

PARTICULARITĂȚILE REZOLVĂRII PROBLEMELOR DE CALCUL A CÂMPURILOR MAGNETICE

Leonid GUȚULEAC, doctor, conferențiar universitar

Lucia BEZNOS, masterand

gutuleac.leonid@gmail.com

Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. În lucrarea curentă este abordată activitatea de rezolvare a problemelor din cursul de fizică. Sunt expuse metodele de rezolvare a unor probleme referitoare la determinarea inducției magnetice a câmpului magnetic creat de sisteme de conductoare parcurse de curent electric continuu. În calitate de exemple au fost alese probleme, în care conductorul are forma unei figuri închise plane (poligon convex regulat înscris într-o circumferință). S-au obținut rezultate pentru punctele de pe axa, care trece prin centrul circumferinței perpendicular pe planul ei.

Summary. In the current work, the problem-solving activity of the physics course is approached. There are exposed methods for solving some problems regarding the determination of the magnetic induction of the magnetic field created by the systems of conductors traversed by direct current. As examples, there were chosen the problems in which the conductor has the shape of a flat closed figure (regular convex polygon inscribed in a circle). Results were obtained for the points on the axis, which passes through the center of the circumference perpendicular to its plane.

Cuvinte-cheie: electromagnetism, câmp magnetic, inducție magnetică, superpoziție.

Keywords: electromagnetism, magnetic field, magnetic induction, superposition.

Introducere

O componentă importantă a procesului de studiere a fizicii este activitatea legată de rezolvarea problemelor [1]. Acest fel de activitate are menirea de a întări materialul teoretic și de a forma deprinderi de aplicare în practică a legilor fizicii [2]. Rezolvarea unei probleme permite elevilor de a dezvălui sensul fizic al proceselor antrenate în problema dată și de a înțelege mai bine natura acestor procese.

Cu părere de rău, în ultimii ani se poate observa o tendință de micșorare a calității în pregătirea elevilor pentru rezolvarea problemelor. Acest lucru se vede clar la chestionarea studenților proaspăt admiși la primul an de studii. Din acest motiv este necesar de a acorda o atenție sporită acestui gen de activitate didactică atât în învățământul preuniversitar, cât și în cel superior.

În lucrarea curentă este prezentată metoda de rezolvare a unor probleme tipice din sistemul universitar. Problemele se referă la compartimentul Electromagnetism și anume la calculul câmpului magnetic al sistemelor de curenți electrici. Problemele se deosebesc prin forma conductorului examinat, însă au ceva comun: conductorul parcurs de curent continuu are forma unui poligon convex regulat înscris într-o circumferință; se cere de calculat inducția magnetică în punctele situate pe axa

care trece prin centrul circumferinței perpendicular pe planul ei. Evident, că vârfurile poligonului se află la aceeași distanță de la punctul de lucru.

Aceste probleme fac parte dintr-un șir de probleme, în care treptat se mărește numărul de laturi (n) ale poligonului. Astfel, conductorul ia forma unui triunghi, apoi pătrat, pentagon, hexagon etc. În condiția $n \rightarrow \infty$ poligonul se transformă într-o circumferință. Cazul unei spire circulare se rezolvă în unele manuale universitare de Electromagnetism.

1. Conductorul în formă de triunghi echilateral

Problemă: Un conductor în formă de triunghi echilateral este înscris într-o circumferință cu raza R și este parcurs de curent continuu de intensitatea J . Să se obțină formula de calcul a inducției magnetice a câmpului creat de acest conductor în punctele axei, care trece prin centrul circumferinței perpendicular pe planul ei.

Înainte de a trece la rezolvarea problemei analizăm condițiile ei și alegem modul de notare a mărimilor fizice cu care vom lucra. Notăm prin l lungimea unei laturi, prin h distanța de la centrul circumferinței până la laturile triunghiului, prin φ unghiul central ce corespunde unei laturi (vezi fig.1.a).

Presupunem, că curentul circulă contra acelor de ceasornic (în sensul ABCA) și alegem un sistem de coordonate atașat de conductor (vezi fig.1.b).

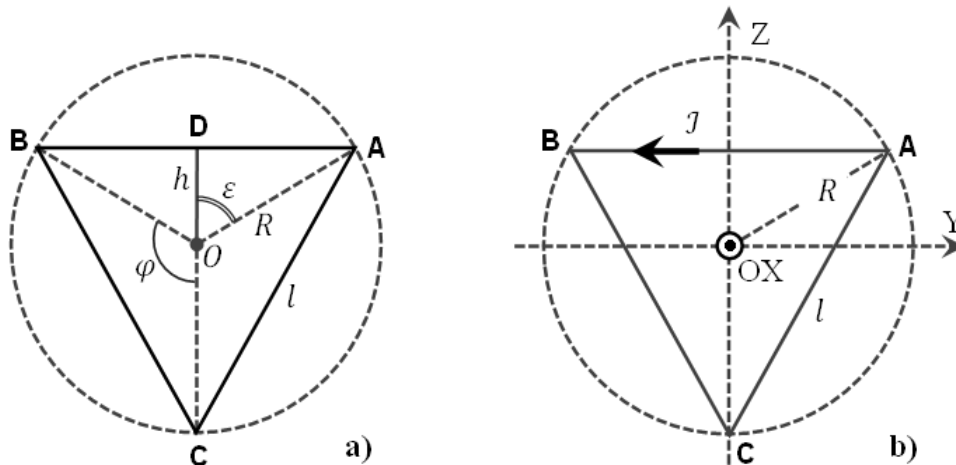


Fig.1. Conductorul din problema 1:

- a) un triunghi echilateral înscris într-o circumferință;
- b) sistemul de coordonate legat de conductor.

Originea sistemului coincide cu centrul circumferinței, axa OY este paralelă cu latura AB , axa OZ este perpendiculară pe latura AB iar axa OX este perpendiculară pe planul figurii și orientată spre observator. Conductorul se află în planul YOZ și trebuie să calculăm câmpul în punctele de pe axa OX .

Din fig.1.a se poate observa, că $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ și $\varepsilon = \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{n}$, unde n reprezintă numărul de laturi ale poligonului (în cazul dat $n = 3$ și $\varphi = 120^\circ$). Punctul D reprezintă mijlocul segmentului AB . Din triunghiul dreptunghic ADO rezultă:

$$\begin{aligned} h &= R \cdot \cos(\varepsilon), & \frac{l}{2} &= R \cdot \sin(\varepsilon), \\ h &= R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), & l &= 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \end{aligned} \quad (1).$$

Este mai comod de a lucra la început cu fiecare latură aparte. În continuare vom nota cu indicele 1 mărimile, care se referă la latura AB , cu indicii 2 și 3 – cele, care se referă la laturile BC și CA respectiv.

Alegem pe axa OX un punct de lucru cu coordonata x . Fiecare latură generează în punctul ales un câmp magnetic. Vom nota inducțiile acestor câmpuri particulare prin \vec{B}_1 , \vec{B}_2 și \vec{B}_3 respectiv. Din condiții de simetrie rezultă, că acești vectori au moduli egali și formează același unghi cu axa OX .

2. Câmpurile magnetice ale laturilor

Începem a lucra cu latura AB . Rotim fig.1.b în jurul axei OZ cu 90° astfel, încât axa OX să ia locul axei OY . Planul figurii noi va coincide cu planul XOZ ; planul ce conține triunghiul și circumferința va fi perpendicular pe planul figurii; latura AB va fi perpendiculară pe acest plan, curentul va circula în ea spre observator.

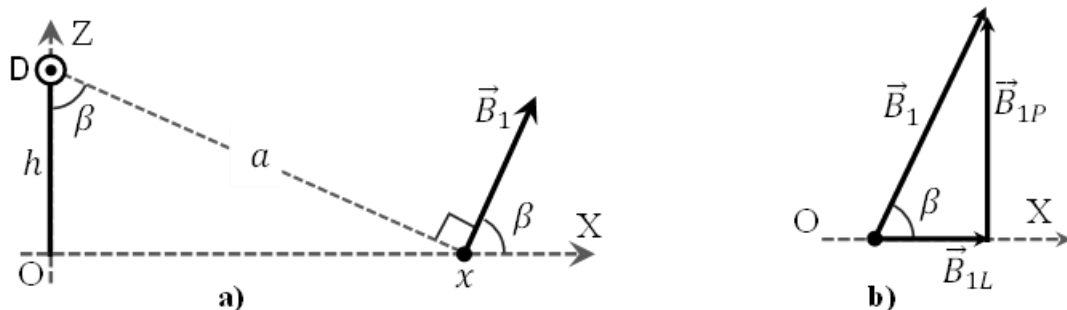


Fig.2. Referitor la determinarea câmpului generat de latura AB :

- a) determinarea sensului vectorului \vec{B}_1 ;
- b) descompunerea vectorului \vec{B}_1 .

Latura AB parcursă de curent generează în punctul ales un câmp magnetic descris de vectorul \vec{B}_1 . Acest vector va fi în planul figurii (vezi fig.2.a), fiind perpendicular pe curent și pe segmentul de lungime a , care exprimă distanța dintre punctul de lucru și latura AB . Vectorul \vec{B}_1 va forma un anumit unghi β cu axa OX .

În continuare va fi comod de a descompune vectorul \vec{B}_1 , prezentându-l ca sumă a doi vectori (vezi fig.2.b): unul din ei este orientat de-a lungul axei OX , iar celălalt – perpendicular pe axa OX (respectiv \vec{B}_{1L} și \vec{B}_{1P}):

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_{1L} + \vec{B}_{1P} \quad (2).$$

Trecem la examinarea laturii BC . Rotim triunghiul în jurul axei OX cu un unghi egal cu $\varphi = 120^\circ$. Locul laturei AB va fi luat de latura BC , care va fi perpendiculară pe planul unei noi figuri asemănătoare cu fig.2.a. Ea are aceeași lungime l și se află la aceeași distanță a de la punctul de lucru. Această latură parcursă de curent generează în punctul ales un câmp magnetic propriu descris de un vector \vec{B}_2 . Acest vector are același modul ca vectorul \vec{B}_1 și formează același unghi β cu axa OX . El la fel poate fi descompus, fiind prezentat ca sumă a doi vectori (longitudinal și perpendicular) după o schemă similară cu cea prezentată în fig.2.b:

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_{2L} + \vec{B}_{2P} \quad (3).$$

Dacă vom roti triunghiul încă odată în jurul axei OX cu un unghi egal cu $\varphi = 120^\circ$, atunci pentru latura CA vom obține o schemă de lucru similară celor două precedente. Ea va genera în punctul de lucru un câmp magnetic propriu descris de un vector \vec{B}_3 de același modul cu vectorii \vec{B}_1 și \vec{B}_2 , care poate fi descompus după o schemă similară cu cea prezentată în fig.2.b:

$$\vec{B}_3 = \vec{B}_{3L} + \vec{B}_{3P} \quad (4).$$

Astfel, am pornit din p.A și am revenit în el, examinând tot conductorul, care a fost împărțit în trei părți. Am descris câmpurile magnetice generate de aceste părți.

3. Câmpul magnetic al conductorului în formă de triunghi

Câmpul magnetic generat de întregul conductor se poate determina cu ajutorul principiului superpoziției câmpurilor magnetice:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 \quad (5).$$

Substituim aici expresiile (2-4):

$$\vec{B} = \vec{B}_{1L} + \vec{B}_{1P} + \vec{B}_{2L} + \vec{B}_{2P} + \vec{B}_{3L} + \vec{B}_{3P}.$$

Este comod de a grupa vectorii din partea dreaptă în felul următor:

$$\vec{B} = (\vec{B}_{1L} + \vec{B}_{2L} + \vec{B}_{3L}) + (\vec{B}_{1P} + \vec{B}_{2P} + \vec{B}_{3P}) \quad (6).$$

Astfel, prima paranteză conține componentele longitudinale ale inducțiilor magnetice particulare, iar a doua – cele perpendiculare. Examinăm a doua paranteză. Vectorii din această sumă au același modul, sunt perpendiculari pe axa OX și se află în același plan, care este paralel cu planul YOZ . Acești vectori formează unghiuri $\varphi = 120^\circ$ unul cu altul (vezi fig.3.a). Adunăm acești vectori prin metoda generalizată a triunghiului (îi depunem unul după altul) și observăm, că suma geometrică a lor este egală cu zero (ei formează o linie frântă închisă, vezi fig.3.b).

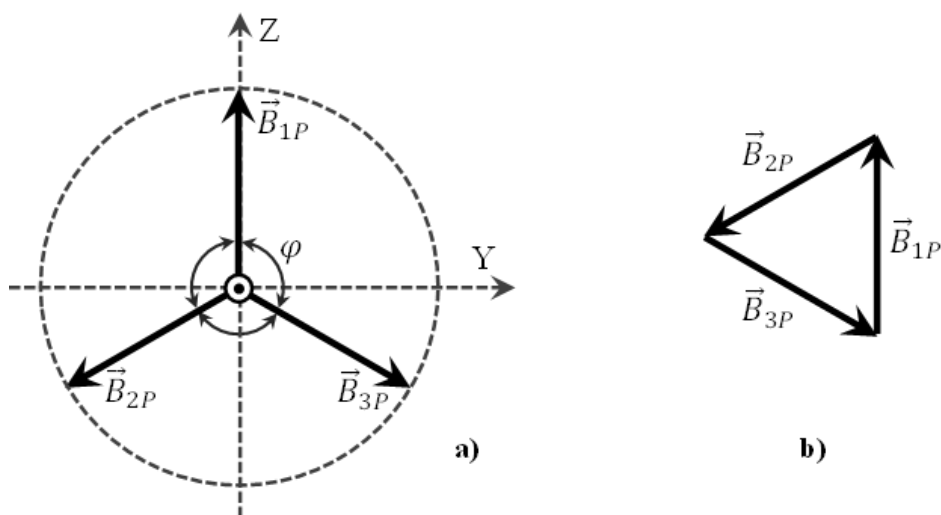


Fig.3. Referitor la componentele perpendiculare ale inducțiilor magnetice:
a) prezentarea componentelor;
b) suma componentelor

Astfel, paranteza a doua din (6) este egală cu zero și rămân doar componentele longitudinale:

$$\vec{B} = \vec{B}_{1L} + \vec{B}_{2L} + \vec{B}_{3L}.$$

Aceste componente sunt egale între ele (au același modul și sunt orientate la fel – în sensul pozitiv al axei OX):

$$\vec{B}_{1L} = \vec{B}_{2L} = \vec{B}_{3L}.$$

Astfel, pentru câmpul rezultat obținem:

$$\vec{B} = 3 \cdot \vec{B}_{1L},$$

unde cifra 3 reprezintă numărul de laturi ($n = 3$). Generalizăm:

$$\vec{B} = n \cdot \vec{B}_{1L} \quad (7).$$

Observăm, că vectorul \vec{B} în punctul de lucru la fel este orientat în sensul pozitiv al axei OX .

Modulul lui:

$$B = n \cdot B_{1L}.$$

Din figura 2.b rezultă:

$$B_{1L} = B_1 \cdot \cos \beta.$$

Obținem:

$$B = n \cdot B_1 \cdot \cos \beta \quad (8).$$

În această expresie mai trebuie să exprimăm funcția trigonometrică și modulul inducției câmpului laturii AB .

4. Câmpul magnetic al unui curent rectiliniu

Cazul câmpului magnetic al unui conductor rectiliniu parcurs de curent continuu este descris în manuale și se analizează la prelegeri. Deci, nu vom expune aici rezolvarea acestui caz, dar vom folosi

rezultatul final. Inducția magnetică a câmpului unui curent rectiliniu (vezi fig.4.a) se calculează cu ajutorul expresiei:

$$B_{12} = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

unde: μ – permeabilitatea magnetică a mediului; μ_0 – constanta magnetică.

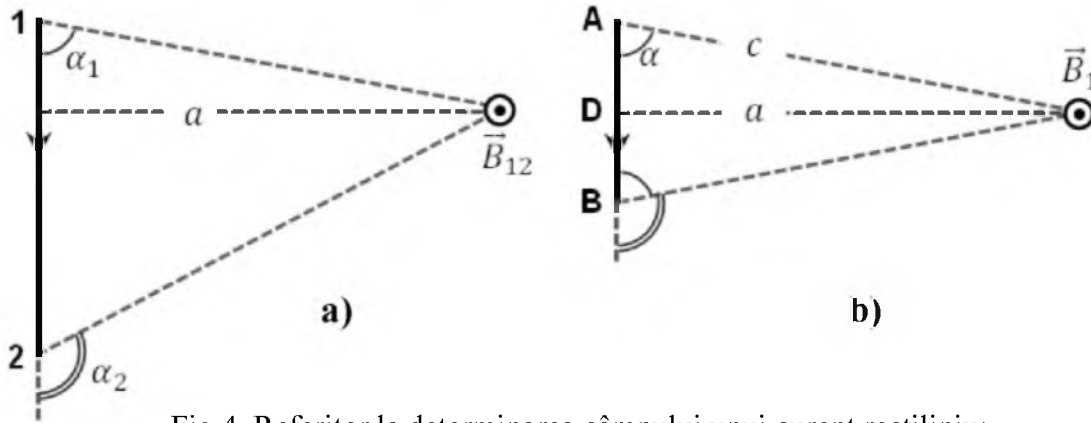


Fig.4. Referitor la determinarea câmpului unui curent rectiliniu:

a) cazul general;

b) cazul unei laturi a poligonului din problema curentă

Pentru problema curentă (vezi fig.4.b) avem $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha$ și expresia de calcul obține forma:

$$B_1 = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \pi \cdot a}$$

Folosim fig.4.b și obținem:

$$c \cdot \cos \alpha = [AD] = \frac{l}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{l}{2 \cdot c},$$

$$c^2 = a^2 + [AD]^2 = a^2 + \frac{l^2}{4} = \frac{1}{4}(4 \cdot a^2 + l^2),$$

$$c = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot a^2 + l^2}, \quad \cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{4 \cdot a^2 + l^2}},$$

$$B_1 = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I \cdot l}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 + l^2}} \quad (9).$$

5. Câmpul magnetic rezultat

Revenim la (8), unde trebuie să exprimăm funcția $\cos \beta$. Din fig.2.a rezultă:

$$a \cdot \cos \beta = h, \quad \cos \beta = \frac{h}{a}, \quad a^2 = x^2 + h^2.$$

Substituim aceste rezultate și (9) în (8):

$$B = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot l \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 + l^2}} \quad B = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot l \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot (x^2 + h^2) \cdot \sqrt{4 \cdot x^2 + 4 \cdot h^2 + l^2}}$$

Substituim aici expresiile (1):

$$B = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot R^2 \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2 \cdot \pi \cdot \left(x^2 + \left(R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2\right) \cdot \sqrt{4 \cdot x^2 + 4 \cdot \left(R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2 + \left(2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2}}$$

Folosim expresia trigonometrică $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ și transformăm:

$$B = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot n \cdot J \cdot R^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{4 \cdot \pi \cdot \left(x^2 + R^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \cdot \sqrt{x^2 + R^2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}}$$

Folosim expresia trigonometrică $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ și obținem definitiv:

$$B = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot n \cdot J \cdot R^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{4 \cdot \pi \cdot \left(x^2 + R^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \cdot \sqrt{x^2 + R^2}} \quad (10).$$

Astfel, am exprimat modulul inducției magnetice rezultante prin coordonata x a punctului de lucru. Problema este rezolvată. Se poate observa, că câmpul va fi maximal în centrul circumferinței ($x = 0$) iar la creșterea acestei coordonate B se va micșora.

Concluzii:

Metoda de rezolvare expusă aici este una tipică pentru problemele din Electromagnetism. Conductorul parcurs de curent a fost împărțit în părți iar rezultatele obținute pentru ele au fost combinate în conformitate cu principiul superpoziției.

Această lucrare poate fi utilă pentru studenții, care studiază acest compartiment. Analiza procesului de rezolvare va permite studenților de a întări materialul teoretic și de a dezvolta deprinderile de calcul a câmpurilor magnetice generate de sisteme de curenți electrici.

Bibliografie

1. КАЛАШНИКОВ, Н.П. Общая физика. Сборник заданий и руководство к решению задач. Санкт-Петербург: Лань-Пресс, 2020. 524 с.
2. БЕЛИКОВ, Б.С. Решение задач по физике. Общие методы. Москва: Высшая школа, 1986. 256 с.