CZU:372.851:001.2

APLICAȚII ALE NUMERELOR COMPLEXE. ABORDĂRI INTERDISCIPLINARE LA LECȚIA DE MATEMATICĂ

Nina IZMANĂ, profesor de matematic, grad didactic I

IPLT ,,Principesa Natalia Dadiani'', mun. Chișinău

Rezumat. *Articolul vizează aspecte ale utilizării numerelor complexe în geometrie, fizică, grafica digitală și geometria fractalilor. Informațiile prezentate în articol cu referire la unele momente din istoria numerelor complexe pot deveni un mijloc de motivare a elevilor pentru studierea capitolului ,,Numere complexe'. Abordarea interdisciplinară și motivarea elevilor pentru învățarea tuturor disciplinelor necesită baze metodologice ale unui sistem integrat de mecanisme de formare a competenţei de integrare a achiziţiilor matematice dobândite cu alte cunoştințe, inclusiv din fizică, chimie, biologie, informatică, pentru rezolvarea problemelor în situaţii reale şi/sau modelate.*

Summary. *The article covers aspects of the usage of complex numbers in geometry, physics, digital graphics and fractal's geometry. The information presented in the article on some aspects of the history of complex numbers can become a way of motivating students to study the chapter "Complex numbers". Interdisciplinary approaches and motivating students to learn all disciplines require methodological bases for an integrated system of skills training mechanisms to integrate mathematical acquisitions acquired with other knowledge, including physics, chemistry, biology, cyber computer, to solve problems in real-world and/or modeled situations.*

Cuvinte cheie: *număr imaginar, numere complexe, aplicații, interdisciplinaritate, grafică digitală, fractali.*

Keywords: *Imaginary number, complex numbers, applications, interdisciplinarity, digital graphics, fractals.*

Introducere

Spre deosebire de alte științe cum ar fi biologia, fizica, chimia, legăturile matematicii cu realitatea nu sunt atât de ușor de remarcat. Conexiunile bilaterale existente între aceasta și multe alte științe l-au determinat pe academicianul Solomon Marcus să denumească matematica "O punte de legătură între toate disciplinele".

Extrapolarea achizițiilor matematice dobândite pentru a identifica și a explica procese, fenomene din diverse domenii, utilizând concepte și metode matematice în abordarea diverselor situații este o competență specifică disciplinei matematica [2]. Corelarea cunoștințelor de la diferite discipline de învățământ contribuie substanțial la realizare educației elevilor, la formarea și dezvoltarea flexibilității gândirii, a capacităților de a aplica cunoștințele în practică. Formând la elevi competența de integrare a achizițiilor matematice cu cunoştințe din alte domenii le prezentăm o imagine unitară asupra fenomenelor și proceselor studiate în cadrul altor discipline.

Predarea – învăţarea prin corelarea disciplinelor de studiu reprezintă noul în lecţii, activează elevii și le stimulează creativitatea contribuind la unitatea procesului instructiv – educativ, la formarea unui om cu o cultură vastă. Interdisciplinaritatea se impune ca o exigență a lumii contemporane supusă schimbărilor, acumulărilor cognitive în diferite domenii ale cunoașterii.

Abordările interdisciplinare și motivarea elevilor spre învățarea tuturor disciplinelor necesită baze metodologice ale unui sistem integrat de mecanisme de formare a competenței de integrare a achizițiilor matematice dobândite cu alte cunoștințe, inclusiv din fizică, chimie, biologie, informatică, pentru rezolvarea problemelor în situații reale și/sau modelate. Prin intermediul problemelor aplicative, dar și prin oferirea de informații suplimentare din istoria matematicii motivez elevii să învețe și să aplice cunoștințele matematice pentru formarea competențelor ce corespund priorităților educaționale naționale, europene și necesităților generației în creștere;

Interdisciplinaritatea este „o formă de cooperare între discipline diferite cu privire la o problematică, a cărei complexitate nu poate fi surprinsă decât printr-o convergență și o combinare prudentă a mai multor puncte de vedere” [3].

Legăturile interdisciplinare la modulul: “ Numere complexe”

Numărul complex este unul din conceptele fundamentale ale matematicii moderne, care își găsește aplicarea în „știința pură’. Timp de secole matematicienii au avut o atitudine ambivalentă față de aceste numere, această atitudine este trădată și de denumirea de „numere imaginare”. Numerele complexe au fost considerate inițial ca fiind “produse ale minții umane”.

În 1545 eruditul Girolamo Cardano scria cartea de algebră *“Ars Magna”* în traducere *“Marea artă”*. Cardano a reunit cele mai avansate idei de algebră ale vremii sale, inclusiv noi și spectaculoase metode de rezolvare a ecuațiilor, dar pentru scrierea soluțiilor unor ecuații el folosea $\sqrt{-1}$. Aceste soluții obținute au dus la idea că există un nou gen de numere într-atât de năucitore, încât le-a declarant “tot atât de subtile pe cât de inutile” și a părăsit idea. În 1572 Bombeli a publicat cartea întitulată *“Algebră”*. Scopul său principal a fost să clarifice cartea lui Cardano [1, pag.78].

În capodopera sa Cardano publică metode de rezolvare a ecuațiilor de gradul 3. Un caz particular al ecuațiilor de gradul 3 este: $x^3 + ax + b = 0$ și soluțiile scrise în simbolica matematicii moderne sunt:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}\ .$$

Cardano a întâlnit un obstacolul neașteptat. Mulți au încercat să explice acest obstacol dar dădeau greș. În unele cazuri formula dădea rezultate strălucite iar în alte cazuri soluțiile erau enigmatice. Spre exemplu pentru ecuația $x^3 - 15x - 4 = 0$ obține soluția scrisă

$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Rădăcină pătrată din număr negativ pe atunci se considera că nu există. Ecuația, însă, admite soluția $x = 4$ care nu rezultă din formulele lui Cardano. Bombeli în cartea sa scria că dacă ignori ce înseamnă formula $\sqrt{-121}$ și efectuezi calcule, aplicând regulile algebrei (cunoscute bine pe atunci) atunci: $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ prin urmare

$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$ în mod similar $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$.

Formula care l-a făcut confuz pe Cardano, poate fi rescrisă de Bombeli ca $(2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4$, rădăcinile misterioase se anulează. Astfel, ipoteza că rădăcinile pătrate ale numerelor negative au sens au dus la rezultate logice. Calculele lui Bombeli au dezvoltat idea că numerele imaginare înseamnă ceva mai mult.

În anul 1702 Gottfried Wilhelm von Leibniz scria: "Spiritul divin a găsit o ieșire sublimă din această minune de analiză, acea prevestire a lumii ideale, acea ambivalență de ființă și non-ființă, pe care o numim rădăcină imaginară a unității negative" această afirmație ne arată că Leibniz nu avea nici o îndoială cu privire la importanța numerelor imaginare, dar nu avea idee ce erau de fapt numerele imaginare [1].

Matematicianul norvegian Caspar Wessel 1797, matematicianul francez Jean-Robert Argant 1806 și ilustrul matematician german Carl Friedrich Gauss 1811 au reprezentat numerele complexe în sistemul de coordonate. Această reprezentare geometrică a devenit un mijloc de vizualizare a numerelor complexe, dar încă nu se știa care este rolul acestor numere. Reprezentare a numerelor complexe în planul de coordonate a motivat matematicienii secolului al XIX-lea să îndrepte atenția către analiza complexă (analiza matematică în care raționamentele au fost extinse la sistemul numerelor complexe). În a două jumătate a secolului XX, numerele complexe făceau parte din trusa mentală a tuturor matematicienilor și a oamenilor de știință [1, pag.76]. Numerele complexe facilitând înțelegerea undelor, căldurii, electricității și magnetismului. Analiza complexă este baza matematică a fizicii cuantice.

Fiecare profesor de matematică predând numerele complexe, la sigur, a fost întrebat de elevii săi "Unde se folosesc aceste numere?", "Cine a inventat aceste numere?" sau "Ați folosit vreodată aceste numere?" Pentru evitarea acestor întrebări sau pentru a da un răspuns convingător încep cu geneza numerelor imaginare care au generat sistemul numerelor complexe și apoi le propun să scrie referate sau să realizeze proiecte STEAM la tema: ,,Aplicații ale numerelor complexe în fizică, informatică, biologie, grafică digital și alte domenii''.

I. Aplicații ale numerelor complexe în algebră

- Una dintre cele mai frumoase ecuații din matematică este ecuația lui Euler. Richard Feynman numind-o "bijuteria noastră" și "cea mai remarcabilă identitate din matematică".

Formula lui Euler sau reprezentarea exponențială a unui număr complex spune că orice număr real *x* poate fi asociat unui număr complex de pe cercul unitate: $e^{ix} = cosx + isinx$,

$\boldsymbol{e}$ este baza logaritmului natural, $\boldsymbol{i}$ este unitatea imaginară.

- Pentru cazul particular $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\pi}$ avem identitatea: $e^{i\pi} + 1 = 0$ care combină într-o formulă simplă cele trei numere fundamentale $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{\pi}$ și $\boldsymbol{e}$.

- Rezolvarea ecuațiilor ce nu admit soluții în mulțimea numerelor reale.

II. Aplicații a numerelor complexe în geometria plană

- Afixul punctului M ce împarte segmentul într-un raport dat.
- Mijlocul unui segment.
- Afixul centrului de greutate a triunghiului cu vârfurile $M_1(Z_1), M_2(Z_2), M(Z_3)$.
- Ecuația cercului de centru M_1 și raza $r > 0$ este $|z - z_1| = r$.
- Coliniaritatea punctelor.

III. Aplicații ale numerelor complexe în fizică

Numerele complexe au aplicabilitate și în alte domenii, cum ar fi: mecanica, fizica teoretica. Pentru a putea analiza cu succes circuitele de curent alternativ, trebuie să abandonăm numerele scalare şi să luăm în consideraţie cele complexe, capabile să reprezinte atât amplitudine cât şi faza unei unde în același timp.

Numerele complexe sunt mai uşor de înţeles dacă sunt reprezentate în planul complex de coordonate. Dacă desenăm o linie cu o anumită lungime (amplitudine) şi unghi (direcţie), obţinem o reprezentare grafică a unui număr complex, reprezentare cunoscută în fizica sub numele de vector. Doar datorită înțelegerii importanței numerelor complexe iluștrii oameni de știință precum matematicianul Joseph Fourier, fizicianul Erwin Schrödinger și alții au descoperit ecuații ce au schimbat lumea (fig.1), (fig.2). Numerele complexe sunt baza matematică a fizicii cuantice, știință care din punct de vedere experimental funcționează minunat și cipurile de computer și laserele zilelor noastre nu ar funcționa în lipsa ei. Descoperirea structurii moleculelor mari, cum este ADN-ul, comprimarea datelor de imagine în fotografia digitală, curățirea înregistrărilor audio vechi sau afectate, analiza cutremurelor, stocarea eficientă a amprentelor digitale și funcționarea scanerelor medicale sunt posibile astăzi datorită transformărilor Fourier [1]. Aceste aplicații funcționează doar datorită faptului că au fost descoperite numerele complexe.

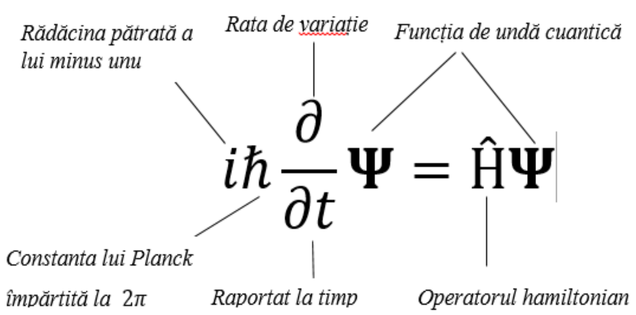


Fig. 1. Ecuația Schrödinger [1, pag.217]

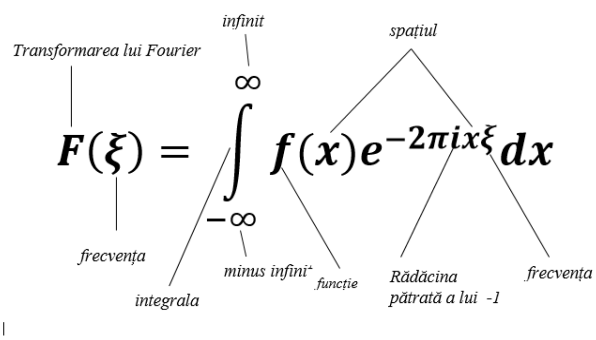


Fig. 2. Transformarea Fourier [1, pag.140]

Fig. 1. Ecuația Schrödinger [1, pag.217]

IV. Aplicațiile numerelor complexe în grafica digitală artistică

Pentru funcţii complexe $f: D \to \mathbb{C}, f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ vizualizarea comportării se complică – fiind dată de *patru* dimensiuni:$(x,y,u,v) \in R_4$. O soluţie (apărută după 1990 şi utilizată curent în „grafica digitală”) implică spaţiul culorilor [5,8].

Spre exemplu harta polinomului: $F(Z) = Z^4 - 14Z^2 + 1$ (Fig.3).

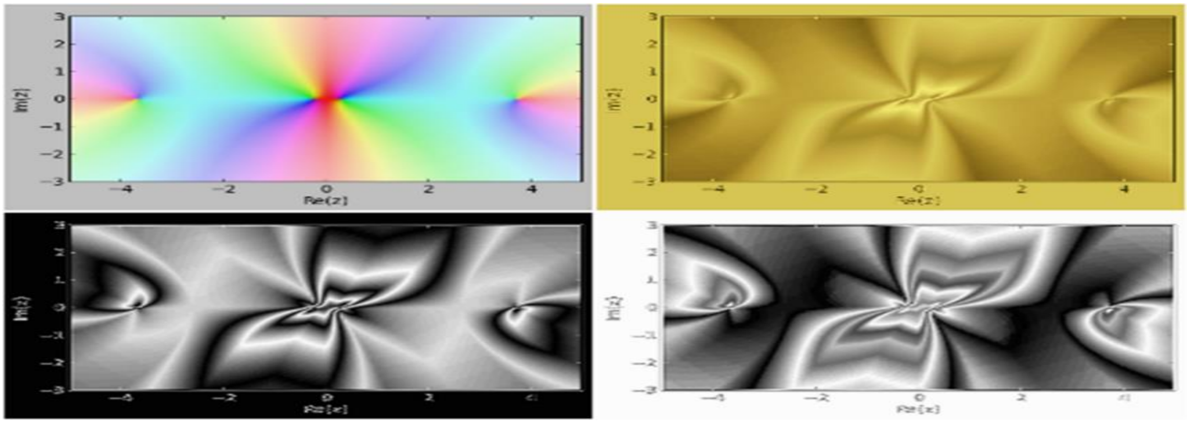


Fig. 3. Harta polinomului $F(Z) = Z^4 - 14Z^2 + 1$

V. Generarea fractalilor prin numere complexe

Un fractal este o figură geometrică fragmentată sau frântă care poate fi divizată în părți, astfel încât fiecare dintre acestea să fie (cel puțin aproximativ) o copie miniaturală a întregului. Termenul a fost introdus de Benoit Mandelbrot în 1975 și este derivat din latinescul *fractus*, însemnând „spart” sau „fracturat”. Fractalul, ca obiect geometric, are în general următoarele caracteristici: are o structură fină la scări arbitrar de mici; este prea neregulat pentru a fi descris în limbaj geometric euclidian tradițional [10]. Fractalii sunt descriși perfect în mulțimea funcțiilor complexe. Fractalul Mandelbrot (Fig.4) constituie originea geometriei fractale și este descris de formula:

$$Z = Z_{precedent}^2 + c, \;\; Z - număr\ complex.$$

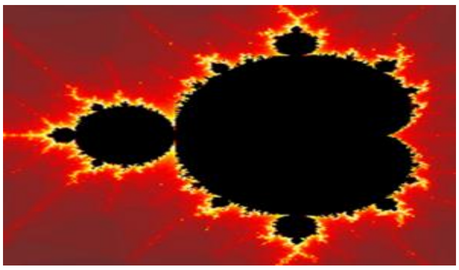
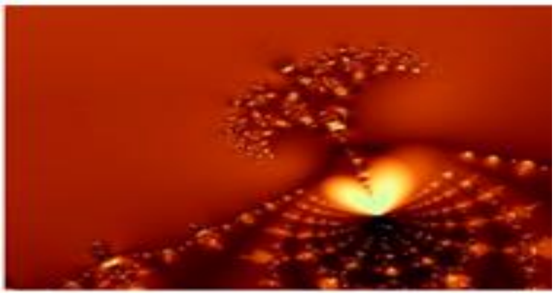


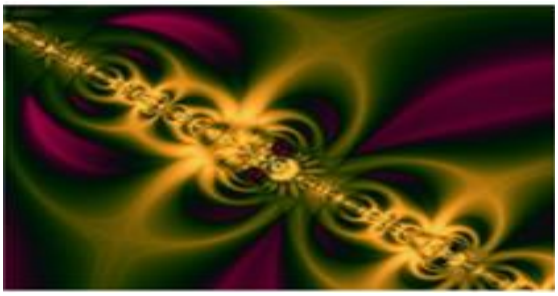
Fig. 4. Fractalul Mandelbrot [10]

Elevii pot crea peisaje deosebite și imagini atrăgătoare cu ajutorul fractalilor. Pe internet sunt o mulțime de programe generatoare de fractali [13]. Astfel, oricine poate genera fractali, selectând culori, modificând funcția care generează fractalul și alți parametri. Exemple de fractali realizați cu ajutorul programelor sunt prezentate în Fig. 5.



$$z = z - \frac{z^3 sinz - sinz - z}{3z^2 cosz - cosz - 1} + c$$

$$z = \left(\frac{c}{cosz}\right)^2$$



$$z = z - \frac{sinz}{10^{-15}} \cdot \frac{z^8 - z^6 - sinz - zc - 1}{8z^7 - 6z^5 - cosz - c}$$

Fig. 5. Fractalii lui Dimitrii Abramov în grafica digitală [10]

VI. Exemplu de aplicații ale numerelor complexe (Geometriei Fractale) în biologie și medicina

Evaluarea structurilor biologice – *aplicații în diagnoza precoce a cancerului.* Studii asupra unui posibil câmp morfogenetic (Fig. 6).

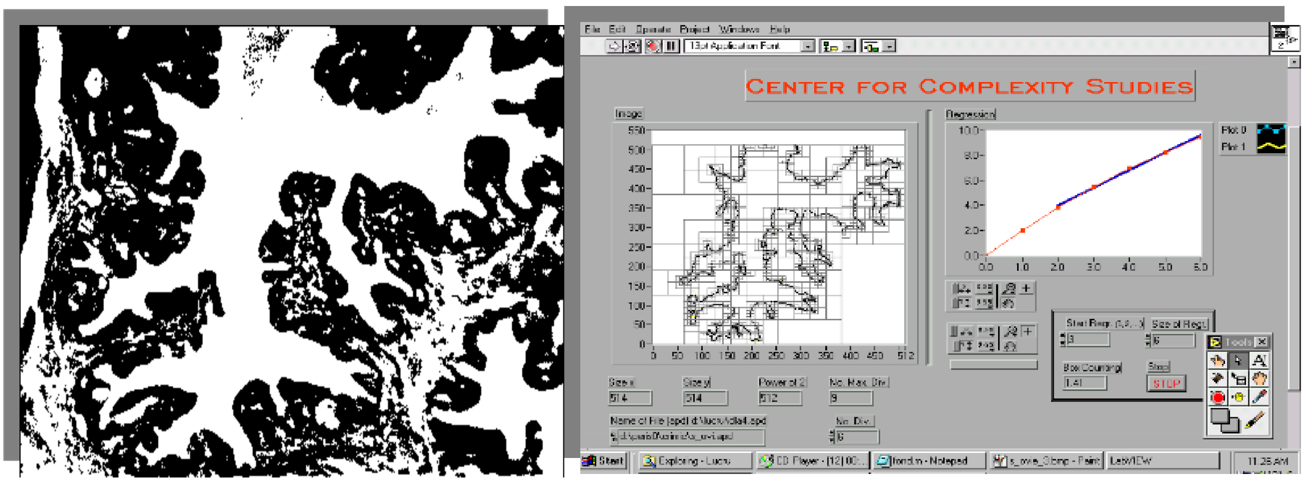


Fig. 6. Câmp morfogenetic

Concluzii: Nimeni nu ştie cu siguranţă cum răsar spiralele şi ramurile din seriile Mandelbrot din simple ecuaţii neliniare şi nici de ce urmăresc ele atât de aproape modelele arhetipale ale naturii.

Aceste teme sunt în prim-planul cercetării matematice şi ştiinţifice actuale, aceste cercetări nu ar fi putut fi realizate fără înțelegerea conceptului de număr complex și fără aplicarea lor genială în practică.

Abordarea interdisciplinară sporește motivarea elevilor de a învăța. Descoperind spectrul larg de aplicații ale numerelor complexe elevii devin curioși și convinși că matematica trebuie studiată.

Profesorul este cel care, într-o anumită disciplină, știe în fiecare zi mai mult decât ieri, învățându-l pe altul ce știe el azi, îl pregătește pentru ce va afla el mâine și care poate să fundeze ceea ce știe într-o anumită disciplină pe ceea ce știe din celelalte discipline pe care aceasta se fundează. (GRIGORE MOISIL)

Bibliografie

1. STEWART, I. 17 ecuații care au schimbat lumea. Traducere din limba engleză de Bogdan CHIRCEA. Pitești: Paralele 45, 2013. 289 pagini.
2. REY, B., CARETTE, V., DEFRANCE, A., KAHN, S., PACEARCA, P. Competențele în școală. Formare și evaluare, București, Editura: Aramis Print, 2012.
3. CUCOȘ, C. Pedagogie. Iaşi: Editura Polirom, 1996, 697 pagini. pag.77-79.
4. Matematică: Curriculum național: Clasele 10-12: Curriculum disciplinar: Ghid de implementare. Ministerul educației, Culturii și Cercetării al R.M. Coordonatori: CUTASEVICI, A., CRUDU, V., CEAPĂ, V. Grupul de lucru: ACHIRI, I. (coordonator). Chișinău: Lyceum, 2020. 192 pagini.
5. IVAN, I., VERDIȘ, D., ZERFUS, E. Utilizarea fractalilor în compresia de date. Online: http://revistaie.ase.ro/content/4/4.pdf
6. POP, V., ARDELEANU, D. M. Strategii didactice în perspectivă transdisciplinară. 2011. Online: www.didactic.ro
7. BOTA, C. Interdisciplinaritatea - factor de motivaţie pentru o învăţare de calitate. 2012. Online: www.didactic.ro
8. LIPOVAN, N.C. Aplicaţii ale matematicii abordări interdisciplinare şi transdisciplinare. 2012. Online: www.portal.edu.ro
9. https://ro.wikipedia.org/wiki/Fractal
10. https://slideplayer.com/slide/14899674/
11. https://ro.wikipedia.org/wiki/Formula_lui_Euler
12. http://www.edusfera.ro/nou-cursul-aplicatii-ale-matematicii-in-grafica-digitala/
13. https://winpcguide.ru/ro/internet-tips/programma-risuyushchaya-fraktaly-programmy