CZU:371.214.114:51+371.39

UNELE APLICAȚII ALE TEOREMEI LUI VIETE

Iraida BRĂDULEAC, doctor în pedagogie, grad didactic superior
profesoară de matematică, Colegiul Politehnic din mun. Bălți

Rezumat: *Lucrarea conține repere teoretice și un sistem de probleme și exerciții diferite pentru elucidarea aplicațiilor relațiilor lui Viete. Pentru însușirea conștientă și profundă a unei teme este necesar ca setul de probleme propuse să conțină itemi de dificultate crescândă, fiind intercalate cu probleme care abordează aplicarea unei teme în situații nestandard.*
Cuvinte cheie: *abordare, curriculum, matematica, proces educațional, rezolvarea problemelor, relațiile Viete*

În prezent, când se simte acut instabilitatea manualelor și dificultățile legate de introducerea noului curriculum, este actual pentru profesor să-și pregătească seturi de probleme și exerciții la diferite teme de studiu.

Propun un asemenea set de probleme la rezolvarea cărora se aplică teorema lui Viète sau reciproca ei.

Să demonstrăm teorema lui Viète pentru orice ecuație algebrică de gradul n.

Fie $n = 1$. Atunci $ax + b = 0$ și dacă x_1 este soluția ecuației obținem $ax_1 + b = 0$ și $x_1 = -\frac{b}{a}$.

Fie $n = 2$. Atunci $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ (1) și dacă x_1 este soluție a ecuației, atunci $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ (2) . Scăzând (2) din (1) obținem:

$$a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1) = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(ax + ax_1 + b) = 0.$$

Cum x_1 este soluție a ecuației $x - x_1 = 0$, a doua soluție, x_2, a ecuației pătratice satisface ecuația $ax_2 + ax_1 + b = 0$. Rezultă $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Dacă $x_1^2 + \frac{b}{a}x_1 + \frac{c}{a} = 0$ sau $x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + \frac{c}{a}$, atunci $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Am dedus formulele lui Viète pentru ecuația de gradul II fără a folosi formulele soluțiilor ecuației de gradul II.

Fie $n = 3$. Atunci $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ (1). Dacă x_1 este soluție a ecuație, atunci $ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0$ (2). Scăzând (2) din (1) obținem:

$$a(x^3 - x_1^3) + b(x^2 - x_1^2) + c(x - x_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - x_1)[a(x^2 + xx_1 + x_1^2) + b(x + x_1) + c] = 0 .$$

Cum x_1 este soluție a ecuației $x - x_1 = 0$, celelalte soluții ale ecuației inițiale sunt soluții ale ecuației $a(x^2 + xx_1 + x_1^2) + b(x + x_1) + c = 0$.

Deci pentru x_2 și x_3 sunt adevărate formulele lui Viète deduse pentru ecuația de gradul II:

$x_2 + x_3 = -\frac{ax_1+b}{a} = -x_1 - \frac{b}{a}$, $x_2x_3 = \frac{ax_1^2+bx_1+c}{a} = x_1^2 + \frac{b}{a}x_1 + \frac{c}{a}$,

atunci: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$ (1)

și:

$$x_2x_3 = x_1^2 - (x_1 + x_2 + x_3)x_1 + \frac{c}{a} = -(x_1x_2 + x_1x_3) + \frac{c}{a} \Rightarrow \ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \qquad (2)$$

Substituind (1) și (2) în $x_1^3 + \frac{b}{a}x_1^2 + \frac{c}{a}x_1 + \frac{d}{a} = 0$ obținem:

$x_1^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x_1^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x + \frac{d}{a} = 0$ sau $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$, (3)

Considerăm teorema lui Viète este adevărată pentru orice ecuație de gradul k, adică dacă $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ sunt rădăcinile ecuației:

$b_0x^k + b_1x^{k-1} + b_2x^{k-2} + \cdots + b_{k-1}x + b_k = 0$, atunci

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = -\dfrac{b_1}{b_0} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{k-1}x_k = \dfrac{b_2}{b_0} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ x_1x_2x_3 \dots\dots. x_k = (-1)^k \cdot \dfrac{b_k}{b_0} \cdot \end{cases}$$

Fie ecuația $a_0x^{k+1} + a_1x^k + a_2x^{k-1} + \cdots + a_kx + a_{k+1} = 0$, (4),

are rădăcinile $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1}$.

Atunci $a_0x_{k+1}^{k+1} + a_1x_{k+1}^k + a_2x_{k+1}^{k-1} + \cdots + a_kx_{k+1} + a_{k+1} = 0$, (5).

Scăzând (5) din (4) obținem

$$a_0\left(x^{k+1} - x_{k+1}^{k+1}\right) + a_1\left(x^k - x_{k+1}^k\right) + a_2\left(x^{k-1} - x_{k+1}^{k-1}\right) + \cdots + a_k(x + x_{k+1}) = 0$$
$$\Rightarrow (x - x_{k+1})\big[a_0x^k + (a_1 + a_0x_{k+1})x^{k-1} + (a_2 + a_1x_{k+1} + a_0x_{k+1}^2)x^{k-2} + \cdots$$
$$+ \left(a_k + a_{k-1}x_{k+1} + a_{k-2}x_{k+1}^2 + \cdots + a_0x_{k+1}^2 + a_0x_{k+1}^{k+1}\right)x$$
$$+ \left(a_{k+1} + a_kx_{k+1} + \cdots + a_0x_{k+1}^{k+1}\right)\big] = 0\,.$$

Deoarece polinomul din paranteza pătrată are gradul k, ecuația $P_k(x) = 0$ are k soluții $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$.

Din ipoteză $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = -\frac{a_1}{a_0} - x_{k+1} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{k-1}x_k = \frac{a_2}{a_0} + \frac{a_1}{a_0}x_{k+1} + x_{k+1}^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1x_2x_3 \dots x_k = (-1)^k \cdot \left(\frac{a_{k+1}}{a_0} + \frac{a_k}{a_0}x_{k+1} + \cdots + \frac{a_1}{a_0}x_{k+1}^k + x_{k+1}^{k+1}\right) \end{cases}$

rezultă:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1} = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{k+1}x_k = \dfrac{a_2}{a_0} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1x_2x_3 \dots x_kx_{k+1} = (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{a_{k+1}}{a_0}\ . \end{cases}$$

Prin urmare, dacă ecuație $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ are n soluții, atunci sunt adevărate relațiile lui Viète:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1x_2x_3 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_3}{a_0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2x_3 \ldots x_{n-1} + \cdots + x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{a_{n-1}}{a_0} \\ x_1x_2x_3 \ldots x_n(-1)^n \cdot \dfrac{a_n}{a_0}\ . \end{cases}$$

Relații utile: 1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$; 2)$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$;

3) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$; 4) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$.

EXERCIȚIUL 1. Soluțiile ecuației $x^2 - bx - b = 0$ satisfac egalitatea

$x_1^3 + x_2^3 + x_1^3x_2^3 = 75$. Aflați b.

Rezolvare. Conform teoremei lui Viète $\begin{cases} x_1 + x_2 = b \\ x_1x_2 = -b, \end{cases}$ atunci $x_1^3 + x_2^3 + x_1^3x_2^3 = (x_1 + x_3)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) + x_1^3x_2^3 = b^3 + 3b \cdot b + (-b)^3 = 3b^2 \Rightarrow 3b^2 = 75 \Leftrightarrow b^2 = 25 \Leftrightarrow |b| = 5$.

EXERCIȚIUL 2. Fie x_1, x_2 soluțiile ecuației $3x^2 + 14x - 14 = 0$.

Comparați cu unitatea $\frac{3x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2}{4x_1x_2^2+4x_1^2x_2}$.

Rezolvare. Aplicând relațiile lui Viète $\frac{3x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2}{4x_1x_2^2+4x_1^2x_2} = \frac{3(x_1+x_2)^2-x_1x_2}{4x_1x_2(x_1+x_2)} = \frac{3\cdot\left(-\frac{14}{3}\right)^2-\frac{14}{3}}{4\cdot\left(-\frac{14}{3}\right)^2} = \frac{13\cdot 3}{14\cdot 4} < 1$.

EXERCUȚIUL 3. Pentru ce valori ale parametrului a soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 + 3x + a = 0$ satisfac inegalitatea $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + a > 0$?

Rezolvare. Dacă ecuație dată are soluții, atunci $\Delta = 9 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{9}{4}$.

$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + a = \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+ax_1x_2}{x_1x_2} = \frac{9-2a+a^2}{a}$, $a^2 - 2a + 9 > 0$, pentru orice $a \epsilon R$ atunci $a\, \epsilon (0, \frac{9}{4}]$.

EXERCIȚIUL 4. Calculați fără a utiliza lg2 și lg5 știind că $\lg 2 \cdot \lg 5 = 0{,}2104$.

Rezolvare. Deoarece $lg10 = lg2 + lg5 = 1$ și $lg2 \cdot lg5 = 0{,}2104$, rezultă, conform reciprocei teoremei lui Viète, lg2 și lg5 sunt soluțiile ecuației $x^2 - x + 0{,}2104 = 0$. Rezolvând ecuația, obținem $x_1 = 0{,}6995, x_2 = 0{,}3010$. Atunci $lg2 = 0{,}3010, lg5 = 0{,}6995$.

EXERCIȚIUL 5. Tangențele a două unghiuri ale unui triunghi sunt soluțiile ecuației

$6x^2 + 5x + 1 = 0$. Aflați măsura unghiului al treilea.

Rezolvare. Utilizând formula $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}=1\ \Rightarrow \alpha+\beta=45°$, deci

$\gamma=180°-45°=135°$.

EXERCIȚIUL 6. Suma primilor 10 termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu 140, iar produsul lui a_2 și a_9 este 147. Aflați progresia.

Rezolvare. Conform condițiilor problemei obținem sistemul de ecuații:

$\begin{cases}(a_1+a_{10})\cdot 10=280\\ a_2a_9=147.\end{cases}$ Din $a_1+a_{10}=a_2+a_9$ rezultă $\begin{cases}a_2+a_9=28\\ a_2a_9=147\end{cases}$

Conform reciprocei teoremei lui Viète compunem ecuația $x^2-28x+147=0$ care are rădăcinele $x_1=21$ și $x_2=7$. Dacă $a_2=21$ și $a_9=7$ obținem progresia: 23,21,19... Dacă $a_2=7, a_9=21$ obținem progresia: 5, 7, ...

EXERCIȚIUL 7. Lungimile catetelor triunghiului dreptunghic sunt soluțiile ecuației $x^2-3x+1=0.$ Fără a rezolva ecuația aflați raza (r) a cercului înscris în acest triunghi.

Rezolvare. Fie S aria triunghiului dat, iar *P* este perimetrul lui. Conform condițiilor problemei

$2S=x_1x_2$ și $P=x_1+x_2+\sqrt{x_1^2+x_2^2}=3+\sqrt{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}=3+\sqrt{7}.$

Utilizând formula $2S=pr$ obținem $r=\frac{2S}{P}=\frac{x_1x_2}{3+\sqrt{7}}=\frac{3-\sqrt{7}}{2}.$

EXERCIȚIUL 8. Rezolvați sistemul de ecuații: $\begin{cases}2^x+2^y=5\\ 2^{x+y}=4.\end{cases}$

Rezolvare. Sistemul dat poate fi scris astfel $\begin{cases}2^x+2^y=5\\ 2^x\cdot 2^y=4.\end{cases}$ Atunci, conform reciprocei teoremei lui Viète 2^x și 2^y sunt soluțiile ecuației $u^2-5u+4=0, u_1=1, u_2=4.$

Rezultă:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x=1\\ 2^y=4\end{cases}\\ \begin{cases}2^x=4\\ 2^y=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}\end{array}\right. \quad S=\{(0,2),(2,0)\}.$$

EXERCIȚIUL 9. Rezolvați sistemul de ecuații: $\begin{cases}x(x+1)(3x+5y)=144\\ x^2+4x+5y=24.\end{cases}$

Rezolvare. Sistemul dat mai poate fi scris astfel: $\begin{cases}(x^2+x)(3x+5y)=144\\ x^2+4x+5y=24.\end{cases}$

Fie $x^2+x=u$ și $3x+5y=v$. Atunci $\begin{cases}uv=144\\ u+v=24,\end{cases}$ u și v sunt soluțiile ecuației $z^2-24z+144=0$. Deoarece $z_1=z_2=12$, rezultă $\begin{cases}x^2+x=12\\ 3x+5y=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-12=0\\ y=\frac{12-3x}{5}.\end{cases}$

S=$\{(3;0{,}6),(-4;4{,}8)\}$.

EXERCIȚIUL 10. Rezolvați ecuațiile:

a) $1993x^2 - 2000x + 7 = 0$; b) $1993x^2 + 2000x + 7 = 0$.

Rezolvare. a) Deoarece $1993 - 2000 + 7 = 0$, rezultă $x_1 = 1$ și, conform teoremei lui Viète, $x_1x_2 = \frac{7}{1993}$, $x_2 = \frac{7}{1993}$.

b) Deoarece $1993 + 7 = 2000, x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{7}{1993}$.

EXERCIȚIUL 11. Ecuația $x^2 + px + q = 0$ are soluțiile pozitive diferite x_1 și x_2. Să se exprime în funcție de p și q valoarea expresiei $E = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$.

Rezolvare. O ecuație de gradul II are două soluții diferite dacă $\Delta = p^2 - 4q > 0$. Aplicând teorema lui Viète obținem $\begin{cases} p^2 - 4q > 0 \\ x_1 + x_2 = -p > 0 \\ x_1x_2 = q > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < 0 \\ q < \frac{p^2}{4} \\ q > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < 0 \\ 0 < q < \frac{p^2}{4} \end{cases}$

$$E^4 = \left(\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}\right)^4 = x_1 + 4\sqrt[4]{x_1^3x_2} + 6\sqrt{x_1x_2} + 4\sqrt[4]{x_1x_2^3} + x_2 = (x_1 + x_2) +$$

$$4\sqrt[4]{x_1x_2}\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right) + 6\sqrt{x_1x_2};\ x_1 + 2\sqrt{x_1x_2} + x_2 = -p + 2\sqrt{q};\ \left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2$$

$$= 2\sqrt{q} - p;\ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2\sqrt{q} + p}.\ \ E^4 = -p + 4\sqrt[4]{q} \cdot \sqrt{2\sqrt{q} - p} + 6\sqrt{q}.$$

$$E = \sqrt[4]{-p + 4\sqrt[4]{q} \cdot \sqrt{2\sqrt{q} - p} + 6\sqrt{q}}.$$

Cum aplicăm reciproca teoremei lui Viète la aflarea soluțiilor raționale ale ecuației de gradul II ? Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$. Înmulțim ecuația cu a și obținem $(ax)^2 + b(ax) + ac = 0$. Fie $ax = u$. Atunci $u_1 + u_2 = a(x_1 + x_2)$, iar $u_1u_2 = ac$. Evident, pentru a rezolva ecuația $(ax)^2 + b(ax) + ac = 0$ rezolvăm ecuația $u^2 + bu + ax = 0$ și soluțiile ei le împart la a.

Pentru aplicarea în practică a acestui procedeu: înmulțim termenul liber cu primul coeficient, aflăm soluțiile ecuației obținute și le împărțim la a.

EXERCIȚIUL 12. Rezolvați ecuațiile: a) $6x^2 + x - 15 = 0$; b) $12x^2 + 13x + 3 = 0$;

c) $3x^2 - 11x + 6 = 0$.

Rezolvare. a) Scriem ecuația auxiliară $u^2 + u - 90 = 0$ care are soluțiile $u_1 = 10$ și $u_2 = 9$. Atunci $x_1 = -\frac{5}{3}$; $x_2 = \frac{3}{2}$. b) ecuația auxiliară este $u^2 + 13u + 36 = 0$ și $u_1 = -4$ și $u_2 = -9$. Atunci $x_1 - \frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{3}{4}$. c) Ecuația auxiliară este $u^2 - 11u + 18 = 0$ și $u_1 = 2$ și $u_2 = 9$. Atunci $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = 3$.

Acest procedeu dă posibilitatea de a realiza problema inversă. Fiind dată o ecuație de gradul II, alcătuiți o ecuație cu soluțiile de k ori mai mari sau mai mici decât soluțiile ecuației date.

EXERCIȚIUL 13. Să se scrie ecuația de gradul II ale cărei soluții sunt: a) de 5 ori mai mici decât soluțiile ecuației $x^2 - 7x + 10 = 0$; b) de 2 ori mai mari decât soluțiile ecuației $x^2 - 7x + 10 = 0$; c) de 2 ori mai mari decât soluțiile ecuației $3x^2 - 7x + 1 = 0$.

Rezolvare. a) Ecuația dată o scriem astfel: $x^2 - 7x + 2 \cdot 5 = 0$, apoi $5x^2 - 7x + 1 = 0$.

b) $x^2 - 7x + \frac{1}{2} \cdot 20 = 0$, $\frac{1}{2}x^2 - 7x + 20 = 0$, $x^2 - 14x + 40 = 0$.

c) $3x^2 - 7x + \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$, $\frac{3}{2}x^2 - 7x + 2 = 0$, $3x^2 - 14x + 4 = 0$.

EXERCIȚIUL 14. Ecuația $x^3 + px + q = 0$ are soluțiile x_1, x_2, x_3. Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$; $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$; $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

Rezolvare. Conform teoremei lui Viète $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \\ x_1x_2x_3 = -q, \end{cases}$ iar $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3)$. Atunci $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3q = 0$ sau $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q$. Deoarece $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, rezultă că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$, iar $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2p$. Atunci $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) = -4p^2$.

Deoarece $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p$, rezultă

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = p^2 \Leftrightarrow x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = p^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = p^2.$$

Rezultă $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 4p^2 - 2p^2 = 2p^2$.

Pentru însușirea conștientă și profundă a unei teme este necesar ca setul de probleme propuse să conțină itemi de dificultate crescândă, fiind intercalate cu probleme care abordează aplicarea unei teme în situații nestandard.