Principiul inducţiei matematice

Zinaida Ghilan, dr., conf. univ.

Summary

The paper deals with some aspects of mathematical induction. The principle of mathematical induction is an important means of demonstrating the sentences. It examines a number of examples of math using the principle of mathematical induction.

Principiul inducţiei matematice este un mod de raţionament prin care se asigură faptul că obiectele din şir sunt generate corect, indiferent de poziţia termenului. Rațíonamentul inductiv are la bază construirea termenilor unui şir de obiecte în funcție de termenii anteriori (deja determinaţi).

Pentru prima dată utilizarea inducției matematice poate fi găsită în demonstrația lui Euclid, care încearcă să arate că numărul de numere prime este infinit. Renumitul savant matematician L. Euler (1707-1783) a demonstrat că în trinomul $f(x)=x^2+x+41$, înlocuind pe x cu numerele naturale $n=0, 1,2\ 3, 4, 5,$ obținem numere prime: $f(0)=41, f(1)=43, f(2)=47, f(3)=53, f(4)=61, f(5)=71$. Putem concluziona ipoteza că valoarea trinomul $f(x)$ este număr prim, pentru orice număr x natural. Însă, dacă calculăm pentru $x=40$, obținem că $f(40)= 40^2 +40 +41=41^2$, care nu este număr prim, el este și primul număr pentru care $f(x)$ nu este număr prim. Exemplu de mai sus arată că aceeași metodă de rațíonament conduce, în unele cazuri, la propoziții adevărate, iar – în altele, la propoziții false, deoarece concluzia se face după analiza a câteva exemple și nu a tuturor cazurilor posibile. Importanța inducției constă în faptul că analiza cazurilor particulare ne sugerează ipoteze.

Inducția matematică reprezintă o operaţie logică, metodă de învăţământ, metodă de cercetare prin intermediul căreia, în baza câtorva propoziţii particulare, se ajunge la o propoziţie generală. Aplicând inducția, trebuie să ținem cont de faptul că concluziile efectuate prin acest rațíonament sunt ipoteze. Rațíonamentul inductiv se deosebește de cel deductiv, deoarece deducția este rațíonamentul prin intermediul căreia, dintr-o afirmație generală și una particulară obținem o nouă concluzie particulară. În rațíonamentul deductiv fiecare pas se argumentează și toți pașii formează un sistem de concluzii logice. Este suficient de amintit că, aproximativ, toate teoremele și formulele se demonstrează și se deduc în mod deductiv. Baza sistemului deductiv este construită pe următoarele structuri:

- se stabileşte un număr de noţiuni şi relaţii fundamentale care se acceptă fără definiţii;
- se formulează sistemul de axiome în care se exprimă proprietăţile noţiunilor fundamentale;
- cu ajutorul noţiunilor fundamentale se definesc alte noţiuni;
- cu ajutorul noţiunilor fundamentale şi a celor deja definite se demonstrează toate celelalte propoziții.

Inducţia şi deducţia sunt cele mai dificile operaţii ale gândirii pentru elevi. În curriculumul şcolar se accentuează că nu se va cere de la toţi elevii realizarea raţionamentului inductiv şi deductiv.

Principiul inducției matematice constituie un mijloc important de demonstrație în matematică a propoziţiilor ce depind de argument natural. Inducţia matematică pleacă de la câţiva termeni daţi (de obicei primii) sau construiţi prin diverse metode şi verifică posibilitatea de a trece de la unul sau mai mulţi termeni generaţi anterior, la cel curent.

În cele mai multe cazuri se lucrează cu un singur (n = 1) caz inițial, și se demonstrează implicația simplă $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Să analizăm câteva exemple în continuare, care pot fi găsite în literatura de specialitate.

Fie $P(n)$ o propoziție matematică oarecare, ce depinde de un număr natural $n \in N$ este adevărata, daca:

P(n) este o propoziție adevărată pentru n=1;

$P(n)$ rămâne o propoziție adevărată, când n se majorează cu o unitate, adică $P(n+1)$ este adevărata.

Acest principiu este alcătuit din doua etape.

Etapa de verificare: se verifica dacă propoziția matematică P(n) este adevărata pentru n=1;
Etapa de demonstrare: pentru orice $k \in N$ se verifică dacă propoziția P(k) este adevărat, atunci se demonstrează că este adevără și afirmația pentru P(k + 1).

În continuare vom analiza câteva exemple, utilizând principiul inducției matematice complete ce reprezintă un mijloc important de demonstrație în matematică a propozițiilor ce depind de un argument natural.

Exemplu 1: Să se demonstreze că numărul $7^{n+1} + 8^{2n-1}$ se împarte la numărul 19, pentru orice număr natural n ($n \in N$).

Rezolvare: Pentru $n=1$ atunci $7^2 + 8^1 = 57,$ iar numărul 57 se împarte la *19* fără rest. Presupunem că pentru un număr natural k numărul $7^{k+1} + 8^{2k-1}$ se împarte la *19*. Vom demonstra că și pentru k+1 numărul $7^{k+2} + 8^{2k+1}$ se împarte la *19.*

Astfel avem că: $7^{k+2} + 8^{2k+1} = 7 \cdot 7^{k+1} + 64 \cdot 8^{2k-1} = 7\left(7^{k+1} + 8^{2k-1}\right) + 57 \cdot 8^{2k-1}$. S-a demonstrat că expresia $7^{n+1} + 8^{2n-1}$ se împarte la *19*.

Exemplu 2: Sa se demonstreze inecuația lui Bernoulli: $(1 + α)^n \geq 1 + nα$, $α > -1$, $n \in N$

Rezolvare. Pentru $n = 1$, înlocuim și observăm că inegalitatea este adevărata

$1 + α \geq 1 + α$.

Se presupune ca are loc inegalitatea enunțată

$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$

și se arată că are loc și pentru n+1

$(1 + α)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)α$,

Dacă $α > -1$, atunci $α + 1 > 0$, multiplicând ambii membri ai inegalității cu $(α + 1)$, se obține:

$(1 + α)^n(1 + α) \geq (1 + nα)(1 + α)$

sau

$(1 + α)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)α + nα^2$

Cum $nα^2 \geq 0$, rezulta

$(1 + α)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)α + nα^2 \geq 1 + (n + 1)α$.

Conform principiului inducției matematice, inegalitatea Bernoulli este adevărată.

În unele cazuri principiul inducției matematice poate fi folosit nu pentru orice număr natural n, dar numai pentru $n \geq m$, unde m este un număr natul fixat. În acest caz principiul inducției matematice poate fi formulat astfel:

Fie m un număr natural $m \in N$. Propoziția matematică $P(n)$ pentru $n \in N$ este adevărată pentru orice $n \geq m$, dacă se îndeplinesc următoarele condiții:
1. Propoziția matematică *P(n)* este adevărată pentru *n=m;*
2. Pentru orice număr natural $k \geq m$ din justețea propoziției *P(k)* rezultă că și *P(k+1)* este adevărată

Concluzionăm că, în acest caz, aplicarea inducției matematice este adevărată pentru $n = k \geq m$, iar pentru mărimile *n<m,* afirmația poate fi *true* sau *false.* Utilizarea inducției matematice nu înseamnă că afirmația este justă pentru orice $1 \leq n < m.$ Vom analiza exemplele de mai jos.

Exemplu 3. De aflat numărul natural n ($n \in N$), pentru care este adevărată inecuația $2^n > 2n^2 - 3n + 1$.

Rezolvare: Pentru *n=1* este adevărată inecuația. Presupunem că pentru un număr natural *k* obținem $2^k > 2k^2 - 3k + 1$. În mod analog vom scrie și pentru k+1, obținem $2^{k-1} > 2(k+1)^2 - 3(k+1) + 1.$ Expresia dată o putem scrie sub forma $2(2^k - 2k^2 + 3k - 1) + 2k^2 - 7k + 2 > 0.$ Astfel obținem că inecuația $2k^2 - 7k + 2 > 0$,pentru $k \geq 4$,este adevărată. Analizăm cazul, că *m=1,* unde se observă că nu putem aplica inducția matematică. Trecem la următorul pas și vom lua ca baza *m=4;* in acest caz primul pas al inducției are loc. Dacă în inegalitatea $2^n > 2n^2 - 3n + 1$, înlocuim pe *n=4* , afirmația nu este adevărată și, deci, nu este justă și pentru m=4. Prin urmare, m=4 nu formează baza inducției. Analizăm pentru *m=6* , de asemenea poate forma baza inducției și pentru $m \geq 6$. Prin urmare, inecuația $2^n > 2n^2 - 3n + 1$ este adevărată pentru $n \geq 6$. De unde putem concluziona că inecuația este adevărată pentru n=1, 2 și $n \geq 6, n \in N$.

Exemplu 4. Să se găsească soluțiile naturale ale ecuației: $x! + 12 = y^2$. Pentru rezolvarea acestei ecuații, unii sugerează ghicirea, apoi verificarea prin inducție (ceea ce în unele cazuri este inevitabil). Dar, aici este preferabil să descoperim rațiunea acestui rezultat. Perechea de numere, prin verificarea numerelor 1, 2, 3, 4. În urma căruia obținem: $1! + 12 = 13 \neq y^2$;

$2! + 12 = 14 \neq y^2$; $3! + 12 = 18 \neq y^2$; $4! + 12 = 6^2 = y^2$. Pentru a găsi soluțiile, am analizat trei cazuri n<4; n=4; n>4 pentru $n \in N$. Prin verificarea ecuației, observăm că perechea (4; 6) de numere este unica soluție a ecuației.

În unele probleme, principiul inducției matematice poate fi folosit sub o altă formă.

Propoziția matematică *P(n)* pentru $n \in N$ (unde *n* este un număr natural) este adevărată pentru orice $n \geq m$ $(m \in N)$ dacă se îndeplinesc următoarele două condiții: **1. Propoziția matematică *P(n)* este adevărată pentru *n=m* și *n=m+1;*** ***2.*Pentru orice număr natural $k \geq m$ *din adevărul* propozițiilor *P(k) și P(k+1) rezultă că și* propoziția *P(k+2)* este adevărată**

Vom analiza un exemplu din manualul de clasa a X-a.

Exemplu 5. Se dă șirul lui Fibonacci, în care $a_0 = 0$ $a_1 = 1,$ $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. De demonstrat că: $a_{n+1} \cdot a_{n+2} - a_n \cdot a_{n+3} = (-1)^n$.

Rezolvare: Pentru acest şir se poate determina o formulă prin care se poate calcula orice termen. Din condiția problemei rezultă că: $a_2 = 1,$ $a_3 = 2,$ $a_4 = 3$, pentru n=1 avem $a_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot a_4 = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = (-1)^1$

Fie *n=k,* $k \in N$,pentru orice k număr natural nenul, obţinem formula

$a_{k+1} \cdot a_{k+2} - a_k \cdot a_{k+3} = (-1)^k$,

iar pentru $n=k+1$ avem $a_{k+2}\cdot a_{k+3}-a_{k+1}\cdot a_{k+4}=a_{k+2}\cdot a_{k+3}-a_{k+1}(a_{k+3}+a_{k+2})=a_{k+2}\cdot a_{k+3}-a_{k+1}\cdot a_{k+3}-a_{k+1}\cdot a_{k+2}=$
$=(a_{k+1}+a_k)a_{k+3}-a_{k+1}\cdot a_{k+3}-a_{k+1}\cdot a_{k+2}=a_{k+1}\cdot a_{k+3}+a_k\cdot a_{k+3}-a_{k+1}\cdot a_{k+3}-a_{k+1}\cdot a_{k+2}=$
$=-(a_{k+1}\cdot a_{k+2}-a_k\cdot a_{k+3})=-(-1)^k=(-1)^{k+1}$

Toate aceste formule pot fi demonstrate prin principiile inducției matematice. În acest fel, avem, cu certitudine, că ele sunt adevărate pentru orice număr natural nenul n $(n\in N)$.

Concluzii:

Metoda inducției matematice, după structura sa, reprezintă un raționament deductiv care se bazează pe axioma inducției matematice.

Rolul axiomei inducției matematice constă în faptul că ea admite înlocuirea raționamentului inductiv infinit printr-un raționament finit deductiv.

Principiile inducției matematice pot fi utilizate la calcularea de sume și produse, la demonstrarea unor egalități și inegalități, în probleme de divizibilitate a numerelor, etc.

Bibliografie

1. Achiri, A., Cibotarenco, E., Gaidargi, Gh., Solomon, N., Turcalov, Z., Metodica predării matematice. V.I, Chișinău, 1992.
2. Cihodariu, Ch. și al., Algebra și analiza matematică.
3. Dan, Christina-Theresia, Chiosa, Sabina-Tatiana, Didactica matematicii, Craiova, 2008.
4. Năstăsescu, C., Niță, C., Popa, S., Matematica. Manual pentru clasa a X-a, București, 1996.
5. Галицкий, М., Мошкович, М, Шварцбурд, С., Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа, М., 1990.
6. http://ro.wikipedia.org/wiki/Induc%C8%9Bie_matematic%C4%83