul al doilea se cere cercetat separat de primul caz, deoarece este posibilă situația (vezi figura) cînd $D > 0$ și $f(2) = 0$, dar atunci avem două soluții (cazul $x_v > 2$).

$$II.\begin{cases} D > 0, \\ f(2) = 0, \\ x_v < 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \left(-\infty; -1-\sqrt{3}\right) \cup \left(-1+\sqrt{3}; +\infty\right) \\ b = \frac{3}{4}, \\ \frac{2(b+1)}{2} < 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad b = \frac{3}{4}.$$

$$III.\begin{cases} D = 0 \\ x_v \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \pm \sqrt{3} \\ b \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow b \in \emptyset.$$

Răspuns. $b \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

Exemplul. 3. 37 Rezolvați ecuația

$$\sqrt{a - \sqrt{x+a}} = x$$

Rezolvare. Ridicând ambele părți ale ecuației la pătrat și ținând cont de MVA, obținem sistemul

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt{x+a} = a - x^2, \\ x^2 \leq a, \\ a \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + a = (a - x^2)^2, \\ 0 \leq x \leq \sqrt{a}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - (2x^2+1)a + x^4 - x = 0, \\ 0 \leq x \leq \sqrt{a}, \end{cases}$$

Rezolvăm ecuația pătrată în raport cu parametrul a:

$a_{1,2} = (2x^2+1) \pm \left(\frac{2x+1}{2}\right) \Rightarrow a_1 = x^2 + x + 1, a_2 = x(x-1)$.

Prin urmare rămâne să rezolvăm două sisteme

$\begin{cases} x^2 + x + 1 = a, \\ 0 \leq x \leq \sqrt{a}, \end{cases}$ și $\begin{cases} x(x-1) = a, \\ 0 \leq x \leq a. \end{cases}$

Răspuns. $\emptyset$, pentru $a < 0$ și $0 < a < 1$;

0, pentru $a = 0$;

$\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$, pentru $a > 1$.

Exemplul 3. 38. Să rezolvăm ecuaţia

$$\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x+b} = 1.$$

Rezolvare. Trecem $\sqrt[3]{x+b}$ în partea dreaptă şi ridicăm la cub:

$\left(\sqrt[3]{x+a}\right)^3 = \left(1 + \sqrt[3]{x+b}\right)^3$;

$x + a = 1 + 3\sqrt[3]{x+b} + 3\left(\sqrt[3]{x+b}\right)^2 + b + x$;

$3\left(\sqrt[3]{x+b}\right)^2 + 3\sqrt[3]{x+b} + b - a + 1 = 0$

Rezolvăm ecuaţia primită ca o ecuaţie pătrată în raport cu $\sqrt[3]{x+b}$, obţinem:$\left(\sqrt[3]{x+b}\right)_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{12(a-b)-3}}{6}$ (1).

Ecuaţia (1) are rădăcini, dacă $a-b \geq \frac{1}{4}$ şi n-are rădăcini dacă $a-b<\frac{1}{4}$. Ridicăm la cub ambele părţi ale ecuaţiei primite şi obţinem: $x=\left(\frac{-3 \pm \sqrt{12(a-b)-3}}{6}\right)^{3}-b$.

Răspuns. Pentru $a-b \geq \frac{1}{4}$, $x=\left(\frac{-3 \pm \sqrt{12(a-b)-3}}{6}\right)^{3}-b$, iar pentru $a-b<\frac{1}{4}$, ecuaţia n-are rădăcini.

Exemplul 3. 39. Să rezolvăm ecuaţia:

$$2x^{3}+tx^{2}+x+2=0,$$

dacă una din rădăcinile acestei ecuaţii este numărul 1.

Rezolvare. Deoarece $x=1$ este rădăcina ecuaţiei date, avem:

$2+t+1+2=0$ sau $t=-5$.

Prin urmare, ecuaţia dată are forma:

$2x^{3}-5x^{2}+x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^{2}-3x-2)=0$.

Rădăcinile ecuaţiei $2x^{2}-3x-2=0$ sunt $x=-\frac{1}{2}$ şi $x=2$.

Răspuns. Pentru $t=-5$, $x \in \left\{-\frac{1}{2}; 1; 2\right\}$.

Exemplul 3. 40. Pentru ce valori a parametrului t suma a două rădăcini ale ecuaţiei $2x^{3}-x^{2}+(2t-1)x+t=0$ este egală cu1?

Rezolvare. Fie x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei date. Conform teoremei lui Vietè, avem $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}$. Deoarece $x_1+x_2=1$ obţinem că $x_3=-\frac{1}{2}$. Prin urmare, polinomul $2x^{3}-x^{2}+(2t-1)x+t$ este divizibil la $2x+1$.

Astfel ecuaţia dată ia forma:

$(2x+1)(x^{2}-x+t)=0$.

Ecuaţia $x^2 - x + t = 0$ are rădăcinile $x_1 = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2}$ şi $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-4t}}{2}$. Aceste rădăcini sunt reale pentru $t \leq \frac{1}{4}$ şi suma acestor rădăcini într-adevăr este egală cu 1.

Răspuns. $t \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$.

Exemplul. 3. 41. Pentru ce valori ale parametrului a suma pătratelor rădăcinilor ecuației $4x^2 - 28x + a = 0$ este egală cu $22{,}5$?

Rezolvare. Conform teoremei lui Vietè $x_1 + x_2 = 7$, $x_1x_2 = \frac{a}{2}$.

Prin urmare, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 49 - \frac{a}{2} = 22{,}5$. Din ultima relație obținem $a = 53$. Acesta însă nu este răspunsul, deoarece ecuația dată are soluție doar pentru $D \geq 0$, adică pentru $28^2 - 16a \geq 0, a \leq 49$. Astfel numărul 53 nu poate fi răspunsul, deoarece pentru această valoare a parametrului a ecuația dată nu are rădăcini.

Exemplul 3. 42. De rezolvat sistemul

$$\begin{cases} x + 3ay = 1, \\ ax - 3ay = 2a + 1. \end{cases}$$

Rezolvare. Vom rezolva acest sistem cu ajutorul determinanţilor.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3a \\ a & -3a \end{vmatrix} = -3a(a+1),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3a \\ 2a+1 & -3a \end{vmatrix} = -6a(a+1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2a+1 \end{vmatrix} = a + 1.$$

Cazul I. $\Delta \neq 0$, adică $a \neq 0$, $a \neq -1$.

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 2,$

$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{1}{3a}$.

Cazul II. $\Delta = 0$, adică $a = 0$ sau $a = -1$.

1. Dacă $a = 0$ atunci sistemul iniţial are forma:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

şi prin urmare, n-are soluţii.

2. Dacă $a = -1$, atunci sistemul iniţial are forma:

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x - 3y = 1 \Leftrightarrow x = 3y + 1$$

şi prin urmare sistemul are o infinitate de soluţii.

Răspuns: Pentru $a \neq 0$, $a \neq -1$;$\{(2, -\frac{1}{3a})\}$

pentru $a = 0$, $\emptyset$; pentru $a = -1$, $\{(3y + 1, y) / \, y \in R\}$.

Exemplul 3. 43. Pentru ce valori a parametrului m ecuația $4^{2x} - 4^{x+1} - 3m + m^2 = 0$ are o singură rădăcină?

Rezolvare. Se observă uşor că ecuația dată este o ecuație pătrată în raport cu 4^x şi prin urmare, $4^x = 2 \pm \sqrt{4 + 3m - m^2}$, unde $4 + 3m - m^2 \geq 0$, adică $-1 \leq m \leq 4$.

Dacă $4 + 3m - m^2 > 0$, atunci ecuația

$$4^x = 2 + \sqrt{4 + 3m - m^2}$$

întotdeauna are o singură rădăcină. Pentru ca această rădăcină să fie unică, este necesar ca ecuația $4^x = 2 - \sqrt{4 + 3m - m^2}$ să nu aibă rădăcini, dar aceasta poate fi numai atunci când $\sqrt{4 + 3m - m^2} \geq 2$. Pentru a rezolva ultima inecuație alcătuim sistemul:

$$\begin{cases} 4+3m-m^2 \geq 0 \\ \sqrt{4+3m-m^2} \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2-3m+4 \leq 0 \\ m^2-3m-4 \leq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2-3m+4 \leq 0 \\ m^2-3m \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq m \leq 3$$

Răspuns. $\{-1; 4\} \cup [0; 3]$.

Exemplul 3.44. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} mx+2y=m-1, \\ (10-m)x+(m-1)y=3(1-m). \end{cases}$$

Rezolvare. Din prima ecuație $y=\frac{1}{2}(m-1-mx)$.

Înlocuim această valoare pentru y în a doua ecuație și obținem:

$(10-m)x+\frac{1}{2}(m-1)(m-1-mx)=3(1-m)$;

$20x-2mx+(m-1)(m-1-mx)+6(m-1)=0$;

$20x-2mx+(m-1)(m+5-mx)=0$;

$20x-2mx-(m-1)mx+(m-1)(m+5)=0$;

$x(20-2m-m^2+m)+(m-1)(m+5)=0$;

$(m+5)(m-1)=(m-4)(m+5)x$.

Dacă $m=-5$, atunci din sistemul inițial avem:

$$\begin{cases} -5x+2y=-6 \\ 15x-6y=18 \end{cases}.$$

Din acest sistem obținem $5x-2y=6$ sau $y=-3+\frac{5}{2}x$.

Fie $x=2a$, atunci $y=-3+5a$, unde $a \in \mathrm{R}$ în acest caz sistemul are o infinitate de soluții de forma

$$(2a,-3+5a), a \in R.$$

Pentru $m=4$ sistemul inițial are forma

$$\begin{cases} 4x+2y=3 \\ 6x+3y=-9 \end{cases}, \text{ sau } \begin{cases} 2x+y=\frac{3}{2} \\ 2x+y=-3 \end{cases}.$$

Evident în acest caz sistemul n-are soluții.

Pentru $m \neq 4, m \neq -5$ obținem:

$x=\frac{m-1}{m-4}, y=\frac{-2(m-1)}{m-4}$.

Răspuns. $\emptyset$, pentru $m = 4$;
$(2a, -3 + 5a), a \in$ R pentru $m = -5$;
$\left(\frac{m-1}{m-4}, \frac{-2(m-1)}{m-4}\right)$ pentru $m \neq 4, m \neq 5$.

Exemplul 3. 45. Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x^3 = 2tx + ty \\ y^3 = tx + 2ty \end{cases} \quad (1).$$

Rezolvare. Înlocuim prima ecuaţie prin suma ecuaţiilor sistemului, iar a doua ecuaţie o înlocuim cu diferenţa acestor ecuaţii.

Astfel obţinem un sistem echivalent cu cel iniţial:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 3t(x + y) \\ x^3 - y^3 = t(x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 3t) = 0 \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3t) = 0 \end{cases}$$

Ultimul sistem este echivalent cu totalitatea a 4 sisteme:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0. \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = t^{\cdot} \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3t, \\ x - y = 0. \end{cases} & (4) \\ \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3t, \\ x^2 + xy + y^2 = t. \end{cases} & (5) \end{array}\right.$$

Din sistemul (2) determinăm: $x_1 = y_1 = 0$, care şi este soluţie a sistemului (1) pentru orice $t \in R$.

Din (3) avem:

$$\begin{cases} y = -x \\ x^2 = t \end{cases} (6).$$

Pentru sistemul (6) valoarea de control pentru parametrul t este $t=0$, deoarece pentru $t<0$ sistemul dat n-are rădăcini reale, iar pentru $t>0$, obţinem:

$$\begin{cases} x_2=\sqrt{t}, \\ y_2=-\sqrt{t} \end{cases};\begin{cases} x_3=-\sqrt{t}, \\ y_3=\sqrt{t}. \end{cases}$$

Din sistemul (4), avem:

$$\begin{cases} y=x, \\ x^2=3t. \end{cases}$$

Aici, judecînd analogic ca şi în cazul precedent, obţinem:

$$\begin{cases} x_4=\sqrt{3t}, \\ y_4=\sqrt{3t} \end{cases}; \quad \begin{cases} x_5=-\sqrt{3t}, \\ y_5=-\sqrt{3t} \end{cases}$$

Sistemul (4) este simetric.

Înlocuim

$\begin{cases} x+y=u \\ xy=v \end{cases}$, obţinem: $\begin{cases} u^2-3v=3t \\ u^2-v=t \end{cases}$ sau $\begin{cases} u=0 \\ v=-a \end{cases}$.

Prin urmare, avem:

$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=-t \end{cases}$ sau $\begin{cases} y=-x \\ x^2=t \end{cases}$.

Acest sistem coincide cu sistemul(6), care a fost deja rezolvat.

Răspuns.

1) dacă $t\le 0$, atunci (0,0);

2) dacă $t>0$,atunci:

(0,0); $(\sqrt{t},-\sqrt{t})$; $(-\sqrt{t},\sqrt{t})$; $(\sqrt{3t};\sqrt{3t})$; $(-\sqrt{3t};-\sqrt{3t})$.

Exemplul 3. 46. Pentru ce valori a parametrilor a şi b sistemul

$$\begin{cases} (1+a)x+(a+b)y=b-a \\ (5+a)x+2(a+b)y=b-1 \end{cases}$$

este nedeterminat?

Rezolvare.

Se ştie că un sistem de două ecuaţii liniare cu două variabile $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ este nedeterminat, dacă: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Prin urmare, pentru ca sistemul dat să fie nedeterminat este necesar să se satisfacă egalitatea

$(a + b)(5 + a) - 2(a + b)(1 + a) = 0,$

$(a + b)(3 - a) = 0,\ a = -b$ şi $a = 3$

Dacă $a = -b$, atunci sistemul dat are forma:

$\begin{cases} (1 + a)x = -2a \\ (5 + a)x = -a - 1 \end{cases}.$

Pentru ca să existe x şi să satisfacă ambelor ecuaţii din sistemul primit este suficient să se satisfacă egalitatea $\frac{2a}{1+a} = \frac{1+a}{5+a}$ sau $a^2 + 8a - 1 = 0,\ a = -4 \pm \sqrt{17}$.

Dacă $a = 3$, atunci sistemul dat are forma:

$\begin{cases} 4x + (3 + b)y = b - 3 \\ 8x + 2(3 + b)y = b - 1 \end{cases}.$

Pentru ca acest sistem să fie nedeterminat este suficient să se satisfacă egalitatea: $4(b - 1) = 8(b - 3)$ sau $b = 5$.

Răspuns. $a - b == -4 \pm \sqrt{17}$ sau $a = 3, b = 5$.

Exemplul 3. 47. Pentru ce valori a parametrului$t$ sistemul

$$\begin{cases} -4x + ty = 1 + t \\ (6 + t)x + 2y = 3 + t \end{cases} \quad (1)$$

n-are soluţii?

Rezolvare. Sistemul dat este incompatibil atunci şi numai atunci, cînd $-\frac{4}{6+t} = \frac{t}{2} \neq \frac{1+t}{3+t}$ (2).

Din ecuaţia $-\frac{4}{6+t} = \frac{t}{2}$, avem $t_1 = -2;\ t_2 = -4$

Din ecuaţia $\frac{t}{2} = \frac{1+t}{3+t}$ determinăm $t_3 = 1;\ t_4 = -2$.

Prin urmare, condiţia $\frac{t}{2} \neq \frac{1+t}{3+t}$ se satisface pentru $t \neq 1$; $t \neq -2$.

Din sistemul obţinut

$$\begin{cases} t = -2;\ t = -4 \\ t \neq 1 \\ t \neq -2 \end{cases},$$

urmează că condiţia (2) este echivalentă cu egalitatea $t = -4$.

Aşa dar, sistemul n-are soluţii pentru $t = -4$.

Răspuns. $t = -4$.

Exemplul 3. 48. Pentru ce valori a parametruluit t produsul xy a căreiva soluţii a sistemului

$$\begin{cases} x + y = t - 1 \\ x^2 + y^2 = 5t^2 - 3t + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$ primeşte cea mai mare valoare?

Rezolvare. Din prima ecuaţie determinăm $y = t - 1 - x$ şi înlocuim în a doua ecuaţie. Avem:

$x^2 + (t - 1 - x)^2 = 5t^2 - 3t + \frac{1}{2}$ sau

$2x^2 - 2(t - 1)x - 4t^2 + t + \frac{1}{2} = 0;$

$x^2 - (t - 1)x - 2t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} = 0$ (2).

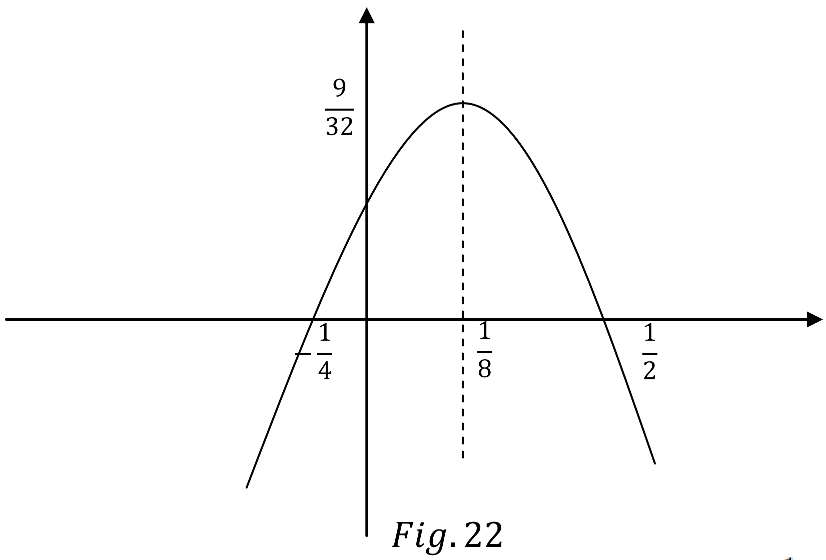
Deoarece sistemul (1) este simetric în raport cu x şi y, atunci produsul soluţiilor acestui sistem este egal cu termenul liber al ecuaţiei reduse (2). Aşa dar, $xy = -2t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$. Prin urmare, problema se reduce la determinarea celei mai mari valori a trinomului $-2t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$ în condiţia existenţei rădăcinilor acestui trinom, adică în condiţia cînd discriminantul D este nenegativ.

Avem:

$D = (t-1)^2 - 4\left(-2t^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = t^2 - 2t + 1 + 8t^2 - 2t -$
$-1 = 9t^2 - 4t = t(9t-4).$

Prin urmare, $D \geq 0$, dacă $t \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{4}{9};\ +\infty\right)$.

Rămîne să determinăm valoarea cea mai mare a trinomului $-2t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$ pe mulţimea $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{4}{9};\ +\infty\right)$. Pentru aceasta construim graficul acestui trinom în sistemul toy. Vîrful acestei parabole are coordonatele $\left(\frac{1}{8}; \frac{9}{32}\right)$ şi intersectă axele abciselor în punctele $\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$ şi $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, (fig 22).



$Fig. 22$

Calculăm valorile trinomului $P = -2t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$ pentru $t = 0$ şi $t = \frac{4}{9}$. Avem $P(0) = \frac{1}{4}$; $P\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{25}{324}$. Evident, $\frac{1}{4} > \frac{25}{324}$ şi trinomul $P(t) = -2t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$ primeşte valoarea cea mai mare pe mulţimea $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{4}{9};\ +\infty\right)$ în punctul $t = 0$. Prin urmare, produsul xy a căreiva soluţii a sistemului (1) primeşte valoarea cea mai mare pentru $t = 0$.

Răspuns. $t = 0$.

Exemplul 3. 49 . Să determinăm numărul soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} x - y + z = t, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12. \end{cases}$$

Rezolvare. Observăm că pentru orice t fixat prima ecuaţie reprezintă un plan. Distanţa de la originea de coordonate pînă la acest plan este nu altceva decît înălţimea piramidei corespunzătoare şi anume $\rho = \frac{|t|}{\sqrt{3}}$. A doua ecuaţie reprezintă o suprafaţă sferică cu raza $R = 2\sqrt{3}$, centrul căreia coincide cu originea de coordonate.

Dacă $\rho = R$, adică $\frac{|t|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}; t = \pm 6$, atunci sistemul dat are o singură soluţie.

Dacă $\rho < R$, adică $-6 < t < 6$, atunci sistemul are o infinitatea de soluţii. Dacă $t > 6$; $t < -6$, atunci sistemul n-are soluţii.

Răspuns. Dacă $|t| < 6$ sistemul are o infinitate de soluţii. Dacă $t = \pm 6$ sistemul are o soluţie. Dacă $|t| > 6$, sistemul n-are soluţii.

Exemplul 3. 50. De cercetat sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 4(x + y - 2) = \left(1 + \frac{\left|\cos\frac{\pi a}{2}\right|}{\cos\frac{\pi a}{2}}\right)\left(2x - y^2 - \frac{20}{9}\right), \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

dacă $|a| \neq 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Rezolvare. Acest sistem urmează a fi rezolvat prin metoda grafică. Ecuaţia a doua din sistem este ecuaţia unui cerc. Prima ecuaţie îşi schimbă forma în dependenţă de valoarea parametrului a.

Dacă $\cos\frac{\pi a}{2} > 0$, adică, dacă

$$0 \leq a < 1, 4n - 1 < |a| < 4n + 1$$

$n = 1,2, \ldots,$ atunci prima ecuaţie are forma:$4(x + y - 2) =$
$$= 2\left(2x - y^2 - \frac{20}{9}\right) \Leftrightarrow 4y - 8 = -2y^2 - \frac{20}{9} \Leftrightarrow y^2 + 2y -$$
$$-\frac{16}{9} = 0$$
Din ultima ecuaţie, avem: $y_1 = \frac{2}{3}, y_2 = -\frac{8}{3}$.

Prin urmare, pentru $4n - 1 < |a| < 4n + 1$, $n = 1, 2, \ldots,$ problema se reduce la determinarea numărului de puncte de intersecţie a cercului $x^2 + y^2 = a^2$ cu dreptele paralele $y = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{8}{3}$.

Dacă $\cos\frac{\pi a}{2} < 0$, adică, dacă $4n - 3 < |a| < 4n - 1$, $n = 1, 2, \ldots,$ atunci prima ecuaţie din sistem se reduce la ecuaţia dreptei $x + y - 2 = 0$.

În acest caz problema se reduce la determinarea numărului de puncte de intersecţie a cercului $x^2 + y^2 = a^2$ cu dreapta $x + y - 2 = 0$.

Răspuns. Pentru $0 \leq |a| < \frac{2}{3}$, $1 < |a| < \sqrt{2}$ sistemul n-are soluţii,

pentru $|a| = \frac{2}{3}$, $|a| = \sqrt{2}$ sistemul are o soluţie,

pentru $\frac{2}{3} < |a| < 1$, $\sqrt{2} < |a| < 3$, $4n - 3 < |a| < 4n - 1$, $n = 2, 3, \ldots$ sistemul are două soluţii,

Pentru $4n - 1 < |a| < 4n + 1$, $n = 1, 2, \ldots,$ sistemul are patru soluţii.

Exemplul 3.51. Pentru ce valori a parametrului m sistemul $\begin{cases} mx - 4y = m + 1 \\ 2x + 2my = -1 \end{cases}$ are soluţii $x \in R^+, y \in R^-$?

Rezolvare. Calculăm determinantul principal Δ şi determinanţii auxiliari Δ_x şi Δ_y.

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & -4 \\ 2 & 2m \end{vmatrix} = 2m^2 + 8 = 2(m^2 + 4).$$

Evident, $\Delta \neq 0$ pentru orice valoare reală a parametrului m. Prin urmare, sistemul dat va avea o singură soluţie pentru orice $m \in R$.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m+1 & -4 \\ -1 & 2m \end{vmatrix} = 2m^2 + 2m - 4 = 2(m+2)(m-1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -m - 2m - 2 = -(3m+2).$$

Aşa dar, $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{(m+2)(m-1)}{m^2+4}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{3m+2}{2(m^2+4)}$.

Determinăm valorile parametrului m care satisfac condiţiile $x > 0$ şi $y < 0$. Pentru aceasta vom rezolva sistemul

$$\begin{cases} \frac{(m+2)(m-1)}{m^2+4} > 0 \\ -\frac{3m+2}{2(m^2+4)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)(m-1) > 0 \\ (3m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ m > -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Din ultimul sistem aflăm că $m > 1$.

Răspuns. $m > 1$.

Exemplul 3. 52. De determinat toate valorile parametrilor a și b pentru care sistemul $\begin{cases} \left|\frac{x^y}{x^y+1}\right| = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$ are o singură soluție $(x, y), x > 0$.

Rezolvare. Să observăm, dacă perechea (x_0, y_0) satisface sistemul, atunci și perechea $(x_0, -y_0)$ deasemenea satisface acest sistem. Pentru a doua ecuație acest fapt este evident, dar pentru prima ecuație acest fapt rezultă din egalitățile

$$\left|\frac{x_0^{-y_0}-1}{x_0^{-y_0}+1}\right| = \left|\frac{1-x_0^{y_0}}{x_0^{y_0}} \cdot \frac{x_0^{y_0}}{1+x_0^{y_0}}\right| = \left|\frac{x_0^{y_0}-1}{x_0^{y_0}+1}\right|.$$

Prin urmare, dacă sistemul are o singură soluție, atunci $y_0 = 0$ și $a = 0$.

În așa fel obținem sistemul $\begin{cases} x^y = 1 \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$.

Evident, $b > 0$. Din prima ecuație a ultimului sistem avem $y = 0$, sau $x = 1$. Dacă $y = 0$, atunci din a doua ecuație avem $x = \sqrt{b}$ și deci avem soluția $(\sqrt{b}; 0)$.

Dacă însă $x = 1$, atunci din a doua ecuație obținem $y^2 = b - 1$. Dacă $b > 1$, atunci obținem încă două soluții: $(1, -\sqrt{b-1})$ și $(1, \sqrt{b-1})$.

Dacă $b < 0$, atunci soluții nu există.

Dacă $b = 1$ obținem aceiași soluție $(1{,}0)$.

Răspuns. $a = 0, 0 < b < 1$.

Exemplul 3. 53. Pentru ce valori a parametrului p sistemul $\begin{cases} x^2 - (2p+1)x + p^2 - 3 = y \\ y^2 - (2p+1)y + p^2 - 3 = x \end{cases}$ are o singură soluție (x, y)?

Rezolvare. Să observăm dacă acest sistem are soluția $x = m, y = n$, atunci și sistemul dat are și soluția $x = n, y = m$ sau $x = y$. Din aceste considerente obținem ecuația

$$x^2 - (2p+1)x + p^2 - 3 = x$$

sau

$$x^2 - 2(p+1)x + p^2 - 3 = 0$$

și conform condițiilor inițiale ultima ecuație trebuie să aibă o singură soluție. Prin urmare,

$\frac{D}{4} = (p+1)^2 - (p^2 - 3) = p^2 + +2p + 1 - p^2 + 3 = 2p + 4 = 0, p = -2.$

Înlocuim $p = -2$ în sistemul inițial și obținem sistemul $\begin{cases} x^2 + 3x + 1 = y \\ y^2 + 3y + 1 = x \end{cases}$. Scăzînd parte cu parte a doua ecuație din prima ecuație a ultimului sistem avem $(x - y)(x + y + 4) = 0$.

Cazul I. $x - y = 0$. În cazul dat obținem $x = y = -1$.
Cazul II. $x + y + 4 = 0$, $y = -x - 4$. Înlocuim valoarea y în prima ecuație și obținem ecuația $x^2 + 4x + 5 = 0$. Această ecuație nu are soluții.
Răspuns. $p = -2$.

Exemplul 3. 54. Pentru orice a, b și c de rezolvat sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{b}{z} + xz = c \\ \frac{b}{y} - \frac{c}{x} + xy = a \\ \frac{c}{z} - \frac{a}{y} + yz = b \end{cases}$$

Rezolvare. Sistemul dat este un sistem liniar în raport cu parametrii a, b și c. La început ne eliberăm în ultimile două ecuații de numitori și obținem sistemul

$$\begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{b}{z} + xz = c \\ bx - cy + x^2y^2 = axy \\ cy - az + y^2z^2 = bzy \end{cases}$$

Înlocuim valoarea c din prima ecuație în celelalte două ecuații și după unele transformări simple obținem sistemul

$$\begin{cases} -a(1 + x^2)yz + b(xz + y)x = x^2z^2y - x^3y^2z \\ a(y - xz)z - b(1 + z^2)xy = +x^2z^2y - xy^2z^3 \end{cases}.$$

Înmulțim ambele părți ale primei ecuații la $(1 + z^2y)$, iar a doua ecuație o înmulțim la $(xz + y)$ și adunăm ecuațiile obținute. În rezultat după unele transformări simple, obținem:

$$a(-(1 + x^2)(1 + z^2)y^2z + (y - xz)(y + xz)z) = xyz\big((xz - x^2y)(1 + z^2)y - (xz + yz^2)(xz + y)\big)$$

sau

$a(-x^2y^2z^2 - x^2y^2z - y^2z^3 - y^2z + y^2z - x^2z^3) = xyz(xyz + xyz^3 - x^2y^2 - x^2y^2z^2 - x^2z^2 - xyz - xyz^3 - y^2z^2)$

sau

$az(x^2y^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2) = xyz(x^2y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2)$

Prin urmare, $a = xy$. Ușor ne convingem că $b = yz$ și $c = xz$. Astfel, obținem sistemul:

$$\begin{cases} a = xy \\ b = yz \\ c = xz \end{cases}$$

Înmulțim ecuațiile acestui sistem parte cu parte, obținem $abc = x^2y^2z^2$. Deoarece $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ urmează că $abc > 0$ și $xyz = \pm\sqrt{abc}$.

Răspuns. $\left(\frac{\pm\sqrt{abc}}{b}; \frac{\pm\sqrt{abc}}{a}; \frac{\pm\sqrt{abc}}{c}\right)$.

Exemplul 3. 55. De rezolvat sistemul

$$\begin{cases} mx + my + (m+1)z = m, \\ mx + my + (m-1)z = m, \\ x + (m+2)z = 1 - m. \end{cases}$$

Rezolvare. Calculăm determinantul principalΔși cei auxiliari $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & m & m+1 \\ m & m & m-1 \\ 1 & 0 & m+2 \end{vmatrix} = m^2(m+2) + m(m-1) - m(m+1) - m^2(m+2) = -2m$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m & m & m+1 \\ m & m & m-1 \\ 1-m & 0 & m+2 \end{vmatrix} = m^2(m+2) - m(m-1)^2 + m(m^2-1) - m^2(m+2) = 2m(m-1)$$

.

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & m & m+1 \\ m & m & m-1 \\ m & 1-m & m+2 \end{vmatrix} = m^2(m+2) - m(m^2-1) + m(m-1) - m(m+1) + m(m-1)^2 - m^2(m+2) = -2m^2$$
.

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & m & m \\ m & m & m \\ 1 & 0 & 1-m \end{vmatrix} = m^2(1-m) + m^2 - m^2 - m^2(1-m) = 0$$
.

Dacă $\Delta \neq 0$, adică $m \neq 0$, atunci sistemul dat are o sigură soluţie şi anume: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1 - m;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = m;\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

Dacă însă $m = 0$, atunci $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. În acest caz sistemul dat este compatibil nedeterminat şi are o infinitate de soluţii $\{(1, y, 0)\ /\ y \in R\}$.

Răspuns.

Pentru $m \neq 0, x = 1 - m, y = m, z = 0$;

pentru $m = 0, \{(1, y, 0)/y \in R\}$.

Exemplul 3. 56. În dependență de valorile parametrului a rezolvați sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{a+x} - \sqrt{y+b} = 1, \\ \sqrt{a+y} - \sqrt{x+b} = 1. \end{cases}$$

Rezolvare. Dacă ridicăm ambele părți ale ambelor ecuații la pătrat, obținem sistemul

$$\begin{cases} x + a + y + b - 1 = 2\sqrt{(a+x)(y+b)}, \\ y + a + x + b - 1 = 2\sqrt{(a+y)(x+b)}. \end{cases}$$

Din acest sistem urmează, că $(x+a)(y+b) = (x+b)(y+a)$ sau $(a-b)(x-y) = 0$.

Să cercetăm cazul $a = b$. În acest caz sistemul inițial are forma

$$\begin{cases}\sqrt{a+x}-\sqrt{y+a}=1,\\ \sqrt{a+y}-\sqrt{x+a}=1.\end{cases}$$

Evident, acest sistem nu este compatibil.

Să cercetăm acum cazul $x = y$. În acest caz în loc de sistem avem ecuația $\sqrt{x+a} = \sqrt{x+b} + 1$. Ambele părți a acestei ecuații sunt nenegative, de aceea ridicând la pătrat ambele părți primim ecuația echivalentă $\sqrt{x+b} = \frac{a-b-1}{2}$. Ultima ecuație poate avea loc numai pentru $a - b \geq 1$ și atunci:

$x = \frac{(a-b)^2-2(a+b)+1}{4}$.

Răspuns.

Dacă $a - b < 1$, atunci nu-s soluții;

Dacă $a - b \geq 1$, atunci $x = y = \frac{(a-b)^2-2(a+b)+1}{4}$.

Exemplul 3. 57. Aflați toate valorile parametrului b, pentru care sistemul de ecuații $\begin{cases} bx+2y=b+2\\ 2bx+(b+1)y=2b+4\end{cases}$, are cel puțin o soluție.

Rezolvare. Transformăm sistemul dat în felul următor:

$$\begin{cases} bx+2y=b+2,\\ 2bx+(b+1)y=2b+4,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{b+2-bx}{2},\\ 4bx+(b+1)(b+2-bx)=4b+8,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{b+2-bx}{2},\\ 4bx+b^2+b+2b+2-b^2x-bx=4b+8,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{b+2-bx}{2}, \\ bx(3-b) + b^2 - b - 6 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{b+2-bx}{2}, \\ bx(3-b) = (3-b)(b+2). \end{cases}$$

Din a doua ecuație a ultimului sistem conchidem că pentru $b \neq 0, b \neq 3$ soluția sistemului există și este unică.

Pentru $b = 3$ a doua ecuație se transformă într-o identitate și prin urmare sistemul va avea o infinitate de soluții $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{5-3t}{2}, \end{cases}$ unde $t \in R$.

Pentru $b = 0$ soluții nu există, deoarece partea stângă a ecuației a doua a ultimului sistem este egală cu zero, iar partea dreaptă este diferită de zero.

Răspuns. $b \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Exemplul 3. 58. Pentru ce valori ale parametrului a sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a), \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases}$$

are exact două soluții?

Rezolvare. Să scriem sistemul inițial de ecuații în felul următor:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a), \\ (x+y-\sqrt{14})(x+y+\sqrt{14}) = 0 \end{cases}.$$

Prima ecuație a acestui sistem determină cercuri omotetice cu centrul de omotetie $O(0,0)$ și razele $r = \sqrt{2(1+a)}$. A doua ecuație reprezintă două drepte:

$y = -x + \sqrt{14}, y = -x - \sqrt{14}$ (vezi Fig. 23).

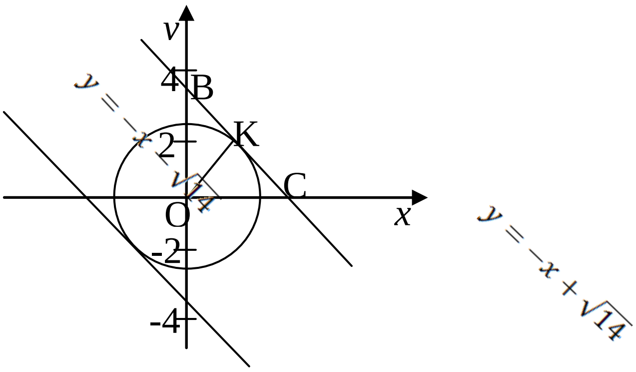


Fig 23.

Sistemul va avea exact două soluții dacă cercul va fi tangent la două drepte. Să determinăm parametrul$a$. În $\triangle OBC$ ipotenuza $BC = \sqrt{\sqrt{14}^2 + \sqrt{14}^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$, iar $\sin B = \frac{OC}{BC} = \frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. În $\triangle OBK$ $\sin B = \frac{R}{OB} = \frac{R}{\sqrt{14}}$. Prin urmare, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{14}}$,$R = \sqrt{7}$, dar atunci $R^2 = 2(1+a)$, $7 = 2(1+a)$, $a = \frac{5}{2}$.

Răspuns. $a = \frac{5}{2}$.

Exemplul 3.59. Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} ax + y = 2, \\ x + ay = 2a. \end{cases}$$

Rezolvare. Calculăm determinanţii sistemului:

$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1,$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2a & a \end{vmatrix} = 2a - 2a = 0,$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 2a \end{vmatrix} = 2a^2 - 2.$

1. Fie $\Delta = a^2 - 1 \neq 0$, adică $a \neq \pm 1$. În acest caz sistemul are o singură soluţie:

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{a^2-1} = 0$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2a^2-2}{a^2-1} = 2.$

2. Fie $\Delta = a^2 - 1 = 0$, adică $a = \pm 1$. În acest caz $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. Prin urmare, în acest caz sistemul dat este compatibil nedeterminat.

Pentru $a = 1$ sistemul dat are forma:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Aşadar, pentru $a = 1$, sistemul are o infinitate de soluţii şi anume: orice pereche de numere $(x; y)$ pentru care are loc relaţia $x + y = 2$.

3. Pentru $a = -1$, avem:

$$\begin{cases} -x + y = 2, \\ x - y = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -2, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

În acest caz, orice pereche de numere $(x; y)$ ce satisfac relaţiei $x - y = -2$, este soluţie a sistemului dat.

Răspuns: Pentru $a \neq \pm 1$ sistemul are o singură soluţie $x = 0, y = 2$;

Pentru $a = 1$ sistemul are soluţii orice pereche de numere $(x; y)$ pentru care are loc relaţia $x + y = 2$;

Pentru $a = -1$ sistemul are soluţii orice pereche de numere $(x; y)$ pentru care are loc relaţia $x - y = -2$.

Exemplul 3.60. Pentru orice valori a parametrilor a, b şi c de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{z} + xz = c, \\ \dfrac{b}{y} - \dfrac{c}{x} + xy = a, \\ \dfrac{c}{z} - \dfrac{a}{y} + yz = b. \end{cases}$$

Rezolvare. Observăm că sistemul dat este liniar în raport cu parametrii a, b şi c. Să rezolvăm acest sistem în raport cu aceşti parametri. Pentru aceasta ne eliberăm la început în ecuaţiile a doua şi a treia de numitori şi înlocuim în aceste ecuaţii pe c, exprimat din prima ecuaţie. După unele transformări obţinem sistemul

$$\begin{cases}-a(1+x^2)yz+b(xz+y)x=x^2z^2y-x^3y^2z,\\ a(z-xz)z-b(1+z^2)xy=-x^2z^2y-xy^2z^3.\end{cases}$$

Pentru a ne elibera de b vom înmulţi parte cu parte ecuaţiile acestui sistem corespunzător la $(1+z^2)y$ şi $(xz+y)$, iar apoi adunîndule, obţinem:

$a(-(1+x^2)(1+z^2)y^2z+(y-xz)(y+xz)z)=xyz\big((xz-$

$x2y1+z2y--xz+yz2xz+y$,

$a(-x^2y^2z^3-x^2y^2z-y^2z^3-y^2z+y^2z-x^2z^3)=x\langle z(xyz+$

$xyz3-x2y2--x2z2y2-x2z2-xyz-xyz3-y2z2$ sau

$az(x^2y^2z^2+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)==xyz(x^2y^2z^2+x^2z^2+$

$x2y2+y2z2$.

Prin urmare, $C=xy$. Acum putem determina $b=yz$ şi $c=xz$. Astfel obţinem sistemul

$$\begin{cases}a=xy,\\ b=yz,\\ c=xz.\end{cases}$$

Înmulţind parte cu parte aceste ecuaţii obţinem $abc=x^2y^2z^2$. Prin urmare $abc>0$ şi $xyz=\pm\sqrt{abc}$.

Răspuns. $\left(\frac{\pm\sqrt{abc}}{b},\frac{\pm\sqrt{abc}}{a},\frac{\pm\sqrt{abc}}{c}\right)$.

Probleme propuse pentru lucrul independent

Rezolvaţi următoarele ecuaţii:

1. $(t^2 - 1) \cdot x = t + 1.$

Răspuns: pentru $t = -1$; $x \in R$; pentru $t = 1$ ecuaţia n-are soluţie;

Pentru $t \neq \pm 1$; $x = \frac{1}{t-1}$.

2. $\frac{x}{t} + \frac{t}{3} + \frac{x+t}{t+3} = 1.$

Răspuns: Pentru $t = 0$, ecuaţia n-are rădăcini; pentru $t = 1$, $x = -5$;

pentru $t = -\frac{2}{3}$, $x = 1$; pentru $\begin{cases} t \neq -\frac{2}{3} \\ t \neq 0 \\ t \neq 1 \end{cases}$, $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{t+2}{2}$.

3. $\frac{3x-2}{t^2-2t} + \frac{x-1}{t-2} + \frac{2}{t} = 0.$

Răspuns: Pentru $t = -3, t = 0$, $t = 2$ ecuaţia n-are rădăcini; pentru $t \neq -3, t \neq 0, t \neq 2, x = \frac{6-t}{t+3}$.

4. $x^2 - 4tx + 3t^2 = 0$

Răspuns: Dacă $t = 0$, atunci $x = 0$; dacă $t \neq 0$, atunci $x_1 = t$, $x_2 = 3t$.

5. $tx^2 - (1 - 2t)x + t - 2 = 0.$

Răspuns: Dacă $t = 0$, atunci $x = -2$; dacă $t < -\frac{1}{4}$, atunci ecuaţia n-are rădăcini; dacă $t = -\frac{1}{4}$, atunci $x = -3$; dacă $-\frac{1}{4} < t < 0$, atunci $x_{1,2} = \frac{1-2t\pm\sqrt{4t+1}}{2t}$.

6. $\frac{x^2}{x-2t} + \frac{2tx-(t-1)(t+2)}{2t-x} + 1 = 0.$

Răspuns: Dacă $t = -2, t = 1$, atunci $x = -1$;

Dacă $t \neq -2, t \neq 1$, atunci $x_1 = t + 1, x_2 = t - 2$.

7. $\frac{2x-1}{x-t}+\frac{2x}{t}=\frac{tx-2}{t^2-tx}$.

Răspuns: Dacă $t=0$, ecuaţia n-are rădăcini; dacă $t=1$, atunci $x=-1{,}5$;

dacă $t=-\frac{2}{3}$, atunci $x=1$;

dacă $t\neq-\frac{2}{3}$, $t\neq0$, $t\neq1$, atunci $x_1=1$, $x_2=-\frac{t+2}{2}$.

8. $(4t-15)x^2+2t|x|+4=0$.

Răspuns: $\frac{t\pm\sqrt{t^2-16t+60}}{15-4t}$, dacă $t<\frac{15}{4}$ şi ecuaţia n-are rădăcini pentru $t\geq\frac{15}{4}$.

9. $\sqrt{2x+t}=x$.

Răspuns: Pentru $t<-\frac{1}{4}$ ecuaţia n-are rădăcini;

pentru $-\frac{1}{4}\leq t\leq0$, $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4t}}{2}$; pentru $t>0$, $x=\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$.

10. $\sqrt{x+t}+\sqrt{x}=t$.

Răspuns: Pentru $t<0$ ecuaţia n-are soluţii;

pentru $t=0$, $x=0$;

pentru $0<t<1$ ecuaţia n-are soluţii;

pentru $t\geq1$, $x=\frac{(t-1)^2}{4}$.

11. $\sqrt{\frac{x}{4}+2}=t+\sqrt{\frac{x}{4}-3}$.

Răspuns:

Pentru $0<t\leq5$, $x=\frac{t^4+2t^2+25}{t^2}$;

pentru $t\in(-\infty,0]\cup(5,+\infty)$ ecuaţia n-are rădăcini.

12. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-t+2}=1$.

Răspuns: Pentru $t<1$ ecuaţia n-are soluţii; pentru $t\geq1$, $x=\frac{t^2+2t-7}{4}$.

13. $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-t}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-tx}}$.

Răspuns: Pentru $-1<t<1$, $x=\frac{(t+1)^2}{4}$;

pentru $t\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ ecuaţia n-are rădăcini.

14. $x+\sqrt{x}=t$.

Răspuns: Pentru $t\geq 0$, $x=\frac{2t+1-\sqrt{4t+1}}{2}$; pentru $t<0$, ecuaţia n-are rădăcini.

15. $\frac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}}=\frac{x}{2a}$.

Răspuns. $\{2|a|, a\neq 0\}$.

16. $x\sqrt{\frac{a-x}{x}}-\sqrt{x^2-a^2}=0$.

Răspuns. $\{a, a\neq 0\}$.

17. $\sqrt{5a+x}+\sqrt{5a-x}=\frac{12a}{\sqrt{5a+x}}$.

Răspuns. $\{3a, 4a, a>0\}$.

18. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{2}$

Răspuns. $\left\{\frac{2\sqrt{2}a}{3}, a>0\right\}$.

19. $\frac{(x+a)\sqrt{x+b}+(x+b)\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}+\sqrt{x+a}}=\sqrt{ab}$.

Răspuns.

$\{-b, a=0, b<0\}\cup\{-a,\ b=0,\ a<0\}\cup\{0, a=0, b>0\}\cup$
$\{0, b=0, a>0\}\cup\{-(a+b), a<0, b<0\}$

20. $\frac{a\sqrt{x}+b}{a-b\sqrt{x}}=\frac{a+b}{a-b}$

Răspuns. $\{1, a\neq b\}$

21. $x+\sqrt{x^2-x}=t$.

Răspuns: Pentru $t < 0$, $\frac{1}{2} \leq t < 1$ ecuaţia n-are rădăcini; pentru $0 \leq t < \frac{1}{2}, t \geq 1, x = \frac{t^2}{2t-1}$.

22. Pentru ce valoare a parametrului a toate soluțiile ecuației $2|x - a| + a - 4 + x = 0$ satisfac inegalității $0 \leq x \leq 4$?

Răspuns. $a \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

23. $x + \sqrt{a + \sqrt{x}} = a$.

Răspuns. Dacă $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1), \emptyset$;

dacă $a = 0, x = 0$;

dacă $a \in [1; +\infty), x = \frac{2a-1-\sqrt{4a-3}}{2}$.

24. $\sqrt{x + a} + \sqrt{x} = a$.

Răspuns. Dacă $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1), \emptyset$;

dacă $a = 0, x = 0$;

dacă $a \in [1; +\infty), x = \frac{1}{4}(a - 1)^2$.

25. $\sqrt{x} - \sqrt{a - x} = 2$.

Răspuns. Dacă $a < 2, \emptyset$;

dacă $a \geq 2, x = \frac{a}{2} + \sqrt{a - 1}$.

26. $\sqrt{x + 1} - \sqrt{a - x} = 1$.

Răspuns. Dacă $a < 0, \emptyset$;

dacă $a \geq 0, x = \frac{a-1+\sqrt{2a+1}}{2}$.

27. $\sqrt[3]{x + a + 63} - \sqrt[3]{x + a - 1} = 4$.

Răspuns. $x_1 = -63 - a, x_2 = 1 - a$ pentru orice $a \in R$.

28. $\sqrt{2x + a} + \sqrt{x - a} = 2$.

Răspuns. $x = 12 - 2a + 4\sqrt{8 - 3a}$, dacă $a < \frac{4}{3}$;

$x_{1,2} = 12 - 2a \pm 4\sqrt{8 - 3a}$, dacă $\frac{4}{3} \leq a < \frac{8}{3}$;

$x = \frac{20}{3}$, dacă $a = \frac{8}{3}$;

$\emptyset$, dacă $a > \frac{8}{3}$.

29. $\frac{a+5}{\sqrt{x+9}} = 1$.

Răspuns. $\emptyset$, dacă $a \leq -5$;

$x = (a+2)(a+8)$, dacă $a > 5$.

30. $a - x = \sqrt{x^2 - 1}$.

Răspuns. $\emptyset$, dacă $a < -1, 0 \leq a < 1$;

$x = \frac{a^2+1}{2a}$, dacă $-1 \leq a < 0, a \geq 1$.

31. Aflați toate valorile parametrului a, pentru care ecuația $2ax^2 - 4(a+1)x + 4a + 1 = 0$ are o singură rădăcină?

Răspuns. $a \in \left\{-\frac{1}{2}; 0; 2\right\}$.

32. Pentru ce valori a parametrului a suma patratelor rădăcinilor ecuației

$$x^2 - 4ax + 5a = 0$$

este egală cu 6?

Răspuns. $a = -\frac{3}{8}$

33. Determinați numărul a astfel, încît una din rădăcinile ecuației

$$4x^2 + 15x + 4a^3 = 0$$

să fie egală cu patratul celeilalte rădăcini?

Răspuns. $\emptyset$.

34. Pentru ce valori a parametrului a rădăcinile ecuației

$$(a-1)x^2 + (a+2)x + a - 5 = 0$$

au semne diferite?

Răspuns. $a \in (1; 5)$.

35. Pentru ce valori a parametrului a ambele rădăcini ale ecuației

$x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$

sunt mai mari decît 3?

Răspuns. $a \in (\frac{11}{9}; +\infty)$

36. Pentru ce valori a parametrului m trinomul patrat $x^2 + mx + m^2 + 6m = 0$ primește valori negative pentru toți x, care satisfac condiția $1 < x < 2$?

Răspuns. $m \in [-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}; -4 + 2\sqrt{3}]$.

37. Aflați toate valorile parametrului a din semisegmentul $[1; +\infty)$, pentru fiecare din care cea mai mare rădăcină a ecuației $x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$ primește valoarea cea mai mare.

Răspuns. a =1.

38. Aflați toata valorile parametrului a, pentru care există măcar o pereche de numere $(x; y)$, care satisface sistemul

$$\begin{cases} x^2 + (y+3)^2 < 4 \\ y = 2ax^2 \end{cases}$$

Răspuns. $a \in (-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{16})$.

39. Pentru fiecare valoare a parametrului a de determinat numărul de soluții a ecuației $|x^2 - 4x - 5| = a$

Răspuns. Dacă $a \in (-\infty; 0)$, atunci $\emptyset$;

dacă $a = 0$, atunci două soluții;

dacă $a \in (0; 9)$, atunci patru soluții;

dacă $a = 9$, atunci trei soluții;

dacă $a \in (9; +\infty)$, atunci două soluții.

40. $x = a - \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Răspuns. $\emptyset$, dacă $a < 0$;

$x = \frac{3a}{4}$, dacă $a \geq 0$.

41. Aflați toate valorile parametrului a pentru care ecuația $|1 - ax| = 1 + (1 - 2a)x + ax^2$ are exact o soluție.

Răspuns. $a \in \{0; 1\}$.

42. Pentru toate valorile parametrului a rezolvați ecuația $|x + 2| + a|x - 4| = 6$.

Răspuns. Dacă $a < -1$, atunci $x = 4$; dacă $a = -1$, atunci $x \geq 4$; dacă $a \in (-1; 1)$, atunci $x = 4$, $x = \frac{4(a-2)}{a+1}$; dacă $a = 1$, atunci $x \in [-2; 4]$; dacă $a > 1$, atunci $x = 4$.

43. Aflați toate valorile parametrului a pentru care ecuația $ax^2 + (a + 1)x + 1 = 0$ are o singură soluție.

Răspuns. $a \in \{0; 1\}$.

44. Pentru ce valori a parametrului t rădăcinile ecuației $x^2 - (t - 1)x + t + 4$ sunt negative?

Răspuns. $-4 \leq t \leq -3$.

45. Aflați toate valorile parametrului a , pentru fiecare din care ecuațiile $(2a - 1)x^2 + 6ax + 1 = 0$ și $ax^2 - x + 1 = 0$ au rădăcina comuna.

Răspuns. $a \in \left\{-\frac{3}{4}; 0; \frac{2}{9}\right\}$.

46. Pentru fiecare valoare reală a parametrului a rezolvați ecuația $x|x + 1| + a = 0$.

Răspuns. Dacă $a < 0$, atunci $x = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$; dacă $a = 0$, atunci $x \in \{0; -1\}$; dacă $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$, atunci

$x=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$; dacă $a=\frac{1}{4}$, atunci $x=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$; dacă $a>\frac{1}{4}$, atunci $x=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$.

47. Pentru ce valori a parametrului t ecuaţia $t^2x-t(x+1)-6x+3=0$

n-are rădăcini?

Răspuns. $t=-2$

48. Pentru ce valori a parametrului t exact o rădăcină a ecuaţiei

$$x^2+2(t-1)x+3t+1=0$$

satisface inecuaţiei $x<-1$?

Răspuns. $t<-4, t=5$.

Rezolvaţi ecuaţiile:

49. $x^3-2x^2-(t^2-t-1)x+(t^2-t)=0$

Răspuns. $x_1=1, x_2=1-t, x_3=t$.

50. $x^3-(2t+1)x^2+(t^2+2t-m)x-(t^2-m)=0$.

Răspuns. Pentru $m\geq 0$, $x_1=1, x_2=t-\sqrt{m}, x_3=t+\sqrt{m}$.

1. $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$.

Răspuns. $x\in\left\{a; b; \frac{a+b}{2}\right\}$.

51. Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases}(3+t)x+2y=3\\ tx-y=3\end{cases}.$$

Răspuns. Dacă $t=-1$, sistemul n-are soluţii; dacă $t\neq-1$, atunci.

$x=\frac{3}{t+1}$, $y=\frac{-3}{t+1}$.

52. Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases}(7-t)x+ty=5\\ (1+t)x+3y=5\end{cases}.$$

Răspuns. Dacă $t = -7$, sistemul n-are soluţii; dacă $t = 3$, atunci $x = t, y = \frac{5-4t}{3}$, unde $t \in R$; dacă $t \neq 3$, $t \neq 7$, atunci $x = \frac{5(t-3)}{t^2+4t-21}$, $y = \frac{10(t-3)}{t^2+4t-21}$.

53. Pentru ce valori a parametrului t sistemul

$$\begin{cases} tx - 4y = t + 1 \\ 2x + (t+6)y = t + 3 \end{cases}$$

n-are soluţii?

Răspuns. $t = -4$.

54. Determinaţi numărul soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} tx + 3y = t^2 + 1 \\ (3t+14)x + (t+8)y = 5t^2 + 5 \end{cases}.$$

Răspuns. Pentru $t = -6$ sistemul n-are soluţii; pentru $t = 7$ are o infinitate de soluţii; pentru celelalte valori are o singură soluţie.

55. Pentru ce valori a parametrului t sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = t \\ x - y = t \end{cases}$ are o singură soluţie?

Indicaţie. Graficul primei ecuaţii este un cerc (pentru $t = 0$ reprezintă un punct), iar graficul ecuaţiei a doua este o dreaptă.

Răspuns. $t_1 = 0, t_2 = 2$.

56. Rezolvaţi ecuaţia $9x|x| + tx + 1 = 0$.

Răspuns. Pentru orice $t \in R, x_1 = \frac{t-\sqrt{t^2+36}}{18}$ şi în afară de aceasta $x_{2,3} = \frac{-t\pm\sqrt{t^2-36}}{18}$ pentru $t = -6$.

57. Rezolvaţi ecuaţia $|x+1| + t|1-2x| = \frac{3}{2}$.

Răspuns. Pentru $t < -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$; pentru $t = -\frac{1}{2}, x \geq \frac{1}{2}$; pentru $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2t-5}{4t+2}$; pentru $t = \frac{1}{2}, -1 \leq x \leq \frac{1}{2}$; pentru $t > \frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$.

58. Pentru ce valori a parametrului a trinomul pătrat

$$y = ax^2 - -(a+4)x + a + 2$$

primește valori negative pentru orice x?

Răspuns. $a \in \left(-\infty; -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

59. Pentru ce valori a parametrului a trinomul pătrat

$$(a^2 - -1)x^2 + 2(a-1)x + 2$$

primește valori negative pentru orice x?

Răspuns. $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

60. Pentru ce valori a parametrului a parabola

$$y = (a+1)x^2 - 3ax + 4a$$

are două puncte comune cu axa Ox?

Răspuns. $\left(-\frac{16}{7}; -1\right) \cup (-1; 0)$.

61. Pentru ce valori a parametrului a ecuația

$$(a^2 - 3a + +2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x + a^2 - a = 0$$

are mai mult de două rădăcini?

Răspuns. $a = 1$.

62. Pentru ce valori a parametrului a trinomul pătrat

$$y = x^2 + 2(a+1)x + 9a - 5$$

poate fi adus la forma unui pătrat complet?

Răspuns. $a \in \{1; 6\}$.

63. Pentru ce valori a parametrului a rădăcinile trinomului pătrat $y = ax^2 - 3x + 5 - a$ sunt pozitive?

Răspuns. $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{9}{2};5\right)$.

64. Pentru ce valori a parametrului a graficul trinomului pătrat $y = ax^2 + (a-3)x + a$ are puncte comune cu semiaxa pozitivă Ox?

Răspuns. $a \in (0; 1]$.

65. Pentru ce valori a parametrului a rădăcinile ecuației $(a-1)x^2 + ax + 1 = 0$ sunt negative?

Răspuns. $a > 1$.

66. Pentru ce valori a parametrului a ambele rădăcini ale ecuației $4a^2x^2 - 8ax + 4 - 9a^2 = 0$ sunt mai mari decât 3?

Răspuns. $\left(0;\frac{2}{9}\right)$.

67. Aflați toate valorile parametrului a, pentru care ambele rădăcini ale ecuației $x^2 + (a-9)x + a - 1 = 0$ sunt diferite și mai mari decât 1.

Răspuns. $a \in (4{,}5; 5)$.

68. Pentru ce valori a parametrului a rădăcinile ecuației $x^2 - 3x + 2a + 3 = 0$ satisfac condiției $5x_1 + 3x_2 = 23$?

Răspuns. $a = -15{,}5$.

69. În ecuația $x^2 - 4x + m = 0$ aflați valoarea parametrului m pentru care suma pătratelor rădăcinilor ei să fie egală cu 14.

Răspuns. $m = 1$.

70. Pentru ce valori a parametrului$a$, diferența dintre rădăcinile ecuației $4x^2 - 16x + a^2 - 2 = 0$ să fie egală cu 3?

Răspuns. $a = \pm 3$.

71. Pentru ce valori a parametrului a, una din rădăcinile ecuației $4x^2 - (3+2a)x + 2 = 0$ să fie de opt ori mai mare decât cealaltă?

Răspuns. $a = -6, a = 3$.

72. Pentru ce valori a parametrului p, una din rădăcinile ecuației $8x^2 - 6x + 9p^2 = 0$ să fie egală cu pătratul celeilalte?

Răspuns. $p = \frac{1}{3}$.

73. Pentru ce valori a parametrului a ecuațiile $x^2 + ax + 8 = 0$ și $x^2 + x + a = 0$ au o rădăcină comună?

Răspuns. $a = -6$.

74. Pentru ce valoare a parametrului a, rădăcinile ecuației $(a+1)x^2 - 3ax + 4a = 0$ aparțin intervalului $(2; 5)$?

Răspuns. $a \in \left[-\frac{16}{7}; -2\right)$.

75. Aflați toate valorile parametrului a, pentru care ecuația $x^4 + (a-6)x^2 + (a+1)^2 = 0$ are patru rădăcini reale. Aflați acele valori a parametrului a, pentru care aceste rădăcini formează o progresie aritmetică. Scrieți această expresie pentru valoarea întreagă a parametrului a.

Răspuns. $a \in \left[-8; \frac{4}{3}\right]; a = \frac{8}{13}, a = -4;\ \{-3; -1; 1; 3\}$.

76. Aflați toate valorile parametrului a, pentru care exact o rădăcină a ecuației $x^2 + 2(a-2)x + 4 - 3a = 0$ satisface inecuației $x > 1$.

Răspuns. $a = 0; a > 1$.

77. De aflat toate valorile parametrului p pentru care ecuația $x - 2 = \sqrt{-2(p+2)x + 2}$ are o singură soluție.

Răspuns. $p \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$.

78. Pentru ce valoare a parametrului m sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + 3my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 1 \end{cases}$ are o singură soluţie?

Răspuns. $m \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

79. Pentru ce valori a parametrului m sistemul $\begin{cases} 2x + (m-1)y = 3 \\ (m+1)x + 4y = -3 \end{cases}$ are o infinitate de soluţii?

Răspuns. $m = -3$.

80. Pentru ce valori a parametrului m sistemul $\begin{cases} (m+5)x + (2m+3)y = 3m+2 \\ (3m+10)x + (5m+6) = 2m+4 \end{cases}$ este incompatibil?

Răspuns. $m = 2$.

81. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} mx + (m+1)y + (m+2)z = 1, \\ (m+1)x + (m+2)y + mz = 1, \\ (m+2)x + my + (m+1)z = 1. \end{cases}$$

Răspuns. Pentru $m \neq -1, x = y = z = \frac{1}{3(m+1)}$;

pentru $m = -1$, $\emptyset$.

82. Să se rezolve şi să se discute sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} mx + y + z = 1, \\ x + my + z = 1, \\ x + y + mz = 1. \end{cases}$

Răspuns. Pentru $m \neq -2$ şi $m \neq 1$, $\left(\frac{1}{m+2}; \frac{1}{m+2}; \frac{1}{m+2}\right)$;

pentru $m \neq 1$, $\{x, y, 1 - x - y |\ x, y \in R\}$;

pentru $m = -2$, $\emptyset$.

b) $\begin{cases} (m+3)x + y + 2z = m, \\ mx + (m-1)y + z = 2m, \\ 3(m+1)x + my + (m+3)z = 5. \end{cases}$

Răspuns. Pentru $m \neq 0, m \neq 1, x = \frac{1}{m^2}(m^2 + 4m - 15), y = \frac{1}{m^2}(m^2 + 4m + 15), z = \frac{1}{m^2}(15 + m - m^2)$,

pentru $m = 1$, $x = 2 - z, y = 7 + 2z$, unde $z \in R$;

pentru $m = 0, \emptyset$.

83. De aflat toate valorile parametrului $a \neq 0$, pentru care graficele funcțiilor $y = -\frac{a}{6}$ și $y = |3x^2 + ax|$ au numai două puncte comune.

Răspuns. $a \in (0; 3)$.

84. De aflat toate valorile parametrului a, pentru care graficele funcțiilor $y = \frac{|x+7|}{x+7}$ și $y = (x + a)^2$ au un singur punct comun.

Răspuns. $a \in [6; 8)$.

85. De aflat toate valorile parametrului a, pentru care toate soluțiile ecuației $3\sqrt{x^2 + 4ax + 4a^2} - 3a + x - 15 = 0$ aparțin segmentului $[4; 9]$.

Răspuns. $a \in \left[-3; -\frac{23}{9}\right]$.

86. De aflat cea mai mică valoare întreagă nenegativă a parametrului a, pentru care sistemul de inecuații $\begin{cases} x^2 - 6|x| + 8 \leq 0 \\ a^2 - x^2 > 0 \end{cases}$ n-are soluții.

Răspuns. $a = 2$.

În dependență de valoarea parametrului a rezolvați ecuațiile.

87. $|x^2 + 2ax| = 1$.

Răspuns. Dacă $|a| \geq 1$, atunci sunt patru rădăcini: $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 1}$, $x_{3,4} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$; dacă $|a| < 1$, atunci există două rădăcini: $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 1}$;

Rezolvaţi ecuaţiile:

88. $|x - a| + |x - 2a| = 3a$.

Răspuns. $\emptyset$, pentru $a < 0$;

$x = 0$, pentru $a = 0$;

$x_1 = 0, x_2 = 3a$, pentru $a > 0$.

89. $|5x + 2| + |5x - 2| = ax + 2$.

Răspuns. $x = \frac{2}{a}$, dacă $a \in (-\infty; -10]$;

$x_1 = \frac{2}{a}, x_2 = -\frac{2}{a+10}$, dacă $a \in (-10; -5]$;

$\emptyset$, dacă $a \in (-5; 5)$;

$x_1 = \frac{2}{a}, x_2 = \frac{2}{a-10}$, dacă $a \in [5; 10)$;$x = \frac{2}{a}$, dacă $a \in [10; +\infty)$.

§4. Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii exponenţiale şi logaritmice

Rezolvarea ecuaţiilor exponenţiale se bazează pe proprietatea: două puteri cu aceiaşi bază pozitivă şi diferită de unitate sunt egale atunci şi numai atunci, cînd sunt egali exponenţii. Folosind această proprietate, ecuaţia

$$a^x = b, \; unde, \; a>0, \; a\neq 1, \; b>0$$

se rezolvă în modul următor:

$a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^{log_a b} \Leftrightarrow x = log_a b.$

Multe ecuaţii exponenţiale se rezolvă prin metoda aducerii ambelor părţi ale ecuaţiei la una şi aceaşi bază.

Deseori la rezolvarea ecuaţiilor exponenţiale se foloseşte transformarea ce constă în scoaterea factorului comun în afara parantezei.

Ecuaţia de forma $f(a^x) = 0$ cu ajutorul substituţiei $t = a^x$ se reduce la rezolvarea unei totalităţi de ecuaţii exponenţiale simple $a^x = t_1$, $a^x = t_2$, ..., $a^x = t_n$, unde $t_1, t_2, \dots, t_n$ sunt rădăcinile ecuaţiei $f(t) = 0$. Aşa de exemplu, ecuaţia

$Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$, unde A, B, C sunt careva numere, $a > 0$, $a \neq 1$ se reduce la rezolvarea unor ecuaţii simple $a^x = t_1$, $a^x = t_2$, unde $t_1, t_2,$ sunt rădăcinile ecuaţiei $At^2 + Bt + C = 0$.

Ecuaţia de forma $a^{f(x)} = b$, unde $a > 0$, $a \neq 1$ $b > 0$ se poate rezolva cu ajutorul logaritmării ambelor părţi, deoarece ambele părţi sunt pozitive. Logaritmînd ecuaţia dată obţinem ecuaţia $f(x) = log_a b$, echivalentă cu ecuaţia dată.

Exemplu. Să aflăm toate valorile parametrului a pentru care ecuaţia $4^x - a2^x - a + 3 = 0$ are măcar o soluţie.

Rezolvare. Facem substituţia $t = 2^x > 0$. Ecuaţia dată are forma

$t^2 - at - a + 3 = 0.$

Pentru ca ecuaţia iniţială să aibă măcar o soluţie este necesar şi suficient ca trinomul $t^2 - at - a + 3$ să aibă măcar o rădăcină pozitivă. Prin urmare discriminantul acestui trinom trebuie să fie nenegativ.

Deoarece $D = a^2 - 4(3 - a) = a^2 + 4a - 12 = (a - 2)(a + 6)$, atunci condiţia $D \geq 0$ se satisface pentru $a \geq 2$ şi $a \leq -6$.

Rădăcinile t_1 şi t_2 ale ecuaţiei $t^2 - at - a + 3 = 0$ satisfac sistemului de ecuaţii $\begin{cases} t_1 t_2 = 3 - a, \\ t_1 + t_2 = a. \end{cases}$

Pentru $a \leq -6$ avem că $t_1 t_2 > 0$, iar $t_1 + t_2 < 0$. Prin urmare, rădăcinie t_1 şi t_2 sunt negative şi ecuaţia iniţială nu are soluţie.

Pentru $a \geq 2$ avem că $t_1 + t_2 > 0$. Aceasta înseamnă că măcar una din rădăcinile t_1 sau $t_2$este pozitivă.

Răspuns: $[2;\ +\infty)$.

Rezolvarea celei mai simple ecuaţii logaritmice $\log_a x = b;\quad a > 0,\quad a \neq 1$ se bazează pe o proprietate importantă a logaritmilor: logaritmii a două numere pozitive în aceiaşi bază pozitivă şi diferită de unitate sunt egali atunci şi numai atunci, cînd sunt egale aceste numere. Din această ecuaţie simplă obţinem unica rădăcină $x = a^b$.

Din ecuaţia $\log_a f(x) = b,\ a > 0,\ a \neq 1$ obţinem ecuaţia echivalentă $f(x) = a^b$.

Ecuaţia de forma $f(log_a x) = 0,\quad a > 0,\quad a \neq 1$este echivalentă cu toatiltatea de ecuaţii $log_a x = t_1, log_a x = t_2, \dots,$ $log_a x = t_n$ unde $t_1, t_2, \dots, t_n$ sunt rădăcinile ecuaţiei $f(t) = 0$.

Ecuaţia de forma $f(\log_x A) = 0,\ A > 0,$ este echivalentă cu totalitatea ecuaţiilor $\log_x A = t_1 \log_x A = t_2,\ \dots,\ \log_x A = t_n,$ unde t_1 , t_2, t_n sunt rădăcinile ecuaţiei $f(t) = 0$.

Ecuaţia de forma $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$ poate fi înlocuită cu un sistem echivalentprin două metode.
Prima metodă:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

A doua metodă:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

În mod analogic ecuaţia de forma $\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A$,$A > 0$, poate fi înlocuită cu un sistem echivalent prin două metode.
Prima metodă:

$$\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

A doua metodă:

$$\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Să menţionăm că alegerea metodei de rezolvare depinde de faptul care din inecuaţiie $f(x) > 0$ sau $g(x) > 0$ se rezolvă mai simplu.

Ecuaţia de forma $\log_{f(x)} g(x) = b$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = (f(x))^b. \end{cases}$$

Ecuaţia de forma $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)$ poate fi înlocuită cu un sistem echivalent prin două metode.
Prima metodă:

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x). \end{cases}$$

A doua metodă:

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x). \end{cases}$$

Ecuaţia de forma $\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x)$ poate fi înlocuită cu un sistem echivalent prin două metode.

Prima metodă:

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x). \end{cases}$$

A doua metodă:

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ p(x) > 0, \\ p(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x). \end{cases}$$

Alegerea metodei se determină de faptul care din inecuaţii $g(x) > 0$ sau $p(x) > 0$ se rezolvă mai simplu.

Ecuaţia de forma $\log_{\alpha(x)} \left(\log_{\beta(x)} f(x) \right) = 0$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \alpha(x) > 0 \\ \alpha(x) \neq 1 \\ \log_{\beta(x)} f(x) = 1 \end{cases}$$

care la rîndul său este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \alpha(x) > 0, \\ \alpha(x) \neq 1, \\ \beta(x) > 0, \\ \beta(x) \neq 1, \\ f(x) = \beta(x). \end{cases}$$

Ecuaţia de forma $2n\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, $n \in N$, este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f^{2n}(x) = g(x). \end{cases}$$

Ecuaţia de forma: $(2n+1)\log_a \alpha(x) = \log_a \beta(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, $n \in N$, este echivalentă cu ecuaţia:

$$\log_a \alpha^{2n+1}(x) = \log_a \beta(x),$$

care la rîndul său este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \beta(x) > 0, \\ \alpha^{2n+1}(x) = \beta(x). \end{cases}$$

Ecuaţia de forma $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a h(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \log_a\big(f(x)\, g(x)\big) = \log_a h(x). \end{cases}$$

Ecuaţia de forma $log_a\alpha(x) - log_a\beta(x) = log_a f(x) - -log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, este echivalentă cu ecuaţia

$$\log_a \alpha(x) + \log_a g(x) = \log_a f(x) + \log_a \beta(x),$$

care este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \alpha(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ \beta(x) > 0, \\ log_a\big(\alpha(x)g(x)\big) = log_a(f(x)\beta(x)) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ \beta(x) > 0, \\ \alpha(x)g(x) = f(x)\beta(x) \end{cases}.$$

Dacă în ecuaţie se conţin logaritmi în diferite baze, atunci trebuie de adus aceşti logaritmi la aceiaş bază. Pentru aceasta se foloseşte formula de trecere la o bază nouă $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1, b > 0$ sau cazul ei particular $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$.

Fie f şi g careva funcţii, $a > 0, a \neq 1$.

Dacă $f > 0, g > 0$ atunci:

1. $\log_a(fg) = \log_a f + \log_a g$,
2. $\log_a \frac{f}{g} = \log_a f - \log_a g$,
3. $\log_a f^\alpha = \alpha \log_a f$,
4. $\log_{a^\beta} f^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a f$.

Folosind aceste formule fără a ţine cont de inegalităţile $f > 0, g > 0$ trebuie de avut în vedere, că MVA a părţilor stîngi şi celor drepte în fiecare din formulele $1 - 4$ pot fi diferite.

De exemplu, expresia $\log_a f + \log_a g$ este definită numai pentru $f > 0$ şi $g > 0$, iar expresia $\log_a(fg)$ este definită şi pentru $f < 0$, $g < 0$. Analogic MVA a părţii stîngi din fromulele $2 - 4$ pot fi mai largi decît MVA a părţilor drepte.

Prin urmare, folosind formulele $1 - 4$ putem obţine rădăcini străine pentru ecuaţia iniţială şi deaceia se cere de verificat dacă rădăcinile obţinute aparţin MVA a ecuaţiei iniţiale.

Fie f, g sunt careva funcţii, $a > 0, a \neq 1$. Dacă $f \neq 0$ şi $g \neq 0$, atunci:

1. $\log_a(fg) = \log_a|f| + \log_a|g|$,
2. $\log_a \frac{f}{g} = \log_a|f| - \log_a|g|$,
3. $\log_a f^{\alpha} = \alpha \log_a|f|$,
4. $\log_{a^{\beta}} f^{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \log_{|a|}|f|$.

Transformarea ecuaţiei cu ajutorul acestor formule "de la stînga"- "la dreapta" după cum ele sunt scrise pot aduce la o ecuaţie care este consecinţă a ecuaţiei iniţiale. Acest fapt poate aduce la pierderea rădăcinilor.

Să menţionăm că aplicarea formală a formulei de trecere de la o bază la alta $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ poate aduce atît la pierderea rădăcinilor cît şi la apariţia rădăcinilor străine deoarece partea stîngă şi cea dreaptă au diferite domenii de existenţă.

Exemplul 4. 1. De aflat toate valorile parametrului a pentru care ecuaţia $\lg(ax) = 2\lg(x+1)$ are o singură rădăcină.

Rezolvare. MVA aacestei ecuaţii este determinată de sistemul

$$\begin{cases} ax > 0, \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

Prin urmare, ecuaţia iniţială are o singură rădăcină atunci şi numai atunci, cînd sistemul

$$\begin{cases} ax = (x+1)^2, \\ ax > 0, \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

are o singură rădăcină.

Ecuaţia $ax = (x+1)^2$ este echivalentă cu ecuaţia $x^2 + (2-a)x + 1 = 0$.

Ultima ecuaţie are soluţie numai atunci, cînd $(2-a)^2 - 4 \geq 0$, adică numai pentru $a \leq 0$ şi $a \geq 4$. În aceste condiţii ecuaţia $ax = (x+1)^2$ are două rădăcini: $x_1 = \frac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}$, $x_2 = \frac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2}$.

Pentru $a = 0$ nu se satisface condiţia $ax > 0$. Pentru $a < 0$ din sistemul $\begin{cases} x_1 x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = a - 2 < 0. \end{cases}$ urmează că ambele rădăcini sunt negative.

În condiţiile sistemului $\begin{cases} ax = (x+1)^2, \\ ax > 0, \\ x+1 > 0. \end{cases}$ se cere ca $x_1 + 1 = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2-4a}}{2} > 0$ şi $x_1 a > 0$, $x_2 + 1 = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2-4a}}{2} < 0$ şi $x_2 a < 0$.

Aşa dar, pentru $a < 0$ sistemul $\begin{cases} ax = (x+1)^2, \\ ax > 0, \\ x+1 > 0. \end{cases}$ cît şi ecuaţia inţială are o singură soluţie x_1.

Pentru $a > 4$ din sistemul $\begin{cases} x_1 x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = a - 2 > 0. \end{cases}$ urmează că ambele rădăcini ale ecuaţiei $x^2 + (2-a)x + 1 = 0$ sunt pozitive , se satisfac toate condiţiile sistemului echivalent cu ecuaţia iniţială şi prin urmare, ecuaţia inţială are două rădăcini.

Evident, dacă $a = 4$ ecuaţia iniţială are o singură rădăcină $x = 1$.

Răspuns. Ecuaţia dată are o singură rădăcină atunci şi numai atunci, cînd $a < 0$ sau $a = 4$.

Exemplul 4. 2. Pentru fiecare valoare a parametrului a de rezolvat ecuaţia

$$(1+(a+2)^2)log_3(2x-x^2)+(1+(3a-1)^2)\cdot$$
$$\cdot\, log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=log_3(2x-x^2)+log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

Rezolvare. Pentru orice valoare a parametrului toate valorile necunoscutei aparţin domeniului determinat de sistemul

$$\begin{cases}2x-x^2>0\\ 1-\frac{x^2}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<\sqrt{2}.$$

Pentru orice x din acest interval au loc inegalităţile $2x-x^2=1-(1-x)^2\le 1,\ 1-\frac{x^2}{2}\le 1$ şi prin urmare,

$$\log_3(2x-x^2)\le 0,\ \log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\le 0.$$

Pentru $a\ne -2$ şi $a\ne\frac{1}{3}$ avem:

$(1+(a+2)^2)\log_2(2x-x^2)\le\log_3(2x-x^2)$,

$(1+(3a-1)^2)\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\le\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$.

Adunînd ultimile două inegalităţi şi comparînd rezultatul obţinut cu ecuaţia iniţială facem concluzia că ecuaţia iniţială poate avea soluţii numai pentru valorile x, care satisfac sistemul

$\begin{cases}\log_3(2x-x^2)=0,\\ \log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0.\end{cases}$ adică sistemul $\begin{cases}2x-x^2=1,\\ 1-\frac{x^2}{2}=0.\end{cases}$

Ultimul sistem n-are soluţii. Prin urmare, pentru $a\ne -2$ şi $a\ne\frac{1}{3}$ ecuaţia iniţială n-are soluţii.

Pentru $a=-2$ ecuaţia iniţială are forma:

$$log_3(2x-x^2)+50log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=log_3(2x-x^2)+$$
$$+log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

Această ecuaţie pe mulţimea $0 < x < \sqrt{2}$ este echivalentă cu ecuaţia $\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = 0$, care n-are rădăcini pe acest interval.

Pentru $a = \frac{1}{3}$ ecuaţia iniţială are forma

$$\frac{58}{9}\log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = \log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$$

Această ecuaţie pe mulţimea $0 < x < \sqrt{2}$ este echivalentă cu ecuaţia $2x - x^2 = 1$, care are o singură rădăcină $x = 1$.

Rădăcina $x = 1$ aparţine MVA a ecuaţiei iniţiale.

Răspuns. Pentru $a = \frac{1}{3}$, $x = 1$; pentru $a \neq \frac{1}{3}$, $\emptyset$.

Exemplul 4. 3. Să rezolvăm ecuaţia

$$2^{2x} - (2t+1)2^x + t^2 + t = 0.$$

Rezolvare. Ecuaţia dată este o ecuaţie pătrată în raport cu 2^x. Discriminantul ei $D = (2t+1)^2 - (t^2+t) = 1 > 0$.

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt $2^x = t$ şi $2^x = t + 1$. Deoarece $2^x > 0$, vom cerceta următoarele cazuri:

1. Pentru $t + 1 \leq 0$, adică $t \leq -1$, ecuaţia n-are rădăcini;
2. Pentru $-1 < t \leq 0$, atunci logaritmînd în baza 2 ambele părţi ale ecuaţiei $2^x = t + 1$, obţinem: $x = \log_2(t+1)$.
3. Dacă $t > 0$ atunci $x_1 = \log_2(t+1)$, $x_2 = \log_2 t$.

Răspuns. Pentru $t \leq -1$ ecuaţia n-are soluţii;

pentru $-1 < t \leq 0$, $x = \log_2(t+1)$;

pentru $t > 0$, $x_1 = \log_2(t+1)$, $x_2 = \log_2 t$.

Exemplul 4. 4. Să rezolvăm ecuaţia

$$144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + t = 0.$$

Rezolvare. Fie $12^{|x|} = y$. Atunci ecuaţia dată are forma $y^2 - 2y + t = 0$, $\frac{D}{4} = 1 - t$. Evident, pentru $t > 1$ ecuaţia n-are rădăcini.

Rădăcinile ultimei ecuaţii sunt $y = 1 \pm \sqrt{1-t}$.

Deoarece $|x| \geq 0$ avem că $y \geq 1$. Rădăcina $1 - \sqrt{1-t} \leq 1$ (este egală cu 1 pentru $t = 1$) satisface numai pentru $t = 1$ şi coincide cu rădăcina $y = 1 + \sqrt{1-t}$;

Aşa dar, $12^{|x|} = 1 + \sqrt{1-t}$, $|x| = \log_{12}\left(1 + \sqrt{1-t}\right)$; $x = \pm\log_{12}\left(1 + \sqrt{1-t}\right)$.

Răspuns. Dacă $t \leq 1$, $x = \pm\log_{12}\left(1 + \sqrt{1-t}\right)$; dacă $t > 1$, ecuaţia n-are rădăcini.

Exemplul. 4. 5 Pentru ce valori a parametrului m ecuația $4^{2x} - 4^{x+1} - 3m + m^2 = 0$ are o singură rădăcină.

Rezolvare. Se observă ușor că ecuația dată este o ecuație pătrată în raport cu 4^x și prin urmare, $4^x = 2 \pm \sqrt{4 + 3m - m^2}$, unde $4 + 3m - m^2 \geq 0$, adică $-1 \leq m \leq 4$.

Dacă $4 + 3m - m^2 > 0$, atunci ecuația:

$4^x = 2 + \sqrt{4 + 3m - m^2}$ întotdeauna are o singură rădăcină.

Pentru ca această rădăcină să fie unică, este necesar ca ecuația $4^x = 2 - \sqrt{4 + 3m - m^2}$ să nu aibă rădăcini, dar aceasta poate fi numai atunci când $\sqrt{4 + 3m - m^2} \geq 2$. Pentru a rezolva ultima inecuație alcătuim sistemul:

$$\begin{cases} 4 + 3m - m^2 \geq 0 \\ \sqrt{4 + 3m - m^2} \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 4 \leq 0 \\ m^2 - 3m - 4 \leq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 4 \leq 0 \\ m^2 - 3m \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 \leq m \leq 3$

Răspuns. $\{-1; 4\} \cup [0; 3]$.

Exemplul 4. 6. Să se rezolve ecuaţia $a^{\frac{2}{x}} + b^{\frac{2}{x}} = m(ab)^{\frac{1}{x}}$.

Rezolvare. Observăm că $x \neq 0, a > 0, b > 0, (ab)^{\frac{1}{x}} \neq 0$.

Împărţim ambele părţi ale ecuaţiei date la $(ab)^{\frac{1}{x}}$ şi obţinem

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{x}} = m \quad (1)$$

Din (1) se vede că $m > 0$. Să notăm $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} = t$, unde $t > 0$

Ecuaţia (1) are forma $t + \frac{1}{t} = m$. Rezolvînd ultima ecuaţie în raport cu t, obţinem:

$t_{1,2} = \frac{1}{2}\left(m \pm \sqrt{m^2 - 4}\right)$sau $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\left(m \pm \sqrt{m^2 - 4}\right)$. (2)

Partea stîngă a ecuaţiei (2) este pozitivă şi prin urmare, partea dreaptă deasemenea trebuie să fie pozitivă, dar aceasta va fi posibil numai pentru $m \geq 2$.

Dacă $m = 2$ atunci $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$. În acest caz, dacă $a = b$, atunci $x \in R \setminus \{0\}$.

Dacă însă $a \neq b$ şi $m = 2$, atunci ecuaţia n-are rădăcini.

Dacă $m > 2$, atunci logaritmînd ambele părţi ale ecuaţiei (2), obţinem:

$\frac{1}{x}\lg\frac{a}{b} = \lg\left(m \pm \sqrt{m^2 - 4}\right) - \lg 2$, $x = \frac{\lg a - \lg b}{\lg\left(m \pm \sqrt{m^2-4}\right) - \lg 2}$.

Deoarece $x \neq 0$, urmează că $a \neq b$.

Răspuns. Dacă $m = 2$, $a = b$, atunci $x \in R \setminus \{0\}$; dacă $a \neq b$, $m > 2$ atunci $x = \frac{\lg a - \lg b}{\lg\left(m \pm \sqrt{m^2-4}\right) - \lg 2}$.

Exemplul 4. 7. Pentru ce valori a parametrului a inecuaţia $4^{x^2} + 2(2a + 1)2^{x^2} + 4a^2 - 3 > 0$ este satisfăcută pentru orice x?

Rezolvare. Fie $t = 2^{x^2}$. Atunci ecuaţia iniţială are forma:
$t^2 + 2(2a+1)t + 4a^2 - 3 > 0$ (1)
Prin urmare, rezolvarea problemei iniţiale s-a redus la determinarea acelor valori a parametrului$a$, pentru care ultima inecuaţie se satisface pentru orice $t > 0$.
Deoarece
$t^2 + 2(2a+1)t + 4a^2 - 3 = t^2 + 2t(2a+1) + (2a+1)^2 - (2a+1)^2 + 4a^2 - 3 = (t + 2a + 1)^2 - 4(a+1)$
atunci pentru $a + 1 < 0$ sau $a < -1$ inecuaţia (1) este justă pentru orice t, inclusiv şi pentru $t > 0$. Pentru $a + 1 \geq 0$ avem că $a + 1 = \sqrt{(a+1)^2}$ şi prin urmare, inecuaţia (1) este echivalentă cu inecuaţia
$\left(t + 2a + 1 + 2\sqrt{a+1}\right)\left(t + 2a + 1 - 2\sqrt{a+1}\right) > 0$. (2)
Pentru $a \geq -1$ are loc inegalitatea $-2a - 1 - 2\sqrt{a+1} \leq -2a - 1 + 2\sqrt{a+1}$, şi deci, inecuaţia (2) se satisface pentru orice $t > 0$, dacă $-2a - 1 + 2\sqrt{a+1} \leq 0$, adică pentru $2\sqrt{a+1} \leq 2a + 1$. (3)
Pentru $-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$ inecuaţia (3) n-are soluţii.
Pentru $a > -\frac{1}{2}$ avem:

$$\begin{cases} a > -\frac{1}{2} \\ 4(a+1) \leq 4a^2 + 4a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a > -\frac{1}{2} \\ 4a^2 - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{1}{2} \\ \left(2a - \sqrt{3}\right)\left(2a + \sqrt{3}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

.

Aşa dar, pentru $a \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$ inecuaţia (1) se satisface pentru orice t, dar atunci şi inecuaţia iniţială are loc pentru orice x, dacă $a \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

Răspuns. $a \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$

Exemplul 4. 8. De rezolvat inecuaţia

$$|a^{2x} + a^{x+2} - 1| \geq 1 \quad (1)$$

pentru toate valorile parametrului a, unde $a > 0$ şi $a \neq 1$.

Rezolvare. Notăm $t = a^x$. Inecuaţia (1) are forma:

$|t^2 + a^2t - 1| \geq 1$ (2), unde $t > 0$.

Deoarece

$$t^2 + a^2t - 1 = \left(t - \frac{1}{2}\left(-a^2 - \sqrt{a^4 + 4}\right)\right) \cdot \left(t - \frac{1}{2}\left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 4}\right)\right)$$

pentru orice a, atunci inecuaţia (2) este echivalentă cu totalitatea a două sisteme (fiindcă $t > 0$):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < t < \frac{1}{2}\left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 4}\right), \\ -t^2 - a^2t + 1 \geq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} t \geq \frac{1}{2}\left(-a^2 + \sqrt{a^4 + 4}\right), \\ t^2 + a^2t - 1 \geq 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Să rezolvăm primul sistem din totalitatea primită. Observăm că $-t^2 - a^2t + 1 \geq 1 \Leftrightarrow t^2 + a^2t \leq 0$ şi deoarece $t > 0$, înseamnă că ultima inecuaţie n-are soluţii, dar atunci nici primul sistem n-are soluţii.

Să rezolvăm al doilea sistem din totalitatea primită. Observăm că

$$t^2 + a^2t - 1 \geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq \frac{1}{2}\left(-a^2 - \sqrt{a^4+8}\right), \\ t \geq \frac{1}{2}\left(-a^2 + \sqrt{a^4+8}\right). \end{array}\right.$$

Deoarece $\frac{1}{2}\left(-a^2 + \sqrt{a^4+8}\right) > \frac{1}{2}\left(-a^2 - \sqrt{a^4+8}\right)$, atunci al doilea sistem din totalitatea primită este echivalent cu inecuaţia $t \geq \frac{1}{2}\left(-a^2 + \sqrt{a^4+8}\right)$.

Prin urmare, pentru $a > 0$, $a \neq 1$ şi orice x inecuaţia iniţială este echivalentă cu inecuaţia $a^x \geq \frac{1}{2}\left(-a^2 + \sqrt{a^4+8}\right)$.

Din ultima inecuaţie avem:

1. Pentru $0 < a < 1$, inecuaţia iniţială are soluţia $x \leq$ $\leq log_a \left[\frac{1}{2}(-a^2 + \sqrt{a^4+8})\right]$;

2. Pentru $a > 1$, inecuaţia iniţială are soluţia $x \geq \left[\frac{1}{2}(-a^2 +\right.$ *+a4+8).*

Exemplul 4.9. Să rezolvăm ecuaţia $log_2 x + log_t x + log_4 x = 1$.

Rezolvare. Observăm că $x > 0, t > 0, t \neq 1$.

Trecem toţi logaritmii în baza 2 şi obţinem:

$$log_2 x + \frac{log_2 x}{log_2 t} + \frac{log_2 x}{2} = 1 \Leftrightarrow log_2 x\left(1 + \frac{1}{log_2 t} + \frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow log_2 x\left(\frac{1}{log_2 t} + \frac{3}{2}\right) = 1.$$

Ultima ecuaţie n-are rădăcini, dacă $\frac{1}{log_2 t} + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow log_2 t = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow t = 2^{-\frac{2}{3}}$. Dacă $t \neq 2^{-\frac{2}{3}}$, atunci $log_2 x =$ $= \frac{1}{\frac{1}{log_2 t} + \frac{3}{2}} \Leftrightarrow log_2 x = \frac{2log_2 t}{2+3log_2 t} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{2log_2 t}{2+3log_2 t}}$.

Răspuns. Dacă $t > 0, t \neq 1, t \neq 2^{-\frac{2}{3}}$, $x = 2^{\frac{2log_2 t}{2+3log_2 t}}$, iar pentru celelalte valori a parametrului t ecuaţia n-are soluţii.

Exemplul 4. 10. De aflat numărul soluţiilor ecuaţiei $1 + log_x \frac{4-x}{10} = (lg\, lg\, n - 1)\, log_x 10$.

Rezolvare. Evident, $x > 0, x \neq 1, n > 0, n \neq 1, x < 4$. Aducem toţi logaritmii în baza 10 şi obţinem:

$$1 + \frac{lg \frac{4-x}{10}}{lg\, x} = (lg\, lg\, n - 1) \cdot \frac{1}{lg\, x} \Leftrightarrow lg\, x + lg \frac{4-x}{10} = lg\, lg\, n -$$

$$-1 \Leftrightarrow lg\left(x \cdot \frac{4-x}{10}\right) = lg \frac{ln\, n}{10} \Leftrightarrow \frac{x(4-x)}{10} = \frac{ln\, n}{10} \Leftrightarrow x(4 -$$

$$-x) = lg\, n \Leftrightarrow x^2 - 4x + lg\, n = 0$$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - lg\, n}$.

Răspuns.

1) Dacă $n = 10^3$, atunci $x = 1$ (nu satisface condiţiei) şi rămîne $x = 3$.

2) Dacă $n = 10^4$, atunci $x = 2$;

1. Dacă $n > 10^4$ ecuaţia n-are rădăcini;
2. Dacă $0 < n < 10^4$, $n \neq 10^3$ ecuaţia are două rădăcini $x = 2 \pm \sqrt{4 - lg\, n}$.

Exemplul 4. 11. Să determinăm valorile parametrului t pentru care ecuaţia $2\, lg(x + 3) = lg\, tx$ (1) are o singură rădăcină.

Rezolvare. Transformăm ecuaţia (1):

$(x + 3)^2 = tx$ sau $x^2 - (t - 6)x + 9 = 0$ (2).

Ecuaţia (1) are o singură rădăcină, dacă:

1. ecuaţia (2) are o singură rădăcină şi ea este rădăcină a ecuaţiei (1).

2. ecuaţia (2) are două rădăcini, una din care este rădăcină a ecuaţiei (1), iar cealaltă nu este rădăcină a ecuaţiei (1).

Ecuaţia (2) are o singură rădăcină dacă $D = 0$, adică $t^2 - -12t = 0$, de unde $t = 0, t = 12$.

Din (1) se vede că $t \neq 0$. Rămîne $t = 12$, dar atunci $x = 3$.

Fie acum $D > 0$. Atunci ecuaţia (2) are două rădăcini:

$x_{1,2} = \frac{t-6\pm\sqrt{t^2-12t}}{2}$.

Pentru ca aceste rădăcini să fie şi rădăcini a ecuaţiei (1) trebuie ca $x + 3 > 0$. Prin urmare, din rădăcinile ecuaţiei (2), una va fi rădăcină a ecuaţiei (1), iar cealaltă nu atunci şi numai atunci, cînd $\begin{cases} x_1 > -3 \\ x_2 \leq -3 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_1 \leq -3 \\ x_2 > -3 \end{cases}$ (4), unde $x_1 = \frac{t-6-\sqrt{t^2-12t}}{2}$, $x_2 = \frac{t-6+\sqrt{t^2-12t}}{2}$.

Observăm că

$$\begin{cases} \dfrac{t-6-\sqrt{t^2-12t}}{2} > -3 \\ \dfrac{t-6+\sqrt{t^2-12t}}{2} \leq -3 \end{cases}$$

se satisface numai pentru $t < 0$.

Sistemul $\begin{cases} \frac{t-6-\sqrt{t^2-12t}}{2} > -3 \\ \frac{t-6+\sqrt{t^2-12t}}{2} \leq -3 \end{cases}$ n-are rădăcini.

Răspuns: $t < 0$ sau $t = 12$.

Exemplul 4. 12. De aflat toate valorile x pentru care ecuaţia $2log_{2+a^2}\left(4 - \sqrt{7+2x}\right) = log_{2+a^2}(4 - 3x)$ este satisfăcută pentru orice valoare a parametrului a.

Rezolvare. Fie $a = 0$. Efectuînd potențierea obținem ecuația $(4 - \sqrt{7+2x})^2 = 4 - 3x, 23 + 2x - 8\sqrt{7+2x} = 4 -$

$-3x$, $19+5x=8\sqrt{7+2x}$. Ridicăm la pătrat ultima ecuație și obținem ecuația pătrată $25x^2+62x-87=0$. Rădăcinile acestei ecuații sunt $x=1$ și $x=-\frac{87}{25}$.
În așa fel am determinat, că valorile x se află între cele două valori obținute $x=1$ și $x=-\frac{87}{25}$. Efectuăm verificarea.
Dacă $x=1$, atunci vom avea $2log_{2+a^2}1=log_{2+a^2}1$ sau
$0=0$.
Prin urmare, valoarea $x=1$ satisface ecuației inițiale pentru orice valoare a parametrului a.
Dacă $x=-\frac{87}{25}$, atunci avem $2log_{2+a^2}\frac{19}{5}=log_{2+a^2(\frac{87}{25})^2}\frac{361}{25}$ sau $log_{2+a^2}\frac{19}{5}=log_{2+a^2(\frac{87}{25})^2}\frac{19}{5}$. Evident, dacă $a\neq 0$, partea stîngă nu este egală cu partea dreaptă.
Răspuns. $x=1$.

Exemplul 4. 13. Pentru ce valori ale parametrului a ecuația $1+log_{\sqrt{5}}(2\,lg\,a-x)=2log_x\sqrt{5}$ are soluții?

Rezolvare. Valorile admisibile ale variabilei x se determină de sistemul $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x<2\,lg\,a \end{cases}$.
Trecem inecuația dată la logaritmii în baza $\sqrt{5}$. În rezultat obținem ecuația
$log_{\sqrt{5}}x+log_{\sqrt{5}}(2\,lg\,a-x=2)$;
$log_{\sqrt{5}}\big(x\cdot(2\,lg\,a-x)\big)=2$;
$x(2\,lg\,a-x)=5$;
$x^2-2\,lg\,a\cdot x+5=0$.
Dacă discriminantul $D=4lg^2a-20\geq 0$, adică $|lg\,a|\geq\sqrt{5}$, atunci inecuația inițială va avea soluții.

Având în vedere valorile admisibile $0 < x < 2\,lg\,a$, primim $lg\,a > 0$ și prin urmare, condițiilor problemei satisfac toate valorile $lg\,a \geq \sqrt{5}$ sau $a \geq 10^{\sqrt{5}}$.

Răspuns. $a \geq 10^{\sqrt{5}}$.

Exemplul 4. 14. Pentru ce valori ale parametrului a ecuația $log_5 x + 4(1 - a^2)log_{25x}5 - 2 = 0$ are două rădăcini, distanța dintre care să fie mai mare decât $\frac{24}{5}$?

Rezolvare. Evident $x > 0, x \neq \frac{1}{25}$.

În baza proprietăților logaritmilor transformăm ecuația inițială la forma $(log_5 x - 2)(log_5 x + 2) + 4(1 - a^2) = 0$.

Rezolvând această ecuație primim $log_5 x = \pm 2a$. Așadar, ecuația inițială are două rădăcini $x_1 = 5^{2a}$ și $x_2 = 5^{-2a}$. Observăm că ambele rădăcini satisfac primei condiții $x > 0$, iar cea de a doua condiție $x \neq \frac{1}{25}$ va avea loc pentru $a \neq \pm 1$.

Să trecem la rezolvarea problemei. Evident pentru $a = 0$ condiția problemei nu se satisface. Cercetăm cazurile:

1) $a > 0$, atunci $5^{2a} > 5^{-2a}$ și condiția problemei este echivalentă cu inecuația $5^{2a} - 5^{-2a} > \frac{24}{5}$. Facem substituția $5^{2a} = t;\ 5^{-2a} = \frac{1}{t}$ și obținem $t > 5$ sau $a > \frac{1}{2}$.

2) $a < 0$, atunci invers, $5^{2a} < 5^{-2a}$ și inecuația are forma $5^{2a} - 5^{-2a} > \frac{24}{5}$. După o substituție analogică obținem $a < -\frac{1}{2}$.

Răspuns. $a \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

Exemplul 4. 15. Rezolvați ecuația

$$|a - 9|3^{x-2} + x9^{x-1} = 1.$$

Rezolvare.

$|a-9|3^{x-2}+x9^{x-1}=1 \Leftrightarrow (|a-9|3^{x}+ax3^{2x}-9=0.$

Din ultima ecuație ușor se observă, că $x=0$ pentru $a \in \{-9;0;9\}$.

Fie $a \neq 0$. Atunci, $3^{x}=\left(-|a-9| \pm \frac{a+9}{2a}\right)$.

Dacă $a<9$, atunci $3^{x}=-\frac{9}{a}$ sau, $x=0$.

Ecuația $3^{x}=-\frac{9}{a}$ n-are soluții pentru $0<a<9$ și are rădăcina $x=2-log_{3}(-a)$ pentru $a<0$.

Dacă $a>9$, atunci $3^{x}=-1$ (n-are soluții) sau $3^{x}=\frac{9}{a}$ și deci, $x=2-log_{3}a$.

Răspuns. $0; 2-log_{3}(-a)$, pentru$a<-9$;

0, pentru $a=-9$;

$0; 2-\log_{3}(-\mathrm{a})$, pentru $-9<a<0$;

0, pentru $0 \leq a \leq 9$;

$2-log_{3}a$, pentru $a>9$.

Exemplul 4. 16. Pentru ce valori a parametrului a funcția trece $y=\frac{2^{ax+7}}{2^{x^{2}}}$ are maximum pentru $x=4$?

Rezolvare. Funcția inițială o scriem sub forma $y=$ $=2^{-x^{2}+ax+7}$. Deoarece funcția $y=2^{t}$ este monoton crescătoare, urmează că funcția $y=2^{-x^{2}+ax+7}$ va avea maxim în acel punct, în care va avea maximum și funcția $f(x)=$ $=-x^{2}+ax++7$. Ramurile acestei parabole sunt îndreptate în jos și prin urmare, punctul de maximum este abscisa vîrfului parabolei $x_{v}=\frac{a}{2}$. Conform condiției $x_{v}=4$ și deci $a=8$.

Răspuns. $a=8$.

Exemplul 4. 17. Să rezolvăm ecuaţia

$$\sqrt{log_{a}\sqrt[4]{ax}+log_{x}\sqrt[4]{ax}}++\sqrt{log_{a}\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+log_{x}\sqrt{\frac{a}{x}}}=a.$$

Rezolvare. Transformăm ecuaţia dată în felul următor:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1+log_a x)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{log_a x}\right)}+\sqrt{\frac{1}{4}(1+log_a x-1)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{log_a x}-1\right)}=a;$$

$$\sqrt{\frac{log_a^2 x+2log_2 x+1}{4log_a x}}+\sqrt{\frac{log_a^2 x-2log_2 x+1}{4log_a x}}=a;$$

$$\sqrt{\frac{(log_a x+1)^2}{4log_a x}}+\sqrt{\frac{(log_a x-1)^2}{4log_a x}}=a.$$

Evident, $log_a x>0$ şi deci $log_a x+1>1$.

Din ecuaţia iniţială avem că $a>0$ şi $a\neq 1$.

Ultima ecuaţie are forma:

$$\frac{log_a x+1}{2\sqrt{log_a x}}+\frac{|log_a x-1|}{2\sqrt{log_a x}}=a\ (1).$$

Să observăm că $a>1$. Pentru aceasta transformăm primul termen din (1) în felul următor:

$$\frac{log_a x+1}{2\sqrt{log_a x}}=\frac{2\sqrt{log_a x}+\left(\sqrt{log_a x}-1\right)^2}{2\sqrt{log_a x}}=1+\frac{\left(\sqrt{log_a x}-1\right)^2}{2\sqrt{log_a x}}>1.$$

Vom cerceta 2 cazuri:

1. Fie $log_a x>1$. Atunci din (1) obţinem:

$$\frac{log_a x+1+log_a x-1}{2\sqrt{log_a x}}=a\Leftrightarrow\sqrt{log_a x}=a\Leftrightarrow log_a x=a^2\Leftrightarrow x=$$
$$=a^{a^2}.$$

2. Fie $0<log_a x<1$. Atunci din (1) obţinem:

$$\frac{2}{2\sqrt{log_a x}}=a\Leftrightarrow log_a x=\frac{1}{a^2}\Leftrightarrow x=a^{\frac{1}{a^2}}.$$

Răspuns. Dacă $a>1$, atunci $x_1=a^{a^2}$, $x_2=a^{\frac{1}{a^2}}$; dacă $a\leq 1$, atunci ecuaţia n-are soluţii.

Exemplul 4. 18. Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2 \\ log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}\sqrt{a}+log_{\frac{y}{\sqrt{b}}}\sqrt{b}=\frac{a}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Rezolvare.

Evident, $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$.
În ecuaţia a doua calculăm fiecare termen şi trecem la logaritmi în bazele a şi b corespunzător şi obţinem:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ \frac{log_a \sqrt{a}}{log_a \sqrt[x]{a}} + \frac{log_b \sqrt{b}}{log_b \sqrt[y]{b}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{x}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{y}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \end{cases};$$

Înlocuim valoarea pentru y din ecuaţia a doua în prima ecuaţie, obţinem:

$$x^2 + x\left(\frac{2a}{\sqrt{3}} - x\right) + \left(\frac{2a}{\sqrt{3}} - x\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2ax}{\sqrt{3}} - x^2 + \frac{4a^2}{3} -$$

$$-\frac{4}{\sqrt{3}}ax + x^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2ax}{\sqrt{3}} + \frac{a^2}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Atunci şi $y = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Răspuns. Dacă $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$, atunci $x = y = \frac{a}{\sqrt{3}}$; pentru alte valori a parametrilor a şi b sistemul n-are soluţii.

Exemplul 4. 19. Pentru ce valori a parametruluia a suma $log_a(2^x - 1)$ și $log_a(2^x - 7)$ este egală cu unitatea exact pentru o valoare a lui x?

Rezolvare. Valorile admisibile ale parametrului a sunt toatevalorile $a > 0, a \neq 1$. Alcătuim ecuația:

$$log_a(2^x - 1) + log_a(2^x - 7) = 1.$$

Să notăm $t = 2^x > 0$. Scriem sistemul, echivalent cu această ecuație:

$$\begin{cases} (t-1)(t-7) = a \\ t > 7 \end{cases} \text{sau } t^2 - 8t + 7 - a > 0.$$

Parabola $f(t) = t^2 - 8t + 7 - a$ are vîrful în punctul cu abscisa $t_v = 4$, ramurile sunt îndreptate în sus, rădăcinile suntsimetrice în raport cu vîrful parabolei și deci , condiției

$t > 7$ poate satisface numai rădăcina cea mai mare, căreia și o să-i corespundă unica soluție a inecuației. Condiția necesară și suficientă pentru ca rădăcina mai mare să fie mai mare decît 7 se determină de inecuația $f(7) < 0$ sau $49 - 56 + 7 - a < 0$, de unde $a > 0$.

Răspuns. $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Exemplul 4. 20. Pentru ce valori a parametrului a ecuația

$$\left((2x + a)\sqrt{22a - 4a^2 - 24} - 2(x^2 + x)\, lg\, a\right) lg\,\frac{36a - 9a^2}{35} = 0$$

are cel puțin două rădăcini, una din care nenegativă, iar cealaltă este nu mai mare decît -1?

Rezolvare. Mulțimea valorilor admisibile a parametrului a este determinată de sistemul

$$\begin{cases} 22a - 4a^2 - 24 \geq 0 \\ 36a - 9a^2 > 0 \\ a > 0 \end{cases}.$$

Rezolvînd acest sistem obținem $a \in \left[\frac{3}{2}; 4\right)$.

Să cercetăm la început cazul, cînd $lg\,\frac{36a - 9a^2}{35} = 0$.

Soluțiile ultimei ecuații sunt $a_1 = \frac{5}{3}$ și$a_2 = \frac{7}{3}$.

Pentru aceste două valori ale parametrului a orice valoare a lui x satisface ecuației inițiale și prin urmare, ecuația inițială are rădăcini despre care se spune în problema pusă. Fie acum expresia din paranteza ecuației inițiale este egală cu zero, atunci

$$(2x + a)\sqrt{22a - 4a^2 - 24} - 2(x^2 + x)\, lg\, a = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-2\, lg\, a)x^2 - 2(lg\, a - \sqrt{22a - 4a^2 - 24}x +$$
$$+a\sqrt{22a - 4a^2 - 24} = 0.$$

Fie $(-2\, lg\, a)x^2 - 2\left(lg\, a - \sqrt{22a - 4a^2 - 24}\right)x + a \cdot$
$\cdot \sqrt{22a - 4a^2 - 24} = f(x)$.

Pe mulțimea valorilor admisibile a parametrului $a \in \left[\frac{3}{2}; 4\right)$, urmează că ramurile trinomului pătrat $f(x)$ sunt îndreptate în jos şi prin urmare, cerințele problemei vor fi satisfăcute numai în cazul condiției

$$\begin{cases} f(0) = a\sqrt{22a - 4a^2 - 24} \geq 0 \\ f(1) = (a-2)\sqrt{22a - 4a^2 - 24} \geq 0 \end{cases}.$$

Rezolvînd ultimul sistem și ținînd cont de valorile admisibile ale parametrului a, obținem: $a \in \left[2; 4\right) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Reuniunea rezultatelor obținute constituie răspunsul problemei.

Răspuns. $a = \frac{3}{2}; a = \frac{5}{3}; a \in [2; 4)$.

Exemplul 4. 21. Pentru fiecare valoare a parametrului a de rezolvat ecuația $9a^2 + log_2^2 x + 3\,arccos(x-1) - (3a-1) \cdot$ *·log2x2−6a+1=0.*

Rezolvare. Să transformăm ecuația inițială:

$9a^2 + log_2^2 x + 3\,arccos(x-1) - (3a-1)log_2 x^2 - 6a + 1 =$
=0⇔log22x−23a−1log2x+9a2−6a+1++3arccos(x−1)=0
$\Leftrightarrow (log_2 x - 3a + 1)^2 + 3\,arccos(x - -1) = 0.$

Deoarece funcțiile $(log_2 x - 3a + 1)^2$ și $3\,arccos(x-1)$ sunt nenegative, urmează că ecuația inițială este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} log_2 x - 3a + 1 = 0 \\ 3\,arccos(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ x = 2 \end{cases}.$$

Răspuns. Dacă $a = \frac{2}{3}, x = 2$; dacă $a \neq \frac{2}{3}, \emptyset$.

Exemplul 4. 22. De aflat toate valorile parametrului a, pentru care ecuația $(x^2 - 6|x| + a)^2 + 10(x^2 - 6|x| + a) +$ $+26 = \cos\frac{16\pi}{a}$ are exact două rădăcini.

Rezolvare. Să transformăm ecuaţia iniţială:

$$((x^2-6|x|+a)^2+10(x^2-6|x|+a)+26=\cos\frac{16\pi}{a})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((x^2-6|x|+a)^2+10(x^2-6|x|+a)+25+1$$
$$-\cos\frac{16\pi}{a}=0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-6|x|+a+5)^2+1-\cos\frac{16\pi}{a}=0).$$

Să observăm că funcțiile $(x^2-6|x|+a+5)^2$ și $1-\cos\frac{16\pi}{a}$ sunt nenegative și prin urmare ecuația inițială este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x^2-6|x|+a+5=0, \\ 1-\cos\frac{16\pi}{a}=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|x|-3)^2=4-a, \\ a=\frac{8}{k}, k\epsilon Z. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\le 4, \\ |x|=3\pm\sqrt{4-a}, \\ a=\frac{8}{k}, k\epsilon Z. \end{cases}$$

Ecuația $|x|=3\pm\sqrt{4-a},$ are exact două rădăcini numai dacă $\sqrt{4-a,}=0$, sau dacă $3-\sqrt{4-a}<0$, adică numai dacă $a<-5$. Prin urmare, valorile parametrului a trebuie să aparțină mulțimii $(-\infty;-5)\cup\{4\}$. Avînd în vedere că egalitatea $a=\frac{8}{k}, k\epsilon Z \Leftrightarrow a=\pm 8, a=\pm 4, \pm\frac{8}{3}, \ldots$ găsim două valori a parametrului $a=4,\ a=-8$, care aparțin mulțimii $(-\infty;-5)\cup$ $\cup\{4\}$.

Răspuns: $a=4,\ a=-8$

Probleme pentru lucrul de sinestătător

Rezolvaţi ecuaţiile:

1. $3\cdot 4^{x-2}+27=a+a\cdot 4^{x-2}$.

Răspuns. Pentru $a\le 3, a\ge 27$ ecuaţia n-are soluţii;

pentru $3 < a < 27, x = \log_4 \frac{a-27}{3-a} + 2$.

2. $\log_9 x + \log_9 \frac{2-x}{2} = \log_9 \log_9 a$.

Răspuns. Pentru $0 < a \leq 3, x = 1 \pm \sqrt{1 - 2\log_9 a}$;
pentru $a \leq 0, a > 3$ ecuaţia n-are rădăcini.

3. $2\log_3 x + \log_{\frac{x}{3}} 3 = t$.

Răspuns. $\emptyset$,pentru $2 - 2\sqrt{2} < a < 2 + 2\sqrt{2}$;
$x = 3^{\frac{a+2\pm\sqrt{a^2-4a-4}}{4}}$, pentru $a \leq 2 - 2\sqrt{2}, a > 2 + 2\sqrt{2}$.

4. $4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3 = 0$.

Răspuns. Pentru $a < 0$, $x = 2\log_2(-a)$; pentru $a = 0, \emptyset$; pentru $a > 0$, $x_1 = \log_2 a$, $x_2 = 2\log_2 a$.

5. $\log_3 a - \log_x a = \log_{\frac{x}{3}} a$.

Răspuns. Pentru $a < 0$, ecuaţia nu este determinată; pentru $a = 1, x > 0, x \neq 1, x \neq 3$;
pentru celelalte valori a parametrului a, $x = 3^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$.

6. Rezolvaţi ecuaţia $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$.

Răspuns. Dacă $a \leq 1$, atunci $x = \pm\log_{12}\left(1 + \sqrt{1-a}\right)$.
pentru $a > 1$ ecuaţia n-are rădăcini.

7. $\lg^2 x + \lg(2 \cdot x) = \lg \lg a$.

Răspuns. Pentru $1 < a \leq 100$: $x = \frac{2\pm\sqrt{4-2\lg a}}{2}$;
pentru $a \leq 1, a > 100$ ecuaţia n-are soluţii.

8. $\log_a x + \log_{\sqrt{a}} x + \log_{\sqrt[3]{a^2}} x = 27$.

Răspuns. Pentru $a > 0, a \neq 1$: $x = a^6$;
pentru $a \leq 0, a = 1$ ecuaţia n-are soluţii.

9. $\log_a\left(1 - \sqrt{1-x}\right) = \log_{a^2}\left(3 - \sqrt{1+x}\right)$.

Răspuns. Pentru $a \in R$ ecuaţia n-are soluţii.

10. $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \frac{a^2-4}{2a-x} = 1.$

Răspuns. $\emptyset$, pentru $a \le 0, a = 1, a = 2$; pentru $0 < a < 1$, $1 < a < 2, a = 3, x_1 = a - 2, x_2 = a + 2$;
pentru $2 < a < 3, a > 3$.

11. $\frac{\log_x(2a-x)}{\log_x 2} + \frac{\log_a \sqrt{x}}{\log_a \sqrt{2}} = \frac{1}{\log_{a^2-1} 2}.$

Răspuns. $\emptyset$, pentru $a < 1, a = \sqrt{2}$; 3, pentru $a = 2$; $x_1 = a - 1$
, $x_2 = a + 1$, pentru $1 < a < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < a < 2$, $a > 2$.

12. $\log_a(x+1) = \log_a(2x+8) - \log_a(x+2), a > 0, a \neq 1$

Răspuns: $\{2\}$.

13. $\log_a(4x+2) - \log_a(-6x) = \log_a(1-2x),$
$a > 0,\ a \neq 1.$

Răspuns: $\left\{-\frac{1}{6}\right\}$.

14. $\frac{\log_a{}^2 x - 2}{4 - \log_a x} = 1, a > 0,\ a \neq 1.$

Răspuns: $\{a^2;\ a^{-3}\}$.

15. $\frac{2}{a}\lg x = 1 + \frac{a}{\lg x}, a \neq 0.$

Răspuns: $\left\{10^a;\ a^{-\frac{a}{2}}\right\}$.

16. $\frac{\log_3 4 - 2}{\log_3(x+2)} = \frac{\log_a(5-x)}{\log_a(x+2)} - 1, a > 0,\ a \neq 1.$

Răspuns: $\left\{2\frac{11}{13}\right\}$.

17. $3^{\log_a x + 1} + 3x^{\log_a 3} = 2, a > 0,\ a \neq 1.$

Răspuns: $\left\{\frac{1}{a}\right\}$.

18. $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0, a > 0,\ a \neq 1.$

Răspuns: $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}};\ \frac{1}{\sqrt{a}}\right\}$.

19. $a^{\frac{2}{x}} + b^{\frac{2}{x}} = 3(ab)^{\frac{1}{x}},\ a, b > 0,\ \ a, b \neq 1.$

Răspuns: Dacă $a \neq b$, $\left\{\frac{\lg a - \lg b}{\lg\frac{3+\sqrt{5}}{2}};\ \frac{\lg a - \lg b}{\lg\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right\}$; dacă $a = b$, $\emptyset$.

20. $\frac{\lg(4+a-x)}{\lg x} = 1 + \frac{\log_a 4 - 2}{\log_a x},\ a > 0,\ \ a \neq 1.$

Răspuns: $\left\{\frac{a^2(a+4)}{a^2+4}\right\}$.

21. $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \frac{a^2-4}{2a-x} = 1,\ a > 0,\ \ a \neq 1.$

Răspuns: Pentru $a \in (0,1) \cup (1,2) \cup \{3\}, \{a+2\}$;
pentru $a \in (2,3) \cup (3,+\infty), \{a-2; a+2\}$;
pentru $a = 2, \emptyset$.

22. $\log_{ab}(x-a)^2 + \log_{ab}(x-b)^2 = 2,\ a, b > 0,\ \ a, b \neq 1.$

Răspuns: Dacă $a^2 + b^2 - 6ab < 0$, $\{0, a+b\}$;
Dacă $a^2 + b^2 - 6ab \geq 0$, $\left\{0, a+b, \frac{1}{2}\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2-6ab}\right),\right.$
$\left.\frac{1}{2}\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2-6ab}\right)\right\}$.

23. $\frac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + \log_{ax} a \log_{\frac{1}{a}} 2x = 0.$

Răspuns. $\{a^2\}$ pentru $a \in \left(0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \cup (1;\ +\infty)$.

24. Pentru ce valori a parametrului a funcția $y = \frac{3^{x^2}}{3^{ax-11}}$ are minimum pentru $x = 6$?

Răspuns. $a = 12$.

25. Pentru ce valori a parametrului a ecuația $(a-1)\cdot 4^x + (2a-3)\cdot 6^x = (3a-4)\cdot 9^x$ are o singură soluție?

Răspuns. $a \in \left(-\infty; 1\right] \cup \left\{\frac{5}{4}\right\} \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$?

26. De aflat toate valorile parametrului a pentru care ecuația $4^x + (a^2+5)\cdot 2^x + 9 - a^2 = 0$ n-are soluții.

Răspuns. $|a| \leq 3$.

27. Pentru ce valori a parametrului a suma pătratelor rădăcinilor ecuaţiei $2\log_a|x-1| - \log_a x = 1$ este egală cu 34?

Răspuns. $a = 4$.

28. Pentru ce valori a parametrului a ecuaţia $lg(x^2 + ax) - -lg(8x - 6a - 3) = 0$ are o singură rădăcină?

Răspuns. $-\frac{1}{2} \leq a \leq -\frac{3}{2}$; $a = 1$.

29. Se ştie că $x = 9$ este rădăcină a ecuaţiei

$$\log_\pi(x^2 + 15a^2) - \log_\pi(a-2) = \log_\pi \frac{8ax}{a-2}.$$

Aflaţi alte rădăcini ale acestei ecuaţii.

Răspuns. $\{5\}$.

Rezolvaţi sistemul:

30. $\begin{cases} \log_{x-2}(2x^2 - 4x + y + 1) = 0 \\ x + y - 3 = a - a^2 \end{cases}.$

Răspuns. Pentru $a < -2$: $x = 1 - a$, $y = 2 + 2a - a^2$; pentru $-1 \leq a \leq 2$, $a = -2$, $a = 3$ sistemul n-are soluţii; pentru $2 < a < 3$, $a > 3$: $x = a$, $y = 3 - a^2$.

31. $\begin{cases} 5\log_x a + 3\log_y a = 0 \\ x^3 - 4y^5 = 0; a \neq 1 \end{cases}.$

Răspuns. $x_1 = 625, x_2 = 125, y_1 = 3, y_2 = 4.$

32. $\begin{cases} \log_{a^2} x - \log_{a^4} y = 3 \\ \log_{a^6} x - \log_{a^8} y = 4 \end{cases}.$

Răspuns. $\left\{\left(|a|^{\frac{66}{5}}; |a|^{\frac{72}{5}}\right)\right\}$ pentru $a \neq 0, |a| \neq 1.$

33. $\begin{cases} (\log_a(xy) - 2)\left(\log_a \frac{4}{9}\right)^{-1} = -1 \\ x + y = 5a \end{cases}.$

Răspuns. $\left\{\left(\frac{9a}{2}; \frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}; \frac{9a}{2}\right)\right\}$ pentru $a \in (0,1) \cup (1; +\infty).$

34. $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2{,}5 \\ x + y = a^2 + a \end{cases}.$

Răspuns. $\{(a^2, a); (a, a^2)\}$ pentru $a \in (0,1) \cup (1; +\infty);$
$\{((a+1)^2, -(a+1)); (-(a+1), (a+1)^2)\}$ pentru
$a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1);$
$\emptyset$, pentru $a \in \{-2; 1\} \cup [1; 0].$

§5. Ecuaţii trigonometrice şi sisteme de ecuaţii trigonometrice

Cele mai simple ecuaţii trigonometrice sunt ecuaţiile de forma:

$sin\, x = a, unde\ |a| \leq 1;$

$cos\, x = a, unde\ |a| \leq 1;$

$tg\, x = a, unde - \infty < a < +\infty;$

$ctg\, x = a, unde - \infty < a < +\infty.$

Formulele soluţiilor acestor ecuaţii au forma:

$sin\, x = a,\ x = (-1)^n arcsin\, a + n\pi\, , n \in Z;$

$cos\, x = a,\ x = \pm\, arccos\, a + 2n\pi\, , n \in Z;$

$tg\, x = a,\ x = arctg\, a + n\pi\, , n \in Z;$

$ctg\, x = a,\ x = arcctg\, a + n\pi\, , n \in Z.$

În particular, pentru $a = 0, a = 1, a = -1,$ au loc următoarele formule:

$sinx = 0, x = n\pi, n \in Z;$

$sinx = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z;$

$sinx = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z;$

$cosx = 0, x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z;$

$cosx = -1, x = \pi + 2n\pi, n \in Z;$

$tg\, x = 0, x = n\pi, n \in Z;$

$tgx = 1, x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z;$

$tgx = -1, x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z;$

$ctgx = 0, x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z.$

Ecuaţiile de forma: $sin(\omega x + \varphi) = a$; $cos(\omega x + \varphi) = a$; $tg(\omega x + \varphi) = b$; $ctg(\omega x + \varphi) = b$; $(\omega \neq 0, |a| \leq 1;\ \varphi, b - orce\ numere\ reale)$ de asemenea se consideră simple. Aceste ecuaţii se rezolvă în mod similar cu cele patru de la începutul paragrafului, înlocuind doar x prin $\omega x + \varphi$.

Dacă ecuaţia trigonometrică nu este simplă, atunci cu ajutorul unor transformări identice se aduce la una sau la o totalitate de ecuaţii simple.

La rezolvarea ecuaţiilor trigonometrice deseori se foloseşte descompunerea în factori şi introducerea unei noi variabile (metoda substituţiei).

Rezolvând o ecuaţie trigonometrică prin metoda descompunerii în factori ecuaţia iniţială poate să nu fie echivalentă cu totalitatea de ecuaţii obţinută, deoarece pot apărea rădăcini străine. În aşa caz trebuie de exclus din valorile obţinute pentru necunoscută acele valori, pentru care ecuaţia dată îşi pierde sensul, ca de exemplu: $(1 - \sin x)(tg^2 x - 3) = 0$.

Dacă $sinx = 1$, atunci $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$.

Dacă $tg^2 x = 3$, atunci $tg\, x = \pm\sqrt{3}$ şi prin urmare, $x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi, n \in Z$. Această însă nu înseamnă că $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$ şi $x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi, n \in Z$ sunt soluţiile ecuaţiei iniţiale, deoarece pentru $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$ ecuaţia iniţială n-are sens şi deci, soluţiile ecuaţiile iniţiale sunt doar $x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi, n \in Z$.

Se numesc omogene ecuaţiile de forma:

$a \sin kx + b \cos kx = 0$;

$a \sin^2 kx + b \sin kx \cos kx + c \cos^2 kx = 0$;

$a \sin^3 kx + b \sin^2 kx \cos kx + c \sin kx \cos^2 kx + d \cos^3 kx = 0$

Ecuaţia $a \sin^2 kx + b \sin kx \cos kx + c \cos^2 kx = d$, pentru $d \neq 0$ nu este omogenă, dar înlocuind d cu expresia echivalentă $d(sin^2kx + cos^2kx)$ transformăm această ecuaţie într-o ecuaţie omogenă.

Pentru a rezolva ecuaţiile omogene în cazul când $a \neq 0$ cercetăm acele valori ale necunoscutei x, pentru care $cos\, kx \neq 0$. Deaceea, pentru $a \neq 0$, împărţind ambele părţi ale ecuaţiilor omogene de mai sus corespunzător la $cos\, kx,\ cos^2kx\, , cos^3kx$, atunci rădăcinile ecuaţiilor date nu se vor pierde. În rezultat se obţine o ecuaţie algebrică în raport cu $tg\, kx$, pentru rezolvarea căreia se face substituţia $tg\, kx = t$.

Ecuaţia de forma $a\, sin\, x + b\, cos\, x = c$ poate fi rezolvată prin mai multe metode.

Metoda I.

Cu ajutorul egalităţilor $sin\, x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ şi $cos\, x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ adevărate pentru orice $x \neq \pi + 2n\pi, n \in Z$ ecuaţia dată poate fi adusă la o ecuaţie algebrică în raport cu $tg\, \frac{x}{2}$. Să menţionăm că înlocuirea $sin\, x$ şi $cos\, x$ prin $tg\, \frac{x}{2}$ poate aduce la pierderea rădăcinilor de forma: $x = \pi + 2n\pi, n \in Z$. Verificarea va arăta dacă aceste valori ale necunoscutei satisfac ecuaţiei iniţiale.

Metoda II.

Introducem un unghi auxiliar φ, astfel încât $\varphi = arctg\, \frac{b}{a}$. Împărţim ambele părţi ale ecuaţiei iniţiale la $\pm\sqrt{a^2 + c^2}$ şi obţinem:

$sin(x + \varphi) = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$,

$x = (-1)^n arcsin \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} - arctg\, \frac{b}{a} + n\pi, n \in Z.$

Evident, ecuaţia are soluţii. Dacă $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 0$ sau $c^2 \leq a^2 + b^2$. Dacă $c^2 > a^2 + b^2$ atunci ecuaţia iniţială n-are soluţii.

Metoda III.

Soluţiile ecuaţiei $a \sin x + b \cos x = c$ coincid cu soluţiile sistemului $\begin{cases} a \sin x + b \cos x = c \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$.

Metoda IV.

Ridicăm ambele părţi la pătrat şi obţinem ecuaţia $a^2 \sin^2 x + 2ab \sin x \cos x + b^2 \cos^2 x = c^2$ care se reduce la o ecuaţie omogenă.

În particular, dacă $a = b$, atunci obţinem ecuaţia $ab \sin 2x = c^2 - a^2$.

Prin rezolvarea exemplelor concrete vom aduce şi alte metode de rezolvare a ecuaţiilor trigonometrice.

Exemplul 5. 1. Să aflăm toate valorile parametrului t pentru care are soluţie ecuaţia

$$\cos x + \sqrt{1+t} \sin x = 1 + \sqrt{1-t}.$$

Rezolvare. Observăm că ecuaţia este definită pentru $-1 \leq t \leq 1$ şi are forma $a \sin x + b \cos x = c$. Aducem partea stîngă a acestei ecuaţii la sinusul sumei a două unghiuri cu ajutorul împărţirii ambelor părţi ale ecuaţiei iniţiale la $\sqrt{2+t}$. Atunci partea dreaptă a ecuaţiei primite trebuie să satisfacă condiţiilor $-1 \leq \frac{1+\sqrt{1-t}}{\sqrt{2+t}} \leq 1$. Deoarece această fracţie este pozitivă pentru $t \in [-1, 1]$, atunci e suficient să fie satisfăcută condiţia: $1 + \sqrt{1-t} \leq \sqrt{2+t}$.

Rezolvînd ultima inecuaţie, obţinem: $t \le \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ şi $t \ge \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Deoarece $t \in [-1, 1]$, obţinem: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \le t \le 1$.

Răspuns. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \le t \le 1$.

Exemplul 5. 2. Să rezolvăm ecuaţia

$$cos(x-a) = m \sin x - n \cos x.$$

Rezolvare. Transformăm ecuaţia:

$cos\, x\, cos\, a + sin\, x\, sin\, a - m\, sin\, x + n\, cos\, x = 0,$

$(n + cos\, a)\, cos\, x + (sin\, a - m)\, sin\, x = 0,$

$n + cos\, a + (sin\, a - m) tg\, x = 0.$

Cercetăm următoarele cazuri:

1. Dacă $m \ne sin\, a$, atunci $tg\, x = \frac{n+cos\, a}{m-sin\, a}$.
2. Dacă $m = sin\, a\, , n \ne -cos\, a$, atunci $cos\, x = 0$.
3. Dacă $m = \sin a$, $n = -\cos a$, atunci $x \in R$.

Răspuns. Pentru $m \ne sin\, a$: $x = arctg\, \frac{cos\, a+n}{m-sin\, a} + k\pi, k \in Z$;

pentru $m = sin\, a\, , n \ne -cos\, a$: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$;

pentru $m = sin\, a$, $n = -cos\, a$: $x \in R$.

Exemplul 5. 3. Să rezolvăm ecuaţia $a\, sin\, x = b\, cos\, \frac{x}{2}$.

Rezolvare. Folosind identitatea $sin\, x = 2\, sin\, \frac{x}{2} cos\, \frac{x}{2}$ obţinem:

$2a\, sin\, \frac{x}{2} cos\, \frac{x}{2} - b\, cos\, \frac{x}{2} = 0;\ cos\, \frac{x}{2}\left(2a\, sin\, \frac{x}{2} - b\right) = 0.$

Cercetăm cazurile:

1. $cos\, \frac{x}{2} = 0$. Atunci $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = (2k+1)\pi / k \in Z$;
2. $2a\, sin\, \frac{x}{2} = b$

1. Dacă $a \neq 0$, atunci $sin\frac{x}{2} = \frac{b}{2a}$. Dacă în acest caz $|b| \leq 2|a|$, atunci $x = (-1)^k 2\, arcsin\frac{b}{2a} + 2k\pi / \ k \in Z$;
2. Dacă $|b| \leq 2|a|$, atunci ecuaţia n-are soluţii;
3. Dacă $a = 0, b \neq 0$, ecuaţia n-are soluţii;
4. Dacă $a = b = 0$, atunci $x \in R$.

Răspuns. Pentru $|b| \leq 2|a|$, $a \neq 0$:

$$\left[\begin{array}{c} x = (2k+1)\pi, k\epsilon Z, \\ x = (-1)^k 2\arcsin\frac{b}{2a} + 2k\pi, k\epsilon Z. \end{array}\right.$$

pentru $|b| \leq 2|a|$: $\pi(2k+1)/k \in Z$; pentru $a = b = 0$, $x \in R$.

Exemplul 5. 4. Pentru ce valori a parametrului a ecuaţia $cos2x + a\ sinx = 2a - 4$ are soluţii?

Rezolvare. Deoarece $cos2x = 1 - 2sin^2x$, atunci ecuaţia are forma:

$1 - 2sin^2x + a\ sinx = 2a - 7$,

$2sin^2x - a\ sinx + 2a - 8 = 0$,

$sinx = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16a + 64}}{4} = \frac{a \pm (a-8)}{4}$.

Cazul 1. $sinx = 2$. Ecuaţia n-are rădăcini.

Cazul 2. $sinx = \frac{a-4}{2}$. Această ecuaţie are soluţii dacă

$\left|\frac{a-4}{2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{a-4}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq a - 4 \leq 2 \Leftrightarrow a \in [2;6]$.

Răspuns. $a \in [2;6]$.

Exemplul 5. 5. Pentru ce valori a parametrului a ecuaţia $\sqrt{a}cosx - 2sinx = \sqrt{2} + \sqrt{2-a}$ are soluţii?

Rezolvare. Ecuaţia dată are forma: $m\ sinx + ncosx = p$şi de aceea vom împărţi ambele părţi la $\sqrt{m^2 + n^2}$, adică la$\sqrt{a+4}$ şi vom obţine:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+4}}cosx - \frac{2}{\sqrt{a+4}}sinx = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-a}}{\sqrt{a+4}}$$

Numerele $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+4}}$ şi $\frac{2}{\sqrt{a+4}}$ aparţin segmentului $[-1;1]$ şi $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+4}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{a+4}}\right)^2 = 1$. Prin urmare, există aşa unghi φ încît $cos\,\varphi = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+4}}$ şi $sin\,\varphi = \frac{2}{\sqrt{a+4}}$.

Atunci:

$cos\varphi\, cosx - sin\varphi\, sinx = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-a}}{\sqrt{a+4}}$;

$cos(x+\varphi) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-a}}{\sqrt{a+4}}$.

Pentru ca ultima ecuaţie să aibă rădăcini este necesar să se îndeplinească următoarele condiţii:

$$\begin{cases} 2-a \geq 0, \\ a \geq 0, \\ a+4 > 0, \\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-a}}{\sqrt{a+4}} \leq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [0;2], \\ \sqrt{2}+\sqrt{2-a} \leq \sqrt{a+4}. \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\sqrt{5}-1;2\right].$$

Răspuns. $a \in \left[\sqrt{5}-1;2\right]$.

Exemplul 5. 6. Să rezolvăm ecuaţia

$$sin^4x + cos^4x = a \quad (1).$$

Rezolvare. Folosim formulele de micşorare a puterii, obţinem:

$\left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^2 = a$;

$1 - 2\cos 2x + cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + cos^2 2x = 4a$;

$cos^2 2x = 2a - 1$ (2).

Aflăm valorile de control ale parametrului a. Pentru $2a-1<0$, $2a-1>1$ ecuaţia (2) n-are soluţii. Valori de control vor fi de asemenea $2a-1=0$, $2a-1=1$, adică $a=\frac{1}{2}$, $a=1$.

Aşa dar, vom cerceta ecuaţia (2) în următoarele cinci cazuri:

1. $a<\frac{1}{2}$;
2. $a=\frac{1}{2}$;
3. $\frac{1}{2}<a<1$;
4. $a=1$;
5. $a>1$.

Cazul I. Dacă $a<\frac{1}{2}$, atunci $2a-1<0$ şi ecuaţia (2) n-are soluţii.

Cazul II. Dacă $a=\frac{1}{2}$, atunci (2) are forma $cos^2 2x=0$ şi deci, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} / k\in Z$.

Cazul III. Dacă $\frac{1}{2}<a<1$, atunci $0<2a-1<1$.

Transformăm ecuaţia (2) la forma: $\frac{1+cos4x}{2}=2a-1$, $cos4x=4a-3$.

Avînd în vedere că în acest caz $\frac{1}{2}<a<1$, atunci $-1<4a-3<1$.

Prin urmare, în acest caz avem $4x=\pm arccos(4a-3)+2k\pi$ sau $x=\pm\frac{1}{4}arccos(4a-3)+\frac{k\pi}{2} / k\in Z$ $\quad(3)$.

Cazul IV. Dacă $a=1$, atunci ecuaţia (2) are forma $cos^2 2x=1$ şi deci, $x=\frac{k\pi}{2} / k\in Z$.

Cazul V. Dacă $a>1$, atunci $2a-1>1$ şi ecuaţia (2) n-are soluţii. Să observăm că pentru $a=\frac{1}{2}$ sau $a=1$ soluţiile de asemenea pot fi scrise sub forma (3).

Răspuns. Dacă $a < \frac{1}{2}$, $a > 1$ ecuaţia n-are soluţii;
dacă $\frac{1}{2} < a < 1$, atunci $x = \pm\frac{1}{4}arccos(4a - 3) + \frac{k\pi}{2} / k \in Z$.

Exemplul 5. 7. Să rezolvăm ecuaţia
$sin^4 2x + cos^4 2x + sin2x + a = 0$.

Rezolvare. Observăm că
$sin^4 x + cos^4 x = (sin^2 x + cos^2 x)^2 - 2sin^2 x cos^2 x =$
$= 1 - \frac{1}{2}sin^2 2x$.
Ecuaţia iniţială primeşte forma:

$$sin^2 2x - 2\, sin2x - 2(a + 1) = 0.$$

Prin urmare, $sin2x = 1 - \sqrt{3 + 2a}$ sau $sin2x = 1 + \sqrt{3 + 2a}$.

1. Fie $sin2x = 1 - \sqrt{3 + 2a}$. Această ecuaţia are soluţii dacă $-1 \leq \sqrt{3 + 2a} \leq 1$; $0 \leq \sqrt{3 + 2a} \leq 2$; $0 \leq 3 + 2a \leq 4$;
$-3 \leq 2a \leq 1$; $-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$.
Aşadar, dacă $-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$, atunci $sin2x = 1 - \sqrt{3 + 2a}$ şi deci,
$x = (-1)^n \frac{1}{2} arcsin\left(1 - \sqrt{3 + 2a}\right) + \frac{n\pi}{2} / n \in Z$.
Pentru $a < -\frac{3}{2}, a > \frac{1}{2}$ această ecuaţie n-are soluţii.

2. Fie $sin2x = 1 + \sqrt{3 + 2a}$. Această ecuaţie are rădăcini numai pentru $a = -\frac{3}{2}$, însă aceste rădăcini se conţin în cazul precedent.

Răspuns. Pentru $-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$,
$x = (-1)^n \frac{1}{2} arcsin\left(1 - \sqrt{3 + 2a}\right) + \frac{n\pi}{2} / n \in Z$;
pentru $a < -\frac{3}{2}, a > \frac{1}{2}$ ecuaţia n-are soluţii.

Exemplul 5. 8. Să rezolvăm ecuaţia

$$(a - 1)sin^2 x - 2(a + 1)sinx + 2a - 1 = 0 \quad (1).$$

Rezolvare. Fie $sinx = y$.

Atunci ecuaţia (1) are forma:

$$(a-1)y^2 - 2(a+1)y + 2a - 1 = 0 \quad (2).$$

Prima valoare de control, a parametrului este $a = 1$ deoarece în acest caz coeficientul pe lîngă y^2 este egal cu zero. Pentru $a = 1$ ecuaţia (2) are forma $-4y + 1 = 0; y = \frac{1}{4}$, adică $sinx = \frac{1}{4}$ şi deci, $x = (-1)^k arcsin\frac{1}{4} + k\pi/k \in Z$.

Fie acum $a \neq 1$. Aflăm discriminantul ecuaţiei (2):

$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - (a-1)(2a+1) = a^2 \pm 5a.$

Următoarele valori de control a parametrului a sunt cele pentru care $D = 0$, adică $a = 0, a = 5$. Să observăm că $D < 0$, dacă $a < 0$ sau $a > 5$ şi $D \geq 0$, dacă $0 \leq a \leq 5$. Prin urmare, noi trebuie să cercetăm ecuaţia (2) în fiecare din cazurile:

$$a < 0; \begin{cases} 0 \leq a \leq 5 \\ a \neq 1 \end{cases}; a > 5.$$

Dacă $a < 0$sau $a > 5$, ecuaţia (2) n-are soluţie. În cazul $\begin{cases} 0 \leq a \leq 5 \\ a \neq 1 \end{cases}$ ecuaţia (2) are două rădăcini reale $y_{1,2} = \frac{a+1\pm\sqrt{5a-a^2}}{a-1}$.

Deoarece $y = sinx$, urmează că trebuie să aibă loc inegalităţile: $-1 \leq y_1 \leq 1$ şi $-1 \leq y_2 \leq 1$.

Să observăm, că $y_1 = \frac{a+1+\sqrt{5a-a^2}}{a-1}$ satisface condiţiei $-1 \leq y_1 \leq 1$ numai pentru $a = 0$. Într-adevăr, dacă $a = 0$, atunci $y = -1$ iar dacă $a > 0$, atunci $|a+1| > |a-1|$ şi cu atît mai mult $\left|a + 1 \pm \sqrt{5a - a^2}\right| > |a-1|$ şi deci, $|y_1| > 1$. Dacă însă $a = 0$, atunci $sinx = y_1$ are forma $sinx = 1$, de unde avem $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi/k \in Z$.

Vom cerceta acele valori a parametrului a din mulţimea

$$\begin{cases} 0 \le a \le 5 \\ a \ne 1 \end{cases},$$

care satisfac condiţiei $-1 \le y_2 \le 1$, adică sistemul

$$\begin{cases} \frac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} \ge -1 \\ \frac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} \le 1 \end{cases} \qquad (3).$$

Sistemul (3) este echivalent cu totalitatea următoarelor sisteme de inecuaţii:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-1>0 \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \ge 1-a \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \le a-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a-1<0 \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \le 1-a \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \ge a-1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (4) .$$

Rezolvăm primul sistem din (4).

$$\begin{cases} a-1>0, \\ \sqrt{5a-a^2} \ge 2, \\ \sqrt{5a-a^2} \le 2a. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ 5a-a^2 \ge 4, \\ 5a-a^2 \le 4a^2. \end{cases}$$

Din ultimul sistem determinăm $1 < a \le 4$.

Rezolvăm al doilea sistem din (4).

$$\begin{cases} a<1 \\ \sqrt{5a-a^2} \ge 2a. \\ \sqrt{5a-a^2} \le 2 \end{cases}$$

Deoarece $a \ge 0$, obţinem:

$$\begin{cases} a<1, \\ 5a-a^2 \le 4a^2, \\ 5a-a^2 \ge 4. \end{cases} \text{de unde } 0 \le a < 1.$$

Aşa dar, totalitatea (4), şi prin urmare sistemul (3) are soluţii pentru $0 \le a < 1$; $1 < a \le 4$. Aceasta înseamnă că pe mulţimea $\begin{cases} 0 \le a \le 5 \\ a \ne 1 \end{cases}$ ecuaţia $sinx = \frac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1}$ are soluţii numai în cazul cînd $\begin{cases} 0 \le a \le 4 \\ a \ne 1 \end{cases}$.

În acest caz $x = (-1)^k arcsin \frac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} + k\pi / k \in Z$. Să observăm că ultima înscriere include în sine şi cazul cînd $a = 0$, cercetat mai sus.

Dacă $4 < a \le 5$, atunci ecuaţia n-are rădăcini.

Răspuns. Dacă $a = 1$: $x = (-1)^k arcsin \frac{1}{4} + k\pi / k \in Z$; dacă $\begin{cases} 0 \le a \le 4 \\ a \ne 1 \end{cases}$: $x = (-1)^k arcsin \frac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} + k\pi / k \in Z$; dacă $a < 0$, $a > 4$ ecuaţia n-are rădăcini.

Exemplul 5. 9. Aflați toate valorile parametrului a, pentru care ecuația $2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$ nu are soluții.

Rezolvare. Deoarece $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, obținem:

$$(2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4cos^2 x - 4a \cdot \cos x + a^2 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - a)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cosx = \frac{a}{2}.$$

Așadar ecuația inițială n-are soluții doar pentru $\frac{a}{2} < -1$ sau $\frac{a}{2} > 1$, iar pentru toate celelalte valori are soluții.

Răspuns. $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Exemplul 5. 10. Pentru care valori a parametrului a ecuația $1 + sin^2 ax = \cos x$ are o singură soluție?

Rezolvare. Să observăm că $1 + \sin^2 ax \ge 1$, deoarece $\sin^2 ax \ge 0$. Din faptul $|\cos x| \le 1$ urmează: $|\cos x| \le 1 \le 1 + \sin^2 ax$ și prin urmare ecuația inițială are soluție atunci și numai atunci când se satisface sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 1+\sin^2 ax = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 ax = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin ax = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} (1)$$

Așadar este necesar să clarificăm pentru care valori a parametrului a sistemul (1) are o singură soluție.
Evident, $x = 0$ este soluție a sistemului pentru orice valoare a parametrului a.
Dacă $x \neq 0$ este soluție a sistemului (1), atunci din acest sistem urmează

$$\begin{cases} ax = k\pi, k \in Z, \\ x = 2n\pi, n \in Z\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Dacă ultimul sistem îl împărțim parte cu parte, obținem că $a = \frac{k}{2n}$, prin urmare, a este un număr rațional.
Invers, pentru orice număr rațional a există o soluție nenulă a sistemului (1). Fie acesta este $a = \frac{p}{q} (p \in Z, q \in N)$, dar atunci $x = 2\pi q$ este soluție a sistemului (1). Așadar pentru a rațional condiția problemei nu se satisface, iar pentru cele iraționale se satisface. Într-adevăr, dacă pentru a irațional ar exista valoarea lui x diferită de zero și care să fie soluție a sistemului (1), atunci din cele spuse mai sus ar urma că a ar fi rațional, ceea ce ne duce la contrazicere.
Răspuns. a - orice număr irațional.

Exemplul 5. 11. Aflați toate valorile parametrului a pentru care ecuația $\cos\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1$ are exact 8 rădăcini.

Rezolvare. Evident, $\sqrt{a^2 - x^2} = 2k\pi, k \in Z$. Să cercetăm funcțiile $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ și $y = 2k\pi$. Prima dintre aceste funcții reprezintă o familie de semicercuri omotetice cu centrul în punctul $O(0; 0)$, iar a doua funcție reprezintă o familie de drepte paralele la axa Ox. Din Fig. 24 se vede că odată cu mărirea razei semicercului, se mărește și numărul rădăcinilor ecuației inițiale. Acestea vor fi exact opt dacă $6\pi < r < 8\pi$.

Răspuns. $-8\pi < a < -6\pi$ sau $6\pi < a < 8\pi$.

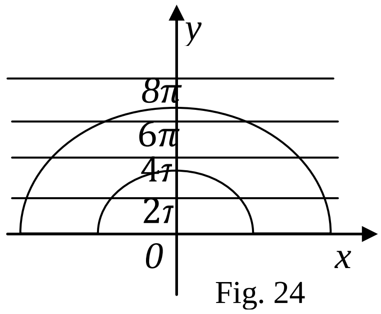


Fig. 24

Exemplul 5. 13. Aflați toate valorile întregi ale parametrului k, pentru care ecuația

$$5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2\frac{x}{2} = 3k$$

are soluții. Aflați aceste soluții.

Rezolvare. Exprimăm $\sin^2 x$ și $\cos^2\frac{x}{2}$ prin $\cos x$:

$$\left(5 - 4sin^2x - 8cos^2\frac{x}{2} = 3k\right) \Leftrightarrow (4cos^2x - 4cosx - 3) = 3k).$$

Facem substituția $\cos x = t, |t| \leq 1$ și obținem ecuația $f(t) = 3k$, unde $f(t) = 4t^2 - 4t - 3$. Pentru $|t| \leq 1$, obținem $f(t) \in [-3; 5]$ (verificați). Pe de altă parte, $f(t) = 3k, k \in Z$ și prin urmare valorile $f(t)$ pot fi doar numere întregi multiple numărului 3. Pe segmentul $[-3; 5]$ se împart la 3 doar numerele $-3{,}0{,}3$ pentru k egal cu $-1, 0$ și 1 corespunzător.

Prin urmare, avem:

$$\begin{cases} |t| \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(t) = -3 \\ k = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(t) = 0 \\ k = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(t) = 3 \\ k = 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = -1 \\ \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} k = 0 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} k = 1 \\ t = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \end{cases} \end{array}\right..$$

Revenind la variabila x, obținem:

$$k = -1 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z. \end{array}\right.$$

$$k = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi l, l \in Z.$$

$$k = 1 \Longrightarrow x = \pm \arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2\pi p, p \in Z.$$

Răspuns. Pentru $k = -1$, $\left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, n\epsilon Z \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m\epsilon Z \end{array}\right.$;

pentru $k = 0$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi l, l\epsilon Z$;

pentru $k = 1$, $x = \pm arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2\pi p, p\epsilon Z$.

Exemplul 5. 14. Să rezolvăm ecuaţia

$$\frac{1}{cosx} + \frac{1}{sinx} + \frac{1}{sinx\ cosx} = a\ (1).$$

Rezolvare. După unele transformări, obţinem

$$sinx + cosx + 1 = asinx\ cosx \quad (2).$$

În ecuaţia (2) pot apărea rădăcini străine de forma $x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, care vor fi omise. Transformăm ecuaţia (2) în felul următor:

$$sinx + cosx + 1 = \frac{a}{2}((sinx + cosx)^2 - 1).$$

Să notăm $sinx + cosx = y$, obţinem:

$$\frac{a}{2}y^2 - y - \left(\frac{a}{2} + 1\right) = 0,\ y_1 = -1,\ y_2 = \frac{a+2}{a}.$$

1. Fie $sinx + cosx = -1$. Atunci:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}sinx + \frac{\sqrt{2}}{2}cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ sau}$$

$$sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x = k\pi - ((-1)^k + 1)\frac{\pi}{4}, k \in Z.$$

Pentru k par obţinem $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$, adică aşa soluţii, care trebuie omise.

Pentru k impar obţinem $x = k\pi$, care de asemenea se omit.

2. Fie $sinx + cosx = \frac{a+2}{a}$. Să determinăm pentru ce valori a parametrului a ecuaţia are soluţiile $sinx = 0$sau $cosx = 0$.

Dacă $sinx = 0$, atunci $cosx = \pm 1$, iar dacă $cosx = 0$, atunci $sinx = \pm 1$. Prin urmare vom exclude acele valori, pentru care $\frac{a+2}{a} = \pm 1$. Rezolvînd această ecuaţie determinăm $a = -1$. Deci, pentru $a = -1$ ecuaţia n-are soluţii.

Pentru $a \neq -1$avem: $sinx + cosx = \frac{a+2}{a}$, $sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a+2}{\sqrt{2}a}$.

Dacă $\left|\frac{a+2}{\sqrt{2}a}\right| \leq 1$, atunci:

$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k arcsin\frac{a+2}{a\sqrt{2}} + k\pi, k \in Z$.

Răspuns. Pentru $a \leq -2(\sqrt{2} - 1), a \neq -1, a \geq 2(\sqrt{2} + 1)$;

$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k arcsin\frac{a+2}{a\sqrt{2}} + k\pi, k \in Z$.

Exemplul 5. 15. Rezolvaţi ecuaţia $|t^2 - 1|sinx = t^2 - 1$.

Rezolvare. Vom cerceta două cazuri: $t = \pm 1$ şi $t \neq \pm 1$.

Dacă $t = \pm 1$, atunci, evident $x \in R$.

Dacă $t \neq \pm 1$, avem $sin\, x = \frac{t^2-1}{|t^2-1|}$.

1. Dacă $t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, atunci $sinx = 1$ şi deci, $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$.

2. Dacă $t \in (-1; 1)$, atunci $sinx = -1$ şi deci, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$.

Răspuns. Dacă $t = \pm 1$, atunci $x \in R$;

dacă $t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, atunci $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$,

iar dacă $t \in (-1; 1)$, atunci $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$.

Exemplul 5. 16. Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} sinx + siny = a, \\ x + y = b. \end{cases}$$

Rezolvare. Deoarece $sinx + siny = 2sin\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}$, sistemul dat este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} 2sin\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2} = a \\ x + y = b \end{cases}; \begin{cases} 2sin\frac{b}{2}cos\frac{x-y}{2} = a \\ x + y = b \end{cases}.$$

1. Dacă $sin\frac{b}{2} \neq 0$, adică $b \neq 2k\pi$şi $\left|\frac{a}{2sin\frac{b}{2}}\right| \leq 1$, atunci

$$cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2sin\frac{b}{2}}; x - y = \pm arccos\frac{a}{2sin\frac{b}{2}} + 4k\pi, x + y = b.$$

Din ultimele două ecuaţii obţinem:

$$x = \frac{b}{2} \pm arccos\frac{a}{2sin\frac{b}{2}} + 2k\pi, k \in Z,$$

$$y = \frac{b}{2} \pm arccos\frac{a}{2sin\frac{b}{2}} - 2k\pi, k \in Z,$$

2. Dacă $b = 2k\pi, a \neq 0$, - sistemul n-are soluţii.
3. Dacă $b = 2k\pi, a = 0$, atunci orice soluţie a ecuaţiei $x + y = b$ este şi soluţie a sistemului. Putem considera că: $x = \frac{b}{2} - t$; $x = \frac{b}{2} + t$, unde $t \in R$.
3. Dacă $\left|\frac{a}{2sin\frac{b}{2}}\right| > 1$ sistemul n-are soluţii.

Răspuns.

Dacă $b \neq 2k\pi$, $\left|\frac{a}{2sin\frac{b}{2}}\right| \leq 1$, atunci:

$$x = \frac{b}{2} \pm arccos\frac{a}{2sin\frac{b}{2}} + 2k\pi, y = \frac{b}{2} \pm arccos\frac{a}{2sin\frac{b}{2}} - 2k\pi, k \in Z;$$

dacă $b = 2k\pi, a \neq 0$ sau $|a| > 2\left|sin\frac{b}{2}\right|$, sistemul n-are soluţii;

dacă $b = 2k\pi, a = 0$, atunci: $x = \frac{b}{2} - t;\ x = \frac{b}{2} + t,\ t \in R$.

Exemplul 5. 17. De rezolvat ecuaţia

$$\frac{2}{a\,cosx} - \frac{a}{cosx} = \frac{2\,cosx}{a} + tg\,x, unde\ a \neq 0.$$

Rezolvare.

$$\left(\frac{2}{a\,cosx} - \frac{a}{cosx} = \frac{2\,cosx}{a} + tg\,x\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(\begin{cases} cosx \neq 0 \\ 2 - a^2 = 2cos^2x + asinx \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} cosx \neq 0 \\ 2sin^2x - asinx - a^2 = 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} \begin{cases} cosx \neq 0 \\ sinx = -\dfrac{a}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} cosx \neq 0 \\ sinx = a \end{cases} \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} \begin{cases} sinx \neq \pm 1 \\ sinx = -\dfrac{a}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} sinx \neq \pm 1 \\ sinx = a \end{cases} \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \neq \pm 2 \\ sinx = -\dfrac{a}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq \pm 1 \\ sinx = a \end{cases} \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \neq \pm 2 \\ \left|-\dfrac{a}{2}\right| \leq 1 \\ x = (-1)^k arcsin\left(-\dfrac{a}{2}\right) + k\pi \end{cases} ,k \in Z \\ \begin{cases} a \neq \pm 1 \\ |a| \leq 1 \\ x = (-1)^n\,arcsin\,a + n\pi, \qquad n \in Z \end{cases} \end{array}\right.\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |a| < 2 \\ x = (-1)^{k+1} arcsin\frac{a}{2} + k\pi, k \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} |a| < 1 \\ x = (-1)^n\,arcsin\,a + n\pi, n \in Z \end{cases} \end{array}\right.\right)$$

Răspuns. Dacă $-1 < a < 0 \cup 0 < a < 1$, atunci

$\left\{(-1)^{k+1} arcsin\frac{a}{2}+k\pi/k\in Z\right\}\cup\{(-1)^n\, arcsin\, a+n\pi/n\in Z\}$;
dacă $-2<a\leq -1\cup 1\leq a<2$, atunci
$\left\{(-1)^{k+1} arcsin\frac{a}{2}+k\pi/k\in Z\right\}$;
dacă $a\leq -2\cup a\geq 2$, atunci $\emptyset$.

Exemplul 5. 18. De aflat cea mai mare valoare negativă a parametrului a pentru care funcția $y=\sin\left(24x+\frac{a\pi}{100}\right)$ are maximum în punctu $x_0=\pi$.

Rezolvare. Funcția $\sin x$ primește valorile maximale în punctele de forma $\frac{\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}$. Prin urmare, pentru ca funcția dată să aibă maximum în punctul $x_0=\pi$, trebuie să existe un astfel de număr $n\in\mathbb{Z}$,încît:
$24\pi+\frac{a\pi}{100}=\frac{\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{a}{100}=\frac{1}{2}+2m, m\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a=50$ - $200m, m\in\mathbb{Z}$
În așa fel, rămîne să alegem cel mai mare număr negativ printre numerele de forma $a=50+200m, m\in\mathbb{Z}$. Acesta va fi numărul -150, care se obține pentru $m=-1$, deoarece pentru $m\geq 0$ avem că $50+200m\geq 50$.
Răspuns. $a=-150$.

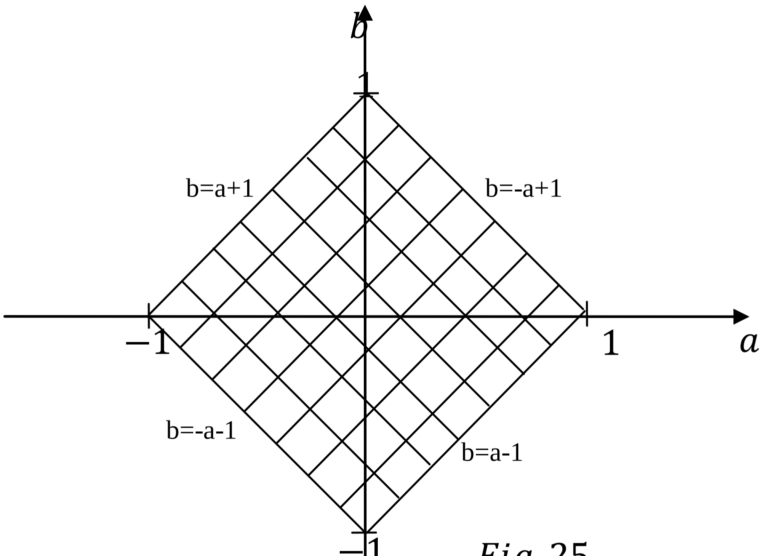
Exemplul 5. 19. Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} sinx\, siny=a\\ cosx+cosy=b\end{cases}(1).$$

Rezolvare. Adunînd şi scăzînd parte cu parte ambele ecuaţii, obţinem $\begin{cases} cos(x+y)=b-a\\ cos(x-y)=b+a\end{cases}\quad(2)$.
Acest sistem are soluţii dacă şi numai dacă a şi b satisfac inegalităţile: $-1\leq b-a\leq 1$, $-1\leq b+a\leq 1$.

Din aceste inegalităţi obţinem: $a-1 \le b \le a+1$, $-a-1 \le b \le -a+1$.

Mulţimea punctelor $m(a,b)$ ale planului, care satisfac acestor inegalităţi, formează un pătrat (Fig. 25).



$Fig. 25$

Acest pătrat poate fi determinat cu ajutorul următorului sistem de inegalităţi: $\begin{cases} -a-1 \le b \le -a+1, -1 \le a \le 0 \\ a-1 \le b \le a+1, 0 \le a \le 1 \end{cases}$ (3).

Dacă valorile parametrilor a şi b satisfac acestor condiţii, atunci sistemul iniţial este echivalent cu sistemul: $\begin{cases} x+y = \pm arccos(b-a)+2m\pi \\ x-y = \pm arccos(b+a)+2n\pi \end{cases}$.

Din acest sistem, în condiţiile (3) sistemul dat are următoarele soluţii:

$x = \frac{\pm arccos(b-a) \pm arccos(b+a)}{2} + (m+n)\pi$,

$y = \frac{\pm arccos(b-a) \pm arccos(b+a)}{2} + (m-n)\pi, m,n \in Z$.

Răspuns:

$x = \frac{\pm arccos(b-a) \pm arccos(b+a)}{2} + (m+n)\pi$,

$y = \frac{\pm arccos(b-a) \pm arccos(b+a)}{2} + (m-n)\pi, m,n \in Z$.

Exemplul 5. 20. Să rezolvăm sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \sin x \cos y = a^2 \\ \sin y \cos x = a \end{cases} \quad (1).$$

Rezolvare. Înlocuim prima ecuaţie din (1) prin suma, iar a doua cu diferenţa celor două ecuaţii şi obţinem:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \sin y \cos x = a^2 + a \\ \sin x \cos y - \sin y \cos x = a^2 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = a^2 + a \\ \sin(x-y) = a^2 - a \end{cases} \quad (2).$$

Evident, sistemul (2) are soluţii atunci şi numai atunci cînd parametrul a satisface sistemului de inegalităţi:

$$\begin{cases} |a^2 + a| \le 1 \\ |a^2 - a| \le 1 \end{cases} \quad (3).$$

Sistemul (3) este echivalent cu următorul sistem:

$$\begin{cases} a^2 + a \le 1 \\ a^2 + a \ge -1 \\ a^2 - a \le 1 \\ a^2 - a \ge -1 \end{cases} \text{sau} \begin{cases} a^2 + a - 1 \le 0 \\ a^2 + a + 1 \ge 0 \\ a^2 - a - 1 \le 0 \\ a^2 - a + 1 \ge 0 \end{cases} \quad (4).$$

Observăm că a doua şi a patra inecuaţie din (4) sunt adevărate pentru orice $a \in R$. Prin urmare, sistemul (4) este echivalent cu sistemul $\begin{cases} a^2 + a - 1 \le 0 \\ a^2 - a - 1 \le 0 \end{cases}$.

Rezolvînd acest sistem, obţinem: $-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \le a \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\quad (5).$

Aşa dar, sistemul (2) are loc atunci şi numai atunci, cînd are loc (5).

Fie că are loc (5). Din (2), obţinem:

$$\begin{cases} x + y = (-1)^k \arcsin(a^2 + a) + k\pi \\ x - y = (-1)^n \arcsin(a^2 - a) + n\pi \end{cases}.$$

Prin urmare,

$x = \frac{1}{2}((-1)^k arcsin(a^2 + a) + (-1)^n arcsin(a^2 - a) +$
$(k - n)\pi)$
$x = \frac{1}{2}((-1)^k arcsin(a^2 - a) + (-1)^{n+1} arcsin(a^2 - a) +$
$(k - n)\pi), k, n \in Z$

Răspuns. Dacă $a < -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sistemul n-are soluţii;

dacă $-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, atunci

$x = \frac{1}{2}((-1)^k arcsin(a^2 + a) + (-1)^n arcsin(a^2 - a) +$
$(k - n)\pi)$

,

$x = \frac{1}{2}((-1)^k arcsin(a^2 - a) + (-1)^{n+1} arcsin(a^2 - a) +$
$(k - n)\pi), k, n \in Z$

.

Exemplul 5. 21. De rezolvat sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} sinx + siny = 2a \\ x + y = 2\alpha \end{cases}.$$

Rezolvare.

$$\begin{cases} sinx + siny = 2a \\ x + y = 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2sin\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2} = 2a \\ x + y = 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} sin\alpha cos\frac{x-y}{2} = a \\ x + y = 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} sin\alpha \neq 0, \\ cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{sin\alpha}, \\ x + y = 2\alpha, \end{cases} \\ \begin{cases} sin\alpha = 0, \\ a = 0, \\ x + y = 2\alpha. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} sin\alpha \neq 0, \\ \left|\dfrac{a}{sin\alpha}\right| \leq 1, \\ x - y = \pm 2arccos\dfrac{a}{sin\alpha} + 4k\pi, \\ x + y = 2\alpha \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha = n\pi, \\ a = 0, \\ x + y = 2n\pi. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha \neq k\pi, \\ |a| \leq |sin\alpha|, \\ x = \alpha \pm arccos\dfrac{a}{sin\alpha} + 2k\pi, \\ y = \alpha \mp arccos\dfrac{a}{sin\alpha} - 2k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha = n\pi, \\ a = 0, \\ y = -x + 2n\pi. \end{cases} \end{array}\right.$$

Răspuns: Dacă $\alpha \neq n\pi (n \in Z)$, $|a| \leq |sin\alpha|$, atunci

$$\left\{\alpha + arccos\frac{a}{sin\alpha} + 2n\pi, \alpha - arccos\frac{a}{sin\alpha} - 2n\pi, n\epsilon Z\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\alpha - arccos\tfrac{a}{sin\alpha} + 2n\pi, \alpha + arccos\tfrac{a}{sin\alpha} - 2n\pi, n\epsilon Z\right\};$$

dacă $\alpha = k\pi (k \in Z)$, $a = 0$ atunci $\{(x, y)\epsilon R^2, y = 2k\pi - x,$ $k\epsilon Z$;

dacă $\alpha \neq k\pi (k \in Z), |b| > |sin\alpha|$ sau $\alpha = k\pi (k \in Z), a \neq 0$, atunci $\emptyset$.

Exemplul. 5. 22. Pentru ce valori a parametrului a ecuația $5\cos 2x + \frac{2a}{\sin x} = -29$ are soluție?

Rezolvare. MVA a ecuației date are forma $\sin x \neq 0$. Înmulțim ambele părți a ecuației cu sin x și obținem:

$(5 \sin x cosx + 2a = -29 \sin x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\ sinx(1 - 2sin^2 x + 2a = -29 \sin x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a = 5sin^3 x - 17\sin x)$.
Introducem o variabilă nouă $t = sin\, x$.Deoarece $\sin x \neq 0$, MVA pentru variabila t vor fi valorile $t\epsilon[-1; 0) \cup (0; 1]$.
Să determinăm domeniul valorilor funcției $f(t) = 5t^3 - 17t$ pentru $t\epsilon[-1; 0) \cup (0; 1]$.
Observăm la început că funcția $f(t)$ este impară. Întadevăr $f(-t) = -f(t)$. Prin urmare , este suficient de aflat mulțimea valorilor acestei funcții pentru $t\epsilon(0; 1]$. Vom demonstra că pe mulțimea $(0; 1]$ funcția $f(t)$ este strict monotonă. Să cercetăm derivata acestei funcții $f'(t) = 15t^2 - 17$. Pe mulțimea $(0; 1]$, $f\,'(t) < 0$ și prin urmare, pe această mulțime funcția $f(t)$ este monoton descrescătoare. Deoarece funcția $f(t)$ este monotonă și continuă pe mulțimea dată, urmează că ea primește toate valorile intermediare de la cea minimală $f(1) = -12$ și pînă la cea maximală $f(0) = 0$.
Prin urmare, mulțimea valorilor funcției $f(t)$ pe mulțimea $t\epsilon(0; 1]$ este $[-12; 0)$. Avînd în vedereimparitatea funcției $f(t)$, concludem că mulțimea valorilor acestei funcții pe mulțimea $[-1; 0) \cup (0; 1]$ este $[-12; 0) \cup (0; 12]$.
Răspuns. $a\epsilon$ $[-12; 0) \cup (0; 12]$.

Exemplul 5. 23. Rezolvați ecuația

$$\sqrt{1 - x^2}(1 - 4x^2) + x(3 - 4x^2) = \sqrt{2}.$$

Rezolvare. Să observăm că MVA a ecuației date reprezintă mulțimea $[-1; 1]$.
Prin urmare, putem face substituția $x = sin\, t$, $t\epsilon[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
Întradevăr, pentru $t\epsilon[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$mulțimea valorilor funcției $sin\, t$ va fi segmentul $[-1; 1]$. Ecuația inițială poate fi scrisă sub forma:

$$(\sqrt{1 - x^2}(1 - 4x^2) + x(3 - 4x^2) = \sqrt{2}) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(\cos t(4\cos^2 t - 3) + \sin\, t(3 - 4\sin^2 t) = \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow$
$(\cos 3t + \sin 3t = \sqrt{2})$

Rezolvăm ultima ecuație cu ajutorul întroducerii unghiului auxiliar

$$\left(\cos 3t + \sin 3t = \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3t = 1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) = 1\right).$$

Din ultima ecuație, avem :

$$3t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon Z \;\; \Leftrightarrow \left(t = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k\epsilon Z\right).$$

Să determinăm acele rădăcini, care aparțin segmentului $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
Ușor ne încredințăm că inegalităților $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{2}$, k$\epsilon$Z, satisface doar rădăcina pentru $k = 0$, adică

$x = sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Răspuns. $x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exemplul. 5. 24 . Aflați toate valorile parametrului a pentru care ecuația $log_{1-a}\left(2 - \cos x + \sin\frac{x}{2}\right) = 2$ are soluții?

Rezolvare. DVA ale parametrului se determină de sitemul $\begin{cases} 1 - a > 0 \\ 1 - a \neq 1 \end{cases}$ de unde $a\epsilon\ (-\infty; 0) \cup (0; 1)$.

În baza proprietăților funcției logaritmice aducem ecuația dată la forma $2 - \cos x + \sin\frac{x}{2} = (1 - a)^2$.

Deoarece $cosx = 1 - 2sin^2\frac{x}{2}$ și substituind $t = \sin\frac{x}{2}$, obținem ecuația pătrată: $2t^2 + t + 2a - a^2 = 0$.

Această ecuație are soluții, dacă $D = 8a^2 - 16a + 1 \geq 0$, de unde avînd în vedere DVA primim: $a \epsilon (-\infty; 0) \cup (0; 1 - \frac{\sqrt{14}}{4}]$.

Să determinăm acum, pentru ce valori a parametrului a cel puțin o rădăcină a acestei ecuații aparține segmentului $[-1; 1]$. Așa cum ramurile parabolei $f(t) = 2t^2 + t + 2a - a^2$ sunt îndreptate în sus, vîrful parabolei este situat în punctul $t_v = -\frac{1}{4}$, urmează că rădăcinile sunt simetrice în raport cu punctul $t = \frac{1}{4}$. Deaceia, dacă cea mai mică rădăcină aparține segmentului $[-1; 1]$, atunci cea mai mare cu atît mai mult va aparține acestui segment . Astfel , este suficient de concretizat pentru ce valori a parametrului a cea mai mare rădăcină a parabolei este situată în segmentul $\left[-\frac{1}{4}; 1\right]$. Aceasta va avea loc în acel și numai acel caz, cînd $f(1) \geq 0$. Calculînd $f(1)$, obținem inecuația $3 +$ $+2a - a^2 \geq 0$, care este satisfăcută pentru $a \epsilon [-1; 3]$. Intersectînd această mulțime cu cea precedentă, obținem răspunsul.

Răspuns: $a \epsilon [-1; 0) \cup (0; -\frac{\sqrt{14}}{4}]$.

Exemplul. 5. 25. Pentru ce valori a parametrului a valoarea expresiei $1 + \cos x\,(5 \cos x + a \sin x)$ este egală cu zero măcar pentru o valuare a variabilei x ?

Rezolvare. Ecuația $1 + \cos x\,(5 \cos x + a \sin x) = 0$ după unele transformări se aduce la ecuația omogenă $\sin^2 x +$ $+a \sin x \cos x + 6\cos^2 x = 0$, care după împărțirea ambelor părți la $\cos^2 x$ și cu ajutorul substituției $t = tg\, x$ se transformă în ecuația pătrată: $t^2 + at + 6 = 0$. Deoarece $t = tg\, x$ poate primi orce valoare, această ecuație va avea rădăcini în condiția $D \geq 0$ sau $D = a^2 - 24 \geq 0$.

Răspuns: $a \epsilon \left(-\infty; -2\sqrt{6}\right) \cup (2\sqrt{6}; +\infty)$.

Exemplul. 5. 26 Pentru ce valori a parametrului a suma $log_a\,(cos^2x + 1)$ și $log_a\,(cos^2x + 5)$ va fi egală cu unitatea măcar pentru o valoare a variabilei x?

Rezolvare. Valorile admisibile ale parametrului sunt toate valorile $a > 0$, $a \neq 1$. Din ecuația

$$log_a\,(cos^2x + 1) + \; log_a\,(cos^2x + 5) = 1$$

primim ecuația $(cos^2x + 1)(cos^2x + 5) = a$.

Să notăm $cos^2 x = t, 0 \leq t \leq 1$, atunci ecuația dată are forma:

$$f(t) = t^2 + 6t + (5 - a) = 0\ .$$

Condițiile problemei se vor satisface dacă ultima ecuație admite măcar o rădăcină din segmentul $[0; 1]$. În acest caz cercetarea doar a discriminantului nu este suficientă. Ramurile parabolei sunt îndreptate în sus, vîrful parabolei se află în punctul $t_v = -3$ și prin urmare , pe segmentul $[0; 1]$ funcţia $f(t)$ este monoton crescătoare . Pentru ca pe segmentul $[0; 1]$ să existe rădăcină, în baza continuității este necesar și suficient în extremitățile segmentului $[0; 1]$ funcția $f(t)$ să capete valori diferite, adică : $f(0) \cdot f(1) \leq 0$ sau $(5 - a)(1 + 6 + 5 - a) \leq 0$. Rezolvînd ultima inecuație , obținem răspunsul.

Răspuns: $a \epsilon [5; 12]$.

Probleme propuse pentru lucrul independent.

Rezolvaţi ecuaţiile:

1. $(a - 1)sin^2x + sinx\,cosx + (a + 2)cos^2x = 0$.

Răspuns. Pentru $a = 1$: $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = -arctg\, 3 + n\pi$, $k, n \in Z$;

pentru $-\frac{1+\sqrt{10}}{2} \leq a \leq \frac{-1+\sqrt{10}}{2}$, $a \neq 1$:

$x = arctg\, \frac{1 \pm \sqrt{9-4a-a^2}}{2-2a} + k\pi, k \in Z$;

pentru celelalte valori a parametrului a ecuaţia n-are soluţii.

2. $sinx - \sqrt{a} = cos2x + 2$.

Răspuns. Pentru $a = 0$: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in Z$; pentru $a \neq 0$ ecuaţia n-are rădăcini.

3. $cos2x - cos4x = a\, sinx$.

Răspuns. Pentru $a < -2$, $a > 2$: $x = k\pi \,/\, k \in Z$;

pentru $-2 \leq a \leq 2$:

$x_1 = k\pi, k \in Z$,

$x_2 = \frac{1}{3}(-1)^n arcsin\frac{a}{2} + \frac{n\pi}{3}, n \in Z$.

4. $sin(x - a) = sinx + sina$.

Răspuns. Pentru $a = 2k\pi$: $x \in R$; pentru $a \neq 2k\pi$: $x_1 = \pi + 2n\pi, n \in Z, x_2 = a + \pi + 2n\pi, n \in Z$.

5. $sin(x + a) + cos(x + a) = sin(x - a) + cos(x - a)$.

Răspuns. Pentru $a = k\pi$: $x \in R$;

pentru $a \neq k\pi$:$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \,/\, k \in Z$.

6. . $sin^2x + 4sinx + a = 0$

Răspuns. Pentru $a < -5$, $a > 3$, ecuaţia n-are soluţii;

pentru $-5 \leq a \leq 3$:

$x = (-1)^k arcsin\left(-2 + \sqrt{4-a}\right) + k\pi \,/\, k \in Z$.

7. $sin^2x + asin^2 2x = sin\frac{\pi}{6}$.

Răspuns. Pentru $a = 0$, $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \,/\, k \in Z$;

pentru $a \neq 0$, $x = \pm\frac{1}{2}arccos\left(\frac{\sqrt{1+16a^2}-1}{4a}\right) + k\pi \ / \ k \in Z$.

8. $sin^6x + cos^6x = a(sin^4x + cos^4x)$.

Răspuns.

Pentru $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$: $x = \pm arcsin\left(2\sqrt{\frac{a-1}{2a-3}}\right) + k\pi \ / \ k \in Z$;

pentru $a < \frac{1}{2}$, $a > 1$ ecuaţia n-are rădăcini.

9. $sin\frac{3x}{2} + sinx = a\ sin\frac{x}{2}$.

Răspuns. Pentru $-\frac{5}{4} \leq a \leq 1$:

$x_1 = 2k\pi \ / \ k \in Z$, $x_{2,3} = \pm 2arccos\frac{-1\pm\sqrt{5+4a}}{4} + 4n\pi \ / \ n \in Z$;

pentru $1 < a \leq 5$:

$x_1 = 2k\pi \ / \ k \in Z$, $\quad x_2 = \pm 2arccos\frac{-1+\sqrt{5+4a}}{4} + 4k\pi \ / \ k \in Z$;

pentru $a > 5$ ecuaţia n-are soluţii.

10. $sinx + cosx = a^2$.

Răspuns. $\left\{2\pi n \pm arccos\frac{a^2}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \ / \ n \in Z\right\}$,

pentru $a \in \left[-\sqrt[4]{2};\ \sqrt[4]{2}\right]$;

$\emptyset$, pentru $a \in \left(-\infty;\ -\sqrt[4]{2}\right) \cup \left(\sqrt[4]{2};\ +\infty\right)$.

11. $sin2x + 3\,cos2x = a$.

Răspuns. $\left\{\pi n \pm \frac{1}{2}arccos\frac{a}{\sqrt{10}} + \frac{1}{2}arctg\ \frac{1}{3} \ / \ n \in Z\right\}$,

pentru $a \in \left[-\sqrt{10};\ \sqrt{10}\right]$;

$\emptyset$, pentru $a \in \left(-\infty;\ \sqrt{10}\right) \cup \left(\sqrt{10};\ +\infty\right)$.

12. $2cos^2 6x - 9sin^2 6x + 4sin6x\ cos6x = a + 5$.

Răspuns. $\left\{\frac{\pi n}{6} \pm \frac{1}{12}arccos\frac{2a+17}{\sqrt{137}} + \frac{1}{12}arctg\ \frac{4}{11} \ / \ n \in Z\right\}$,

pentru $a \in \left[\frac{-\sqrt{137}-17}{2}; \frac{\sqrt{137}-17}{2}\right]$;

$\emptyset$, pentru $a \in \left(-\infty; \frac{-\sqrt{137}-17}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{137}-17}{2};\ +\infty\right)$.

13. $\sin a + \sin(x-a) + \sin(2x+a) = \sin(x+a) +$
$+\sin(2x-a)$.

Răspuns. $(-\infty;\ +\infty)$, pentru $a \in \{k\pi\ /\ k \in Z\}$;
$\left\{2\pi n \pm \arccos\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}\ /\ n \in Z\right\}$, pentru $a \in (-\infty;\ +\infty)$.

14. Pentru ce valori ale parametrului p ecuaţia $\sqrt{p}\cos x -$
$-2\sin x = \sqrt{2} + \sqrt{2-p}$ are soluţii?

Răspuns. $[\sqrt{5}-1; 2]$.

15. Pentru ce valori ale parametrului a ecuaţia $1 + a\cos x = (a+1)^2$ are soluţii?

Răspuns. $a_1 = -1, a_2 = -2, a_3 = -3, a_4 = 0$.

Rezolvaţi sistemele de ecuaţii

16. $\begin{cases} \sin x \cos y = a \\ x + y = b \end{cases}$

Răspuns. Pentru $|2a - \sin b| > 1$ sistemul n-are rădăcini; pentru
$|2a - \sin b| \leq 1$:
$x_1 = \frac{b+\alpha}{2} + k\pi;\ y_1 = \frac{b-\alpha}{2} - k\pi;$
$x_2 = \frac{\pi+b-\alpha}{2} + k\pi;\ y_2 = \frac{-\pi+b+\alpha}{2} - k\pi;$
unde $\alpha = \arcsin(2a - \sin b)$.

17. $\begin{cases} \sin x \cos 2y = a^2 + 1 \\ \cos x \sin 2y = a \end{cases}$

Răspuns. Pentru $a = 0$:
$x = \frac{\pi}{2} + \pi(k+n),\ y = \frac{\pi}{2}(k-n), k, n \in Z;$
pentru $a \neq 0$ sistemul n-are soluţii.

18. $\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin x - \sin y = -2a^2 \end{cases}$

Răspuns. Pentru $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$,

$x_1 = (-1)^{k+1} arcsina + k\pi$,

$y_1 = (-1)^n arcsin2a + n\pi$,

$x_2 = (-1)^k arcsin2a + k\pi$,

$y_2 = (-1)^{n+1} arcsina + n\pi, k, n \in Z$;

pentru $a < -\frac{1}{2}$, $a > \frac{1}{2}$ sistemul n-are soluţii.

19. $\begin{cases} sinx\ cosy = b \\ x - y = \beta \end{cases}$.

Răspuns. Dacă $|2b - sin\,\beta| \leq 1$, atunci

$\left\{\left(\frac{1}{2}(-1)^k arcsin(2b - sin\beta) + \beta + 2k\pi, \frac{1}{2}((-1)^k arcsin(2b - sin\beta) - \beta + k\pi)\right) / k \in Z\right\}$

dacă $|2b - sin\,\beta| > 1$, atunci $\emptyset$.

20. $\begin{cases} tgx - ctgy = a, \\ ctgx - tgy = 2. \end{cases}$

Răspuns.

$\left\{\left(arctg\frac{a-\sqrt{a(a-2)}}{2} + n\pi, arctg\frac{a-\sqrt{a(a-2)}}{-a} + k\pi\right)/n, k \in Z\right\} \cup$
$\left\{\left(arctg\frac{a+\sqrt{a(a-2)}}{2} + n\pi, arctg\frac{a+\sqrt{a(a-2)}}{-a} + k\pi\right)/n, k \in Z\right\}$

dacă $a \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$; $\emptyset$, dacă $a \in [0; 2)$.

21. $\begin{cases} sinx\ cosy = a, \\ cosx\ siny = a. \end{cases}$

Răspuns.

Dacă $|a| \leq \frac{1}{2}$, atunci

$$\left\{\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}\left((-1)^k arcsin2a + \pi(k+n)\right), \\ \frac{1}{2}\left((-1)^k\ arcsin2a + \pi(k-n)\right) \end{matrix}\right)\Big/ k, n \in Z\right\};$$

dacă $|a| > \frac{1}{2}$, atunci $\emptyset$.

22. $\begin{cases} \cos x \sin 2y = a, \\ \sin x \cos 2y = a^2 + 1. \end{cases}$

Răspuns.

$\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi n\right)/k, n \in Z\right\} \cup \left\{\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)/k, n \in Z\right\}.$

23. $\begin{cases} tg\, x + tg\, y = b, \\ x - y = \pi. \end{cases}$

Răspuns. $\left\{\left(arctg\, \frac{b}{2} + k\pi, arctg\, \frac{b}{2} - \pi + k\pi\right) / k \in Z\right\}.$

24. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin\alpha, \\ \cos x + \cos y = \cos\alpha. \end{cases}$

Răspuns.

$\left\{\left(\alpha + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \alpha - \frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)/k, n \in Z\right\} \cup$
$\left\{\left(\alpha - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \alpha + \frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)/k, n \in Z\right\}$

.

25. Pentru care cea mai mică valoare a parametrului b funcția $y = \sin\left(20x + \frac{b\pi}{150}\right)$ are minim în punctul $x_0 = \frac{\pi}{2}$?

Răspuns. $b = 125.$

26. Pentru ce valori a parametrului a valoarea expresiei $2 + \cos x\,(3 \cos x + a \sin x)$ nu este egală cu zero nici pentru o valoare a lui x?

Răspuns:$a\epsilon(-2\sqrt{10}; 2\sqrt{10})$.

27. Pentru ce valori a parametrului a valoarea expresiei $3 + \sin x\,(2 \sin x + a \cos x)$ este egală cu -1 măcar pentru o singură valoare a variabilei x?

Răspuns: $a\epsilon\left(-\infty; -4\sqrt{6}\right) \cup (4\sqrt{6}; +\infty)$.

28. Pentru ce valori a parametrului a, sistemul

$\begin{cases} 4\sin x\, sin\, y\cos(x+y) - 0.5 = 0 \\ x - y = \alpha \end{cases}$ are soluții? Aflați aceste soluții în dependență de valorile parametrului a.

Răspuns. Dacă $\alpha = 2\pi n$: $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi(k+n) \\ y = \pm\frac{\pi}{6} + \pi(k-n), k, n\epsilon Z \end{cases}$

dacă $\alpha = \pi + 2\pi n$: $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi(k+n) \\ y = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \pi(k-n), k, n\epsilon Z. \end{cases}$

29. În dependență de valorile parametrului a rezolvați ecuația $cos^4 x - (a+2)cos^2 x - a - 3 = 0$.

Răspuns: dacă $a\epsilon[-3;-2]$: $x = \arccos\sqrt{a+3} + k\pi, k\epsilon Z$;
dacă $a \notin [-3;-2]$: nu există soluții.

30. În dependență de valorile parametrului a rezolvați ecuația $sin^4 x + cos^4 x + \sin 2x + a = 0$.

Răspuns:Dacă $a\epsilon[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}]$:

$x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin 1 - \sqrt{2a-3} + k\pi, k\epsilon Z$

Dacă $a \notin \left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$: $\emptyset$.

31. Pentru ce valori a parametrului a ecuația

$$log_{a-2}\left(\frac{17}{8} + \cos x - \sin\frac{x}{2}\right) = 3$$

are soluție?

Răspuns: $a\epsilon\left[\frac{5}{2};3\right) \cup (3; 2 + \frac{\sqrt[3]{26}}{2})$.

32. Pentru ce valori a parametrului a ecuația

$(a^2+8a+16)(2-2\cos x-sin^2 x)+(32+2a^2+16)*$
$(\cos x-1)+3a+10=0$
n-are soluții?

Răspuns: $a<-\frac{10}{3}$; $-3<a<-2$.

33. Pentru ce valori a parametrului a ecuația

$$log_{a+1}\left(\frac{28}{5}+\cos x-2\sin\frac{x}{2}\right)=3$$

are soluție?

Răspuns: $a\epsilon\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;\frac{\sqrt[3]{37}}{2}-1]$.

34. Pentru ce valori a parametrului a valoarea expresiei $2+cos\,x\,(3\,cos\,x+a\,sin\,x)$ nu este egală cu zero nici pentru o valuare a lui x?

Răspuns: $a\epsilon(-2\sqrt{10};2\sqrt{10})$.

35. Pentru ce valori a parametrului a valoarea expresiei $3+sin\,x\,(2\,sin\,x+a\,cos\,x)$ este egală cu -1 măcar pentru o singură valoare a variabilei x?

Răspuns: $a\epsilon\left(-\infty;-4\sqrt{6}\right)\cup(4\sqrt{6};+\infty)$.

36. Pentru ce valori a parametrului a suma $log_a(\sin x+2)$ și $log_a(\sin x+3)$ va fi egală cu unitatea, cel puțin pentru o singură valoare a variabilei x?

Răspuns: $a\epsilon[2;12]$.

37. Pentru ce valori a parametrului a sistemul
$\begin{cases}4\sin x\,sin\,y\cos(x+y)-0.5=0\\ x-y=\alpha\end{cases}$, are soluții? Aflați aceste soluții în dependență de valorile parametrului a.

Răspuns. Dacă $\alpha = 2\pi n$: $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi(k+n) \\ y = \pm\frac{\pi}{6} + \pi(k-n), k, n\epsilon Z \end{cases}$

dacă $\alpha = \pi + 2\pi n$: $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi(k+n) \\ y = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \pi(k-n), k, n\epsilon Z. \end{cases}$

38. În dependență de valorile parametrului a rezolvați ecuația $cos^4 x - (a+2)cos^2 x - a - 3 = 0$.

Răspuns: dacă $a\epsilon[-3;-2]$: $x = \arccos\sqrt{a+3} + k\pi, k\epsilon Z$;

dacă $a \notin [-3;-2]$: nu există soluții.

39. În dependență de valorile parametrului a rezolvați ecuația $sin^4 x + cos^4 x + \sin 2x + a = 0$.

Răspuns: Dacă $a\epsilon[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}]$:

$x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin 1 - \sqrt{2a-3} + k\pi, k\epsilon Z$

Dacă $a \notin \left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$: $\emptyset$.

40. Pentru ce valori a parametrului a ecuația

$$log_{a-2}\left(\frac{17}{8} + \cos x - \sin\frac{x}{2}\right) = 3$$

are soluție?

Răspuns: $a\epsilon \left[\frac{5}{2};3\right) \cup (3; 2 + \frac{\sqrt[3]{26}}{2})$.

41. Pentru ce valori a parametrului a ecuația

$(a^2 + 8a + 16)(2 - 2\cos x - sin^2 x) + (32 + 2a^2 + 16) *$
$(\cos x - 1) + 3a + 10 = 0$

n-are soluții?

Răspuns: $a < -\frac{10}{3}$; $-3 < a < -2$.

42. Pentru ce valori a parametrului a ecuația

$$log_{a+1}\left(\frac{28}{5}+\cos x-2\sin\frac{x}{2}\right)=3$$

are soluție?

Răspuns: $a\epsilon\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;\frac{\sqrt[3]{37}}{2}-1]$.

§6. Inecuaţii echivalente

Două inecuaţii $f_1(x) < g_1(x)$ *şi* $f_2(x) < g_2(x)$ se numesc echivalente, dacă mulţimile soluţiilor acestor inecuaţii coincid. Se notează :

$$f_1(x) < g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) < g_2(x).$$

Dacă ambele inecuaţii n-au soluţii, atunci conform definiţiei ele de asemenea sunt echivalente.

Exemplul 6.1. Inecuaţiile $x^2 > 1$ şi $1 + \frac{2}{x-1} > 0$ sunt echivalente deoarece ele au unele şi aceleaţi soluţii şi anume: $x > 1$ şi $x < -1$.

Exemplul 6. 2. Inecuaţiile $3x - 5 > 0$ şi $x(3x - 5) > 0$ nu sunt echivalente deoarece -5 este soluţie a inecuaţiei $x(3x - 5) > 0$, dar -5 nu este soluţie a inecuaţiei $3x - 5 > 0$.

Să menţionăm că două inecuaţii echivalente pot avea diferite mulţimi de valori admisibile (de exemplu, inecuaţia $x > 1$ este echivalentă cu inecuaţia $\sqrt{x} > 1$), însă inecuaţia $x > 1$ are MVA mulţimea tuturor numerelor reale, pe cînd inecuaţia $\sqrt{x} > 1$ are MVA mulţimea numerelor reale nenegative.

Din definiţia inecuaţiilor echivalente urmează că în loc să rezolvăm o inecuaţie, se poate de rezolvat o inecuaţie echivalentă cu cea dată.

Două inecuaţii se numesc echivalente pe o mulţime M, dacă coincid mulţimile de soluţii ce aparţin acestei mulţimi M.

Două inecuaţii fiind neechivalente totuşi pot fi echivalente pe o anumită mulţime. Aşa de exemplu, inecuaţiile $x^2 > 1$ şi $x > 1$ sunt echivalente pe mulţimea numerelor pozitive, dar nu sunt echivalente pe mulţimea numerelor reale.

Dacă pentru o pereche de inecuaţii $f_1(x) < g_1(x)$ şi $f_2(x) < g_2(x)$, fiecare soluţie a primei inecuaţii este şi soluţie pentru inecuaţia a doua, atunci inecuaţia a doua se numeşte consecinţă a primei inecuaţii şi se notează:

$$f_1(x) < g_1(x) \Rightarrow f_2(x) < g_2(x).$$

Dacă se înlocuieşte o inecuaţie cu una din consecinţele ei, atunci mulţimea soluţiilor consecinţei va conţine mulţimea soluţiilor inecuaţiei iniţiale şi poate să mai conţină unele numere, numite rădăcini (soluţii) stăine pentru inecuaţia iniţială. De aceia, dacă în procesul rezolvării inecuaţiei se trece de la inecuaţie la o consecinţă, atunci la sfîrşitul rezolvării trebuie efectuată verificarea şi de ales acele numere, care sunt soluţii pentru inecuaţia dată.

Aşa, de exemplu $x^2 < x + 1 \Rightarrow x < \sqrt{x+1}$.

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2 < x + 1$ constă din toate numerele intervalului $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dar mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x < \sqrt{x+1}$ reprezintă intervalul $\left[-1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Acest exemplu ne demonstrează că soluţii străine pot să apară şi atunci cînd MVA se micşorează (dar nu se extinde) în raport cu MVA a inecuaţiei iniţiale.

Afirmaţii despre inecuaţii echivalente:

1. Inecuaţiile $f(x) < g(x)$ şi $g(x) > f(x)$ sunt echivalente.
2. Inecuaţiile $f(x) < g(x)$ şi $f(x) - g(x) < 0$ sunt echivalente.
3. Inecuaţiile $f(x) < g\,(x)$ şi $f(x) + \varphi(x) < g(x) + \varphi(x)$ sunt echivalente dacă funcţia $\varphi(x)$ este definită pe MVA ainecuaţiei $f(x) < g\,(x)$.

În particular, $f(x) < g\,(x) \Leftrightarrow f(x) + \alpha < g(x) + \alpha$ pentru orice număr α.

4. Dacă funcţia $\varphi(x)$ este pozitivă pentru orice x din MVA a inecuaţiei $f(x) < g(x)$, atunci inecuaţiile $f(x) < g(x)$ şi $\varphi(x)f(x) < \varphi(x)g(x)$ sunt echivalente. Dacă însa funcţia $\varphi(x)$ este negativă pentru orice x din MVA a inecuaţiei $f(x) < g\,(x)$, atunci inecuaţia $f(x) < g\,(x)$ este echivalentă cu inecuaţia $\varphi(x)f(x) > \varphi(x)g(x)$.

În particular, dacă $\alpha > 0$, atunci $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \alpha f(x) < \alpha \cdot g(x)$, iar dacă $\alpha < 0$, atunci $f(x) < g\,(x) \Leftrightarrow \alpha f(x) > \alpha g(x)$.

5. Inecuaţiile $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ şi $f(x)g(x) > 0$ sunt echivalente.

6. Inecuaţiile $\alpha^{f(x)} > \alpha^{f(x)}$ şi $f(x) > g(x)$ sunt echivalente pentru orice număr α fixat din intervalul $(1; +\infty)$.

7. Inecuaţiile $\alpha^{f(x)} > \alpha^{f(x)}$ şi $f(x) < g(x)$ sunt echivalente pentru orice număr α fixat din intervalul $(0; 1)$.

8. Fie funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sunt nenegative pe o mulţime M. Atunci pe această mulţime inecuaţiile $f(x) > g(x)$ şi $(f(x)^n) > (g(x)^n)(n \in N)$ sunt echivalente.

9. Inecuaţiile $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}$, şi $f(x) < g(x)$ sunt echivalente, $(n \in N)$

10. Inecuaţiile $f^{2n}(x) < g^{2n}(x)(n \in N)$ şi $|f(x)| < |g(x)|$ sunt echivalente.

11. Fie a un număr fixat din intervalul $(1; +\infty)$, iar $f(x)$ şi $g(x)$ sunt pozitive pe careva mulţime M. Atunci pe această

mulţime M sunt echivalente inecuaţiile $f(x) > g(x)$ şi $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

12. Fie a un număr fixat din intervalul $(0;1)$, iar funcţiile $y = f(x)$ şi $y = g(x)$ sunt pozitive pe careva mulţime M. Atunci pe această mulţime sunt echivalente inecuaţiile $f(x) > g(x)$ şi $\log_a f(x) < \log_a g(x)$.

Afirmaţii referitoare la faptul, cind o inecuaţie este o consecinţă a altei inecuaţii

1. Inecuaţia $f(x) < g(x)$ este consecinţă a inecuaţiei $f(x) + \varphi(x) \ < \ g(x) + \varphi(x)$.
2. Inecuaţia $f(x) < g(x)$ este consecinţă a inecuaţiei $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$, $(n \in N)$.
3. Fie α un număr fixat din intervalul $(1;+\infty)$. Atunci inecuaţia $f(x) < g(x)$ este consecinţă a inecuaţiei $\log_a f(x) < \log_a g(x)$.
4. Fie α un număr fixat din intervalul $(0;1)$. Atunci inecuaţia $f(x) > g(x)$ este consecinţă a inecuaţiei $log_a f(x) <$ $< log_a g(x)$.
5. Inecuaţia $f(x) > 0$ este consecinţă a inecuaţiei $\frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$, unde $\varphi(x)$ primeşte numai valori pozitive.

Exemplul 6. 3. Sunt oare echivalente inecuaţiile

$$x + 3 - \frac{1}{x-1} > \ -x + 2 - \frac{1}{x-1} \quad \text{şi} \quad x + 3 > -x + 2?$$

Rezolvare. Observăm că a doua inecuaţie se obţine din prima inecuaţie dacă la ambele părţi a primei inecuaţii adăugăm expresia $\frac{1}{x-1}$, care nu este definită pentru $x = 1$. Aceasta înseamnă că $x = 1$ nu poate fi soluţie a primei inecuaţii, dar uşor ne convingem că $x = 1$ este soluţie pentru a doua ecuaţie. Prin urmare, inecuaţiile date nu sunt echivalente. Observăm că orice soluţie a primei inecuaţii este şi soluţie pentru a doua inecuaţie şi deci, inecuaţia a doua este consecinţă a primei inecuaţii.

Exemplul 6.4. Sunt oare inecuaţiile $\frac{x-3}{x^2-5x+6} < 2$ şi $2x^2 - 11x + 15 > 0$ echivalente?

Rezolvare. MVA pentru prima inecuaţie este mulţimea $R\backslash\{2;3\}$. Pe această mulţime inecuaţia $\frac{1}{x-2} < 2$ este echivalentă cu prima inecuaţie şi are soluţiile $(-\infty;2) \cup \left(\frac{5}{2};3\right) \cup (3;+\infty)$. Ecuaţia $2x^2 - 11x + 15 = 0$ are rădăcinile $x_1 = \frac{5}{2}$ şi $x_2 = 3$. Prin urmare, mulţimea soluţiilor inecuaţiei $2x^2 - 11x + 15 > 0$ constă din două intervale $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$ şi $(3;+\infty)$. Aşadar, aceste două inecuaţii nu pot fi echivalente. Mai mult decît atît: nici una din aceste două inecuaţii nu este consecinţă a celeilalte. Acest exemplu ne arată că la rezolvarea inecuaţiilor nu se poate de înmulţit ambele părţi la numitor, fără a se clarifica semnul valorilor numitorului.

Exemplul 6.5. Sunt oare inecuaţiile

$$\lg(x^2-4) > \lg(4x-7) \text{ şi } x^2-4 > 4x-7$$

echivalente?

Rezolvare. Soluţiile inecuaţiei $x^2 - 4 > 4x - 7$ reprezintă reuniunea $(-\infty;1) \cup (3;+\infty)$. Observăm însă că $x = 0$ din intervalul $(-\infty;1)$ nu este soluţie a primei inecuaţii $\lg(x^2-4) > \lg(4x-7)$, deoarece $x = 0$ nu aparţine MVA acestei inecuaţii. Prin urmare, aceste două inecuaţii nu sînt echivalente. Inecuaţia a doua este o consecinţă a primei inecuaţii.

Exemplul 6. 6. Sunt oare echivalente inecuaţiile $\sqrt{x-1} < < \sqrt{2-x}$ şi $x-1<2-x$?

Rezolvare. MVA a primei inecuaţii se determină de sistemul

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$$

şi reprezintă segmentul $[1; 2]$.

Soluţiile inecuaţiei a doua reprezintă intervalul $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

Aceste două inecuaţii nu-s echivalente deoarece, spre exemplu, numărul $x=-10$ este soluţie a inecuaţiei a doua, dar nu aparţine MVA a primei inecuaţii.

A doua inecuaţie este consecinţă a primei inecuaţii(vezi afirmaţia 2).

Exemplul 6. 7. De demonstrat că :

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) + g(x) > 0. \end{cases}$$

De adus un exemplu , cînd aceste sisteme nu sunt echivalente.

Demonstraţie: Fie numărul x_0 este soluţie a primului sistem, atunci $f(x_0) > 0$ şi $g(x_0) > 0$ şi prin urmare, $f(x_0) + g(x_0) > 0$. Aşa dar, sistemul al doilea este consecinţă a primului sistem. Să notăm $f(x) = x^2$şi $g(x) = x$.

Vom demonstra că sistemele $\begin{cases} x^2 > 0, \\ x > 0. \end{cases}$ şi $\begin{cases} x^2 > 0, \\ x^2 + x > 0. \end{cases}$ nu sunt echivalente.

Întradevăr.

$\begin{cases} x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$, iar

$\begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ x(x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x(x+1) > 0. \end{cases}$

Prin urmare, mulţimea soluţiilor sistemului al doilea reprezintă reuniunea a două intervale$(-\infty; 1) \cup (0; +\infty)$.

Exerciţii pentru lucrul independent:

1. Sunt oare echivalente inecuaţiile:

1. $2x - 3 - \frac{1}{x-5} < x - 4 - \frac{1}{x-5}$ şi $2x - 3 < x - 4$;
2. $x + 3 - \frac{1}{x+7} < 2 - \frac{1}{x+7}$ şi $x + 3 < 2$;
3. $\frac{3}{5}(2x - 1) < \frac{3}{5}(x + 2)$ şi $2x - 1 < x + 2$;
4. $-\frac{1}{4}(1 - x) < -\frac{1}{4}(4x - 3)$ şi $1 - x < 4x - 3$;
5. $-\frac{5}{2}(x - x^2 - 1)(x + 4) < -\frac{5}{2}(x - x^2 - 1)(3x + 1)$ şi $x + 4 < 3x + 1$;
6. $(18 + x - 2x^2)(4x + 8) < (18 + x - x^2)(1 - x)$ şi $4x + 8 < 1 - x$;
7. $3x - 1 < x + 3$ şi $(3x - 1)^2 < (x + 3)^2$;
8. $\frac{2}{\sqrt{x}+1} < 0$ şi $\left(\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)^2 < 0$;
9. $x^3 < -1$şi$x < -1$;
10. $x^2 < 1$ şi $x < 1$;
11. $\frac{-3}{x+4} < 5$ şi $\frac{-3+5(x+4)}{x+4} < 0$;
12. $\frac{x+5}{x-1} < 0$ şi $(x + 5)(x - 1) < 0$;
13. $\frac{x-3}{5-x} < 0$ şi $(x - 3)(5 - x) < 0$;

14. $\frac{x+3}{(x+3)^2} < 0$ şi $x + 3 < 0$;

15. $\frac{x+8}{(x+7)^2} < 0$ şi $x - 8 < 0$;

16. $\frac{1}{2x^2+x+1} < \frac{1}{x^2+1}$ şi $x^2 + 1 < 2x^2 + x + 1$;

17. $\frac{2}{9-x^2} < \frac{2}{4x^2-4x}$ şi $4x^2 - 4x < 9 - x^2$;

18. $\sqrt{x+3}\sqrt{x-3} < \frac{1}{2}$ şi $2\sqrt{(x+3)(x-3)} < 1$;

19. $x^2 \geq x$ şi $x \geq 1$;

20. $x^4 \geq x^2$ şi $x^2 \geq 1$;

21. $\frac{1}{x} \leq 1$ şi $1 \leq x$;

22. $\sqrt{1-x} \leq x$ şi $1 - x \leq x^2$;

23. $\sqrt{1-x}\sqrt{x+2} \geq \frac{9}{4}$ şi $\sqrt{(1-x)(x+2)} \geq \frac{9}{4}$;

24. $\sqrt{(x+1)(x-2)} \geq x$ şi $\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} \geq x$;

25. $\log_2 x \leq 2$ şi $\log_2 x \leq 1$;

26. $\log_2 \frac{x+1}{x} + \log_2 x\,(x+1) \leq 2$ şi $\log_2 (x+1)^2 \leq 2$;

27. $\log_2 (x+2)\,(x-5) \leq 3$ şi
$\log_2 (x+2) + \log_2 (x-5) \leq 3$;

28. $\log_2 \frac{x+1}{2x} + \log_2 \frac{2x}{x+1} \geq 1$ şi $x \geq 1$;

29. $\sqrt{x+2} \geq -1$ şi $x + 2 \geq 0$;

30. $\sqrt{3x-1} \leq 3$ şi $3x - 1 \leq 9$;

31. $\log_2 x^2 \geq 1$ şi $2\log_2 |x| \geq 1$;

32. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x} + \log_{\frac{1}{2}} x(x-3) \geq 3$ şi $\log_{\frac{1}{2}} (x+1)^2 \geq 3$;

33. $\log_{\frac{2}{5}} (x+5)(x-2) \geq 2$ şi

$\log_{\frac{2}{5}}(x+5)+\log_{\frac{2}{5}}(x-2)\geq 2$;

34. $\log_{\frac{2}{5}}\frac{x-1}{x+3}+\log_{\frac{2}{5}}\frac{x+3}{x-1}\leq 1$ şi $x\leq 1$;

35. $\sqrt{x+2}\leq -7$ şi $x+2\leq 49$;

36. $\sqrt{3x-2}\geq 4$ şi $3x-2\geq 16$;

37. $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\geq 2$ şi $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\geq 2$;

38. $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}\leq 1$ şi $\frac{x-2}{x+3}\leq 1$;

39. $\sqrt{3-x^2}\sqrt{4-x^2}\geq \frac{9}{4}$ şi $3-x^2\leq 4+x^2$;

40. $\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}\geq 1$ şi $x\geq 2$;

41. Sunt oare echivalente inecuaţia dată şi sistemul dat:

1. $\frac{|x|(x+4)}{\sqrt{x^2}}>2$ şi $\begin{cases} x\neq 0 \\ x+4>2 \end{cases}$;

2. $\sqrt{x^2-25}<x+1$ şi $\begin{cases} x+1>0 \\ x^2-25<(x+1)^2 \end{cases}$;

3. $\sqrt{x^2-16}(x^2-80)\leq\sqrt{x^2-16}$ şi $\begin{cases} x^2-16\geq 0 \\ x^2-80\leq 1 \end{cases}$;

4. $\frac{x+3}{\sqrt{x+4}}>0$ şi $\begin{cases} x+3>0 \\ x+4>0 \end{cases}$;

5. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\geq 0$ şi $\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ x>0 \end{cases}$;

6. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{x-2}\leq 0$ şi $\begin{cases} x-2>0 \\ x^2-16\geq 0 \end{cases}$;

7. $\sqrt{x-1}\sqrt{3-x}\geq -1$ şi $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 3-x\geq 0 \end{cases}$;

8. $\frac{(x-2)(x+3)^2}{x+5}<0$ şi $\begin{cases} x\neq -3 \\ \frac{x-2}{x+5}<0 \end{cases}$;

9. $\frac{\sqrt{25-x^2}(x+4)^2}{\sqrt{x^2-1}(x-2)^2} > 0$ şi $\begin{cases} 25-x^2 > 0 \\ x^2-1 > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$;

10. $\frac{x^2-1}{x-1} < 3$ şi $\begin{cases} x+1 < 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$;

11. $\sqrt{6+x-x^2} > 2x-1$ şi $\begin{cases} 6+x-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 6+x-x^2 \geq (2x-1)^2 \end{cases}$;

12. $\frac{(x-2)^2\sqrt{16-x^2}}{x} > 0$ şi $\begin{cases} 16-x^2 > 0 \\ x \neq 2 \\ x > 0 \end{cases}$;

Răspunsuri:

1. În exerciţiile: 1), 3), 5), 8), 9), 11), 12), 13), 14), 16), 23), 29), 31), 36), 40)inecuaţiile sunt echivalente, iar în celelalte nu sunt echivalente.

2. În exerciţiile: 2), 5), 6), 9), 11)inecuaţia şi sistemul nu sunt echivalente, iar în celelalte sunt echivalente.

§7. Inecuaţii algebrice, iraţionale şi sisteme de inecuaţii

La rezolvarea inecuaţiilor care conţin semnul valorii absolute (semnul modulului) urmează să descompunem MVA a inecuaţiei în mulţimi, pe fiecare din care expresiile de sub semnul modulului păstrează semnul. Pe fiecare din aceste mulţimi trebuie de rezolvat inecuaţia şi soluţiile obţinute în reuniune vor fi soluţiile inecuaţiei iniţiale.

Inecuaţia de forma $|f(x)| > g(x)$, unde $f(x)$ şi $g(x)$ sunt careva funcţii este echivalentă cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

În particular, inecuaţia $|f(x)| > a$ este echivalentă cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{array}\right.$$

Dacă $a < 0$, atunci inecuaţia $|f(x)| > a$ este satisfăcută de orice valoare admisibilă pentru x.

Inecuaţia de forma: $|f(x)| > g(x)$ poate fi rezolvată prin două metode:

Metoda I. Inecuaţia dată este echivalentă cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

Metoda II. Inecuaţia dată este echivaletă cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |f(x)| > g(x), \\ x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} |f(-x)| > g(x), \\ x < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Inecuaţia de forma $|f(x)| \geq |g(x)|$ se rezolvă cu ajutorul descompunerii MVA în intervale, în fiecare din care funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ au semne constante. Pe fiecare din aceste intervale se rezolvă inecuaţia fără semnul modulului. Reuniunea soluţiilor de pe aceste intervale şi este mulţimea soluţiilor inecuaţiei date.

Inecuaţia de forma $|f(x)| < |g(x)|$, unde $f(x)$ şi $g(x)$ sunt careva funcţii, este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ -f(x) < g(x). \end{cases}$$

Pentru acele valori ale lui x pentru care $g(x) \leq 0$ acest sistem, şi deci, şi inecuaţia iniţială nu are soluţii. În particular, inecuaţia $|f(x)| < \alpha$ pentru $\alpha \leq 0$ nu are soluţii, iar pentru $\alpha > 0$ această inecuaţie este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} f(x) < \alpha, \\ -f(x) < \alpha. \end{cases}$

Inecuaţia de forma $f(x, |g(x)|) < h(x)$ este echivalentă cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f\big(x, g(x)\big) < h(x), \\ \quad g(x) \geq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} f\big(x, -g(x)\big) < h(x) \\ \quad g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

În mod analogic se face trecerea la totalităţi echivalente de sisteme şi pentru inecuaţii de forma:

$$f(x, |g(x)|) > h(x),\ f(x, |g(x)|) \geq h(x).$$

Exemplul 7. 1. Să rezolvăm inecuaţia

$$3x + 2(ax - 5) + \frac{x}{3} < 4\left(x - \frac{1}{2}\right) + 5 \ (1).$$

Rezolvare. Inecuaţia dată după unele transformări simple o aducem la forma:

$$2(3a - 1)x < 39 \ (2).$$

1. Dacă $a = \frac{1}{3}$, atunci $0 \cdot x < 39$, adică $x \in R$.
2. Dacă $a < \frac{1}{3}$, atunci $3a - 1 < 0$. Din (2) obţinem $x > \frac{39}{2(2a-1)}$.

3. Dacă $a > \frac{1}{3}$, atunci $3a - 1 > 0$. Din (2) obţinem $x < \frac{39}{2(2a-1)}$.

Răspuns. Pentru $a = \frac{1}{3}$, $x \in R$;

pentru $a < \frac{1}{3}$, $x > \frac{39}{2(2a-1)}$;

pentru $a > \frac{1}{3}$, $x < \frac{39}{2(2a-1)}$.

Exemplul 7.2. Să rezolvăm inecuaţia:

$$\frac{7x-11}{a+3} > (1+3a)\frac{x}{4} \ (1).$$

Rezolvare. Observăm că prima valoare de control a parametrului este $a = -3$. Vom cerceta cazurile:

$$1)\ a < -3;\quad 2)\ a = -3;\quad 3)\ a > -3.$$

1. Fie $a < -3$. Atunci $a + 3 < 0$ şi inecuaţia (1) este echivalentă cu inecuaţia $4(7x - 11) < (1 + 3a)(a + 3)x$, adică cu inecuaţia $(3a^2 + 10a - 25)x > -44$ (2).

Rezolvăm ecuaţia $3a^2 + 10a - 25 = 0$ şi aflăm următoarele valori de control a parametrului $a = \frac{5}{3}$ şi $a = -5$. Aşa dar, inecuaţia (2) o vom cerceta în cazurile:

$$a < -5;\ a = -5;\ -5 < a < -3.$$

În primul caz $3a^2 + 10a - 25 > 0$ şi din (2) avem că $x > -\frac{44}{3a^2+10a-25}$.

În cazul doi inecuaţia (2) are forma $0 \cdot x > -44$ şi deci $x \in R$.

Dacă $-5 < a < -3$, atunci $3a^2 + 10a - 25 < 0$ şi din (2) avem că

$$x < -\frac{44}{3a^2 + 10a - 25}$$

2. Evident, dacă $a = -3$ inecuaţia (1) n-are soluţii.

3. Fie $a > -3$. În acest caz $a + 3 > 0$ şi inecuaţia (3) este echivalentă cu inecuaţia $(3a^2 + 10a - 25)x < -44 \quad (3)$.
Pentru inecuaţia (3) valorile de control ale parametrului sunt $a = \frac{5}{3}$ şi $a = -5$.
Deoarece noi cercetăm cazul $a > -3$ urmează să examinăm doar valoarea $a = \frac{5}{3}$. Prin urmare, pentru rezolvarea inecuaţiei (3) vom cerceta următoarele cazuri: $a = \frac{5}{3}$; $a > \frac{5}{3}$; $-3 < a < \frac{5}{4}$.
Evident, dacă $a = \frac{5}{3}$, inecuaţia (3) n-are soluţii.
Dacă $a > \frac{5}{3}$, atunci $x < -\frac{44}{3a^2+10a-25}$;
Dacă $-3 < a < \frac{5}{4}$, atunci $x > -\frac{44}{3a^2+10a-25}$.
Răspuns.
1) Dacă $a = -3$, $a = \frac{5}{3}$, inecuaţia n-are soluţii;
2) Dacă $a < -5$; $-3 < a < \frac{5}{4}$, atunci $x > -\frac{44}{3a^2+10a-25}$;
3) Dacă $-5 < a < -3$, $a > \frac{5}{3}$ atunci $x < -\frac{44}{3a^2+10a-25}$;
4) Dacă $a = 5$, atunci $x \in R$.

Exemplul 7. 3. Să rezolvăm inecuaţia:

$$ax^2 - 2x + 4 > 0 \quad (1).$$

Rezolvare. Evident, prima valoare de control a parametrului este $a = 0$. A doua valoare de control a parametrului este $a = \frac{1}{4}$ pentru care discriminantul trinomului $ax^2 - 2x + 4 = 0$. Să mai observăm că $D < 0$ pentru $a > \frac{1}{4}$ şi $D \geq 0$ pentru $a \leq \frac{1}{4}$.
Vom rezolva inecuaţia (1) în următoarele cazuri:
1) $a < 0$; 2) $a = 0$; 3) $0 < a \leq \frac{1}{4}$; 4) $a > \frac{1}{4}$.

1. Dacă $a < 0$, atunci $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$.

Prin urmare, în acest caz $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$.

2. Dacă $a = 0$, atunci inecuaţia (1) are forma: $-2x + 4 > 0$, de unde $x < 2$.

3. Dacă $0 < a \leq \frac{1}{4}$, atunci trinomul $ax^2 - 2x + 4$ are rădăcinile $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{a}$ şi $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$. Prin urmare, soluţiile inecuaţiei (1) reprezintă totalitatea

$$x < \frac{1+\sqrt{1-4a}}{a};\ x > \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}.$$

4. Dacă $a > \frac{1}{4}$, atunci trinomul $ax^2 - 2x + 4$ are discriminant negativ şi coeficient pozitiv pe lîngă x^2. Prin urmare, trinomul primeşte valori pozitive pentru orice x.

Răspuns. Dacă $a < 0$, atunci $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$;

dacă $a = 0$, atunci $x < 2$;

dacă $0 < a \leq \frac{1}{4}$, atunci $x < \frac{1+\sqrt{1-4a}}{a}$; $x > \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$;

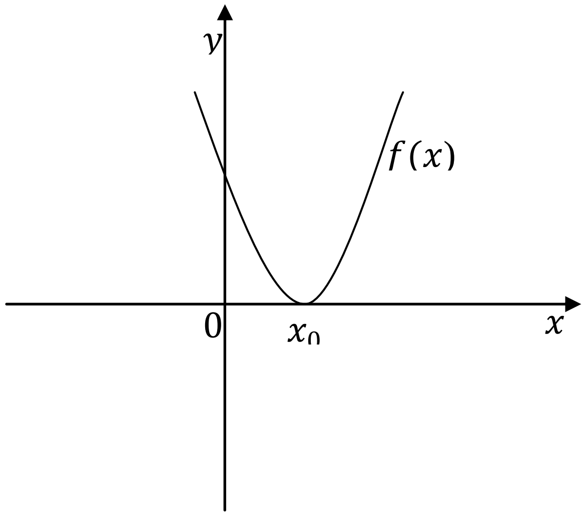
dacă $a > \frac{1}{4}$, atunci $x \in R$.

Exemplul 7. 4. Pentru fiecare valoare a parametrului a rezolvați inecuația $ax^2 + x + 3a^3 > 0$.

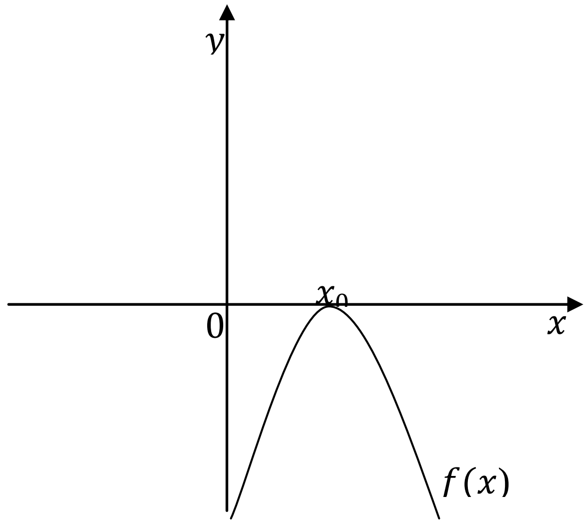
Rezolvare. Fie $a = 0$. Atunci soluția inecuației va fi mulțimea $x > 0$.

Pentru $a \neq 0$ funcția $f(x) = ax^2 + x + 3a^3$, reprezintă un trinom pătrat și deci, graficul ei este o parabolă. Vom cerceta trei cazuri, în dependență de semnul discriminantului $D = 1 - 12a^4$ al funcției $f(x)$.

I. Fie $D = 1 - 12a^4 = 0$ sau $a = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$. În acest caz ecuația $f(x) = 0$ are o singură rădăcină $x_0 = -\frac{1}{2}a$ (vezi figura). Pentru $a > 0$ avem că $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\right\}$. Pentru $a < 0$ avem că $f(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.



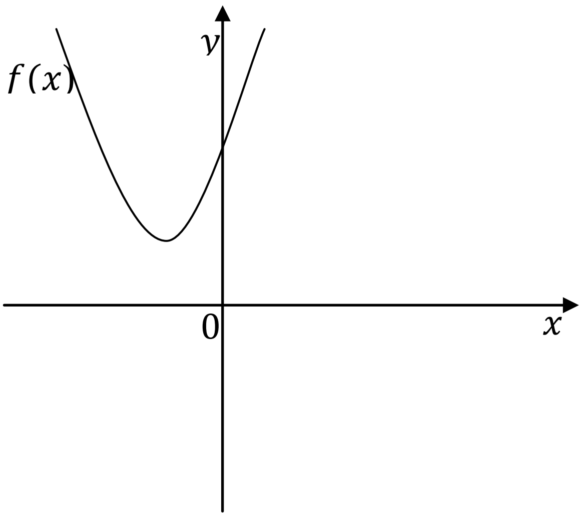
$fig.26\ D = 0, a > 0$



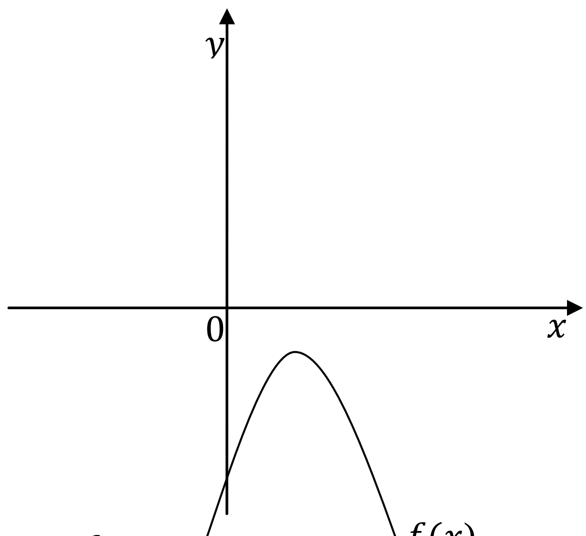
$fig.27\ D = 0, a < 0$

În acest caz avem răspunsul parțial: pentru $a = -\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$ inecuația n-are soluții; dacă $a = \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, atunci $x \in (-\infty; +\infty)\backslash\left\{-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\right\}$.

II. Fie $D = 1 - 12a^4 < 0$, adică $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt[4]{12}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[4]{12}}; +\infty\right)$. Atunci în dependențăde semnul parametrului a funcția $f(x)$ va fi peste tot pozitivă sau peste tot negativa (vezi Fig 28, 29)



$fig.28\ D < 0, a > 0$



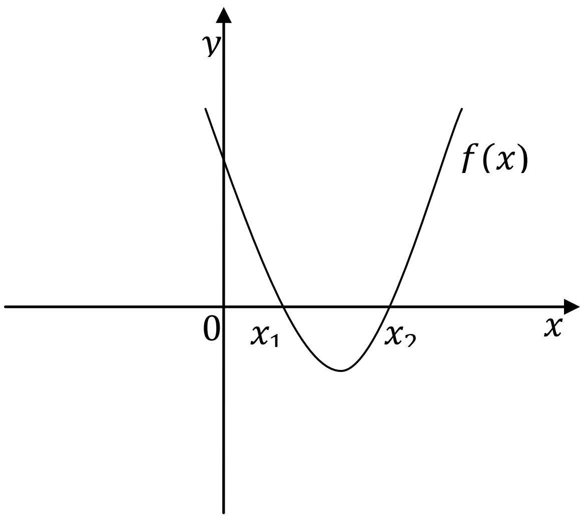
$fig.29\ D < 0, a < 0$

Pentru $a > 0$, adică pentru $a \in \left(\frac{1}{\sqrt[4]{12}}; +\infty\right)$ avem că $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Pentru $a < 0$ avem că $f(x) < 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

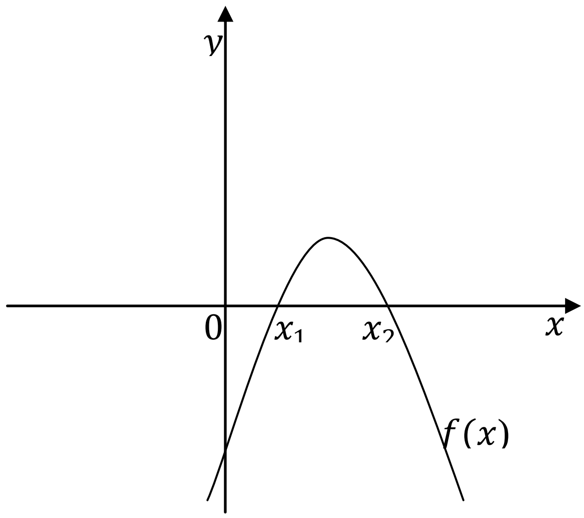
În acest caz avem răspunsul parțial: pentru $a \leq -\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$ inecuația n-are soluții; dacă $a > \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, atunci $x \in (-\infty; +\infty)$.

III. Fie $D = 1 - 12a^4 > 0$, adică $a \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{12}}; \frac{1}{\sqrt[4]{12}}\right)$. Atunci ecuația $f(x) = 0$ va avea două rădăcini (vezi Fig 30, 31)

IV. $x_1 = \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}$.



$fig.30$



$fig.31$

Dacă $a > 0$ avem că $f(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$. Dacă $a < 0$ avem că $f(x) > 0$ pentru orice $x \in (x_1; x_2)$.

În acest caz avem răspunsul parțial: dacă $0 < a < \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, atunci $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; +\infty\right)$; dacă $-\frac{1}{\sqrt[4]{12}} < a < 0$, atunci $x \in \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right)$.

Răspuns. Pentru $a \leq -\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$ inecuația n-are soluții, dacă $-\frac{1}{\sqrt[4]{12}} < a < 0$, atunci $x \in \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right)$; dacă $a = 0$, atunci $x \in (0; +\infty)$; dacă $0 < a < \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, atunci $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; +\infty\right)$; dacă $a > \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, atunci $x \in (-\infty; +\infty)$.

Exemplul 7. 5. Să determinăm acele valori a parametrului a pentru care trinomul:

$$y(x) = (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 \quad (1)$$

va fi pozitiv pentru orice x.

Rezolvare. Primele valori de control a parametrului sunt cele pentru care coeficientul pe lîngă x^2 este egal cu zero, adică $a^2 - 1 = 0$ sau $a = \pm 1$.

Dacă $a = 1$ atunci $y(1) = 2 > 0$.

Dacă $a = -1$, atunci $y(-1) = -2x + 2$, care primeşte valori pozitive pentru $x < 1$.

Trinomul (1) pentru $a \neq \pm 1$ va fi pozitiv dacă şi numai dacă $\begin{cases} a^2 - 1 > 0 \\ (a^2 - 1)^2 + 2(a^2 - 1) < 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a < -1, a > 1 \\ a^2 + 2a - 3 > 0 \end{cases}$, adică $a < -3, a > 1$.

Răspuns. $a < -3, a > 1$.

Exemplul 7. 6. Să determinăm acele valori a parametrului a pentru care soluţiile inecuaţiei $x^2 + ax - 1 < 0$ reprezintă un interval de lungimea 5.

Rezolvare. Să observăm că pentru toate valorile parametrului discriminantul trinomului $x^2 + ax - 1$ este pozitiv şi $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}$. Deoarece $|x_1 - x_2| = 5$, atunci

$\left|\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2} - \frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right| = 5, \quad \left|-\sqrt{a^2+4}\right| = 5, \quad \sqrt{a^2+4} = 5,$

$a = \pm\sqrt{21}.$

Răspuns. $a = \pm\sqrt{21}.$

Exemplul 7. 7. Să determinăm toate valorile parametrului a pentru care inecuaţia $(x - 2 + 3a)(x - 2a + 3) < 0$ este satisfăcută pentru orice $x \in [2, 3]$.

Rezolvare. Inecuaţia dată are forma $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ unde $x_1 = 2 - 3a$, $x_2 = 2 - 3a$. Rezolvînd ultima inecuaţie, obţinem: $x_1 < x < x_2$(dacă $x_1 < x_2$) sau $x_2 < x < x_1$ (dacă $x_2 < x_1$). Dacă $x_1 = x_2$, atunci inecuaţia n-are soluţii.

Prin urmare, soluţiile inecuaţiei iniţiale alcătuiesc intervalul $[2a - 3{,}2 - 3a]$, sau intervalul $[2 - 3a, 2a - 3]$.

Din condiţiile problemei urmează că toate punctele segmentului $[2, 3]$ trebuie să satisfacă inecuaţiei date, ceea ce are loc atunci şi numai atunci, cînd punctele cu coordonatele 2 şi 3 sunt situate în interiorul intervalului $[x_1; x_2]$ sau $[x_2; x_1]$, adică atunci cînd $2a - 3 < 2 < 3 < 2 - 3a$ sau cînd $2 - 3a < 2 < 3 < 2a - 3$.

Inecuaţia $2a - 3 < 2 < 3 < 2 - 3a$ este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} 2a - 3 < 2 \\ 2 - 3a > 3' \end{cases}$ de unde $a < -\frac{1}{3}$.

Inecuaţia $2 - 3a < 2 < 3 < 2a - 3$ este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} 2 - 3a < 2 \\ 2a - 3 > 3' \end{cases}$ de unde $a > 3$.

Răspuns. $a < -\frac{1}{3}, a > 3$.

Exemplul 7. 8. Pentru orice valoare a parametrului a să se rezolve inecuația $\frac{x-a}{x-a-1} \leq 0$.

Rezolvare. Să observăm că pentru orice valoare fixată a parametrului a această inecuație reprezintă o inecuație rațională obișnuită. Prin urmare, poate fi aplicată metoda intervalelor pentru a o rezolva. Pentru aceasta este suficient să fixăm pe axa numerică numerele a și $a+1$ în care se transformă în zero numitorul și numărătorul corespunzător. Evident, pentru orice valoare a parametrului a vom avea $a+1>a$ și punctele vor fi situate în modul indicat în Fig. 32.

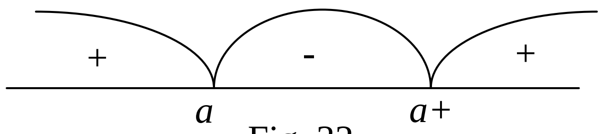


Fig. 32

Răspuns: $x \in [a; a+1)$

Exemplul 7. 9. Pentru ce valori a parametrului a inecuația $(2a+1)x^2+(a+2)x+\frac{3}{4} \geq 0$ este satisfăcută pentru orice x?

Rezolvare. Graficul trinomului pătrat este situat nu mai jos de axa Ox, când au loc condițiile:

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$$

În problema dată aceste condiții au forma

$$\begin{cases} 2a+1>0 \\ (a+2)^2-3(2a+1) \leq 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, abținem $a=1$.

Răspuns. $a=1$.

Exemplul 7. 10. Pentru orice valoare a parametrului a să se rezolve inecuația $\frac{x-1}{x-a}>0$.

Rezolvare. Vom folosi de asemenea metoda intervalelor, însă în acest caz apare o anumită dificultate: noi nu știm cum sunt aranjate numerele 1 și a. Evident pot avea loc trei cazuri: $a<1, a=1$ și $a>1$.

I. Fie $a < 1$. În acest caz avem ordinea punctelor indicate în fig. 33

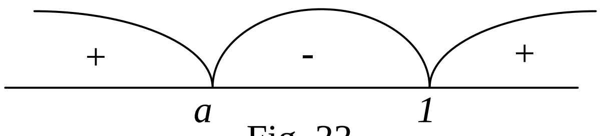


Fig. 33

Metoda intervalelor în acest caz ne dă o parte a răspunsului: dacă $a < 1$, atunci $x \in (-\infty; a) \cup (1; +\infty)$.

II. Fie $a = 1$. În acest caz obținem inecuația $\frac{x-1}{x-1} > 0$, care pentru $x \neq 1$ este echivalentă cu inegalitatea adevărată $1 > 0$. Prin urmare, în acest caz vom avea că $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

III. Fie $a > 1$. În acest caz punctele vor fi aranjate cum este indicat în Fig. 34


Fig. 34

Metoda intervalelor în acest caz ne dă soluția: dacă $a > 1$, atunci $x \in (-\infty; 1) \cup (a; +\infty)$

Răspuns. Dacă $a < 1$, atunci $x \in (-\infty; a) \cup (1; +\infty)$; dacă $a = 1$, atunci $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; dacă $a > 1$, atunci $x \in (-\infty; 1) \cup (a; +\infty)$.

Exemplul 7. 11. În dependență de valorile parametrului a de rezolvat inecuația $a - x > \left|1 - |x|\right|$.

Rezolvare. Scriem inecuația inițială sub forma $a > x + \left||x| - 1\right|$. Să cercetăm două funcții $y_1 = a$ (graficul reprezintă o dreaptă paralelă la axa Ox) și $y_2 = x + \left||x| - 1\right|$. A doua funcție poate fi scrisă sub forma

$$y_2(x) = \begin{cases} -1, dacă\, x < -1, \\ 2x + 1, dacă -1 \leq x < 0, \\ 1, dacă\, 0 \leq x < 1, \\ 2x - 1, dacă\, x > 1. \end{cases}$$

Graficul acestei funcții reprezintă o linie frântă (Fig. 35).

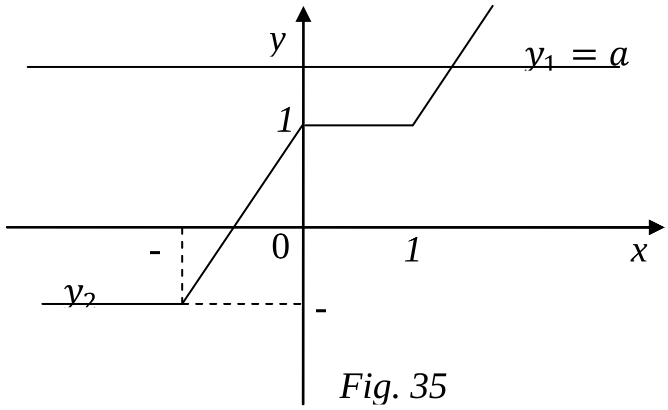


Fig. 35

Soluții ale inecuației vor fi acele valori x, pentru care punctele graficului $y_1 = a$ vor fi situate mai sus decât punctele graficului $y_2(x)$. Din fig. 35 obținem, că pentru $a \leq -1$ așa puncte nu există, pentru $a \in (-1; 1)$ acestea sunt punctele pentru care $a > 2x + 1$, adică pentru care $x < \frac{a-1}{2}$; pentru $a = 1$ soluția este $x < 0$, iar pentru $a > 1$ soluțiile se primesc din inecuația $a > 2x - 1$, deci pentru $x < \frac{a+1}{2}$.

Răspuns. $\emptyset$, pentru $a \leq -1$;

$x < \frac{a-1}{2}$, pentru $-1 < a \leq 1$;

$x < \frac{a+1}{2}$, pentru $a > 1$.

Exemplul 7. 12. Pentru orice valoare a parametrului a rezolvați inecuația $(a + 4)\sqrt{5 - x} > a + 3$.

Rezolvare. Evident, mulțimea valorilor admisibile (MVA) este $x \leq 5$. Să observăm că este convenabil să împărțim ambele părți la $a+4$. Vom ține cont că sunt posibile cazurile $a+4<0, a+4>0$ și $a+4=0$.

I. Fie $a+4<0$. În acest caz inecuația inițială este echivalentă cu inecuația $\sqrt{5-x}<\frac{a+3}{a+4}$. Deoarece $\frac{a+3}{a+4}>0$ pentru $a<-4$ (vezi Fig. 36), obținem

$$\sqrt{5-x}<\frac{a+3}{a+4} \Leftrightarrow \left(5-x<\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2\right) \Leftrightarrow \left(x>5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2\right)$$

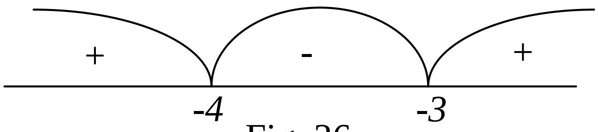


Fig. 36

Avînd în vedere MVA primim răspunsul parțial: dacă $a<-4$, atunci $x \in \left(5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2; 5\right]$.

II. Fie $a+4>0$. În acest caz inecuația inițială este echivalentă cu inecuația $\sqrt{5-x}>\frac{a+3}{a+4}$. Deoarece expresia $\frac{a+3}{a+4}$ (vezi figura) este negativă pentru $a \in (-4; -3)$, este egală cu zero pentru $a=-3$ și este pozitivă pentru $a>-3$ noi vom cerceta aceste cazuri.

a) Fie $a \geq -3$. Atunci (vezi Fig. 36) $\frac{a+3}{a+4} \geq 0$ și prin urmare, putem transforma inecuația în felul următor: $\left(\sqrt{5-x}>\frac{a+3}{a+4}\right) \Leftrightarrow \left(5-x>\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2\right) \Leftrightarrow \left(x<5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2\right)$.

Toate valorile obținute satisfac MVA. Prin urmare, obținem răspunsul parțial: dacă $a \geq -3$, atunci $x<5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2$.

b) Fie $a \in (-4; -3)$. Atunci (vezi Fig. 36)$\frac{a+3}{a+4} < 0$ și prin urmare, inecuația $\sqrt{5-x} > \frac{a+3}{a+4}$ este satisfăcută pentru orice x din MVA. Astfel, obținem răspunsul parțial: dacă $a \in (-4; -3)$, atunci $x \le 5$.

III. Fie $a + 4 = 0$. Atunci inecuația inițială are forma $0 \cdot \sqrt{5-x} > -1$ sau $0 > -1$. Ultima inegalitate este justă pentru orice x din MVA. Așadar, obținem răspunsul parțial: dacă $a = -4$, atunci $x \le 5$.

Răspuns. Dacă $a < -4$, atunci $x \in \left(5 - \left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2; 5\right]$;
dacă $a \in [-4; -3)$, atunci $x \le 5$;
dacă $a \ge -3$, atunci $x < 5 - \left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2$.

Uneori în unele probleme este rațional de cercetat parametrul în calitate de variabilă.

Exemplul. 7. 13. De aflat toate acele valori ale lui x pentru care inecuația

$$(4-2a)x^2 + (13a - 27)x + 33 - 13a > 0$$

este satisfăcută pentru orice a, care satisface condiției $1 < a < 3$.

Rezolvare. Transformăm inecuația dată în felul următor:
$(-2ax^2 + 13ax - 13a + 4x^2 - 27x + 33 > 0) \Leftrightarrow \left((-2x^2 + 13x - 13)a + (4x^2 - 27x + 33) > 0\right)$
În așa mod, inecuația inițială este liniară în raport cu a și are forma:
$f(a) = k(x) \cdot a + b(x) > 0$, unde
$k(x) = -2x^2 + 13x - 13, b(x) = 4x^2 - 27x + 33$.

Coeficienții acestei inecuații depind de x. În dependență de semnul coeficientului $k(x)$ partea stîngă a inecuației este o funcție crescătoare dacă $k(x) > 0$ sau o funcție descrescătoare, dacă $k(x) < 0$. Evident, aceasta va fi o funcție de a. Dacă coeficientul $k(x)$ este egal cu zero, atunci această funcție nu depinde de a.

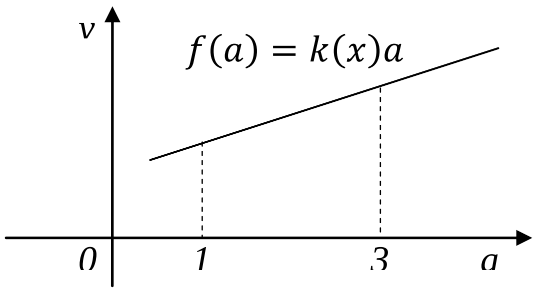


Fig. 37 Cazul $k(x) > 0$

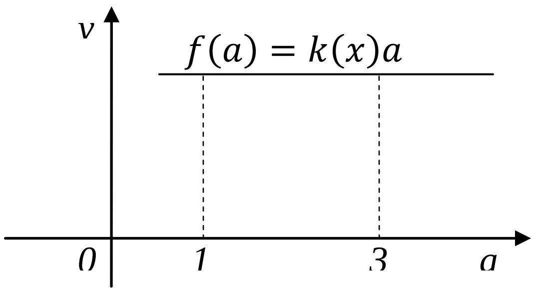


Fig. 38 Cazul $k(x) = 0$

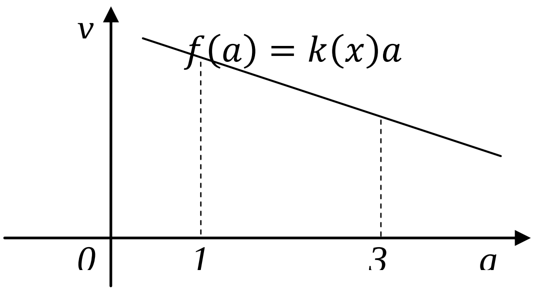


Fig. 39 Cazul $k(x) < 0$

Vom rezolva inecuația dată prin două metode.

I. Fie $k(x) > 0$. Atunci, conform celor spuse mai sus, funcția $f(a)$ este crescătoare. Prin urmare, condiția pentru ca funcția dată să fie pozitivă pentru $a \in (1; 3)$ este echivalentă cu condiția ca valoarea ei în punctul $a = 1$ să fie nenegativă. Aceste condiții sunt determinate de sistemul

$$\begin{cases} k(x) > 0, \\ f(1) \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Dacă $k(x) = 0$, atunci inecuația va fi satisfăcută pentru toate valorile lui a, dacă $b(x) > 0$. Prin urmare, în acest caz soluțiile inecuației sunt determinate de sistemul

$$\begin{cases} k(x) = 0, \\ f(0) > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Dacă $k(x) < 0$, atunci funcția $k(x)a + b(x)$ este descrescătoare și condiția ca ea să fie pozitivă pe intervalul $(1; 3)$ este determinată de sistemul

$$\begin{cases} k(x) < 0, \\ f(3) \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Alcătuim sistemele corespunzătoare sistemelor 1-3 pentru inecuația inițială:

$$\begin{cases} 2x^2 - 13x + 13 < 0, \\ x^2 - 7x + 10 \geq 0. \end{cases} \quad (1')$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 13x + 13 = 0, \\ 4x^2 - 27x + 33 > 0. \end{cases} \quad (2')$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 13x + 13 > 0, \\ x^2 - 6x + 3 \leq 0. \end{cases} \quad (3').$$

Rezolvînd aceste sisteme ne convingem că:

$$x \in \left[3 - \sqrt{6}; 2\right] \cup \left[5; 3 + \sqrt{6}\right).$$

II. Deoarece funcția $f(a) = k(x)a + b(x)$ este liniară urmază că condiția să fie pozitivă pe intervalul $(1; 3)$ este echivalentă cu faptul ca simultan să se satisfacă condițiile $f(1) \geq 0$ și $f(3) \geq 0$. Cu alte cuvinte trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f(3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2x^2 + 13x - 13) * 1 * 4x^2 - 27x + 33 \geq 0 \\ (-2x^2 + 13x - 13) * 3 * 4x^2 - 27x + 33 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 14x + 20 \geq 0 \\ -x^2 + 12x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-5) \geq 0 \\ (x-3)^2 - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2] \cup [5; +\infty) \\ \left(x - 3 + \sqrt{6}\right)\left(x - 3 - \sqrt{6}\right) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2] \cup [5; +\infty) \\ x \in [3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6}] \end{cases}$$

Prin metoda intervalelor ușor determinăm soluțiile ultimului sistem.

Răspuns. $x \in \left[3 - \sqrt{6}; 2\right] \cup \left[5; 3 + \sqrt{6}\right]$.

Exemplul 7. 14. Să rezolvăm inecuaţia

$$\frac{x^2 - 2x + 2^{|a|}}{x^2 - a^2} > 0.$$

Rezolvare. Observăm că $2^{|a|} \geq 1$ pentru orice a, iar semnul egalităţii are loc numai pentru $a = 0$.

Fie $a = 0$. Atunci inecuaţia iniţială are forma $\frac{(x-1)^2}{x^2} > 0$ care are loc pentru $x \neq 0$, $x \neq 1$. Să observăm că partea stîngă a inecuaţiei iniţiale este pară în raport cu a şi prin urmare este suficient de a o cerceta numai pentru $a > 0$.

Dacă $a \neq 0$, atunci $x^2 - 2x + 2^{|a|} > 0$ pentru orice x. De aceea inecuaţia iniţială în aşa caz este satisfăcută pentru acei x, pentru care $x^2 - a^2 > 0$, adică pentru $x < -|a|$ şi $x > |a|$.

Răspuns. Dacă $a = 0$, atunci $x \neq 0$, $x \neq 1$.

Dacă $a \neq 0$, atunci $x < -|a|$, $x > |a|$.

Exemplul 7. 15. Pentru ce valori a parametrului a inecuaţia

$$\frac{2 - ax - x^2}{1 - x + x^2} \leq 3$$

are loc pentru orice x?

Rezolvare. Observăm că $1 - x + x^2 > 0$ pentru orice x. Deci, inecuaţia iniţială este echivalentă cu inecuaţia $2 - ax - x^2 \leq 3(1 - x + x^2)$ sau $4x^2 + (a - 3)x + 1 \geq 0$. Ultima inecuaţie are loc pentru orice x, atunci cînd discriminantul $D = (a - 3)^2 - 16 \leq 0$, adică$|a - 3| \leq 4$;$-4 \leq a - 3 \leq 4$; $-1 \leq a \leq 7$.

Răspuns. $-1 \leq a \leq 7$.

Exemplul 7. 16. Să rezolvăm inecuaţia

$$\left|\frac{ax-5}{3} + x\right| < 3.$$

Rezolvare. După unele transformări elementare obţinem: $|(a + 3)x - 5| < 9 \Leftrightarrow -9 < (a + 3)x - 5 < 9 \Leftrightarrow -4 < (a + 3)x < 12$
.

Vom cerceta următoarele cazuri:$a + 3 > 0$, $a + 3 < 0$, $a = -3$.

1. Fie $a + 3 > 0$, atunci $x < \frac{14}{a+3}$ ori $x > \frac{-4}{a+3}$.
2. Fie $a + 3 < 0$, atunci $x > \frac{14}{a+3}$ ori $x < \frac{-4}{a+3}$.

Răspuns. Pentru $a < -3$, $\frac{14}{a+3} < x < \frac{-4}{a+3}$;
pentru $a = -3 x \in R$; pentru $a > -3$, $\frac{-4}{a+3} < x < \frac{14}{a+3}$.

Exercițiul 7. 17. Pentru toate valorile admisibile a parametrului a rezolvați inecuația $x + 2a > \sqrt{3ax + 4a^2}$.

Rezolvare.

$$x+2a>\sqrt{3ax+4a^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4ax+4a^2>3ax+4a^2\\ x+2a>0\\ 3ax+4a^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+a)>0\\ x+2a>0\\ a(3x+4a)\geq 0.\end{cases}$$

Pentru a rezolva ultimul sistem, este necesar să stabilim, în ce ordine pe axa numerică sunt situate numerele $-a,-\frac{4}{3}a,-2a$. Aceasta depinde de însăși parametrul a: $-a<-\frac{4}{3}a\Leftrightarrow a<0$. În mod analogic se obțin și celelalte rapoarte din care se vede, că ordinea acestor numere depinde numai de semnul lui a (vezi Fig. 40).

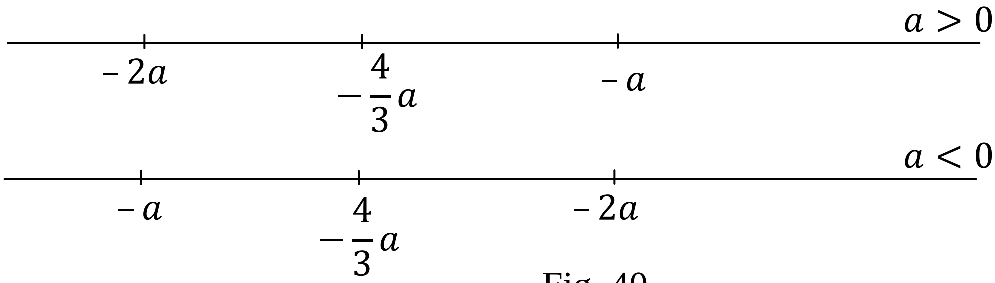


Fig. 40

În așa fel, $\begin{cases}x(x+a)>0\\ x+2a>0\\ a(3x+4a)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ x(x+a)>0\\ x+2a>0\\ x+\frac{4}{3}a\geq 0\end{cases}(1)\\ \begin{cases}a=0\\ x^2>0\\ x>0\end{cases}(2)\\ \begin{cases}a<0\\ x(x+a)>0\\ x+2a>0\\ x+\frac{4}{3}a\leq 0\end{cases}(3)\end{array}\right.$

Rezolvând separat fiecare din sistemele $(1)-(3)$, obținem:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{4}{3}a; -a\right) \cup (0; +\infty), \\ a > 0 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ x > 0' \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ a < 0 \end{cases}.$$

Răspuns. Pentru $a < 0, x \in \emptyset$;

pentru $a = 0, x \in (0; +\infty)$;

pentru $a > 0, x \in \left[-\frac{4}{3}a; -a\right) \cup (0; +\infty)$.

Exemplul 7. 18. Să rezolvăm inecuaţia

$$|x + 2| - |2x + 8| \geq a$$

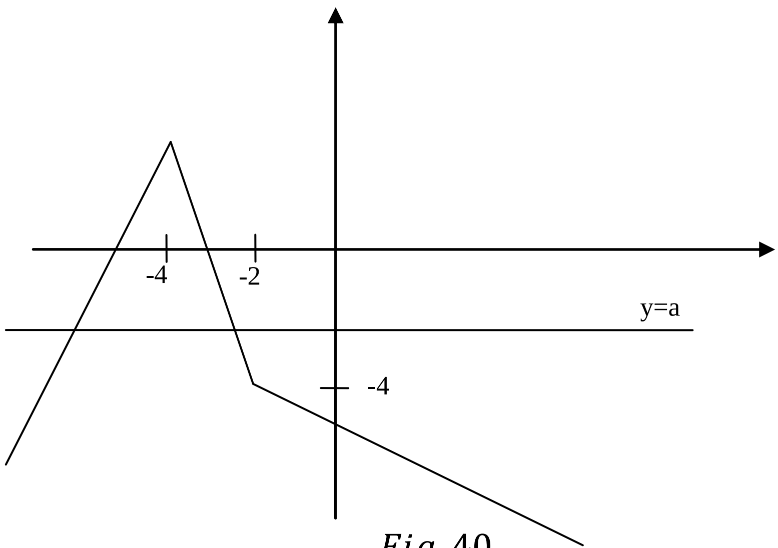
şi să determinăm valoarea parametrului „a”pentru care inecuaţia dată are o singură soluţie.

Rezolvare. Să construim graficul funcţiei:

$$y = |x + 2| - |2x + 8|.$$

Dacă $x = -4$, atunci $y = 2$. Dacă $x = -2$, atunci $y = -4$. Pentru $x < -4$,

$y = x + 6$. Pentru $-4 < x < -2$, $y = 3x - 10$, iar pentru $x > -2, y = -x - 6$.



$Fig. 40$

Cercetînd punctele de intersecţie a graficului acestei funcţii cu dreapta $y = a$ determinăm soluţiile problemei.

Răspuns. Pentru $a < -4$:$a - 6 \leq x \leq -a - 6$;
pentru $-4 \leq a \leq 2$: $a - 6 \leq x \leq \frac{a+10}{3}$;
pentru $a > 2$, inecuaţia n-are soluţii;
pentru $a = 2$ inecuaţia are o singură soluţie $x = -4$.

Metoda de bază la rezolvarea inecuaţiilor iraţionale este metoda reducerii inecuaţiei la un sistem echivalent de inecuaţii raţionale sau la o totalitate de astfel de sisteme.

Inecuaţia de forma

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}, n \in N$$

este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > f(x) \end{cases}.$$

Inecuaţia de forma

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}, n \in N$$

este echivalentă cu inecuaţia

$$f(x) < g(x).$$

Inecuaţia de forma

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x), n \in N$$

este echivalentă cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x). \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Inecuaţia de forma

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x), n \in N$$

Este echivalentă cu inecuaţia $f(x) > g^{2n+1}(x)$.

Exemplul 7. 19. Rezolvați inecuația $a\sqrt{x+1} < 1$.

Rezolvare. MVA: $x \geq -1$. Dacă $a < 0$, atunci inecuația este satisfăcută pentru orice x din MVA. Dacă $a > 0$, atunci $\sqrt{x+1} < \frac{1}{a}$ și având în vedere MVA obținem $-1 \leq x < -1 + \frac{1}{a^2}$.

Răspuns. $[-1; +\infty)$ pentru $a \leq 0$;

$\left(-1; -1 + \frac{1}{a^2}\right)$ pentru $a > 0$.

Exemplul 7. 20. Să rezolvăm inecuaţia

$$\sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a-\sqrt{x}} < 2$$

Rezolvare. Observăm că pentru $a < 0$ inecuaţia dată n-are soluţii. Observăm de asemenea că $0 \leq x \leq a^2$.

Ridicăm ambele părţi ale inecuaţiei iniţiale la pătrat şi obţinem:

$$\sqrt{a^2 - x} < 1 - a \quad (1).$$

Cercetăm două cazuri:

1. Fie $1 - a \leq 0$, adică $a \geq 1$. În acest caz inecuaţia n-are soluţii.
2. Fie $1 - a > 0$. Atunci ridicînd ambele părţi ale inecuaţei (1) la pătrat, obţinem:

$a^2 - x < (1-a)^2 \Leftrightarrow a^2 - x \leq 1 - 2a + a^2 \Leftrightarrow x > 2a - 1$.

Aşa cum pentru $a = \frac{1}{2}$ avem $2a - 1 = 0$, atunci avînd în vedere că $0 \leq x \leq a^2$, obţinem:

Răspuns. Pentru $a < 0$, $a \geq 1$, inecuaţia n-are soluţii;

pentru $0 \leq a < \frac{1}{2}$, $0 \leq x \leq a^2$;

pentru $\frac{1}{2} \leq a < 1$, $2a - 1 \leq x \leq a^2$.

Exemplul 7. 21. Să rezolvăm inecuaţia

$$\sqrt{x-a^2}+\sqrt{x}\geq 2a.$$

Rezolvare. Partea stîngă a inecuaţiei pentru orice $x \geq a^2$ este nenegativă. Prin urmare, dacă $a \leq 0$, atunci toate valorile din $[a^2;\ +\infty)$ sunt soluţii ale inecuaţiei date.

Fie $a > 0$. Atunci putem ridica la pătrat ambele părţi ale inecuaţiei iniţiale şi obţinem:

$x-a^2+2\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}+x \geq 4a^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{x-a^2} \geq 5a^2-2x.$

Din ultima inecuaţie se observă că toate valorile $x \geq \frac{5a^2}{2}$sunt soluţii, deoarece pentru aşa valori a variabilei x partea stîngă este mai mare ca zero, iar pentru dreaptă este mai mică sau egală cu zero.

Dacă însă $x < \frac{5a^2}{2}$, atunci ridicînd ambele părţi la pătrat obţinem: $x \geq \frac{25}{16}a^2$.

Răspuns. Pentru $a < 0$, $x \geq a^2$; pentru $a > 0$, $x > \frac{25}{16}a^2$.

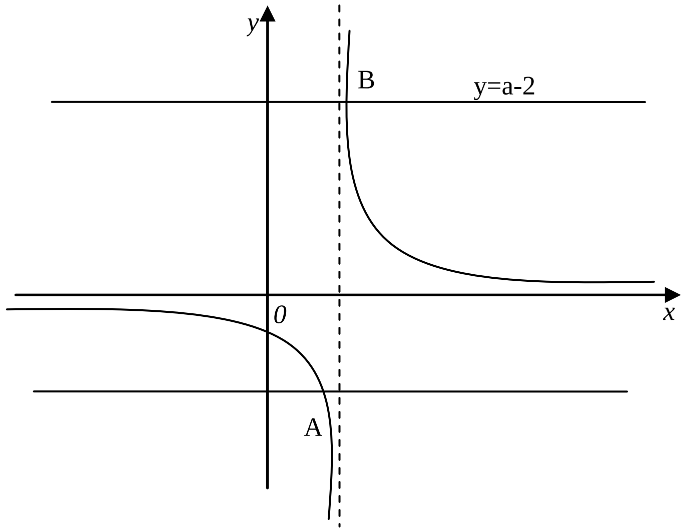
Exemplul 7. 22. Să rezolvăm inecuaţia

$\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1} \geq \frac{a}{\sqrt{x}}.$

Rezolvare. Observăm că mulţimea valorilor admisibile sunt $x \neq 1$, $x > 0$. După unele transformări elementare, obţinem:

$\frac{2\sqrt{x}}{x-1} \geq \frac{a}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} \geq a \Leftrightarrow \frac{2x-2+2}{x-1} \geq a \Leftrightarrow 2+\frac{2}{x-1} \geq a \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} \geq a-2$

Să cercetăm graficul funcţiei $y=\frac{2}{x-1}$ şi pentru diferite valori a parametrului a determinăm punctele de intersecţie a acestui grafic cu dreapta $y = a-2$ Fig.42.



$Fig. 42$

Cercetăm graficul funcţiei $y = \frac{2}{x-1}$ numai pentru $x > 0$, $x \neq 1$.

Prin calculul nemijlocit aflăm abscisele punctelor A şi B şi anume: $x = \frac{a}{a-2}$.

Cu ajutorul graficului determinăm soluţiile inecuaţiei.

Răspuns. Pentru $a < 0$: $0 < x \leq \frac{a}{a-2}$, $x > 1$;

pentru $0 \leq a \leq 2$: $x > 1$;

pentru $a > 2$: $1 < x \leq \frac{a}{a-2}$.

Exemplul 7. 23. Să determinăm valorile parametrului a pentru care sistemul

$$\begin{cases} y \geq (x-a)^2, \\ x \geq (y-a)^2. \end{cases}$$

are o singură soluţie.

Rezolvare. Pe planul de coordonate mulţimile de puncte, care determină soluţiile inecuaţiilor date reprezintă domeniile interioare ale parabolelor $y = (x-a)^2$ şi $x = (y-a)^2$. Aceste parabole sunt simetrice faţă de dreapta $y = x$, iar condiţiile problemei se satisfac, dacă parabolele se intersectă. În virtutea simetriei punctele de intersecţie a parabolelor şi punctul de tangenţă aparţin dreptei $y = x$. Prin urmare, pentru punctele de intersecţie avem: $(x-a)^2 = x$. În aşa fel, problema se reduce la determinarea valorilor parametrului a pentru care ecuaţia $(x-a)^2 = x$ are o singură soluţie. Transformăm această ecuaţie:

$$x^2 - 2ax + a^2 = x \Leftrightarrow x^2 - (2a+1)x + a^2 = 0.$$

Discriminantul ultimei ecuaţii $D = (2a+1)^2 - 4a^2 = 4a + 1$.

Rezolvăm ecuaţia $4a + 1 = 0$ şi determinăm $a = -\frac{1}{4}$.

Răspuns. $a = -\frac{1}{4}$.

Exemplul 7. 24. Să determinăm toate valorile parametrului a pentru fiecare din care inecuaţia

$$|x+a| + x^2 < 2$$

are măcar o rădăcină pozitivă.

Rezolvare. Cercetăm două cazuri:

Cazul I. Fie $x + a \geq 0$. Atunci inecuaţia dată are forma:

$$x^2 + x + a - 2 < 0.$$

1. Această inecuaţie are soluţii, dacă discriminantul $D = 1 - 4(a-2) > 0$, adică cînd $a < \frac{9}{4}$.

2. Inecuaţia dată va avea măcar o soluţie pozitivă, în cazul cînd rădăcina mai mare va fi pozitivă, adică cînd $\frac{-1+\sqrt{9-4a}}{2} > 0$; $\sqrt{9-4a} > 1$; $9 - 4a > 1$; $a < 2$.

3. Aşa cum $x + a \geq 0$, atunci $\frac{-1+\sqrt{9-4a}}{2} + a \geq 0$; $\sqrt{9-4a} \geq 1 - 2a$.

Evident, pentru $a \geq \frac{1}{2}$ ultima inecuaţie este satisfăcută.

Fie $a < \frac{1}{2}$. Atunci partea dreaptă este pozitivă şi ridicînd la pătrat, obţinem:

$$9 - 4a \geq 1 - 4a + 4a^2; 4a^2 \leq 8; a^2 \leq 2; -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}.$$

Acestor trei condiţii satisfac valorile $-\sqrt{2} \leq a < 2$.

Cazul II. Fie $x + a < 0$. Atunci inecuaţia iniţială are forma:

$$x^2 - x - (a + 2) < 0.$$

1. Această inecuaţie are soluţii dacă $D > 0$, adică $1 + 4(a + 2) > 0; a \geq -\frac{9}{4}$.
2. Va avea măcar o soluţie pozitivă cînd rădăcina mai mare va fi pozitivă, adică atunci cînd:

$$\frac{-1+\sqrt{9+4a}}{2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{9 + 4a} > -1 \Leftrightarrow a \geq -\frac{9}{4}.$$

3. Aşa cum $x + a < 0$, apoi

$$\frac{1 + \sqrt{9 + 4a}}{2} + a < 0 \Leftrightarrow \sqrt{9 - 4a} < -1 - 2a \Leftrightarrow a^2 > 2 \Leftrightarrow$$

$a \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Acestor trei condiţii satisface mulţimea $\left[-\frac{9}{4}; -\sqrt{2}\right)$.

Răspuns. $\left[-\frac{9}{4}; -\sqrt{2}\right)$.

Probleme pentru lucrul independent.

Rezolvaţi inecuaţia:

1. $a^2 + ax < 1 - x$.

Răspuns. $\emptyset$, pentru $a = -1$; $(-\infty; 1 - a)$, pentru $a > -1$; $(1 - a; +\infty)$, pentru $a < -1$.

2. $2x + 3(ax - 8) + \frac{x}{3} < 4\left(x + \frac{1}{2}\right) - 5$.

Răspuns. Pentru $a = \frac{5}{9}$, $x \in R$; pentru $a > \frac{5}{9}$, $x \in \left]-\infty; \frac{63}{9a-5}\right[$; pentru $a < \frac{5}{9}$, $x \in \left]\frac{63}{9a-5}; +\infty; \right[$.

3. $\frac{2ax+3}{5x-4a} < 4$.

Răspuns. Pentru $a = 10$, $x < 8$; pentru $a < 10$, $x < \frac{4a}{5}$, $x > \frac{3+16a}{20-2a}$;

pentru $a > 10$, $\frac{3+16a}{20-2a} < x < \frac{4a}{5}$.

4. $\frac{ax-1}{x-a} > 1$.

Răspuns. Pentru $a < 1$:$a < x < -1$;

pentru $a = -1$: $\emptyset$;

pentru$-1 < a < 1$:$-1 < x < a$;

pentru $a = 1$: $\emptyset$;

pentru $a > 1$: $x < -1$; $x > a$.

5. $ax^2 - 2ax - 3 < 0$

Răspuns. Pentru $a \le -3$: $x < 1 - \sqrt{1 + \frac{3}{a}}$, , $x > 1 + \sqrt{1 + \frac{3}{a}}$;

pentru $-3 < a \le 0$: $x \in R$; pentru $a > 0$: $1 - \sqrt{1 + \frac{3}{a}} < x < 1 + \sqrt{1 + \frac{3}{a}}$.

6. $-\frac{x}{a} > \frac{1}{x^3}$.

Răspuns. Pentru $a < 0$: $-(-a)^{\frac{1}{4}} < x < 0$, $x > -a^{\frac{1}{4}}$; pentru $a = 0$: $\emptyset$; pentru $a > 0$: $x < 0$.

7. $a - x > \left|1 - |x|\right|$.

Răspuns. Pentru $a \le -1$: $\emptyset$; pentru $-1 < a \le 1$: $x = \frac{a-1}{2}$;

pentru $a > 1$: $x < \frac{a+1}{2}$.

8. Pentru ce valori a parametrului a inecuaţia $\frac{x-2a-1}{x-a} < 0$ este satisfăcută pentru orice x din $[1; 2]$?

Răspuns. $\frac{1}{2} < a < 1$.

9. Pentru orice valoare a parametrului t să se rezolve inecuația $\frac{x}{x+t} > 1$.

Răspuns. Dacă $t < 0$, atunci $x \in (-a; +\infty)$; dacă $t = 0$, atunci $x \in \emptyset$, dacă $t > 0$, atunci $x \in (-\infty; a)$.

10. Pentru orice valoare a parametrului t să se rezolve inecuația $\frac{t}{x+t} > 1$.

Răspuns. Dacă $t < 0$, atunci $x \in (0; -t)$; dacă $t = 0$, atunci $x \in \emptyset$, dacă $t > 0$, atunci $x \in (-t; 0)$.

11. Aflați toate valorile parametrului a pentru care mulțimea soluțiilor inecuației $\frac{a}{x-a} > 0$ conține punctul $x = 1$.

Răspuns. $a \in (0; 1)$.

12. Pentru fiecare valoare a parametrului $b \leq 0$ rezolvați inecuația $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \geq b$.

13. Pentru fiecare valoare a parametrului a rezolvați inecuația $|x + 2a| \leq \frac{1}{x}$

Răspuns. Dacă $a < -1$, atunci
$x \in \left(0; -a - \sqrt{a^2 - 1}\right] \cup \left[-a + \sqrt{a^2 - 1}; -a + \sqrt{a^2 + 1}\,\right]$;
dacă $a \geq -1$, atunci $x \in \left(0; a + \sqrt{a^2 + 1}\,\right]$.

Răspuns. Dacă $b \leq -1$, atunci $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; dacă $-1 < b \leq 0$, atunci
$x \in (-\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}; -1] \cup [1; +\infty)$.

14. Pentru fiecare valoare a parametrului a rezolvați inecuația $\sqrt{a^2 - x^2} \geq 2 - a$.

Răspuns. Dacă $a \in (-\infty; 1)$, atunci $x \in \emptyset$; dacă $a \in [1; 2)$, atunci $x \in \left[-2\sqrt{a-1}; 2\sqrt{a-1}\right]$; dacă $a \in [2; +\infty)$, atunci $x \in [-a; a]$.

15. Pentru fiecare valoare a parametrului a rezolvați inecuația $a - 2 < (a-1)\sqrt{x+1}$.

16. Pentru ce valori a parametrului a inecuaţia $(x-3a)(x-a-3) < 0$ este satisfăcută pentru orice x din $[1; 3]$?

Răspuns. $0 < a < \frac{1}{3}$.

Rezolvaţi inecuaţiile:

17. $|x - 3a| - |x + a| < 2a$,

Răspuns. $(-\infty; 2a)$, dacă $a < 0$; $\emptyset$, dacă $a = 0$; $(0, +\infty)$, dacă $a > 0$;

18. $|x + 2a| < \frac{8a^2}{|x-2a|}$.

Răspuns. $\left(2\sqrt{3}a; 2a\right) \cup \left(2a;\ -2\sqrt{3}a\right)$, dacă $a < 0$; $\emptyset$, dacă $a = 0$; $\left(-2\sqrt{3}a; 2a\right) \cup \left(2a;\ 2\sqrt{3}a\right)$, dacă $a > 0$.

Pentru fiecare valoare a parametrului a rezolvați inecuația:

18. $2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$.

Răspuns. Dacă $a = 0, \emptyset$;

dacă $a \neq 0, -\frac{|a|}{\sqrt{5}} < x \leq |a|$.

19. $2\sqrt{x+a} > x + 1$.

Răspuns. $\emptyset$, dacă $a \leq 0$;

$1 - 2\sqrt{a} < x < 1 + 2\sqrt{a}$, dacă $0 < a \leq 1$;

$-a \leq x < 1 + 2\sqrt{a}$, dacă $a > 1$.

20. $\sqrt{1 - x^2} \geq 2x + a$.

Răspuns. Dacă $a < -2$, atunci $|x| \leq 1$;

dacă $|a| \leq 2$, atunci $-1 \leq x \leq \frac{-2a+\sqrt{5-a^2}}{5}$;

dacă $2 < a \leq \sqrt{5}$, atunci $\frac{-2a-\sqrt{5-a^2}}{5} \leq x \leq \frac{-2a+\sqrt{5-a^2}}{5}$;

dacă $a > \sqrt{5}$, atunci $\emptyset$.

21. $x + \sqrt{10x} \geq a - 4 + \sqrt{a + 9x - 4}$.

Răspuns. Dacă $a < 4$, $x \geq \frac{4-a}{9}$;

dacă $a = 4$, $x \geq 0$;

dacă $a > 4$, $x \geq a - 4$.

22. $x + \sqrt{8x} \geq 5 - a + \sqrt{5 + 7x - a}$.

Răspuns. Dacă $a < 5$, $x \geq 5 - a$;

dacă $a = 5$, $x \geq 0$;

dacă $a > 5$, $x \geq \frac{a-5}{7}$.

23.Pentru ce valori a parametrului a sistemul

$$\begin{cases} y \geq x^2 + a \\ x \geq y^2 + a \end{cases}$$

are o singură soluţie?

Răspuns. $a = \frac{1}{4}$.

24 Rezolvaţi sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a < 0 \\ x^2 + (a+3)x + 3a < 0 \end{cases}$$

Răspuns. Pentru $a < -3$, $-3 < x < 1$;

pentru $-3 < a < -1$, $a < x < 1$.

pentru$-1 \leq a < 0$, $a < x < -a$;

pentru $a \geq 0$, $\emptyset$.

25. $\begin{cases} ax > -1 \\ x + a > 0 \end{cases}$.

Răspuns. Pentru $a \leq -1$:$\emptyset$;

pentru $-1 < a < 0$: $-a < x < -\frac{1}{a}$;

pentru $a = 0$: $x > 0$;

pentru $0 < a \leq 1$: $x > -a$;

pentru $a > 1$: $x > -\frac{1}{a}$.

26. De aflat toate valorile x pentru care inecuația $(2c-6)x^2 + (32-10c)x - (8+c) < 0$ este satisfăcută pentru orice c din intervalul $(2; 4)$.

Răspuns. $x \in \left[2-\sqrt{10}; 1\right] \cup \left[5; 2+\sqrt{10}\right]$.

27. De aflat toate valorile parametrului a pentru care sistemul $\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$, se satisface măcar pentru o valoare a lui x.

Răspuns. $a \in (-\infty; 20]$.

§8. Inecuaţii şi sisteme de inecuaţii exponenţiale şi logaritmice

Exemplu 8. 1. Să rezolvăm inecuaţia

$$\frac{a^x}{a^x-1} > \frac{1+a^{-x}}{1-2a^{-x}}.$$

Rezolvare. Efectuăm următoarele transformări:

$$\frac{a^x}{a^x-1} - \frac{1+a^{-x}}{1-2a^{-x}} > 0;$$

$$\frac{a^x}{a^x-1} - \frac{a^x+1}{a^x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{a^{2x}-2a^x-a^{2x}+a^x-a^x+1}{(a^x-1)(a^x-2)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2a^x+1}{(a^x-1)(a^x-2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2\left(a^x-\frac{1}{2}\right)}{(a^x-1)(a^x-2)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^x-\frac{1}{2}}{(a^x-1)(a^x-2)} < 0.$$

Prin metoda intervalelor determinăm $a^x < \frac{1}{2}$ şi $1 < a^x < 2$
.

Cazul I. Fie $0 < a < 1$.

1. Din $a^x < \frac{1}{2}$ avem: $a^x < a^{\log_a \frac{1}{2}}$, adică $x > \log_a \frac{1}{2}$.
2. Din $1 < a^x < 2$ avem $a^0 < a^x < a^{\log_a 2}$, adică $\log_a 2 < x < 0$.

Cazul II. Fie $a > 1$.

1. Din $a^x < \frac{1}{2}$ avem: $a^x < a^{\log_a \frac{1}{2}}$, adică $x < \log_a \frac{1}{2}$.

Din $1 < a^x < 2$ avem $a^0 < a^x < a^{\log_a 2}$, adică $0 < x < \log_a 2$
.

Cazul III. Fie $a = 1$. Atunci inecuaţia iniţială are forma

$$\frac{1}{1-1} > \frac{2}{1-2}$$

şi deci n-are soluţii.

Răspuns. Pentru $a \leq 0$ problema nu-i determinată;

pentru $0 < a < 1$: $\log_a 2 < x < 0$, $x > \log_a \frac{1}{2}$;

pentru $a = 1$:$\emptyset$;

pentru $a > 1$: $x < \log_a \frac{1}{2}$, $0 < x < \log_a 2$.

Exemplul 8. 2. Să rezolvăm inecuaţia

$$a^{x+2} + 8a^{x-1} - \frac{4}{a} > a - 2.$$

Rezolvare. Trecem $-\frac{4}{a}$ în partea dreaptă şi scoatem în partea stîngă a^x în afara parantezelor şi obţinem:

$$a^x(a^2 + 8a^{-1}) > \frac{4}{a} + a - 2.$$

Deoarece $a > 0$, atunci $a^2 + 8a^{-1} > 0$ şi prin urmare,

$a^x > \left(\frac{4}{a} + a - 2\right):(a^2 + 8a^{-1}) \Leftrightarrow a^x > \frac{4+a^2-2a}{a} : \frac{a^3+8}{a} \Leftrightarrow a^x > \frac{4+a^2-2a}{a} \cdot \frac{a}{(a+2)(a^2-2a+4)} \Leftrightarrow a^x > (a+2)^{-1} \Leftrightarrow a^x > a^{-\log_a(a+2)}$

Cazul I. Fie $0 < a < 1$. Atunci $x < -\log_a(a+2)$.

Cazul II. Fie $a > 1$. Atunci $x > -\log_a(a+2)$.

Cazul III. Fie $a = 1$. Întroducem $a = 1$ în inecuaţia iniţială şi obţinem

$1 + 8 - 4 > 1 - 2$, care este justă peste tot.

Răspuns. Pentru $a \leq 0$: problema nu-i determinată;

pentru $0 < a < 1$: $x < -\log_a(a+2)$;

pentru $a = 1$: $x \in R$;

pentru $a > 1$: $x > -\log_a(a+2)$.

Exemplul 8. 3. În dependență de valorile parametrului a rezolvați inecuația $a^{x+2} - 8a^{x-1} - \frac{4}{a} > a + 2$.

Rezolvare. Valorile admisibile a parametrului sunt $a > 0$. Transformăm inecuația, folosind proprietățile funcției exponențiale:

$$a^x\left(a^2 - \frac{8}{a}\right) > a + \frac{4}{a} + 2;\ a^x \cdot \frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{a} > \frac{a^2+2a+4}{a}.$$

Așa cum $a > 0$ și trinomul pătrat $a^2 + 2a + 4 > 0$ pentru toate valorile parametrului a, atunci după simplificare obținem inecuația $a^x(a-2) > 1$.

Vom cerceta două cazuri:

1) $a > 2;\ a^x > \frac{1}{a-2}$. Funcția exponențială cu baza $a > 2$ este monoton crescătoare și prin urmare $x > -\log_a(a-2)$.

2) Prin substituire ne convingem că pentru $a = 2$ și $a = 1$ inecuația n-are rădăcini.

Răspuns. $\emptyset$, dacă $a \leq 2$;
$x > -\log_a(a-2)$, dacă $a > 2$.

Exemplul 8. 4. În dependență de valorile parametrului a rezolvați inecuația $a^2 - 9^{x+1} - 8a \cdot 3^x > 0$.

Rezolvare. Facem substituția $3^x = t$.

În rezultat obținem inecuația $9t^2 + 8at - a^2 < 0$, care are rădăcinile $t_1 = -a, t_2 = \frac{a}{9}$.

Cercetăm cazurile:

1) Dacă $a > 0$, atunci $t_1 < 0 < t_2$ și soluția inecuației pătrate reprezintă intervalul $-a < t < \frac{a}{9}$. Deoarece $t > 0$ obținem inecuația $3^x < \frac{a}{9}$, de unde $x < \log_3 a - 2$;

2) Dacă $a = 0$, atunci inecuația inițială are forma $9^{x+1} < 0$, ceea ce este imposibil;

3) Dacă $a < 0$, atunci $t_2 < 0 < t_1$ și soluția inecuației pătrate este intervalul $\frac{a}{9} < t < -a$. Deoarece $t = 3^x > 0$ rezultă că $3^x < -a$. Prin urmare, $x < \log_3(-a)$.

Răspuns. Dacă $a < 0$, $x < \log_3(-a)$;
dacă $a = 0$, $\emptyset$;
dacă $a > 0$, $x < \log_3 a - 2$.

Exemplul 8. 5. În dependență de valorile parametrului a rezolvați inecuația $4^{x+1} - 3 \cdot 2^{x+1} \geq a^2 + 3a$.

Rezolvare. Substituind $2^{x+1} = t$, obținem inecuația pătrată $t^2 - 3t - (a^2 + 3a) \geq 0$, care are rădăcini numerele $t_1 = -a$, $t_2 = a + 3$.

Să notăm pe axa numerică punctele:
$t_1 = -a = 0$, $t_2 = a + 3 = 0$, și $D = (2a + 3)^2 = 0$. (Fig. 43)

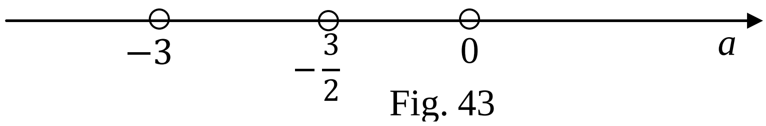


Fig. 43

1) Pentru $a \geq 0$, atunci $t_1 \leq 0 < t_2$ și soluția inecuației pătrate reprezintă totalitatea $\left[\begin{array}{l} 2^{x+1} < -a, \\ 2^{x+1} > a+3. \end{array}\right.$ Evident, prima inecuație n-are soluții, iar a doua inecuație are soluția $x > \log_2(a + 3) - 1$.

2) Pentru $-\frac{3}{2} < a < 0$ rădăcinile inecuației pătrate satisfac condiției $0 < t_1 < t_2$ și soluția inecuației inițiale este totalitatea $\left[\begin{array}{l} x < \log_2(-a) - 1, \\ x > \log_2(a+3) - 1. \end{array}\right.$

3) Pentru $a = -\frac{3}{2}$ primim $t_1 = t_2 = \frac{3}{2}$, și prin urmare $x \in R$.

4) Pentru $-3 < a < -\frac{3}{2}$ rădăcinile inecuației pătrate satisfac condiției $0 < t_2 < t_1$ și soluția inecuației inițiale reprezintă totalitatea $\left[\begin{array}{l} x<\log_2(a+3)-1, \\ x>\log_2(-a)-1 \end{array}\right.$.

5) Pentru $a \le -3$, avem $t_2 \le 0 < t_1$ și analogic primului caz avem soluția $x > \log_2(-a) - 1$.

Răspuns. Dacă $a \le -3$, $x \in (\log_2(-a) - 1\,; +\infty)$;

dacă $-3 < a < -\frac{3}{2}$:

$x \in (-\infty; \log_2(a+3) - 1) \cup (\log_2(-a) - 1\,; +\infty)$;

dacă $a = -\frac{3}{2}$, $x \in R$;

dacă $-3 < a < -\frac{3}{2}$:

$x \in (-\infty; \log_2(-a) - 1) \cup (\log_2(a+3) - 1\,; +\infty)$;

dacă $a \ge 0$, $x \in (\log_2(a+3) - 1\,; +\infty)$.

Exemplu 8. 6. Să rezolvăm inecuaţia

$$\frac{3\log_a x + 6}{\log_a^2 x + 2} > 1.$$

Rezolvare. Inecuaţia dată este echivalentă cu inecuaţia

$$\frac{3\log_a x + 6 - \log_a^2 x - 2}{\log_a^2 x + 2} > 0.$$

Aşa cum $\log_a^2 x + 2 > 0$, atunci inecuaţia dată este echivalentă cu inecuaţia $3log_a x + 4 - log_a^2 x > 0 \Leftrightarrow log_a^2 x - 3log_a x - 4 < 0$. Din ultima inecuaţie, obţinem: $(\log_a x + 1)(\log_a x - 4) < 0$, adică $-1 < \log_a x < 4$.

Cazul I. Fie $0 < a < 1$. Atunci inecuaţia dată este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} \log_a x > -1 \\ \log_a x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a x > \log_a \frac{1}{a} \\ \log_a x < \log_a a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{a} \\ x > a^4 \end{cases}$ sau $a^4 < x < \frac{1}{a}$.

Cazul II. Fie $a > 1$. Judecînd analogic, obţinem $\frac{1}{a} < x < a^4$.

Cazul III. Fie $a = 1$. Inecuaţia n-are soluţii.

Răspuns. Pentru $a \leq 0$: $\emptyset$;

pentru $0 < a < 1$: $a^4 < x < \frac{1}{a}$;

pentru $a = 1$: $\emptyset$;

pentru $a > 1$: $\frac{1}{a} < x < a^4$.

Exemplu 8. 7. Să rezolvăm inecuaţia

$$\log_a(x^2 + x + 2) < \log_a(2x^2 - 18),$$

dacă se ştie că $x = -3{,}5$ este soluţie.

Rezolvare. Introducem $x = -3{,}5$ în inecuaţie şi obţinem:

$$\log_a(12{,}25 - 3{,}5 + 2) < \log_a(2 \cdot 12{,}25 - 18);$$

$$\log_a 10{,}72 < \log_a 6{,}5.$$

Prin urmare, $0 < a < 1$. Atunci din inecuaţia iniţială avem:

$$x^2 + x + 2 > 2x^2 - 18 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 < 0 \Leftrightarrow$$
$$(x + 4)(x - 5) < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 5$$

Determinăm domeniul de definiţie pentru x:

$$\begin{cases} x^2 + x + 2 > 0 \\ 2x^2 - 18 > 0 \end{cases}.$$

Observăm că $x^2 + x + 2 > 0$ pentru orice $x \in R$. Prin urmare, domeniul de definiţie pentru x se determină de inecuaţia $2x^2 - 18 > 0$; $x^2 > 9$, adică $x < -3$ şi $x > 3$.

Răspuns. $-4 < x < -3$, $3 < x < 5$.

Exemplu 8. 8. Să rezolvăm inecuaţia

$$a^{\frac{2x+1}{x+6}} \leq a^{\frac{4x+3}{x+6}}.$$

Rezolvare. Evident, $x \neq -6$. Dacă $a > 1$ şi $x \neq -6$, atunci inecuaţia dată este echivalentă cu inecuaţia $\frac{2x+1}{x+6} \leq \frac{4x+3}{x+6}$, care se aduce la forma $(x+1)(x+6) \geq 0$. Prin metoda intervalelor determinăm că $x < -6$ sau $x \geq -1$.

Dacă însă $0 < a < 1$, $x \neq -6$, atunci inecuaţia dată este echivalentă cu inecuaţia $\frac{2x+1}{x+6} \geq \frac{4x+3}{x+6}$. Rezolvînd această inecuaţie, obţinem: $-6 < x \leq -1$. Pentru $a = 0$ inecuaţia iniţială este justă dacă $\frac{2x+1}{x+6} > 0$ şi $\frac{4x+3}{x+6} > 0$. Rezolvînd sistemul format din aceste două inecuaţii primim: $x < -6$ sau $x > -\frac{3}{4}$.

Dacă $a < 0$, atunci inecuaţia iniţială poate avea loc numai atunci cînd exponenţii sunt numere întregi.

Dacă $\frac{2x+1}{x+6} = m$ şi $\frac{4x+3}{x+6} = n$, atunci $x = \frac{6m-1}{2-m} = \frac{2n-3}{4-n}$, de unde $24m + n - 4 = 3m + 12n - 6$, adică $21m - 11n + 2 = 0$. Determinăm valorile întregi pentru m şi n care satisfac egalităţii $21m - 11n + 2 = 0$. O soluţie particulară este $m_0 = 2$, $n_0 = 4$. Celelalte soluţii au forma $m = 2 + 11t$, $n = 2 + 21t$, unde t este număr întreg.

Să determinăm pentru ce valori m şi n are loc relaţia $a^m \leq a^n$.

Dacă $-1 < a < 0$, atunci inegalitatea dată este justă în următoarele cazuri:

1. n-par, m-sau par, sau impar şi $m \geq n$;
2. m şi n sunt impare şi $m \leq n$.

Pentru $a = -1$ inecuaţia dată este satisfăcută dacă n este par sau dacă m este impar.

Pentru $a < -1$ inegalitatea este justă în următoarele cazuri:

1. n este par, m este par sau impar şi $m \leq n$;
2. m, n sunt impare şi $m \geq n$.

În toate aceste cazuri este satisfăcută inecuaţia iniţială.

Observaţie. Metodele de rezolvare a ecuaţiilor de forma $ax + by = c$ în numere întregi se strudiază în teoria numerelor şi se bazează pe următoarea afirmaţie: Cel mai mare divizor comun a numerelor naturale a şi b poate fi scris sub forma $ax + by$, unde x şi y sunt numere întregi.

Exemplul 8. 9. Să rezolvăm inecuaţia

$$\log_{a^2}(x^2 + 2x) < 1.$$

Rezolvare. Din definiţia logaritmului urmează:

$$a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1 \text{ şi } x^2 + 2x > 0.$$

Vom cerceta două cazuri: $|a| > 1$şi $0 < |a| < 1$.

Cazul I. Fie $|a| > 1$. Atunci avem următorul sistem de inecuaţii:

$$\begin{cases} x^2 + 2x < a^2 \\ x^2 + 2x > 0 \end{cases}$$

Prima inecuaţie are loc pe intervalul $\left(-1 - \sqrt{1 - a^2};\ -1 + \sqrt{1 + a^2}\right)$, iar a doua pe semidreptele $x < -2$ şi $x > 0$. Prin urmare soluţiile sistemului sunt $\left(-1 - \sqrt{1 + a^2};\ -2\right)$ şi $\left(0;\ -1 + \sqrt{1 + a^2}\right)$.

Cazul II. Fie acum $0 < a < 1$. În acest caz avem sistemul de inecuaţii$\begin{cases} x^2 + 2x > a^2 \\ x^2 + 2x > 0 \end{cases}$.

Deoarece $a^2 > 0$, este suficient să cercetăm prima inecuaţie. Soluţiile acestei inecuaţii reprezintă reuniunea semidreptelor deschise $\left(-\infty;\ -1 - \sqrt{1 + a^2}\right)$ şi $\left(-1 + \sqrt{1 + a^2};\ +\infty\right)$.

Răspuns. Dacă $|a| > 1$, atunci $x \in \left(-1 - \sqrt{1 + a^2};\ -2\right) \cup \left(0;\ -1 + \sqrt{1 + a^2}\right)$;

dacă $|a| < 1,$ $a \neq 0,$ atunci $x \in \left(-\infty;\ -1-\sqrt{1+a^2}\right) \cup \left(-1+\sqrt{1+a^2};\ +\infty\right);$ dacă $a = 0, -1, 1$ inecuaţia n-are soluţii.

Exemplul 8. 10. Pentru ce valori a parametrului a inecuaţia

$$\log_{a(a+1)}(|x| + 4) \geq 1$$

este satisfăcută pentru orice x real?

Rezolvare. Să presupunem că numărul a satisface condiţiei problemei, adică inecuaţia dată este satisfăcută pentru orice x real . Atunci, în particular, ea se satisface şi pentru $x = 0$, dar aceasta înseamnă că numărul a satisface condiţia

$$\log_{a(a+1)} 4 > 1 \qquad (1).$$

Din (1) urmează că $a(a+1) > 1$ (în caz contrar am avea $\log_{a(a+1)} 4 < 0$), dar atunci din (1) avem $a(a+1) < 4$.

Prin urmare, orice număr a ce satisface condiţiei problemei este soluţie a sistemului $\begin{cases} a(a+1) > 1 \\ a(a+1) < 4 \end{cases} \qquad (2).$

Invers, dacă numărul a satisface sistemului (2), atunci pentru orice x avem că $\log_{a(a+1)}(|x| + 4) \geq \log_{a(a+1)} 4 > 1$ şi prin urmare, inecuaţia dată este satisfăcută pentru orice x, adică aşa număr a satisface condiţiei problemei.

Aşa dar, condiţiei problemei satisfac soluţiile sistemului (2) şi numai ele.

Rezolvînd sistemul (2) prin metoda intervalelor, obţinem:

$$-\frac{1+\sqrt{17}}{2} < a < -\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} < a < -\frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

Răspuns. $-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right) < a < \frac{1}{1}\left(-1+\sqrt{5}\right),$
$\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) < a < \frac{1}{2}\left(\sqrt{17}-1\right).$

Exemplul 8. 11. De determinat toate valorile parametrului a, pentru care inecuația

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geq 0$$

are o singură rădăcină.

Rezolvare: Să notăm $\sqrt{x^2+ax+5}=y, (y\geq 0)$ și trecem la logaritmi în baza 5, obținem:

$$\frac{-\log_5(y+1)\log_5(y^2+1)+\log_5 3}{\log_5 a}\geq 0.$$

Funcția de argument y din numărător este monoton descrescătoare. Să observăm că pentru $y=2$ această funcție primește valoarea 0. Evident, $a>0, a\neq 1$.

Dacă $0<a<1$, atunci soluțiile inecuației în raport cu y constituie mulțimea $y\geq 2$ și prin urmare, inecuația inițială nu poate avea o soluție unică, deoarece inecuația $\sqrt{x^2+ax+5}\geq 2$ are o mulțime de soluții pentru orice $a>0$.

Așadar, $a>1$ și soluția în raport cu y va fi $0\leq y\leq 2$. Avînd în vedere că $y=\sqrt{x^2+ax+5}$, obținem:

$$0\leq x^2+ax+5\leq 2.$$

Pentru ca să existe o singură valoare pentru x, astfel încît să se satisfacă ultimile inecuații, este necesar și suficient, ca valoarea cea mai mică a trinomului x^2+ax+5 să fie egală cu 4, adică $5-\frac{a^2}{4}=4$.

Răspuns $a=2$.

Exemplu 8.12. Pentru ce valori ale parametrului a inecuația $\sqrt{\frac{x}{a}-3}*\log_3(x-x^2+21)>0$ are exact două rădăcini întregi?

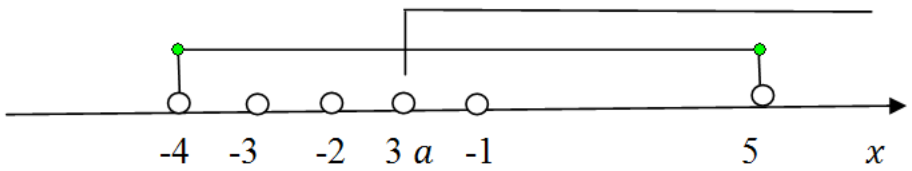
Rezolvare. Soluţiile inecuaţiei date sunt toate valorile x, care satisfac sistemului

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - 3 > 0, \\ x - x^2 + 21 > 1. \end{cases}$$

Din inecuaţia a doua a acestui sistem găsim $x \in (-4; 5)$.

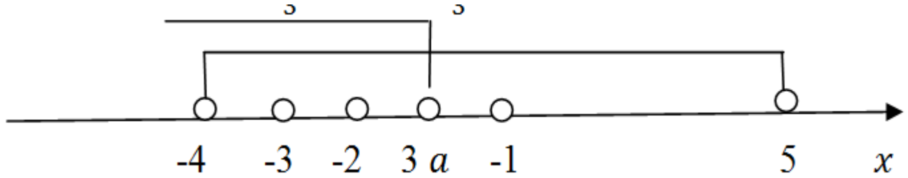
Să cercetăm 2 cazuri:

1) $a > 0$, în acest caz din prima inecuaţie a sistemului, avem $x > 3a$. Din condiţia problemei vom avea numai două rădăcini întregi, dacă $2 \leq 3a < 3$ sau $\frac{2}{3} \leq a < 3$ (Fig. 44).



$Fig. 44$

2) $a < 0$. În acest caz $x < 3a$ şi din Fig.45 urmează că condiţiei problemei satisfac acele valori ale parametrului, pentru care $-2 < 3a \leq -1$ sau $-\frac{2}{3} < a \leq -\frac{1}{3}$.



$Fig. 45$

Răspuns. $a \in (-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1)$.

Exemplu 8. 13. Pentru ce valori a parametrului a inecuaţia $log_{x-a}(x^2 - ax) \leq 2$ este satisfăcută pentru orce $x \in [2; 3]$?

Rezolvare. Să aflăm la început, pentru ce valori a parametrului a segmentul $[2;3]$ aparţine domeniului de valori admisibile, care se determină de următorul sistem:

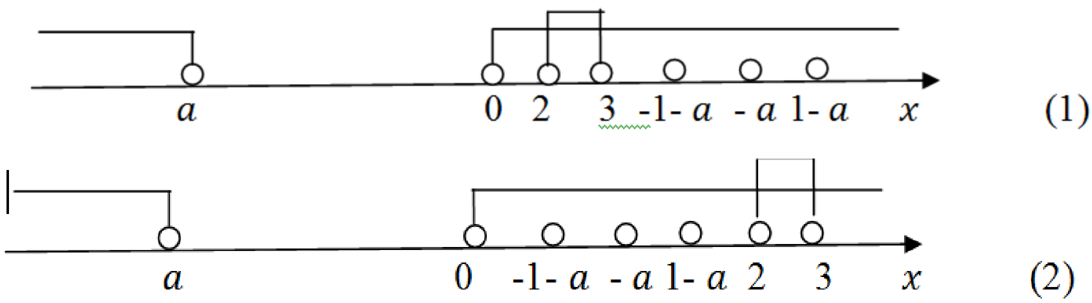
$$\begin{cases} x^2 - ax > 0, \\ |x+a| \neq 1, \\ x \neq -a. \end{cases}$$

Dacă $a \geq 0$, atunci segmentul $[2;3]$ aparţine domeniului de valori admisibile pentru $0 \leq a < 2$ (Fig. 46)

Fig. 46

Pentru aОшибка! Закладка не определена.< 0 sunt posibile două cazuri (Fig. 47) :în primul obţinem condiţia: $\begin{cases} a < 0 \\ 3 < -1-a \end{cases}$, adică a<4;

iar în cel de al doilea $\begin{cases} a < 0 \\ 1-a < 2 \end{cases}$

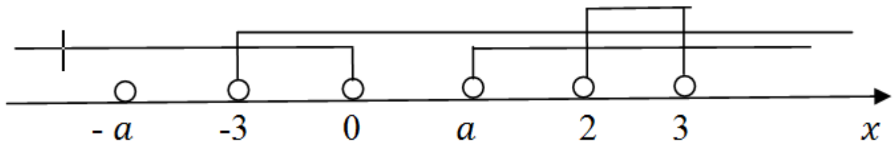


$Fig.47$

Să rezolvăm separat pe fiecare domeniu.

1) Fie $\begin{cases} 0 \leq a \leq 2 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$. În acest caz $|x+a| > 1$, funcţia logaritmică este crescătoare, şi prin urmare, inecuaţia iniţială este

echivalentă cu inecuaţia $x^2 - ax \leq (x+a)^2$, de unde avem că $x \geq -\frac{a}{3}$.

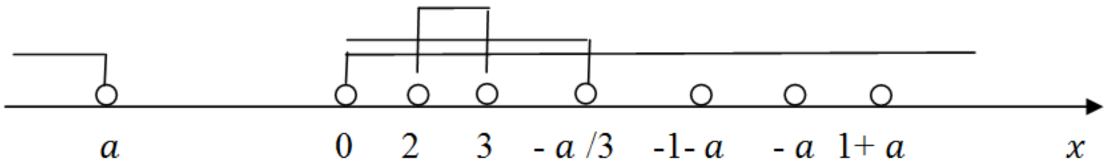


$Fig. 48$

pentrutoate valorile $a \in [0;2)$ segmentul $[2;3]$ este soluţie a inecuaţiei.

2) Fie $\begin{cases} a < -4 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$, în acest caz iarăşi $|x+a| > 1$, şi analogic cazului precedent obţinem inecuaţia echivalentă $x^2 - ax \leq (x+a)^2$ sau $3ax \geq -a^2$.

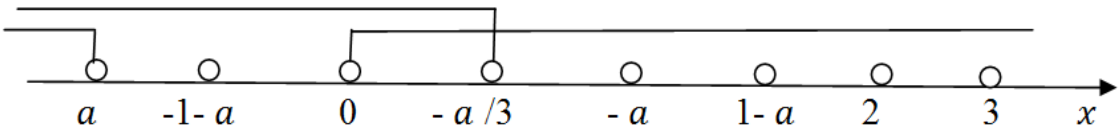
Spre deosebire de cazul precedet , aici valorile parametrului a sunt negative şi deaceia soluţiile sunt toate valorile $x \leq -\frac{a}{3}$. Să arătăm în Fig.49 condiţiile, pentru care intersecţia soluţiei găsite cu mulţimea valorilor admisibile va conţine segmentul $[2;3]$.



$Fig. 49$

Din Fig.49 urmează , că astfel de condiţii se determină de sistemul $\begin{cases} -\frac{a}{3} \geq 3 \\ 3 < -1 - a \end{cases}$, adică $a \leq -9$.

3)Pentru $-1 < a < 0$ analogic cazului 2) obţinem soluţia $x \leq -\frac{a}{3}$. Intersectînd cu MVA, ne convingem, ca segmentul $[2;3]$ nu va fi soluţie pentru astfel de valori a parametrului a. (Fig. 50).



$Fig.50$

Răspuns: $a \in (-\infty; -9) \cup [0; 2)$.

Exemplul 8. 14. Pentru ce valori a parametrului a suma $log_a\left(\frac{3+2x^2}{1+x^2}\right)$ și $log_a\left(\frac{5+4x^2}{1+x^2}\right)$ este mai mare decît 1 pentru orce valoare a lui x?

Rezolvare. Să cercetăm suma logaritmilor:

$$S = log_a\left(\frac{3+2x^2}{1+x^2}\right) + log_a\left(\frac{5+4x^2}{1+x^2}\right) = log_a\left(2+\frac{1}{1+x^2}\right) + log_a\left(4+\frac{1}{1+x^2}\right)$$

.

Această sumă are sens pentru orce x. Să înlocuim $t = \frac{1}{1+x^2}$, atunci evident, $0 < t \leq 1$.

Alcătuim inecuația $log_a(2+t) + log_a(4+t) > 1$ și găsim valorile parametrului pentru care inecuația se satisface pentru toate valorile $t \epsilon (0; 1]$.

1)Dacă $a > 1$, atunci funția logaritmică este crescătoare. Scriem inecuația echivalentă $(2+t)(4+t) > a$ sau $t^2 + 6t + 8 - -a > 0$. Abscisa vîrfului parabolei $f(t) = t^2 + 6t + 8 - a$, este $t_v = -3$, ramurile parabolei sunt îndreptate în sus și prin urmare, pe intervalul $(0; 1]$ funcția $f(t)$ este monoton crescătoare. Inecuația $f(t) > 0$ are loc atunci și numai atunci , cînd $f(0) \geq 0$, de unde $1 < a \leq 8$.

2)Dacă $0 < a < 1$ inecuația inițială este echivalentă cu următoarea:

$$f(t) = t^2 + 6t + 8 - a < 0.$$

Analogic cazului precedent, funcția $f(t)$ este monoton crescătoare pe mulțimea $(0; 1]$ și deaceia sete necesar și suficientsă se satisfacă condiția $f(t) < 0$, adică $1 + 6 + 8 - -a < 0$, $a > 15$. Răspunsul obținut n-are intersecții cu condiția $0 < a < 1$.

Răspuns. $a \in (1; 8]$.

Exemplul. 8. 15. Pentru ce valori ale parametrului a inecuația

$$log_{\frac{-2a-13}{5}} \frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x - a - 4}{5} > 0$$

are loc pentru orice valoare a variabilei x?

Rezolvare. Să cercetăm două cazuri :

1. Dacă $\frac{-2a-13}{5} > 1$, adică $a < -9$, atunci funcția logaritmică este crescătoare și inecuația dată este echivalentă cu următoarea:

$$\frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x - a - 4}{5} > 1.$$

Să transformăm: $\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x > \frac{a+9}{2}$; $\sin(x - \frac{\pi}{3}) > \frac{a+9}{2}$. Așa cum domeniul valorilor sinusului este segmental $[-1; 1]$, ultima inecuație va fi satisfăcută pentru orice x, dacă expresia $\frac{a+9}{2}$ va fi mai mică decît -1, sau $a < -11$.

2. Dacă $0 < \frac{-2a-13}{5} < 1$ sau $-9 < a < -\frac{13}{2}$, atunci ținînd cont că funcția logaritmică este descrescătoare , obținem inecuația: $0 < \frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x - a - 4}{5} < 1$, care după unele transformări, obținem:

$$\frac{a+4}{2} < \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{a+9}{2}.$$

Judecînd analogic ca în cazul 1), obținem sistemul $\begin{cases} \frac{a+4}{2} < -1, \\ \frac{a+9}{2} > 1 \end{cases}$

de unde $a\epsilon(-7; 6)$, care în intersecție cu condiția cazului 2) ne dă intervalul $a\epsilon(-7; -\frac{13}{2})$. Reuniunea soluţiilor primite în două cazuri și constitue răspunsul.

Răspuns: $a\epsilon(-\infty; -11) \cup (-7; -\frac{13}{2})$.

Exemplul 8.16 De aflat toate valorile x pentru care egalitatea $2log_{2+a^2}\left(4-\sqrt{7+2x}\right) = log_{2+a^2x^2}(4-3x)$ este satisfăcută pentru orice valoarea a parametrului a.

Rezolvare. Să presupunem că $a = 0$. Atunci ecuaţia iniţială are forma

$$2log_2\left(4-\sqrt{7+2x}\right) = log_2(4-3x).$$

Efectuînd potenţierea, primim ecuaţia $\left(4-\sqrt{\sqrt{7+2x}}\right)^2 = 4-$ $-3x$, $23+2x--8\sqrt{7+2x} = 4-3x$, $19+5x = 8\sqrt{7+2x}$.

Ridicăm ultima ecuaţie la puterea a doua şi obţinem ecuaţia

$$25x^2+62x-87 = 0.$$

Rădăcinile ultimei ecuaţii sunt $x = 1$ şi $x = -\frac{87}{25}$.

În aşa fel, valorile x căutate se găsesc printre aceste două valori. Să facem verificarea. Dacă $x = 1$, atunci vom avea $2log_{2+a^2}1 = log_{2+a^2}1$, $0 = 0$, ceea ce înseamnă că $x = 1$ satisface ecuaţiei pentru orice valoare a parametrului a.

Dacă $x = -\frac{87}{25}$, atunci $2log_{2+a^2}\frac{19}{5} = log_{2+a^2\left(\frac{87}{25}\right)^2}\frac{361}{25}$,

$log_{2+a^2}\frac{19}{5} = log_{2+a^2\left(\frac{87}{25}\right)^2}\frac{19}{5}$.

Evident, dacă $a \neq 0$, atunci partea stîngă nu este egală cu partea dreaptă.

Răspuns. $x = 1$.

Probleme pentru lucrul independent.

Să se rezolve inecuaţiile

1. $m^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - m \cdot 2^{x+1} > 0$.

Răspuns. Pentru $m > 0$, $x < \log_2 a - 2$; pentru $m < 0$, $x < \log_2(-m) - 1$; pentru $m = 0$, $\emptyset$.

2. $\frac{1+a^{-x}}{1+2\cdot a^{-x}} - \frac{a^x}{a^x-1} < 0$.

Răspuns. Pentru $a > 1$, $x < \log_a 0{,}5$, $0 \leq x < \log_a 2$; pentru $0 < a < 1$, $\log_a 2 < x < 0$, $x > \log_a 0{,}5$.

3. $\sqrt{2 - m^{x-3}} < m^{x-3}$.

Răspuns. Pentru $0 < m < 1$, $3 + \log_m 2 \leq x < 3$; pentru $m > 1$, $3 < x \leq 3 + \log_m 2$.

4. $4 + \frac{1}{\log_x a} > \frac{16}{\log_a x - 2}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Răspuns. Pentru $0 < a < 1$, $x \in (0;\ a^4) \cup (a^2;\ a^{-6})\backslash\{1\}$; pentru $a > 1$, $x \in (0;\ a^{-6})\backslash\{1\} \cup (a^4;\ +\infty)$.

5. $\frac{2\log_{-x} a}{1+\log_{-x} a} < 1 - \frac{1}{2-\log_a(-x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Răspuns. Pentru $0 < a < 1$, $x \in (-\infty;\ -a^{-1}) \cup (-a^2; 0)$; pentru $a > 1$, $x \in (-\infty;\ -a^2) \cup (-a^{-1}; 0)$.

6. $x^{\log_a x+1} > a^2 x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Răspuns. Pentru $0 < a < 1$, $x \in \left(a^{\sqrt{2}};\ a^{-\sqrt{2}}\right)$; pentru $a > 1$, $x \in \left(0;\ a^{-\sqrt{2}}\right) \cup \left(a^{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$.

7. $\frac{3}{\log_a(2a^2x)} + \log_{2ax} a + 2\log_{2x} a > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Răspuns.

pentru $0 < a < 1$, $x \in \left(0;\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2\sqrt{a}};\ \frac{1}{2a}\right) \cup \left(\frac{1}{2a^3\sqrt{a}};\ \frac{1}{2a^2}\right)$;

pentru $a > 1$, $x \in \left(\frac{1}{2a^2}; \frac{1}{2a^3\sqrt{a}}\right) \cup \left(\frac{1}{2a}; \frac{1}{2\sqrt{a}}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

8. Pentru care valori a parametrului t inecuaţia $\log_{\frac{1}{t+1}}(x^2 + 2|t|) > 0$ este satisfăcută pentru orice $x \in R$?

Răspuns. $-1 < t < -\frac{1}{2}$.

9. Determinaţi valorile pentru $x < 1$ care satisfac inecuaţia $\log_{\frac{x(a+1)}{2}}\left(\frac{ax^2}{9} + 1\right) < 1$ pentru orice $\frac{1}{2} < a < 2$.

Răspuns. $0 < x < 1$.

10. $\log_a x > \sqrt{\frac{6}{(\log_a x - 1)\log_x a}}$.

Indicaţie. Treceţi la logaritmul în baza a. Înainte de a ridica la pătrat observaţi că $\log_a x > 0$, dar atunci ambele părţi ale inecuaţiei pot fi împărţite la $\log_a x$.

Răspuns. Pentru $a < 0$, $a = 1$: problema nu este determinată;

pentru $0 < a < 1$: $0 < x < a^3$;

pentru $a > 1$: $x > a^3$.

11. $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$

Răspuns. Pentru $a < 0$: $x < \log_2(-a) - 1$;

pentru $a = 0$: $\emptyset$;

pentru $a > 0$: $x < \log_2 a - 2$.

12. $\log_a(x - 2) + \log_a x > 1$.

Răspuns. Pentru $a < 0$, $a = 1$: problema nu-i determinată;
pentru $0 < a < 1$: $2 < x < 1 + \sqrt{1 + a}$;
pentru $a > 1$: $x > 1 + \sqrt{1 + a}$.
13. $\log_a(1 - 8a^{-x}) + 2x > 0$.

Indicaţie. Aduceţi inecuaţia la forma $\log_a\big(2^x(1 -$ $-8a-x>0$ şi cercetaţi două cazuri: $0<a<1$ şi $a>1$. Soluţia în fiecare caz de cercetat împreună cu valorile admisibile pentru x şi separat pentru $0 < a < 1$ şi $a > 1$.

Răspuns. Pentru $a \leq 0$, $a = 1$: problema nu-i determinată;
pentru $0 < a < 1$: $\log_a\big(4 + \sqrt{17}\big) < x < \log_a 8$;
pentru $a > 1$: $x > \log_a\big(4 + \sqrt{17}\big)$.
14. $\log_a(1 - x^2) \geq 1$.
Răspuns. Pentru $a \leq 0$, $a \geq 1$: problema nu-i determinată sau n-are soluţii;
pentru $0 < a < 1$: $-1 < x \leq -\sqrt{1 - a}$, $\sqrt{1 - a} \leq x < 1$.
15. Pentru $a > 1$ rezolvaţi inecuaţia

$$\log_a\big(2x^2 - 4x + 2 + a^{x^2 - 2x + 5}\big) \leq 4.$$

Indicaţie. Notaţi $x^2 - 2x + 1 = z$ şi observaţi că $z \geq 0$. Inecuaţia primeşte forma: $2z \leq a^4(1 - a^z)$. Pentru $a > 1$ şi $z \geq 0$ partea dreaptă a acestei inecuaţii nu-i pozitivă, iar cea stîngă nenegativă.

Răspuns. $x = 1$.
16. Rezolvaţi inecuaţia $x^{(\log_a x)^2} > a$.
Răspuns. Pentru $a \leq 0$, $a = 1$ problema nu-i determinată;
pentru $0 < a < 1$: $a < x < \frac{1}{a}$;
pentru $a > 1$: $0 < x < \frac{1}{a}$, $x > a$.

17. De aflat toate valorile parametrului a pentru care inecuația $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - ax + 7) < -1$ este satisfăcută pentru toate valorile x din intervalul $x < 0$.

Răspuns. $a > -2\sqrt{2}$.

18. În dependență de valorile parametrului a rezolvați inecuația $a^{x+2} + 6a^{x+1} + 12a^x + 8a^{x-1} - \frac{4}{a} > a + 4$.

Răspuns. Dacă $0 < a < 1$, $x < -\log_a(a+2)$;
dacă $a = 1$, $x \in R$;
dacă $a > 1$, $x > \log_a(a+2)$.

19. În dependență de valorile parametrului a rezolvați inecuația

$$a^2 \cdot 4^{2x+1} - 5a \cdot 4^x + 1 > 0.$$

Răspuns. Dacă $a \leq 0$, $x \in R$;
dacă $a > 0$, $x \in (-\infty; -\log_4 a - 1) \cup (-\log_4 a\,; +\infty)$.

20. În dependență de valorile parametrului a rezolvați inecuația

$$a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0.$$

Răspuns. Dacă $a < 0$, $x \in (-\infty; -\log_2(-a) - 1;$
dacă $a = 0$, $\emptyset$;
dacă $a > 0$, $x \in (-\infty; \log_2 a - 2)$.

21. În dependență de valorile parametrului a rezolvați inecuația

$$25^{x+1} - 4 \cdot 5^{x+1} < a^2 + 4a.$$

Răspuns. Dacă $a \leq -4$, $x \in (-\infty; \log_5\left(-\frac{a}{5}\right))$;
dacă $-4 < a < -2$, $x \in (\log_5\left(\frac{a+4}{5}\right); \log_5\left(-\frac{a}{5}\right))$;
dacă $a = -2$, $\emptyset$;
dacă $-2 < a < 0$, $x \in (\log_5\left(-\frac{a}{5}\right); \log_5\left(\frac{a+4}{5}\right))$
dacă $a \geq 0$, $x \in (-\infty; \log_5 \frac{a+4}{5})$.

22. În dependență de valorile parametrului a rezolvați inecuația

$$x^{\log_a x} > a.$$

Răspuns. Dacă $0 < a < 1$, $x \in \left(a; \frac{1}{a}\right)$;

dacă $a > 1$, $x \in \left(0; \frac{1}{a}\right) \cup (a; +\infty)$.

23. În dependență de valorile parametrului a rezolvați inecuația

$$\log_a(x-2) + \log_a x < 1.$$

Răspuns. Dacă $0 < a < 1$, $x \in \left(1 + \sqrt{1+a}; +\infty\right)$;

dacă $a > 1$, $x \in \left(2; 1 + \sqrt{1+a}\right)$.

24. În dependență de valorile parametrului a rezolvați inecuația

$$\log_{x+2}(x^2 - 2x + a) \geq 2.$$

Răspuns. Dacă $a \leq -8$, $\emptyset$;

dacă $-8 < a \leq -3$, $x \in \left[\frac{a-4}{6}; 1 - \sqrt{1-a}\right)$;

dacă $-3 < a < -2$, $x \in \left[\frac{a-4}{6}; -1\right]$;

dacă $a = -2$, $\emptyset$;

dacă $a > -2$, $x \in \left(-1; \frac{a-4}{6}\right)$.

25. Pentru ce valori a parametrului a pentru orice $x < 0$ se satisface inecuația $\log_2(x^2 + ax + 1) > -1$?

Răspuns. $a < \sqrt{2}$.

26. Pentru ce valori admisibile a parametrului a inecuația $x\left(9x + \sqrt{24 - \log_a 2}\right) \geq \log_{0,5} 2a$ este satisfăcută pentru orice x?

Răspuns. $a = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$; $a = \sqrt[24]{2}$.

27. Pentru ce valori admisibile a parametrului a inecuația $x^2 - x\sqrt{4 + \log_a 7} < \log_7 \frac{a}{49}$ nu este satisfăcută nici pentru o valoare x?

Răspuns. $a = \sqrt{7}$; $0 < a \leq \frac{1}{\sqrt[4]{7}}$.

28. Pentru ce valori a parametrului a inecuația $\sqrt{\frac{x}{4a}-1}\log_4(2x-x^2+25)>0$ are două rădăcini întregi?

Răspuns. $a\in\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4};1\right)$.

29. În dependență de valorile parametrului a rezolvați ecuația $4^x-(2a+1)2^x+a^2+a=0$.

Răspuns. Dacă $a\leq-1$, $\emptyset$;

dacă $-1<a\leq 0$, $x=\log_2(a+1)$;

dacă $a>0$, $x_1=\log_2(a+1)$; $x_2=\log_2 a$.

30. Pentru ce valori admisibile a parametrului a ecuația $\log_5 x\cdot(\log_5(2\log a-x)\cdot\log_x 5+1)=2$ are soluții?

Răspuns. $a\geq 10^5$.

31. Pentru ce valori a parametrului a ecuația $\log_3 x+(a^2-4)\log_{3x}\frac{1}{3}-3=0$ are rădăcini, distanța dintre care este mai mare decât 8?

Răspuns. $a\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$.

32. Pentru ce valori a parametrului a suma $log_a\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)$ și $log_a\left(\sqrt{1-x^2}+7\right)$ va fi mai mică decît unitatea pentru toate valorile admisibile a variabilei x?

Răspuns. $a\epsilon(0;1)\cup(16;+\infty)$.

33. Pentru ce valori a parametrului a suma $log_a\left(\frac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ și $log_a\left(\frac{1+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ nu va fi egală cu unitatea nici pentru o valoare a variabilei x?

Răspuns. $a\epsilon(0;1)\cup(1;6]\cup(12;+\infty)$.

34. Pentru ce valori a parametrului a inecuația $log_{x+a}(x^2-3ax)\leq 2$ are loc pentru toate valorile $x\epsilon[3;4]$?

Răspuns. $a\epsilon(-\infty;-20]\cup[0;1]$.

35. Pentru ce valori a parametrului a inecuația

$$x^2 - x\sqrt{4 + log_a 7} < log_7 \frac{a}{49}$$

n-are loc nici pentru o valoare a variabilei x?

Răspuns. $a\epsilon \left(0; \frac{1}{\sqrt[4]{7}}\right) \cup \{\sqrt{7}\}$.

§. 9.Inecuaţii şi sisteme de inecuaţii trigonometrice

Pentru cele mai simple inecuaţii trigonometrice mulţimea soluţiilor are forma:

$\sin x > a, (|a| < 1), x \in (\arcsin a + \ 2n\pi; \pi - \arcsin a + 2n\pi), n \in Z;$

$\sin x < a, (|a| < 1), x \in (-\pi - \arcsin a + \ 2n\pi; \arcsin a + 2n\pi), n \in Z;$

$\sin x < a, (|a| < 1), x \in (-\pi - \arcsin a + \ 2n\pi; \arcsin a + 2n\pi), n \in Z;$

$\cos x > a, (|a| < 1), x \in (-\arccos a + \ 2n\pi; \arccos a + 2n\pi), n \in Z;$

$cos\, x < a,\ (|a| < 1),$
$x \in (arccos\ a + 2n\pi; 2\pi - arccosa + 2n\pi),\ n \in Z;$
$tg\ x > a,\ (a \in R),\ x \in \left(arctg\ a + n\pi;\ \frac{\pi}{2} + n\pi\right),\ n \in Z;$
$tg\ x < a,\ (a \in R),\ x \in \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi;\ arctg\ a + n\pi\right),\ n \in Z;$
$ctg\ x > a,\ (a \in R),\ x \in (n\pi;\ arcctg\ a + n\pi),\ n \in Z;$
$ctg\ x < a,\ (a \in R),\ x \in (arcctg\ a + n\pi;\ \pi + n\pi),\ n \in Z.$

Rezolvînd exemple concrete vom aduce şi unele metode de rezolvare a inecuaţiilor trigonometrice.

Exemplul 9. 1. Să rezolvăm inecuaţia

$$cosx \leq 2 - a^2.$$

Rezolvare. Vom cerceta următoarele cazuri:

$$2-a^2>1,\ \ -1\le 2-a^2\le 1, 2-a^2<-1,$$

Cazul I. Fie $2-a^2>1$, adică $a^2<1$.

În acest caz inecuaţia este satisfăcută pentru orice x.

Cazul II. Fie $2-a^2<-1$, adică $a^2>3$ sau $|a|>\sqrt{3}$. În acest caz inecuaţia n-are soluţii.

Cazul III. Fie $-1\le 2-a^2\le 1$. Această condiţie este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 2-a^2\le 1 \\ 2-a^2\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2\ge 1 \\ a^2\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|\ge 1 \\ |a|\le \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow |a|\le\sqrt{3}.$$

În acest caz:

$arccos(2-a^2)+2k\pi\le x\le -arccos(2-a^2)+2(k+1)\cdot$ π, $k\in Z$; (Fig.51)

.

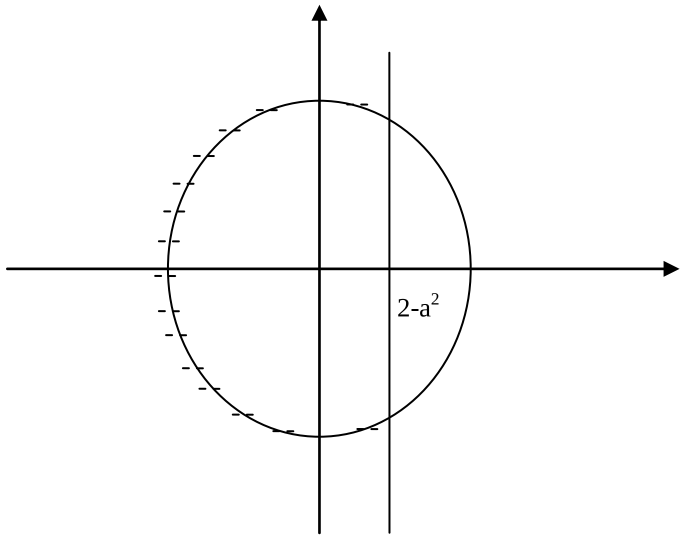


Fig. 51

Răspuns. Pentru $|a|\le 1$: $x\in R$;

pentru $1\le|a|\le\sqrt{3}$: $arccos(2-a^2)+2k\pi\le x\le -arccos(2-$ $-a2+2k+1\cdot\pi$, $k\in Z$;

pentru $|a|>\sqrt{3}$: $\emptyset$.

Exemplul 9. 2. Să rezolvăm inecuaţia

$$tgx+ctgx\le a.$$

Rezolvare. Transformăm inecuaţia dată în felul următor:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\le a \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}\le a \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x}\le a \quad (1).$$

Să notăm $sin2x = y$. Atunci (1) are forma $\frac{2}{y}\le a$ şi problema se reduce la rezolvarea sistemului de inecuaţii:

$$\begin{cases} \frac{2}{y}\le a \\ -1\le y\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ay-2\ge 0 \\ -1\le y\le 1 \end{cases} \quad (2).$$

Observăm că $a = 0$ este valoare de control a parametrului a. Prin urmare, vom cerceta trei cazuri: 1) $a = 0$; 2) $a > 0$; 3) $a < 0$.

1. Dacă $a = 0$, atunci sistemul (2) are forma:

$$\begin{cases} -\frac{2}{y}\ge 0 \\ -1\le y\le 1 \end{cases},$$

de unde avem $-1\le y< 0$.

2. Dacă $a > 0$, atunci (2) are forma:

$$\begin{cases} \frac{y-\frac{2}{a}}{y}\ge 0 \\ -1\le y\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y<0, y\ge \frac{2}{a} \\ -1\le y\le 1 \end{cases} \quad (3).$$

Pentru ultimul sistem valoarea de control a parametrului este $a = 2$.

Vom cerceta următoarele cazuri: a) $0 < a < 2$; b)$a = 2$; c) $a > 2$.

1. Dacă $0 < a < 2$, atunci $\frac{2}{a} > 1$ şi sistemul (3) are soluţia $-1 \le y < 0$;
2. Dacă $a = 2$, atunci (3) are soluţia $-1 \le y < 0$, $y = 1$;
3. Dacă $a > 2$, atunci (3) are soluţia $-1 \le y < 0$, $\frac{2}{a} \le y \le 1$

.

Dacă $a < 0$, atunci sistemul (3) are forma:

$$\begin{cases} \frac{y-\frac{2}{a}}{y} \le 0 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} \le y < 0 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases} \quad (4).$$

Pentru (4) valoarea de control este $a = -2$.
Vom cerceta următoarele cazuri:
a) $a < -2$; b) $a = -2$; c) $-2 < a < 0$.

1. Dacă $a < -2$, atunci $\frac{2}{a} > -1$ şi din (4) avem:$\frac{2}{a} \le y < 0$.
2. Dacă $a = -2$, atunci din (4) avem: $-1 \le y < 0$.
3. Dacă $-2 < a < 0$, atunci $\frac{2}{a} < -1$ şi sistemul (4) are soluţia: $-1 \le y < 0$.

Din cele cercetate mai sus obţinem următoarele soluţii a sistemului (2).

1. Dacă $a < -2$, atunci $\frac{2}{a} \le y < 0$;
2. Dacă $-2 \le a \le 2$, atunci $-1 \le y < 0$;
3. Dacă $a = -2$, atunci $-1 \le y < 0$; $y = 1$;
4. Dacă $a > 2$, atunci $-1 \le y < 0$; $\frac{2}{a} \le y \le 1$.

Avînd în vedere că $y = sin2x$, obţinem:

1. Dacă $a < -2$, atunci:
$\frac{2}{a} \le sin2x < 0$; $k\pi + \frac{1}{2} arcsin\frac{2}{a} \le x < k\pi, k \in Z$.
2. Dacă $-2 \le a < 2$, atunci:
$-1 \le sin2x < 0$ sau $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi$.
3. Dacă $a = 2$, atunci din $-1 \le sin2x < 0$ avem: $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi$, iar din $sin2x = 1$ urmează $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$.
4. Dacă $a > 2$, atunci din $-1 \le sin2x < 0$ avem:
$k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi, k \in Z$, iar din $\frac{2}{a} \le sin2x \le 1$ avem:

$k\pi + \frac{1}{2}arcsin\frac{2}{a} \le x \le \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}arcsin\frac{2}{a} + k\pi, k \in Z.$

Răspuns.

1. Dacă $a < -2$, atunci $k\pi + \frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}arcsin\frac{2}{a} + k\pi,$
$k\pi + \frac{1}{2}arcsin\frac{2}{a} \le x < k\pi, k \in Z;$
2. Dacă $-2 \le a < 2$, atunci $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi, k \in Z$;
3. Dacă $a = 2$, atunci $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z;$
4. Dacă $a > 2$, atunci $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi,$
$k\pi + \frac{1}{2}arcsin\frac{2}{a} \le x \le \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}arcsin\frac{2}{a} + k\pi, k \in Z.$

Exemplul 9. 3. Pentru ce valori a parametrului inecuaţia

$$(m-1)cosx + m\,sinx \le 2m$$

nu are soluţii şi pentru ce valori a parametrului orice număr real este soluţie a inecuaţiei date?

Rezolvare. Inecuaţia dată are forma $a\,cpsx + b\,sinx \le c$ şi deci, putem împărţi ambele părţi la expresia $\sqrt{a^2+b^2}$. Aşa dar, din inecuaţia dată obţinem:

$$\sqrt{(m-1)^2+m^2}\left(\frac{m-1}{\sqrt{(m-1)^2+m^2}}cosx + \frac{m}{\sqrt{(m-1)^2+m^2}}sinx\right) \le 2m$$

sau

$$\sqrt{2m^2-2m+1}\left(\frac{m-1}{\sqrt{2m^2-2m+1}}cosx + \frac{m}{\sqrt{2m^2-2m+1}}sinx\right) \le 2m \quad (1)$$

Pentru orice $m \in R$ există aşa argument $\varphi \in R$ încît $cos\varphi = \frac{m-1}{\sqrt{2m^2-2m+1}}$ şi $sin\varphi = \frac{m}{\sqrt{2m^2-2m+1}}$. Prin urmare inecuaţia (1) poate fi scrisă sub forma

$$cos(x-\varphi) \le \frac{2m}{\sqrt{2m^2-2m+1}}. \quad (2)$$

Inecuaţia dată nu are soluţii, dacă:

$$\frac{2m}{\sqrt{2m^2-2m+1}} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{2m^2-2m+1} < -2m \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2m^2-2m+1 \geq 0 \\ -2m > 0 \\ 2m^2-2m+1 < 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 2m^2+2m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ m < \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

.

Inecuaţia (2) este satisfăcută de orice număr real, dacă:

$$\frac{2m}{\sqrt{2m^2-2m+1}} \geq 1 \Leftrightarrow 2m \geq \sqrt{2m^2-2m+1} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2m^2-2m+1 \geq 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2-2m+1 \leq 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 2m^2-2m-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ m \leq \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

.

Răspuns. Inecuaţia nu are soluţii dacă $m \leq \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ şi este satisfăcută de orice număr real dacă $m \geq \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Exemplul 9. 4. Pentru ce valori ale parametrului a inecuaţia

$$(2a-1)sinx \leq a^2-6$$

nu are soluţii?

Rezolvare. Vom cerceta trei cazuri:

1. $a = \frac{1}{2}$;

2. $a < \frac{1}{2}$;

3. $a > \frac{1}{2}$.

1. Dacă $a = \frac{1}{2}$ inecuaţia are forma $0 \cdot sinx \leq -5\frac{3}{4}$ şi prin urmare, $x \in \{\emptyset\}$.

Dacă $a < \frac{1}{2}$ obţinem $sinx \geq \frac{m^2-6}{2a-1}$. Această inecuaţie nu are soluţii dacă

$\frac{a^2-6}{2a-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{a^2-6}{2a-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{a^2-2a-5}{2a-1} > 0 \Leftrightarrow (2a-1)(a^2 - 2a - 5) > 0 \Leftrightarrow a \in \left(1-\sqrt{6};\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(1+\sqrt{6};\ +\infty\right)$

.

Avînd în vedere că $a < \frac{1}{2}$ obţinem $a \in \left(1-\sqrt{6};\ \frac{1}{2}\right)$.

2. Dacă $a > \frac{1}{2}$, atunci $sinx \leq \frac{a^2-6}{2a-1}$. Această inecuaţie nu are soluţii dacă

$\frac{a^2-6}{2a-1} < -1 \Leftrightarrow \frac{a^2+2a-7}{2a-1} < 0 \Leftrightarrow (2a-1)\left(a+1+2\sqrt{2}\right)\left(a+1-2\sqrt{2}\right) < 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\infty;\ -1-2\sqrt{2}\right) \cup \left(0{,}5;\ -1+2\sqrt{2}\right)$

.

Deoarece $a > \frac{1}{2}$ obţinem $a \in \left(0{,}5;\ -1+2\sqrt{2}\right)$.

Răspuns. $\left(1-\sqrt{6}\,;\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}\,; -1+2\sqrt{2}\right)$.

Exemplul 9. 5. Pentru ce valori a parametrului a inecuaţia

$$sinx \leq \frac{a^2-6}{2a-1}$$

are soluţii?

Rezolvare. Inecuaţia dată are soluţii dacă

$\frac{a^2-6}{2a-1} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{a^2+2a-7}{2a-1} \geq 0 \Leftrightarrow (2a-1)\left(a+1+2\sqrt{2}\right)\left(a+1-2\sqrt{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$

$a \in \left[-1-2\sqrt{2; 0{,}5}\right] \cup \left[-1+2\sqrt{2}; +\infty\right).$

Răspuns. $a \in \left[-1-2\sqrt{2};\ 0{,}5\right] \cup \left[-1+2\sqrt{2}; +\infty\right)$

Exemplul 9. 6. Rezolvaţi inecuaţia

$$asin^2x + (2a^2 + a)cosx - a^3 - a^2 + a > 0. \quad (1)$$

Rezolvare.

$$(asin^2x \ + (2a^2 + a)cosx - a^3 - a^2 + a > 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a(1 - cos^2x + (2a + 1)cosx - a^2 - a + 1) > 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a(cos^2x - (2a + 1)cosx + a^2 + a - 2) < 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(a\left(cosx - (a - 1)\right)\left(cosx - (a + 2)\right) < 0\right).$$

Pentru ultima inecuaţie vom cerceta următoarele cazuri:

1. $a > 0$.

În acest caz

$$(2) \Leftrightarrow \left(\left(\cos x - (a-1)\right)\left(\cos x - (a+2)\right) < 0\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 < \cos x < a + 2 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 < \cos x \leq 1 \\ a - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} a - 1 < \cos x \leq 1 \\ a < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 0 < a < 2 \\ -a\, arccos(a-1) + 2k\pi < x < arccos(a-1) + 2k\pi \end{cases}$$

2. $a < 0$

În acest caz

$$(2) \Leftrightarrow \Big(\big(cosx-(a-1)\big)\big(cosx-(a+2)\big)<0\Big) \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} cosx < a-1 \\ -1 \le cosx \le 1\end{cases} \\ \begin{cases} cosx > a+2 \\ -1 \le cosx \le 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} cosx < a-1 < -1 \\ cosx \ge -1\end{cases} \\ \begin{cases} a+2 \ge -1 \\ 1 \ge cosx > a+2\end{cases} \\ \begin{cases} a+2 < -1 \\ 1 \ge cosx \ge -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset \\ \begin{cases} a \ge -1 \\ a+2 < cosx \le 1 \\ a+2 < 1\end{cases} \\ \begin{cases} a < -3 \\ -1 \le cosx \le 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} -3 \le a < -1 \\ -arccos(a+2)+2n\pi < x < arccos(a+2)+2n\pi\end{cases} \\ \begin{cases} a < -3 \\ -\infty < x < +\infty\end{cases}\end{array}\right.$$

3. $a = 0$.

În acest caz

$(2) \Leftrightarrow (0 < 0) \Leftrightarrow (x \in \emptyset)$.

Răspuns. Dacă $a < -3$, atunci $x \in R$;

dacă $-3 \le a < -1$, atunci

$\{-arccos(a+2)+2n\pi < x < arccos(a+2)+2n\pi, n \in Z\}$;

dacă $0 < a < 2$, atunci

$\{-arccos(a-1)+2k\pi < x < arccos(a-1)+2k\pi, k \in Z\}$;

dacă $-1 \le a \le$ sau $a \ge 2$, atunci $\emptyset$.

Probleme pentru lucrul independent.

Rezolvaţi inecuaţiile

1. $cosx - \frac{1}{cosx} \le a$.

Răspuns. Pentru

$a<0$: $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x\leq -arccos\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}+2k\pi$;

$arccos\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}+2k\pi\leq x<\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$;

pentru $a=0$: $\pi+2k\pi, -\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}-2k\pi, k\in Z$;

pentru $a>0$: $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$,

$arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}+2k\pi\leq x\leq 2\pi-arccos\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}+2k\pi$.

2. $\frac{1+sinx}{1-cosx}+\frac{1-sinx}{1+cosx}\leq a$.

Răspuns. $\emptyset$ pentru $a<\frac{3}{2}$;$arctg\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi$ pentru $a=\frac{3}{2}$;

$arctg\frac{-1+\sqrt{2a-3}}{2}+k\pi<x<arctg\frac{-1-\sqrt{2a-3}}{2}+k\pi,\qquad k\in Z$

pentru $a>\frac{3}{2}$.

3. $-3a\leq 12sinx\leq 2a+10$.

Răspuns. Pentru $a<-2$: $\emptyset$;pentru $-2\leq a\leq 1$:

$-arcsin\frac{a}{4}+2k\pi\leq x\leq arcsin\frac{a+5}{6}+2k\pi$,

$\pi-arcsin\frac{a+5}{6}+2k\pi\leq x\leq\pi+arcsin\frac{a}{4}+2k\pi, k\in Z$;

pentru $1<a<4$:

$-arcsin\frac{a}{4}+2k\pi\leq x\leq\pi+arcsin\frac{a}{4}+2k\pi, k\in Z$;

pentru $a\geq 4$: $x\in R$.

4. $ctg(ax-b)\geq c, a\neq 0$.

Răspuns. Dacă $a>0$,

$\left\{\frac{1}{a}(b+\pi n)<x\leq\frac{1}{a}(b+arctg\,c+\pi n)/\,n\in Z\right\}$;

dacă $a<0$, $\left\{\frac{1}{a}(b+arctgc+\pi n)<x\leq\frac{1}{a}(b+\pi n)/\,n\in Z\right\}$.

5. $acos^2x+bsin^2x\,cosx\leq 0, a>0, b>0$.

Răspuns. Dacă $\left|\frac{1}{2b}\left(a-\sqrt{a^2+4b^2}\right)\right|\leq 1$,

$$\left\{-arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4b^2}}{2b} \le x \le -\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z\right\} \cup$$
$$\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n \le x \le arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4b^2}}{2b}+2\pi n, n \in Z\right\};$$
dacă $\left|\frac{1}{2b}\left(a-\sqrt{a^2+4b^2}\right)\right| > 1$, $\emptyset$.

6. $a(sinx+cosx)^2 > (1-a)cos2x$.

Răspuns. Dacă $a < 1$,
$\left\{-\frac{\pi}{2}+n\pi < x < -\frac{\pi}{4}+n\pi, n \in Z\right\} \cup \left\{arctg(1-2a)+n\pi < x \le \frac{\pi}{2}+n\pi, n \in Z\right\}$
dacă $a \ge 1$,
$\left\{-\frac{\pi}{2}+n\pi < x < arctg(1-2a)+n\pi, n \in Z\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4}+n\pi < x \le \frac{\pi}{2}+n\pi, n \in Z\right\}$

7. Pentru ce valori a parametrului „a” inecuaţia
$|3sin^2x+2sinx\,cosx+cos^2x+a| \le 3$
are loc pentru orice x?

Răspuns. $-\frac{12}{5} \le a \le 0$.

8. Pentru ce valori a parametrului „a”inecuaţia
$(a-1)sin^2x+2(a-2)sinx+a+3 < 0$
n-are soluţii?

Răspuns. $a \ge \frac{1}{2}$.

9. Rezolvaţi inecuaţia
$0 \le cosx \le 4-a^2$.

Răspuns. Pentru $|a| \le \sqrt{3}$:$-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi, k \in Z$;

Pentru$\sqrt{3} < |a| \le 2$: $arccos(4-a^2)+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$,

$-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq -arccos(4-a^2)+2k\pi, k \in Z$;pentru $|a|>2:\emptyset$.

10. Pentru ce valori a parametrului m inecuaţia

$$sinx \leq \frac{m^2-6}{2m-1}$$

nu are soluţii?

Răspuns. $m \in \left(-\infty; -1-2\sqrt{2}\right) \cup \left(0,5;\ -1+2\sqrt{2}\right)$.

11. Pentru ce valori a parametrului t inecuaţia

$$(2t-1)sinx \leq t^2-6$$

are soluţii?

Răspuns. $\left(-\infty; 1-\sqrt{6}\right) \cup \left(-1+2\sqrt{2};\ +\infty\right)$.

§10. Introducerea parametrului la rezolvarea ecuaţiilor

Fie dată o ecuaţie, ce nu conţine nici un parametru, dar pentru rezolvarea căreia e rezonabil să cercetăm această ecuaţie în legătură cu un oarecare parametru şi din soluţia ultimei ecuaţii să determinăm soluţia ecuaţiei date.

Vom ilustra cele spuse mai sus prin următoarele exemple.

Exemplu 10. 1. Să rezolvăm ecuaţia

$$x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$$

Rezolvare. Introducem parametrul $t = \sqrt{2}$ şi vom cerceta partea stîngă a acestei ecuaţii ca o funcţie $f(x,t) = x^4 - 2tx^2 - x + t^2 - t$ pentru $t = \sqrt{2}$.

Ecuaţia $f(x,t) = 0$ este, în raport cu parametru t, o ecuaţie pătrată: $t^2 - (2x^2 + 1)t + x^2 - x = 0$.

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt $t_1 = x^2 + x + 1$ şi $t_2 = x^2 - x$.

Prin urmare, avem descompunerea:

$f(x,t) = (t - x^2 - x - 1)(t - x^2 + x)$

sau pentru $t = \sqrt{2}$ avem:

$f(x, \sqrt{2}) = (\sqrt{2} - x^2 - x - 1)(\sqrt{2} - x^2 + x)$

Aşa dar, pentru a obţine rădăcinile ecuaţiei iniţiale este suficient să rezolvăm următoarele două ecuaţii:

$x^2 + x + 1 - \sqrt{2} = 0$ şi $x^2 - x - \sqrt{2} = 0$.

Rezolvînd aceste două ecuaţii pătrate, obţinem:

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} + 1}}{2}$

Exemplu 10. 2. Să rezolvăm ecuaţia

$$3 + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = x.$$

Rezolvare. Evident, $x > 3$.

Introducem parametrul $t = 3$.

Atunci ecuaţia dată are forma:

$$t+\sqrt{t+\sqrt{x}}=x \quad \text{sau} \sqrt{t+\sqrt{x}}=x-t.$$

Ridicăm ambele părţi la pătrat şi obţinem:

$$t+\sqrt{x}=x^2-2xt+t^2 \text{ sau } t^2-(2x+1)t+x^2-\sqrt{x}=0.$$

Rezolvînd această ecuaţie în raport cu t, obţinem:

$$t_1=x+\sqrt{x}+1 \text{ şi } t_2=x-\sqrt{x}.$$

Prin urmare, avem descompunerea $f(x,t)=\left(t-x-\sqrt{x}-1\right)\left(t-x+\sqrt{x}\right)$, iar pentru $t=3$, obţinem $f(x,3)=\left(3-x-\sqrt{x}-1\right)\left(3-x+\sqrt{x}\right)$ sau
$\left(2-x-\sqrt{x}-1\right)\left(3-x+\sqrt{x}\right)=0.$

Să rezolvăm ecuaţiile:
$2-x-\sqrt{x}=0$ şi $3-x+\sqrt{x}=0.$

Din $2-x-\sqrt{x}=0$ avem: $\sqrt{x}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
$x=\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)^2}{4}<3.$

Din ecuaţia $3-x+\sqrt{x}=0$, avem: $\sqrt{x}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$, $\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$
sau $x=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$.

Prin urmare, ecuaţia iniţială are o singură rădăcină şi anume $x=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$.

Răspuns. $x=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$.

Uneori unele ecuații și inecuații este convenabil de rezolvat, cercetându-le în raport cu parametrul, care figurează în condiție, dar nu în raport cu adevărata variabilă.

Exemplul 10.3. Rezolvați ecuația $2x^3-(a+2)x^2-ax++a^2=0$.

Rezolvare. Evident, e mai simplu de rezolvat o ecuație pătrată în raport cu a decât una cubică în raport cu x, însă operând cu polinomul de două variabile este indiferent în raport cu care de-l descompus în factori.

În corespundere cu această idee vom grupa termenii ecuației în felul următor:

$$a^2 - x(x+1)a + 2x^2(x-1) = 0 \qquad (1)$$

Discriminantul acestei ecuații se exprimă astfel:

$D = x^2(x+1)^2 - 8x^2(x-1) = x^2(x-3)^2$. Prin urmare,

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{x(x+1)+x(x-3)}{2} \\ a=\frac{x(x+1)-x(x-3)}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-a=0 \\ x=\frac{a}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2} \\ x_3 = \frac{a}{2} \end{array}\right. .$$

Răspuns. Pentru $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) : x \in \left\{\frac{a}{2}\right\}$;

Pentru $a \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right) : x \in \left\{\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}; \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}; \frac{a}{2}\right\}$.

Probleme pentru lucrul independent.

Rezolvaţi ecuaţiile (în paranteze se recomandă parametrul).

1. $x^3 - (\sqrt{2}+1)x^2 + 2 = 0; \left(t = \sqrt{2}\right).$

Răspuns. $\left\{\sqrt{2};\ \frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}\right\}.$

2. $2x^3 + x + \sqrt{2} = 0; \left(t = \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Răspuns. $\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$

3. $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0; \left(t = \sqrt{3}\right).$

Răspuns. $\left\{\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{3}+1}}{2};\ \frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}\right\}.$

4. $\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{\sqrt{5}+x}} = x\left(t = \sqrt{5}\right).$

Răspuns. $\left\{\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{5}+1}}{2}\right\}.$

5. $sin^2x + \frac{1}{4}sin^2 3x = sinx\, sin^2 3x;\ (t = sinx).$

Răspuns. $\left\{k\pi; (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi, unde\ k, n \in Z\right\}.$

§11. O metodă de schimbare a parametrilor la rezolvarea problemelor

Deseori la rezolvarea problemelor cu parametri la algebră sau la geometrie este raţional de a folosi analogia, care constă în faptul că una din mărimile căutate se calculează, iar celelalte mărimi se obţin din cea calculată prin schimbarea parametrilor.

Exemplu 11. 1. Să rezolvăm sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = c_1, \\ b_1x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Rezolvare. Să schimbăm cu locurile termenii din partea stîngă:

$$\begin{cases} a_2y + a_1x = c_1, \\ b_2y + b_1x = c_2. \end{cases}$$

Observăm că aceste sisteme sunt echivalente, necunoscutele x şi y s-au schimbat cu locurile, iar pe acele locuri ale primului sistem, unde erau parametrii a_1, a_2, b_1, b_2, pe locurile corespunzătoare în al doilea sistem sunt parametrii $a_2, a_1, b_{2,} b_1$. Este suficient de aflat doar $x = \frac{c_1b_2 - c_2a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$, iar valoarea y se primeşte din valoarea x prin schimbarea parametrilor – coeficienţilor pe lîngă necunoscute, adică a parametrilor a_1, a_2, b_1, b_2 corespunzător prin parametrii $a_2, a_1, b_{2,} b_1$.

În rezultat, obţinem:

$y = \frac{a_1c_2 - b_1c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}$.

Răspuns. $x = \frac{c_1b_2 - c_2a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$; $y = \frac{a_1c_2 - b_1c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}$

Exemplul 11. 2. De rezolvat sistemul

$$\begin{cases} x\left(1+\frac{x}{y}\right)=a, \\ y\left(1+\frac{y}{x}\right)=b. \end{cases} \quad (1)$$

Rezolvare.Dacă a doua ecuaţie o situăm pe locul întîi, iar prima pe locul doi, obţinem: $\begin{cases} y\left(1+\frac{y}{x}\right)=b, \\ x\left(1+\frac{x}{y}\right)=a. \end{cases} \quad (2)$

Evident, aceste sisteme sunt echivalente. Rolurile x şi y în primul sistem îl joacă y şi x în al doilea sistem. Evident, formula ce exprimă x prin a, b la rezolvarea sistemului (1), este aceeaşi ca şi formula, ce exprimă y din sistemul (2), numai că parametrii a, b din prima formulă se schimbă corespunzător cu parametrii b, a.

Exemplul 11. 3. Să cercetăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{y^2}{x^2}=\frac{b^2}{a^2} \\ b-y=a-x \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} a^2y^2=b^2x^2, \\ b-y=a-x. \end{cases} (1).$$

Schimbînd cu locurile părţile drepte şi stîngi, obţinem sistemul (2), echivalent cu sistemul iniţial:

$$\begin{cases} b^2x^2=a^2y^2, \\ a-x=b-y. \end{cases} \quad (2)$$

Observăm, că locurile ocupate de x şi y în primul sistem, sunt ocupate de y şi x corespunzător din sistemul (2), iar pe locurile a şi b din primul sistem sunt situate corespunzător b, a în sistemul (2). Prin urmare, calculînd valoarea pentru x, este suficient de înlocuit a cu b, b cu a şi de obţinut valoarea pentru y.

Soluţiile acestui sistem sunt: $x=a,\ y=b$ şi $x=\frac{a(a-b)}{a+b}$; $y=\frac{b(b-a)}{a+b}$.

Exemplul 11. 4. Din punctele A şi B, situate în acelaş semispaţiu în raport cu planul π, sunt duse perpendicularele $|AC| = a$, $|BD| = b\ (a > b)$. La ce distanţă de la planul π este situat punctul M ce împarte segmentul AB în raportul $m:n$?

Rezolvare. Avînd în vedere că în condiţia problemei nu se spune în ce ordine punctul M împarte segmentul AB, atunci pentru rezolvarea problemei trebuie să cercetăm două cazuri :

1. $AM:BM = m:n$;
2. $BM:AM = m:n$.

Dacă cazul doi îl vom scrie sub forma $AM:BM = n:m$, atunci noi observăm că el coincide cu primul, numai că parametrii m şi n sunt schimbaţi corespunzător cu n şi m. Problema se reduce la calcularea unuia din segmente şi schimbarea cu locurile a parametrilor corespunzători. Astfel:$ME_1 = \frac{na+mb}{m+n}$; $ME_2 = \frac{ma+nb}{m+n}$.

Răspuns. $ME_1 = \frac{na+mb}{m+n}$; $ME_2 = \frac{ma+nb}{m+n}$.

§12. Probleme cu parametri

Vom rezolva acum o problemă cu ajutorul unui sistem de ecuații. În așa probleme există o regulă specială de înscriere a răspunsului, deoarece mai trebuie de ținut cont și de sensul fizicsau geometric al mărimilor despre care se are în vedere în problemă.

Exemplul 12. 1. Doi muncitori, lucrând împreună pot îndeplini o lucrare în a zile. Dacă primul muncitor face $\frac{1}{3}$ din lucrare, iar al doilea muncitor finisează lucrarea, atunci toată lucrarea se face în b zile. De cât timp are nevoie fiecare muncitor pentru a îndeplini lucrarea de sinestătător.

Rezolvare. Fie primul muncitor pentru a îndeplini lucrarea are nevoie de x zile, iar al doilea muncitor de y zile. Evident $x > 0, y > 0, a > 0, b > a$. Conform condițiilor problemei alcătuim sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{2y}{3} = b. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obținem:

$$\begin{cases} a(x+y) = xy, \\ x + 2y = 3b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3b - 2y, \\ 2y^2 - (a+3b)y + 3ab = 0. \end{cases}$$

Deoarece $b > a$, atunci pentru discriminantul ecuației pătrate vom avea:

$$(a+3b)^2 - 24ab = a^2 + 9b^2 - 18ab \geq 0 \leftrightarrow 0 < a \leq \left(9 - 6\sqrt{2}\right)b$$

.

Atunci, $y_{1,2} = \frac{a+3b \pm \sqrt{a^2+9b^2-18ab}}{4}$, $x_{1,2} = \frac{3b-a \pm \sqrt{a^2+9b^2-18ab}}{2}$.

Răspuns. $\emptyset$, pentru $a \leq 0$ sau $b < 0$ sau $a > \left(9 - 6\sqrt{2}\right)b$;

$\frac{3b-a-\sqrt{a^2+9b^2-18ab}}{2}, \frac{3b+a+\sqrt{a^2+9b^2-18ab}}{4}$

pentru $b > 0$; $\frac{3b-a+\sqrt{a^2+9b^2-18ab}}{2}, \frac{3b+a-\sqrt{a^2+9b^2-18ab}}{4}$

pentru $0 < a < (9-6\sqrt{2})b$.

Exemplul 12. 2. O cooperativă agricolă a vândut $3000\ q$ de cereale, și anume: orz, secară și grâu, primind pentru orz – 140 000 lei, pentru secară – 120 000 lei și pentru grâu 84 000 lei. Știind că $6q$ de orz costă cât $5q$ de secară și că $7q$ de secară costă cât $6q$ de grâu, să se afle cantitatea în chintate și costul unui chintat pentru fiecare fel de cereale.

Rezolvare. Să notăm cu x, y, z numerele ce reprezintă ce reprezintă cantitățile în chintate, de orz, secară și grâu vândute de cooperativă. Atunci avem:

$x + y + z = 3000.$

Să observăm că ,

$$1q\ de\ orz\ costă\ \frac{140000}{x}\ lei,$$

$$1q\ de\ secară\ costă\ \frac{120000}{y}\ lei, \qquad (1)$$ Ошибка! Закладка не определе

$$1q\ de\ grâu\ costă\ \frac{84000}{z}\ lei.$$

Prin urmare,

$6q$ de orz vor costă $\frac{6 \cdot 140000}{x}$ lei,

$5q$ de secară vor costă $\frac{5 \cdot 120000}{y}$ lei,

$7q$ de secară vor costă $\frac{7 \cdot 120000}{y}$ lei, $x + y + z = 3000.$

$6q$ de grâu vor costă $\frac{6 \cdot 84000}{z}$ lei.

Deoarece $6q$ de orz costă cât $5q$ de secară, atunci $\frac{6 \cdot 140000}{x} = \frac{5 \cdot 120000}{y}$, sau după simplificare $\frac{7}{x} = \frac{5}{y}$ (2).

Deoarece $7q$ de secară costă cât $6q$ de grâu, atunci $\frac{7 \cdot 120000}{y} = \frac{6 \cdot 84000}{z}$, sau după simplificare $\frac{5}{y} = \frac{3}{z}$ (3).

Din (2) și (3) avem: $\frac{7}{x} = \frac{5}{y} = \frac{3}{z}$.

Știind că suma numitorilor $x + y + z = 3000$, aplicând o proprietate a rapoartelor egale, obținem valoarea comună a ultimelor rapoarte, și anume:

$\frac{7+5+3}{x+y+z} = \frac{15}{3000} = \frac{1}{200}$.

Rezultă:

$\frac{7}{x} = \frac{1}{200}, \frac{5}{y} = \frac{1}{200}, \frac{3}{z} = \frac{1}{200}$, de unde $x = 1400, y = 1000, z = 600$. Înlocuind acum valorile pentru x, y, z în (1), găsim că

$1q$ de orz costă $\frac{140000}{1400}$ lei=100 lei,

$1q$ de secară costă $\frac{120000}{1000}$ lei=120 lei,

$1q$ de grâu costă $\frac{84000}{600}$ lei=140lei.

Răspuns. $1q$ de orz costă 100 lei, $1q$ de secară costă 120 lei, $1q$ de grâu costă 140lei.

Exemplul 12. 3. Membrii unei cooperative agricole au semănat a *ha* cu grâu și b *ha* cu porumb, în timp de două săptămâni. În prima săptămână s-a semănat de p ori mai mult grâu decât porumb, iar în a doua s-a semănat de p ori mai mult porumb decât grâu. Câte hectare s-au semănat cu grâu în prima săptămână? Să se cerceteze cazurile particulare: $a = 400, b = 250, p = \frac{1}{4}$ și $a = 400, b = 250, p = 1$.

Rezolvare. Să notăm cu x și y numărul de hectare semănate cu grâu, respectiv cu porumb, în prima săptămână. Atunci, în a doua săptămână s-au însămânțat $(a-x)$ hectare de grâu și $(b-y)$ hectare de porumb.

Cum în prima săptămână numărul de hectare de grâu este de p ori mai mare ca numărul de hectare semănate cu porumb avem:

$$x = py \qquad (1).$$

În a doua săptămână, numărul de hectare semănate cu porumb, adică $b-y$, este de p ori mai mare decât numărul de hectare semănate cu grâu, deci:

$$b - y = p(a - x) \qquad (2).$$

Înlocuind pe x în a doua ecuație obținem: $b - y = p(a - py)$, de unde:

$$b - y = pa - p^2 y \qquad (3).$$

Din ultima relație, obținem: $y = \frac{b-pa}{1-p^2}$, dar atunci $x = \frac{pb-p^2a}{1-p^2}$.

În primul caz particular $a = 400, b = 250, p = \frac{1}{4}$,

$x = \frac{\frac{1}{4}\cdot 250 - \frac{1}{16}\cdot 400}{1-\frac{1}{16}} = 40(ha)$; $x = \frac{250-\frac{1}{4}\cdot 400}{1-\frac{1}{16}} = 100(ha)$.

În al doilea caz, când $p = 1$, ecuația (3) devine:

$b - y = a - y$.

Ultima ecuație n-are soluții dacă $a \neq b$, și are o infinitate de soluții dacă $a = b$.

Verificarea în cazul primei soluții particulare: numărul de hectare semănate cu grâu în prima săptămână este de $40ha$, iar în a doua, $400 - 40 = 360(ha)$.

Numărul de hectare de porumb semănate în prima săptămână este $160ha$ și se vede că $40 = \frac{1}{4}\cdot 160$.

Numărul de hectare de porumb semănate în a doua săptămână este: $250 - 160 = 90(ha)$.
Ca verificare: $90 = \frac{1}{4} \cdot 360$.

Răspuns. În prima săptămână s-au semănat $\frac{pb - p^2 a}{1 - p^2}$ (ha) de grâu.

Exemplul 12.4. Producţia zilnică a unei echipe de muncitori era, după plan de 19800 de piese. Întroducerea de utilaj modern a făcut ca norma zilnică a fiecărui muncitor să crească cu n piese. Astfel, dacă ar fi fost cu 18 muncitori mai puţini în echipă, s-ar fi produs tot atît cît înainte de întroducerea utilajului. Aplicîndu-se apoi oinovaţie, productivitatea fiecărui muncitor a crescut din nou cu acelaşi număr de unităţi, astfel că dacă ar fi fost cu 33 de muncitori mai puţini în echipă, faţă de numărul iniţial, s-ar fi produs tot atît cît se producea la început.
a)Cîţi muncitori au fost la început şi care era norma?
b)Cu cît s-a mărit norma de fiecare dată?

Rezolvare**.** Notăm numărul lucrătorilor cu x, atunci

$$xn = 19800 (1).$$

Notăm prima mărime anormei cu y. Vom avea ecuaţia:

$$(x - 18)(n + y) = 19800 (2).$$

A doua mărime a normei este tot y. În total, norma sa mărit cu $2y$. Rezultă ecuaţia:

$$(x - 33)(n + 2y) = 19800 (3).$$

Obţinem sistemul:

$$\begin{cases} xn = 19800 \\ (x - 18)(n + y) = 19800 \\ (x - 33)(n + 2y) = 19800 \end{cases}$$

format din trei ecuaţii cu trei necunoscute. Pentru rezolvare vom proceda astfel:

împărţim prima ecuaţie la a doua şi apoi prima ecuaţie la a treia. Obţinem sitemul:

$$\text{I.}\ \begin{cases} \frac{xn}{(x-18)(n+y)} = 1 \\ \frac{xn}{(x-33)(n+2y)} = 1 \end{cases} \text{sau}\ \ \text{II.}\ \begin{cases} xy - 18n - 18y = 0 \\ 2xy - 33n - 66y = 0 \end{cases}$$

Înmulţim prima ecuaţie a cestui sitem cu -2 şi adunînd celeldouă ecuaţii obţinem:

$$3n - 30y = 0,$$

de unde $n = 10y$ sau $y = \frac{n}{10}$. Deci mărimea normei (y) este de 10 ori mai mică decît norma, sau 10% din normă. Urmează să aflăm norma. Înlocuind valoarea lui n în prima ecuaţie a sistemului I, obţinem: $xy = 1980$, care înlocuită în prima ecuaţie a sistemului II, în care se înlocueşte şi y cu valoarea sa, ne dă:

$$1980 - 18\mathrm{n} - \frac{18\mathrm{n}}{10} = 0$$

$$198\mathrm{n} = 19800$$

$$\mathrm{n} = 100$$

Deci $\mathrm{y} = 10$ şi deoarece $\mathrm{xy} = 1980$, $\mathrm{x} = 198$.

Răspuns . Erau 198 de muncitori, iar norma s-a mărit de 100 piese. Norma sa mărit de fiecare dată cu 10 piese.

Exemplul 12. 5. Perimetrul unui triunghi isoscel este egal cu p, iar una din laturi este agală cu a. Aflați laturile triunghiului. Cîte soluții are problema pentru diferite valori a parametrului a?

Rezolvare.

1)Dacă a este lungimea bazei trunghiului, atunci latura laterală are lungimea egală cu $\frac{p-a}{2}$. Aplicînd inegalitatea triunghiului, obținem sistemul

$$\begin{cases} \frac{p-a}{2} < \frac{p-a}{2} + a, \\ a < \frac{p-a}{2} + \frac{p-a}{2}, \end{cases} \text{de unde}$$

$$\begin{cases} a > o, \\ a < \frac{p}{2}. \end{cases}$$

2)Dacă a este lungimea laturii laterale, atunci perimetrul $p - 2a$ este lungimea bazei și deci

$$\begin{cases} p - 2a < a + a \\ a < p - 2a + a, \end{cases} \text{de unde} \begin{cases} a > \frac{p}{4}, \\ a < \frac{p}{2}. \end{cases}$$

Răspuns: Pentru $\frac{p}{4} < a < \frac{p}{2}$ problema are două soluții: $a, \frac{p-a}{2}, \frac{p-a}{2}$ și $a, a, p - 2a$; pentru $0 < a < \frac{p}{4}$ problema are o singură soluție : $a, \frac{p-a}{2}, \frac{p-a}{2}$; pentru $a \leq 0$ și pentru $a \geq \frac{p}{2}$ problema nu are soluții.

Exemplul 12.6. De aflat înălțimea triunghiului isoscel latura bazei căruia este egală cu a, iar raza cercului circumscris este
egală cu R.

Rezolvare. Deoarece vîrful, opus bazei trunghiului , poate să aparțină unuia din unghiuri, poate să aparțină unuia din cele două arce ale cercului circumscris(adică în semiplane diferite în raport cu dreapta, ce conţine baza triunghiului), atunci problema va avea două soluții:dacă unghiul opus bazei, este ascuțit, atunci distanța de la centrucercului pînă la baza triunghiului va fi egală cu $h - R$, unde h este înălțimea dusă pe baza triunghiului. Atunci , conform teoremei Pitagora Fig. 52, Fig. 53

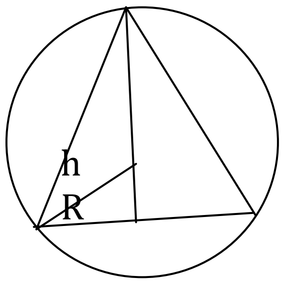


Fig. 52

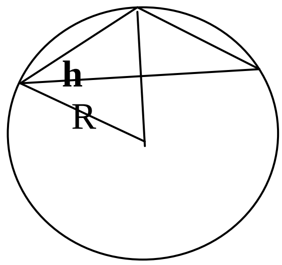


Fig. 53

$$R^2 = (\frac{a}{2})^2 + (h - R)^2$$

,

de unde obținem o ecuație pătrată în raport cu$h$:

$$h^2 - 2Rh + \frac{a^2}{4} = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații sunt numerele

$$h_{1,2} = R \pm \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Dacă însă unghiul , opus bazei triunghiuluieste optuz, atunci distanța de la centrucercului pînă la baza triunghiului va fi egală cu $R - h$ și prin urmare

$$R^2 = (\frac{a}{2})^2 + (R - h)^2$$

deunde primim aceiași ecuație pătrată , cu aceleași rădăcini.

Răspuns: $R \pm \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}$, pentru $a < 2R$.

Făcînd cunoştinţă cu rezolvarea celor mai simple ecuaţii trigonometrice este de dorit să rezolvăm cu elevii probleme geometrice rezolvarea cărora se reduce la compunerea ecuaţiilor trigonometrice.

În aşa mod se demonstrează că ecuaţiile trigonometrice au un izvor practic.

Exemplul 12.7. Linia medie împarte aria unui trapez isoscel circumscris în raportul $1: n$. De aflat mărimea unghiului ascuţit.

Rezolvare. Fie MN este linia medie în trapezul $ABCD$. Să notăm $\widehat{OAF} = x$, atunci $\widehat{BAF} = 2x$.

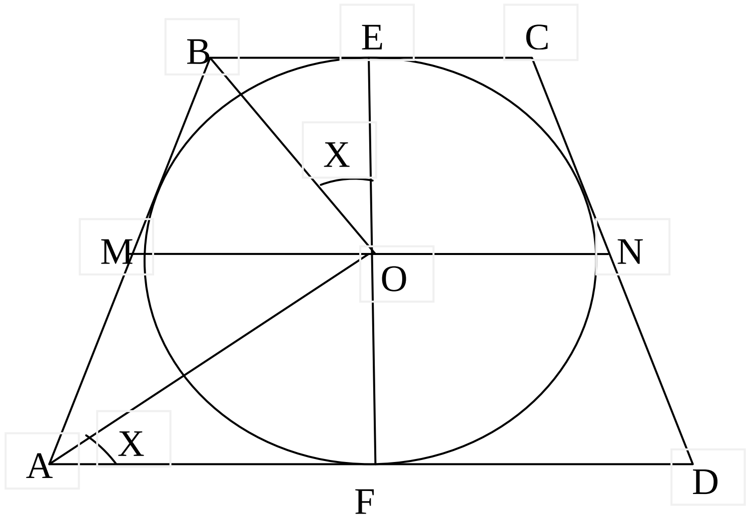


Fig. 54

Deoarece trapezele $MBCN$ şi $AMND$ au aceeaşi înălţime, atunci

$$\frac{MN+BC}{AD+MN} = \frac{1}{n} \qquad (1)$$

În (1) înlocuim bazele trapezelor cu jumătăţile lor şi obţinem:

$$\frac{MO+BE}{AF+MO} = \frac{1}{n}(2)$$

Deoarece $MO = \frac{BE+AF}{2}$, atunci din (2), obţinem:

$$\frac{3BE+AF}{BE+3AF} = \frac{1}{n}. \ (3)$$

Din triunghiurile BOE şi AOF avem:

$BE = rtgx,\ AF = \frac{r}{tg\,x}$.

Înlocuim în (3) şi obţinem:

$$\frac{3tg^2x+1}{tg^2x+3} = \frac{1}{n},\ tg^2x = \frac{3-n}{3n-1}.$$

Deoarece $tg^2x > 0$ şi $x < \frac{\pi}{4}$, atunci $tg^2x < 1$.

Prin urmare, $0 < \frac{3-n}{3n-1} < 1,\ 1 < n < 3$.

Răspuns: $\widehat{BAD} = 2arctg\sqrt{\frac{3-n}{3n-1}}$, unde $1 < n < 3$.

Exemplul 12.8. Una din laturile trapezului coincide cu diametrul cercului circumscris, iar perimetrul este de n ori mai mare decît raza acestui cerc. De aflat unghiul ascuţit al trapezului.

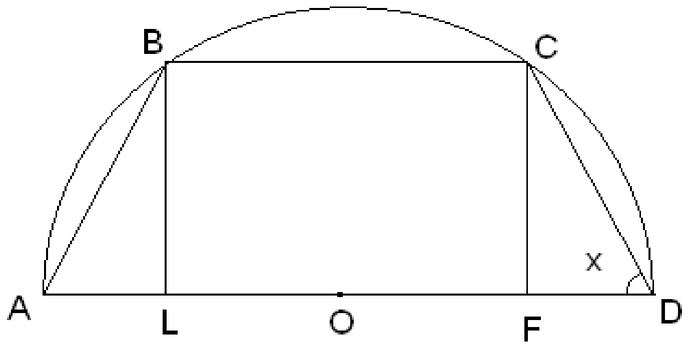


Fig. 55

Rezolvare. Fie $ABCD$ trapezul dat, O - centrul cercului circumscris, BL, CF - înălţimile trapezului, $OE \perp CD$, R - raza cercului circumscris şi x mărimea unghiului ascuţit al trapezului.Perimetrul

$P = AD + BC + 2CD = AD + (AD - 2FD) + 4DE = 4R - 2FD + 4DE$

Din triunghiurile ODE şi CDF, avem: $DE = R\,cosx$ şi $FD = CD\,cosx = 2Rcos^2x$.

Din condiţiile problemei, avem:$4R - 4cos^2x + 4R\,cosx = nR$, sau

$4 - 4cos^2x + 4\,cosx = n$.

Rezolvînd ultima ecuaţie, obţinem:$cosx = \frac{1 \pm \sqrt{5-n}}{2}$.

Evident, $n \leq 5$ şi $0 < \frac{1 \pm \sqrt{5-n}}{2} < 1$. Din inecuaţia dublă avem $n > 4$. Aşa dar, $x = arccos\frac{1 \pm \sqrt{5-n}}{2}$, $4 < n \leq 5$.

Să ne închipuim că punctele B şiC se apropie alunecând pe cerc. Atunci mărimile unghiurilorBAD şi CDA se vor micşora. În momentul când aceste puncte vor coincide trapezul se va transforma într-un triunghi dreptunghic isoscel, unghiul de la baza căruia va avea$45°$. Prin urmare, $45° < x < 90°$ şi $0 < cosx < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Observăm că $\frac{1 \pm \sqrt{5-n}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ are loc pentru orice valoare admisibilă $n \in (4, 5]$, iar $\frac{1 \pm \sqrt{5-n}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ are loc pentru $n > 2(1 + \sqrt{2})$.

Răspuns. Dacă $4 < n < 2(1 + \sqrt{2})$ problema are o soluţie $x = arccos\frac{1 \pm \sqrt{5-n}}{2}$, iar dacă $2(1 + \sqrt{2}) < n < 5$ problema are două soluţii $x = arccos\frac{1 - \sqrt{5-n}}{2}$. O singură soluţie $x = 60°$ problema are şi pentru $n = 5$.

Exemplul 12.9. Latura laterală a unui triunghi isoscel este egală cu a, iar lungimea segmentului dus din vârful triunghiului şi care împarte unghiul în raportul $1: 2$ este egală cu b. De aflat mărimea unghiului de la vârful triunghiului.

Rezolvare. Fie $\widehat{ABD} = x$, atunci $\widehat{CBD} = 2x$. Evident, $x < 60°$.

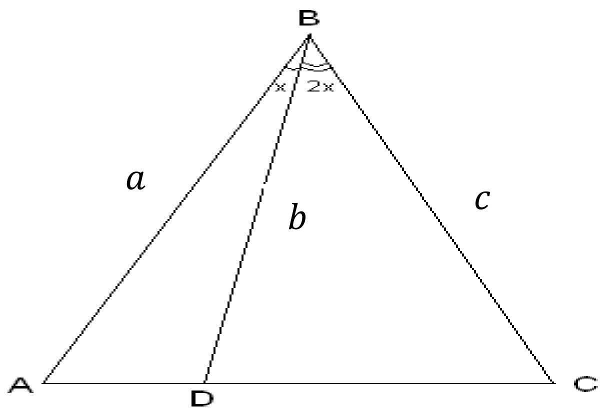


Fig. 56

Deoarece $S_{ABD} + S_{DBC} = S_{ABC}$, atunci $\frac{1}{2}ab\ sinx + \frac{1}{2}ab\ sin2x = \frac{1}{2}a^2 sin3x$,

$b\ sinx + b\ sin2x = a\ sin3x$,

$b\ sinx + 2b\ sinx\ cosx = 2a\ sinxcos^2x + a\ cos2x\ sinx$,

$b + 2b\ cosx = 2a\ cos^2x - a\ sin^2x$,

$4a\ cos^2x - 2b\ cosx - (a+b) = 0$,

$cosx = \frac{b\pm(2a+b)}{4a}$. Deoarece $cosx = \frac{b-(2a+b)}{4a} < 0$, rămâne că $cosx = \frac{b+(2a+b)}{4a} = \frac{a+b}{2a}$.

Din condiţia problemei $0 < b < a$.

Răspuns. $3arccos\frac{a+b}{2a}$, $0 < b < a$.

Exemplul 12. 10. Conul şi cilindrul au baze şi înălţimi comune. Ariile totale se raportă $1{:}\,n$. De aflat unghiul dintre generatoarea conului şi planul bazei.

Rezolvare. Să cercetăm secţiunea axială a acestor corpuri. (Fig.57)

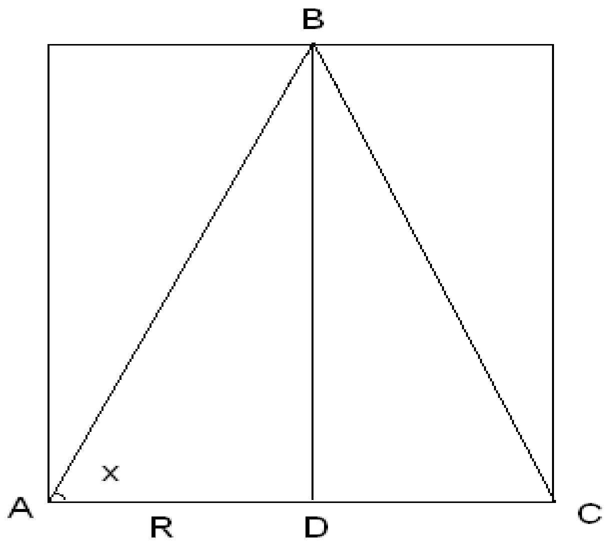


Fig. 57

Din condiţiile problemei avem:

$\frac{\pi R(R+L)}{2\pi R(R+H)} = \frac{1}{n}$, $\frac{R+L}{2(R+H)} = \frac{1}{n}$.

Fie $\widehat{BAC} = x$, atunci din ΔABD, obţinem:

$R = L\ cosx$, $H = L\ sinx$.

Prin urmare, $\frac{L\ cosx+L}{2(L\ cosx+L\ sinx)} = \frac{1}{n}$, $\frac{1+cosx}{2(cosx+sinx)} = \frac{1}{n}$.

Exprimăm $sinx$ şi $cosx$ prin tangenta jumătăţii de argument şi obţinem:

$tg^2\frac{x}{2} - 2\,tg\frac{x}{2} + n - 1 = 0,\ tg\,\frac{x}{2} = 1 \pm \sqrt{2-n}(n \leq 2).$
Deoarece $\frac{x}{2} < 45°$, urmează că $tg\,\frac{x}{2} < 1$ şi atunci $tg\,\frac{x}{2} = 1 + \sqrt{2-n}$nu satisface acestui condiţii. Rămîne că $tg\,\frac{x}{2} = 1 - \sqrt{2-n}$. Determinăm acele valori a parametrului n pentru care $0 < tg\,\frac{x}{2} < 1$. Pentru aceasta rezolvăm inecuaţia dublă $0 < 1 - \sqrt{2-n} < 1$ şi obţinem: $1 < n < 2$.

Răspuns. $2\,arctg\left(1 - \sqrt{2-n}\right)$, unde $1 < n < 2$.

Exemplul 12. 11. Baza une piramide este un triunghi lungimea laturii căreia este egală cu a. Două muchii laterale formează cu planul bazei unghiuri, mărimea cărora este egală cu β, iar fața mărginită de aceste două muchii formează cu planul bazei un unghi de mărimea α. Aflați volumul piramidei.

Rezolvare. Această problemă este o problemăgeometrică de calcul ce conține parametri. Deaceiatrebue în primul rînd de stabilit domeniile admisibile ale parametrilor. Evident, că
a-lingimea laturii triunghiului din bază poate fi orice număr pozitiv, adică $a > 0$ (1).
Unghiurile de mărime α, ca unghiuri formate de muchiile laterale cu planul bazei, pot fi doar ascuțite:$0 < \alpha < 90^0$. (2)
În ce privește mărimea unghiurilor diedre dintre fața laterală și planul bazei, apoiacestă mărime se poate schimba de la 0^0 pînă la180^0:$0 < \beta < 180$. (3)
Evident, imaginea piramidei esențial va depinde de faptul , cum este înclinată fața laterală către planul bazei, adică de mărimea β. Sunt posibile 3 cazuri:
$0^0 < \beta < 90^0$;2)$\beta = 90^0$;3)$90^0 < \beta < 180^0$.

Acestor trei cazuri corespundtrei feluri de piramide, reprezentate în Fig. 58, Fig. 59, Fig. 60.

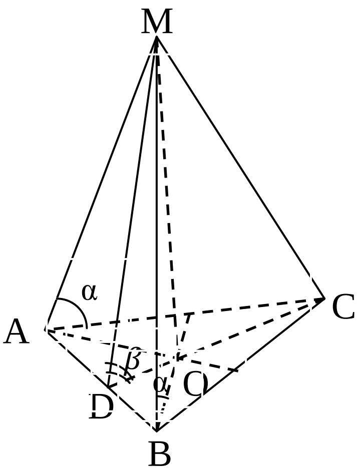


Fig. 58

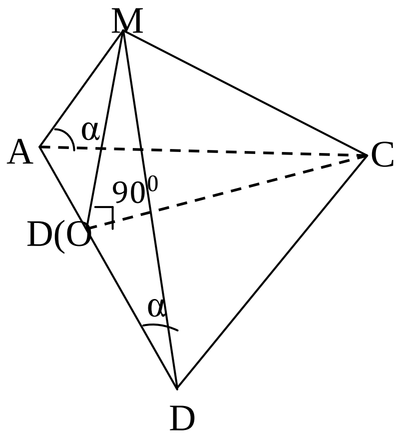


Fig. 59

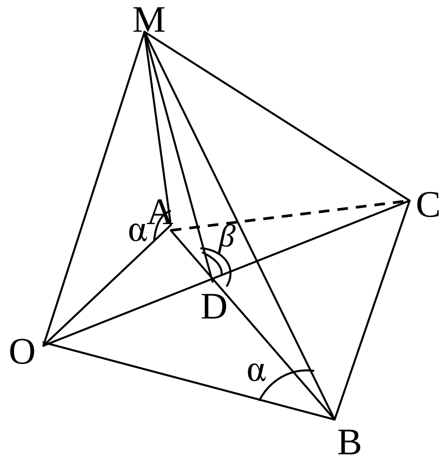


Fig. 60

Pentru ca să construim unghiurile de înclinațiea muchiilor AM și BM cu planul bazei, coborîm din vîrful M perpendiculara MO pe planul bazei. Atunci , evident, AO și BO vor fi proiecțiile muchiilor AM și BM și , prin urmare, unghiul MAO și ungiul MBO vor fi unghiuri date în problemă de mărimea α. Pentru a construi unghiul liniar al unghiului diedru format de fața AMB cu planul bazei, construim OD perpendicular la AB(Observăm că în Fig.59 punctele O şi D coincid). Atunci, conform teoremei celot trei perpenidiculare DM este perpendiculară pe AB. Așa dar , înălțimea MD trece prin mijlocul segmentului AB. Avînd în vedere că triunghiul ABC este regulat, înseamnă că prelungirea lui OD trebue să treacă prin vîrful C. Atunci unghiul COM și este unghiul liniar aunghiului diedru dat. Conform formulei de calculare a volumului piramidei, avem:

$$V = \frac{1}{3}Sh, \quad (4)$$

unde$S$-aria tringhiului ABC, iar h=MO.

Deoarece ΔABC este regulat cu latura de lungimea egală cu a, atunci

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} (5)$$

Rămîne să găsim h. Cel mai simplu este să găsim h pentru $\beta = 90^0$ (Fig.59). Din triunghiul dreptunghic AOM, unde $AO = \frac{a}{2}$, găsim:

$$h = OM = AO\ tg\ OAM = \frac{a}{2}\ tg\ \alpha.\ (6)$$

Înlocuid valorile penttru S și h din (5) și (6) în formula (4), obținem în cazul dat, că

$$V = \frac{a^3\ tg\ \alpha\sqrt{3}}{24}.\ (7)$$

În celelalte cazuri se poate de procedat astfel:
din triunghiul dreptunghic AOM, găsim:

$$AO = OM : tg\ OAM = \frac{h}{tg\ \alpha}.\ (8)$$

din triunghiul dreptunghic ODM, avem:

$$OD = \frac{OM}{tg\ ODM} = \frac{h}{tg\ ODM}.$$

Pentru cazul, cînd β este ascuțit, avem:

$$OD = \frac{h}{tg\ \beta}.\ (9)$$

Pentru cazul, cînd β este optuz, avem:

$$OD = \frac{h}{tg(180-\beta)} = -\frac{h}{(tg\ \beta)}.\ (10)$$

Din triunghiul dreptunghic ADO, unde $AD = \frac{a}{2}$ avem:

$$\frac{a^2}{4} = AO^2 - OD^2.$$

Înlocuid în ultima egalitate valorile pentru AO și OD din (8) și (9) sau (10), obținem:

$$\frac{a^2}{4} = h^2\left(\frac{1}{tg^2\alpha} - \frac{1}{tg^2\beta}\right).$$

Din ultima egalitate, avem:

$$h^2 = \frac{a^2\, tg^2\alpha\, tg^2\beta}{4(tg^2\beta - tg^2\alpha)}.$$

Ultima expresie are loc numai atunci, cînd

$tg^2\beta - tg^2\alpha > 0$ sau $\frac{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)}{cos^2\,\alpha\, cos^2\,\beta} > 0$,

de unde obținem:

$$\beta > \alpha \ (11)$$

și

$$\alpha + \beta < 180^0. \ (12)$$

Aceste condiții precizează domeniul valorilor admisibile ale parametrilor. Dacă aceste condiții se satisfac, atunci:

$$h = \frac{a|tg\,\alpha||tg\,\beta|}{2\sqrt{tg^2\beta - tg^2\alpha}}.$$

Avînd în vedere (2)pentru cele două cazuri cercetate, obținem:

$$h = \begin{cases} \dfrac{a\,tg\,\alpha\,tg\,\beta}{2\sqrt{tg^2\beta - tg^2\alpha}} (0^0 < \beta < 90^0), \\ -\dfrac{a\,tg\,\alpha\,tg\,\beta}{2\sqrt{tg^2\beta - tg^2\alpha}} (90^0 < \beta < 180^0). \end{cases}$$

Înlocuind valoarea pentru h în formula (4), găsim:

$$V = \begin{cases} \dfrac{a^3\sqrt{3}\,tg\,\alpha\,tg\,\beta}{24\sqrt{tg^2\beta - tg^2\alpha}} (0^0 < \beta < 90^0), \\ -\dfrac{a^3\sqrt{3}\,tg\,\alpha\,tg\,\beta}{24\sqrt{tg^2\beta - tg^2\alpha}} (90^0 < \beta < 180^0). \end{cases}$$

În cazul dat verificarea soluţiei se reduce la convingerea că după formulele obţinute într-adevăr de poate calcula V astfel încît volomul să fie pozitiv. Cercetînd formulele obţinute pentru V în toate cele 3 cazuri şi avînd în vedere condiţiile probelemei, uşor ne încredinţăm în satisfacerea acestei condiţii. Prin urmare, răspunsul problemei este:

$$V = \begin{cases} \dfrac{a^3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha\ tg\ \beta}{24\sqrt{tg^2\beta - tg^2\alpha}} & (0^\circ < \beta < 90^\circ) \\ \dfrac{a^3\sqrt{3}\,tg\alpha}{24} & (\beta = 90^\circ) \\ -\dfrac{a^3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha\ tg\ \beta}{24\sqrt{tg^2\beta - tg^2\alpha}} & (90^\circ < \beta < 180^\circ) \end{cases}$$

Dacă cercetăm atent rezolvarea propusă de mai sus , obținem în primul rînd , că la rezolvarea a astfel de probleme este important ca la început să determinăm domeniul de variație a parametrilor. Se vede însă, că nemijlocit din condițiile problemei aceste domenii de variație nu întotdeauna pot fi determinate. În cazul dat în procesul rezolvării noi considerabil am precizat domeniul găsit, determinînd adăugător comdițiile (11) și (12). Prin urmare, rezolvînd asemenea probleme trebue analizat fiecare pas a rezolvării din punct de vedere a îndeplinirii acestuia pentru condițiile date, sau cele găsite inițial și precizîndule, de micșorat domeniile de variație a parametrilor, astfel se poate de găsit h pentru cazurile unghiurilor ascuţite şi obtuze în felul următor:

$$h^2 = \frac{a^2 tg\ \alpha\ tg\beta}{4(tg^2\beta - tg^2\alpha)} = \frac{a^2 sin^2\alpha\ sin^2\beta}{4\sin(\beta-\alpha)sin(\beta+\alpha)}.$$

Dacă au loc condiţiile (11) şi (12), atunci pentru ambele cazuri cercetate obţinem una şi aceeaşi formulă :

$$h = \frac{a\ \sin\ \alpha\ \sin\ \beta}{2\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}\ .$$

Atunci răspunsul problemei va avea forma:

pentru $\beta > \alpha > 0^{\circ}, \alpha < 90^{\circ}, \alpha + \beta < 180^{\circ}$

$$V = \begin{cases} \dfrac{a^3\sqrt{3}\, tg\, \alpha}{24} \quad , dacă\ \beta = 90^0, \\ -\dfrac{a^3\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta}{24\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}\ dacă\ \beta \neq 90^0. \end{cases}$$

Exemplul 12. 12. O sferă de diametrul $d$este înscrisă într-o piramidă triunghiulară regulată. De aflat muchia lateralăa piramidei dacă latura bazei este egală cu a.

Rezolvare.

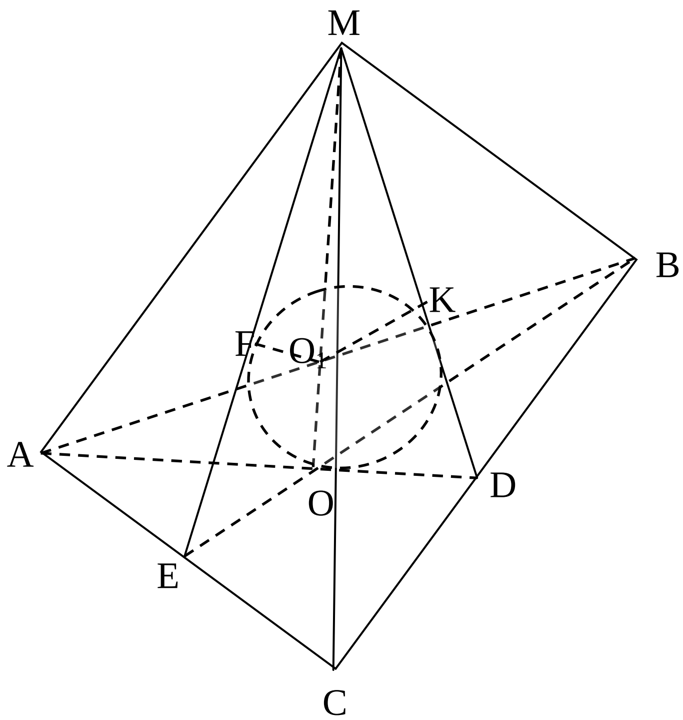


Fig. 61

Sfera este tangentă la toate fețele piramidei:baza ABC în punctul O, punct de intersecție a medianelor [AD] și [BE] , fețele laterale în puncteleK și F, ce aparțin corespunzător [MD] și [ME]. Centul sferi O_1 aprține înălțimii piramidei [MO].

Să observăm , că $|O_1O| = |O_1K| = \frac{d}{2}$. Deoarece piramida este regulată, urmează că

$|MA| = |MB| = |MC|, |AB| = |AC| = |BC| = a,$

$m\sphericalangle MAO = m\sphericalangle MBO = m\sphericalangle MCO, m\sphericalangle MDO = m\sphericalangle MEO.$

Pentru a afla muchia piramidei vom afla la început $|AO|$ și $|MO|$

Evident, $|AD|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $|AO|=\frac{2}{3}$, $|AD|=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $|OD|=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Să observăm că $\Delta MOD și \Delta MKO_1$ sunt dreptunghice și au un unghi ascuțit comun. Din asemănarea acestor triunghiuri, avem:

$$\frac{|O_1K|}{|OD|}=\frac{|O_1M|}{|MD|}. \ (1)$$

Fie$|OM|=h$, atunci $|O_1M|=h-\frac{d}{2}$.

Din ΔMOD, avem:

$|MD|=\sqrt{h^2+|OD|^2}$ sau $|MD|=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$.

Înlocuim valorile obținute pentru $|O_1\text{K}|$, $|OD|$, $|O_1\text{M}|$ și$|MD|$ în (1) și obținem:

$$\frac{\frac{d}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}=\frac{h-\frac{d}{2}}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}} \Rightarrow \frac{d^2}{a^2}=\frac{(2h-d)^2}{12h^2+a^2}$$

Din ultima ecuație, avem:

$h_1=0$, $h_2=\frac{a^2d}{a^2-3d^2}$. Evident, $h=\frac{a^2d}{a^2-3d^2}$.

Problema dată are soluții pentru $a>0, h>0, d>0$ și $h>d\sqrt{3}$

Din ΔAOM, avem:

$$|AM|=\sqrt{|AO|^2+|OM|^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{9}+\frac{a^4d^2}{(a^2-3d^2)^2}}=$$

$$=\frac{a}{3(a^2-3d^2)}\sqrt{3(a^2-3d^2)^2+9a^2d^2}=$$

$$=\frac{a}{3(a^2-3d^2)}\sqrt{3a^4+27d^4-9a^2d^2}.$$

Răspuns: Pentru $a>0, d>0, a>d\sqrt{3}$,

$|AM| = \frac{a}{3(a^2-3d^2)}\sqrt{3a^4+27d^4-9a^2d^2}$.

Probleme pentru lucru sinestător.

1. Două tractoare lucrând împreună, pot ara un lot de pământ în a zile. Dacă primul tractor ar ara jumătate din lot, iar al doilea restul lotului, atunci lotul ar fi arat în b zile. În câte zile pot ara lotul fiecare tractor, lucrând de unul singur.
Răspuns. $\emptyset$ pentru $a \leq 0$ sau $b \leq 0$ sau $0 < b < 2a$;
$(b-\sqrt{b^2-ab}, b+\sqrt{b^2-ab})$,
$(b+\sqrt{b^2-2ab}, b-\sqrt{b^2-2ab})$ pentru $b > 2, a > 0$.
2. Un pătrat este înscris într-un triunghi dreptunghic astfel încît două laturi sunt situate pe catetele triunghiului. Aria pătratului este de n ori mai mică decît aria triunghiului. Aflaţi unghiurile triunghiului.
Răspuns.
$\frac{\pi}{2}+arctg\left(n-1\pm\sqrt{n^2-2n}\right)(n\geq 2)$ şi
$\frac{\pi}{2}-arctg\left(n-1\pm\sqrt{n^2-2n}\right)(n\geq 2)$.
3. O latură a pătratului aparţine bazei triunghiului isoscel circumscris pătratului, iar latura opusă a pătratului taie de la vîrf un triunghi aria căruia este de$n$ ori mai mică decît aria triunghiului circumscris pătratului. Aflaţi unghiul de la baza triunghiului circumscris.
Răspuns. $arctg\,\frac{2(1+\sqrt{n})}{n-1}, n > 1$.
4. Un pătrat este înscris într-un triunghi dreptunghic astfel încît o latură aparţine ipotenuzei, iar două vîrfuri aparţin catetelor. De aflat mărimea unui unghi ascuţit al triunghiului, daca aria pătratului este de n ori mai mică decît aria triunghiului.

Răspuns. $\frac{1}{2} arcsin\, 2\left(n-1-\sqrt{n^2-2n}\right), n \geq 2\frac{1}{4}$.

5. Pe latura unghiului de la vîrful A este depus segmentul AB. Din punctul B este dusă pe cealaltă latură a unghiului perpendiculara BC. Din punctul C pe AB este dusă perpendiculara CD. Din punctul D este dusă perpendiculara DE la latura AC ş. a. m. d. Limita perimetrului liniei frînte obţinute este de n ori mai mare decît lungimea segmentului AB. Aflaţi mărimea unghiului$A$.

Răspuns. $2\, arctg\, \frac{1}{n}, n > 1$.

6. Într-o prismă triunghiulară regulată este dusă o secţiune prin muchia bazei şi vîrful opus. De aflat mărimea unghiului diedru dintre planul secţiunii şi planul bazei, dacă aria secţiunii este de n ori mai mică decît aria totală a prismei.

Răspuns. Dacă $2 < n \leq 6$, atunci $2\, arctg \frac{6-\sqrt{40-n^2}}{n+2}$; dacă $6 < n < \sqrt{40}$, atunci $2\, arctg \frac{6+\sqrt{40-n^2}}{n+2}$.

7. Aria totală a conului este de n ori mai mare decît aria sferei înscrise. De aflat mărimea unghiului de la vîrful secţiunii axiale a conului.

Răspuns. $\pi - 4\, arccos \sqrt{\frac{3n \pm \sqrt{n^2-2n}}{4n+1}}, n > 2$.

8. Aflați linia mijlocie a trapezului, dacă una din baze are lungimea egală cu a, iar diagonalele se împart de punctual lor de intersecție în raportul $\frac{m}{n}$, unde $m > n$.

Indicație. În problemă nu se arată, lungimea cărei baze este egală cu a, a celei mai mari sau a celei mai mici. Acestă nedeterminare și va servi în calitate de parametru în problema dată.

Răspuns:$\frac{a(m+n)}{2n}$ sau $\frac{a(m+n)}{2m}$.

9. Mărimea unghiului ABC este egală cu 60^0,
$|AB| = |BC| = a$. Cercul cu central în punctul O_1, este tangent la AB în punctual A, cercul cu central în punctul O_2, este tangent la BC în punctual C. Aflați razele cercurilor , dacă se știe că raportul lor este egal cu 2.

Indicații. În problema dată fiecare din centrele O_1sau O_2 poatefi situate cum în interiorul unghiului ABC, așa si în exteriorul acestui unghi. Deaceia problema dată se descompune în patru variante diferite:

1) Ambele centre ale cercurilor sunt situate în interiorul unghiului;

2) Ambele centre ale cercurilor sunt situate în exteriorul unghiului;

3) Centrul cercului mai mare aparține interiorului unghiului, iar centrul cercului mai mic aparține exteriorului acestui unghi .

4) Centrul cercului mai mic aparține interiorului unghiului, iar entrul cercului mai mare aparține exterioruluiacestui unghi.

Aceste posibilități ne aduc la patru perechi de raspunsuri.

Răspuns:

1) $\frac{\sqrt{35}-3\sqrt{3}}{4}a$ și $\frac{\sqrt{35}-3\sqrt{3}}{2}a$;

2) $\frac{\sqrt{35}+3\sqrt{3}}{4}a$ și $\frac{\sqrt{35}+3\sqrt{3}}{2}a$;

3) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ și $\frac{a\sqrt{3}}{3}$;

4) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ și $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Calmuţchi. Metodologia rezolvării ecuaţiilor şi inecuaţiilor cu parametri. Chişinău, 2010, 221p.
2. Gr. Gheba. Culegere de exerciţii şi probleme de matematică. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti – 1967, 459p.
3. I. Lupu. Metodologia rezolvării problemelor de matematică cu un grad sporit de dificultate. Chişinău, 2011, Combinatul poligrafic din Chişinău, 224p.
4. Н. П. Антонов, М. Я. Выгодский, А. И. Санкин. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ. – Москва, 1964.
5. Е. Е. Вересова, Н. С. Денисова, Т. Н. Полякова. ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. – М. , Просвещение, 1979.
6. Е. А. Ефимов, Л. В. Коломиец. Задачи с параметрами. Самара, 2006, 64 с.
7. Говоров В. М. СБОРНИК КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ С МЕТОДИЧЕСКИМИ УКАЗАНИЯМИ И РЕШЕНИЯМИ. – М. , Наука, 1986 г. , с. 30-61, с. 67-118.
8. А. И. Козко, В. Г. Чирскиь. Задачи с параметрами и другие сложные задачи. Москва МЦНМО, 2007, 296 с.
9. В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. – М. , Просвещение, 1984.
10. Черкасов Р. С. , Столяр А. А. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ. – М. , Просвещение, 1980 г. , с. 148-183, с. 299-325.

11. Шарыгин И. Ф. ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ. Решение задач. - Просвещение, 1989 г. , с. 17-48.
12. И. У. Шахно. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ. – Минск, 1965.
13. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ ВО ВТУЗЫ. Под редакцией М. И. Сканави. – М. , Наука, с. 80-137.
14. ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС: ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ. (9 кл.) – М. , Просвещение, 1979 г.
15. ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС: ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ. (10 кл.) – М. , Просвещение, 1980 г.
16. Журналы “МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ”. – М. , 1960-2010.

Universitatea de Stat din Tiraspol – prima instituţie de învăţămînt superior din Republica Moldova

1 octombrie 2015 este o dată remarcabilă pentru comunitatea universitară și academică din Republica Moldova. Cu 85 de ani în urmă, în 1930, prin fondarea instituției date a fost pusă temelia învățământului superior în țara noastră, iar pe parcursul existenței ei, a avut un rol deosebit în dezvoltarea învățământului general a științei și culturii în republica noastră. Deși a fost preconizată forjerie de cadre didactice, instituția a pregătit un număr impunător de savanți, oameni de cultură, scriitori, personalități în activitatea socială și politică. Pe parcursul a opt și jumătate decenii denumirea instituției a fost schimbată în repetate rânduri, iar din 1992 ea activează cu statut de Universitatea de Stat din Tiraspol. Universitatea și-a păstrat denumirea, tradițiile, corpul profesoral-didactic și științific și după 1992, când a fost silită de forțele separatiste antinaționale să se evacueze la Chișinău.

Totodată trebuie de subliniat că calea parcursă de universitate este destul de dramatică și reflectă întocmai fenomenele sociale prin care a trecut și trece Republica Moldova.

Anul de studii 1992-1993 începe la Chișinău în condiții extrem de grele. Lipsită se suportul material acumulat timp de jumătate de secol, Universitatea reușește să activeze totuși în ritmuri stabile, fiind ajutată de conducerea Republicii Moldova, de universitățile și centrele științifice din Chișinău.

Pe parcursul anilor de după anul 1992 a fost creată o bază materială proprie, suficientă pentru a continua procesul de studii și de cercetare.

Pe parcursul a celor 85 de ani de activitate în universitate au fost pregătiți peste 75000 de specialiști la toate disciplinele școlare de bază: filologie, matematică, fizică, astronomie, chimie, informatică, biologie, geografie, instruire primară și educație preșcolară. Astăzi absolvenții universității pot fi întâlniți în toate gimnaziile, liceele, în aulele universităților, în instituții științifice, organizații de stat din RM. Păstrându-și profilul pedagogic, Universitatea participă activ la perfecționarea profesorilor școlari, implementarea inovațiilor curriculare în învățământul preșcolar, primar, gimnazial și liceal, elaborează și editează programe didactice și manuale pentru aceste cicluri. În acest an specialitațile , , Matematica" și „Informatica" au fost primele specialitați din republică acreditate de o comisie internațională formată de specialiști din Germania și România. UST pe bună dreptate se consideră un patrimoniu național istoric al Republicii Moldova.

De rând cu activitatea de pregătire a cadrelor didactice în Universitate se desfăşoară şi o amplă activitate investigaţională, se efectuează cercetări în conformitate cu direcţiile naționale prioritare ale cercetării-dezvoltării, care abordează probleme cu caracter fundamental și aplicativ în domeniile ştiinţelor reale (matematica, fizica, informatica) şi ştiinţelor naturii (biologie, geografie, chimie). Conceptele şi strategiile socio-pedagogice şi psihologice de dezvoltare a învăţământului din Republica Moldova, care constituie o altă direcţie importantă de cercetare aplicativă în cadrul UST, sunt în deplină concordanţă cu tendinţele contemporane de integrare în Sistemul Educaţional European.

Actualmente Universitatea își continuă activitatea cu ritmuri stabile, contribuie în modul cel mai evident la pregătirea cadrelor profesoral-didactice de înaltă calificare, la modernizarea învățământului formativ în contextul integrării europene, la procesul de renaștere națională și restabilire a identității naționale.

ADMITEREA 2016

Universitatea de Stat din Tiraspol
(cu sediul la Chişinău)
Acreditată prin hotărârea Colegiului
Ministerului Educaţiei Nr. 81
din21 octombrie 2003.
Site-ul:www. ust. md

Prin Decretul Preşedintelui Republicii Moldova, 1 octombrie 2010, Universităţii i s-a conferit Ordinul
”Credinţă Patriei” clasa I

Universitatea de Stat din Tiraspol este prima instituţie de învăţământ superior din Republica Moldova, fondată la 1 octombrie 1930. Din anul 1992 universitatea se află în municipiul Chişinău.
Pe parcursul a 85de ani UST a format la facultăţile sale peste 75 mii de specialişti, iar mulţi dintre ei au devenit personalităţi marcante în diverse domenii - învăţământ preuniversitar şi universitar, savanţi în pedagogia şi economia naţională, în cultură, scriitori. Majoritatea cadrelor profesoral – didactice din universitate deţin titluri ştiinţifice şi didactice. Universitatea îşi extinde aria de colaborare cu instituţii din ţară şi de peste hotare - România, Germania, Belgia, Spania, Suedia, Rusia, Ucraina ş. a. Studenţii beneficiază de bursă şi cămin.

LA UNIVERSITATE ACTIVEAZĂ CATEDRA MILITARĂ.

Studiile la universitate pot fi realizate la buget şi în bază de contract, cu frecvenţă la zi sau cu frecvenţă redusă, cu predare în limbile română şi rusă la următoarele facultăţi:

Admiterea pentru ciclul I : Studii superioare de licenţă

1. Facultatea Filologie

Specialităţi cu frecventă la zi :
limba şi literatura română şi limba franceză; limba şi literatura română şi limba engleză; limba şi literatura rusă şi limba română; limba şi literatura rusă şi limba engleză.
* limba şi literatura română; limba şi literatura rusă.
Specialităţi cu frecvenţă redusă :
limba şi literatura română; limba şi literatura rusă.
Telefon la facultate: 022280537

2. Facultatea Fizică, Matematică şi Tehnologii Informaţionale

Specialităţi cu frecvenţă la zi:
informatică şi matematică; informatică şi fizică; matematică şi fizică; matematică şi informatică; fizică şi informatică; fizică şi astronomie;
*informatică; matematică; fizică;
Specialităţi cu frecvenţă redusă :
matematică; informatică; fizica; fizica pentru profesorii de alte specialităţi.
Telefon la facultate :022747919

3. Facultatea Biologie şi Chimie

Specialităţi cu frecvenţă la zi :

biologie şi chimie; chimie şi fizică ; chimie şi biologie; chimie şi tehnologii informaţionale.
*biologie; chimie; ecologie; chimie şi securitate ecologică.
Specialităţi cu frecvenţă redusă:biologie; biologie cu aprofundare în sanologie; chimie.
Telefon la facultate :022280536; 022798176

4. Facultatea Geografie

Specialităţi cu frecvenţă la zi :
geografie şi biologie;geografie şi limba engleză; geografie şi limba franceză; geografie şi istorie; geografie şi informatică.
* geografie; turism.
Specialităţi cu frecvenţă redusă :
geografie; turism
Telefon la facultate : 022798419

5. Facultatea Pedagogie

Specialităţi cu frecvenţă la zi :pedagogie în învăţământul primar şi pedagogie preşcolară; pedagogie în învăţământul primar şi limba engleză; pedagogie în învăţământul primar şi psihopedagogie;
Specialităţi cu frecvenţă redusă :
pedagogie în învăţământul primar; psihopedagogie; pedagogie preşcolară.

Telefon la facultate :022750644

Durata studiilor la universitate la ciclul I este de 4 ani pentru specialităţile duble şi 3 ani pentru monospecialităţi *.

Probe la admitere ciclul I:
Conform deciziei Ministerului Educaţiei.

Actele necesare pentru admitere la ciclul de licenţă:
cerere; actul de studiimedii de specialitate sau bacalauriat(în original); certificat medical (Nr. 086 --U); buletinul de identitate (adeverinţa de naştere);6 fotografii 3x4.

Adresa Universităţii:
mun. Chişinău MD2069 str. IabIocichin, 5.
Deplasarea: cu troleibuzele Nr. l, 5, 8, 11, 23 sau microbuzele Nr. 108, 111, 123, 154, 171, 152 până la staţia „Calea Ieşilor".

Informaţii suplimentare la telefoanele:
02275-49-06;02224-07-63;02275-49-24; 02275-49-42

Ciclul II: Studii superioare

MASTERAT

Masterat de cercetare/profesionalizare

1. Facultatea Fizică, Matematică şi Tehnologii Informaţionale

(telefon - 022747919)

Ştiinţe ale Educaţiei, 120 credite:

- Matematici modeme şi tehnologii moderne de instruire
- Management şi comunicare instituţională
- Managementul educaţional
- Tehnologii informaţionale în instruire
- Fizica modernă şi tehnologii formative

2. Facultatea Biologie şi Chimie

(telefon - 022280536)

Ştiinţe ale Educaţiei, 120 credite:

- Chimie contemporană şi tehnologii educaţionale
- Biologie modernă şi tehnologiiîn instruire

Ştiinţe, 120 credite:

-Biologie aplicată
- Biologia şi psihologia sănătăţii
- Chimia ecologică

3. Facultatea Geografie

(telefon -022798419)

Ştiinţe ale Educaţiei, 120 credite:
- Geografie şi tehnologii educaţionale

Ştiinţe:
–Geoinformatica

Servicii:
– Management strategicîn turism

4. Facultatea Filologie

(telefon - 022280537)

Ştiinţe ale Educaţiei, 120 credite:
- Limba şi literatura română contemporană şi tehnologii educaţionale
- Limba şi literatura rusă contemporană şi tehnologii educaţionale

5. Facultatea Pedagogie

(telefon - 022750644)

Ştiinţe ale Educaţiei:
- Managementul educaţiei preşcolare90/ 120 credite
- Pedagogia şi metodologia invăţămîntului primar –90\120credite
- Psihopedagogia invăţămîntului preuniversitar90/120 credite

-Psihologia socială şi a familiei-120 credite

Admiterea la masterat are loc în bază de concurs cu finanţare la buget sau contract cu frecvenţă la zi

Durata studiilor:2 ani – 120 credite.

Actele pentru admitereala ciclul II: cererea; Diploma de Licenţă şi anexa(original); certificat medical – tip nr. 86-U;6 fotografii 3*4 cm. Prezintă personal buletinul de identitate şi livretul militar(premilitar).

Probe la admitere ciclul II:

Susţinerea unei probe complexe la disciplinile de profil(examen în scris); test de verificare a competenţelor lingvistice la o limbă străină şi utilizarea computerului.