CZU:372.8514.12

APLICAREA CONGRUENȚELOR LINIARE LA REZOLVAREA UNOR PROBLEME DIN GEOMETRIA ANALITICĂ

Valeriu BORDAN, doctor, conferențiar universitar

Anastasia RAZLOGA, studentă

Alexandra GOROBEȚ, studentă

Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. *În această lucrare se arată cum se aplică congruențele liniare la rezolvarea unor probleme, care se reduc la determinarea soluțiilor întregi ale unei ecuații liniare cu două necunoscute.*

Summary. *In this paper the application of linear congruences in solving problems that can be reduced to finding the integer solutions of a linear equation in two unknowns is shown.*

Cuvinte cheie: *ecuație nedeterminată, congruență liniară, soluție generală, soluție particulară.*

Keywords: *indeterminate equation, linear congruence, general solution, particular solution.*

Un rol important în cursul de teorie a numerelor îl joaca congruențele liniare cu o singură necunoscută. Pentru congruențele liniare cunoaștem mai multe metode de rezolvare: metoda probelor, metoda transformării coeficienților, metoda lui Euler, metoda fracțiilor continui [2, 5] etc.

Arătăm în continuare că aflarea soluțiilor întregi ale unei ecuații nedeterminate de gradul întâi cu două necunoscute cu coeficienți întregi este strâns legată de aflarea soluțiilor unei congruențe liniare.

Fie dată ecuația liniară de gradul întâi: $ax + by = c$ (1), $a, b, c \in Z$. Vom considera cazul când $a \neq 0$, $b \neq 0$, fiindcă dacă $a = 0$ sau $b = 0$, atunci ecuația (1) ia forma $by = c$ sau $ax = c$.

Suplimentar considerăm că $a, b \notin \{\pm 1\}$, fiindcă în caz contrar ușor se exprimă x prin y sau y prin x și aflarea soluțiilor întregi ale ecuației (1) este trivială.

Admitem că ecuația (1) este compatibilă, iar (x_0, y_0) - o soluție particulară a ei. Atunci $ax_0 + by_0 = c$, prin urmare $ax_0 - c = -by_0$, deci $(ax_0 - c) \vdots b$. Considerând $b > 1$, divizibilitatea precedentă implică congruența $ax_0 \equiv c(mod\ b)$. Astfel x_0 este o soluție particulară a congruenței liniare $ax \equiv c(mod\ b)$ (2).

Menționăm că dacă $a, b \notin \{\pm 1\}$, ecuația (1) poate fi adusă la o formă echivalentă cu ea în care $b > 1$, deci există congruența (2).

Evident că și invers, dacă admitem că x_0 este o soluție particulară a congruenței (2), atunci $ax_0 \equiv c(mod\ b)$, prin urmare $(ax_0 - c) \vdots b$. Astfel $\exists x_0 \in Z$, încât $ax_0 - c = -by_0$, deci $ax_0 + by_0 = c$, rezultă că (x_0, y_0) este o soluție particulară a ecuației (1).

Astfel am arătat că (x_0, y_0) este o soluție întreagă a ecuației $ax + by = c, a, b, c \in Z$ dacă și numai dacă x_0 este soluție particulară a congruenței liniare $ax \equiv c(mod\ b)$.

În general pentru ecuația (1) se cunoaște că aceasta admite soluții întregi, dacă și numai dacă $c \vdots (a, b)$. În caz contrar ecuația (1) este incompatibilă în mulțimea numerelor întregi [1, 3].

Orice ecuație de forma (1) compatibilă în mulțimea Z se reduce la o ecuație echivalentă de forma $a_1x + b_1y = c_1$ (3), $a_1, b_1, c_1 \in Z,\ (a_1, b_1) = 1$.

Iar dacă (x_0, y_0) este o soluție particulară a ecuației (3), atunci soluția generală a acesteia în Z are forma $(x_0 + b_1t, y_0 - a_1t), t \in Z$ [2, 4].

În continuare vom arăta cum se aplică congruențele liniare la rezolvarea unor probleme, care se reduc la aflarea soluțiilor întregi ale ecuației nedeterminate de forma $ax + by = c$.

Problema 1. O echipă de muncitori trebuie să construiască un gazoduct de 500 metri lungime, având la dispoziție țevi de două lungimi de 6 și 11 metri. Țevile nu trebuie tăiate.

1. Aflați toate soluțiile problemei.
2. Câte țevi de fiecare lungime sunt necesare pentru gazoduct, încât numărul de sudări al țevilor să fie minimal.

Soluție: Notăm prin x și y numărul de țăvi de 6 m. și 11 m. corespunzător. Obținem ecuația liniară cu două necunoscute $6x + 11y = 500$. Cum $(6,11) = 1$, rezultă că ecuația dată are soluții întregi. Aflăm soluțiile ecuației, rezolvând congruența liniară corespunzătoare după modulul 11.

$6x \equiv 500(mod\ 11)$, obținem $3x \equiv 250(mod\ 11) \Leftrightarrow 3x \equiv 8(mod\ 11) \Leftrightarrow$

$3x \equiv -3(mod\ 11) \Leftrightarrow x \equiv -1(mod\ 11) \Leftrightarrow x \equiv 10(mod\ 11)$.

Fie $x_0 = 10$, atunci obținem $6 \cdot 10 + 11y_0 = 500$, astfel $y_0 = 40$. Deci, soluția generală a ecuației este: $x = 10 + 11t, y = 40 - 6t, t \in Z$. Ținând cont de faptul că x și y sunt numere naturale, aflăm valorile variabilei t pentru care x și $y \in N$. Obținem sistemul $\begin{cases} 10 + 11t \geq 0 \\ 40 - 6t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{10}{11} \\ t \leq \frac{20}{3} \end{cases} \Longrightarrow$

$t \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Completăm tabelul:

t	0	1	2	3	4	5	6
x	10	21	32	43	54	65	76
y	40	34	28	22	16	10	4
x+*y*	50	55	60	65	70	75	80

Astfel toate soluțiile problemei sunt:

$(x, y) \in \{(10,40), (21,34), (32,28), (43,22), (54,16), (65,10), (76,4)\}$. Iar soluția optimă pentru care numărul de sudări e minimal și anume 50 este $x = 10$ și $y = 40$. Adică pentru construirea gazoductului, încât numărul de sudări să fie minimal, sunt necesare 10 țevi de 6 metri și 40 țevi de 11 metri.

În continuare vom arăta cum pot fi aplicate congruențele liniare la rezolvarea unor probleme din geometria analitică.

Problema 2. Pe dreapta $21x - 37y = 58$ aflați numărul de puncte cu coordonate întregi cuprinse între punctele cu ordonatele $b_1 = -40, b_2 = 30.$ Determinați aceste puncte.

Soluție: Pentru a afla soluțiile întregi ale ecuației $21x - 37y = 58$ rezolvăm congruenta $-37y \equiv 58(mod\ 21) \Leftrightarrow -37y \equiv 37(mod\ 21) \Leftrightarrow y \equiv -1(mod\ 21).$

Deci, $y = -1 + 21t, t \in Z$. Substituind în ecuația liniară și exprimând, obținem $x = 1 - 37t, t \in Z$.

Deoarece conform condiției problemei se cere să determinăm punctele cu coordonate întregi de pe dreaptă cuprinse între punctele cu ordonatele $b_1 = -40, b_2 = 30$, alcătuim inecuația $-40 < -1 + 21t < 30 \Leftrightarrow -41 < 21t < 29 \Leftrightarrow -\frac{41}{21} < t < \frac{29}{21}$. Deci, $t \in \{-1, 0, 1\}$. Prin urmare există trei puncte cu coordonate întregi pe dreapta $21x - 37y = 58$ cu ordonatele cuprinse între numerele -40 și 30.

Pentru a determina aceste puncte, înlocuim valorile lui $t \in \{-1, 0, 1\}$ consecutiv în egalitățile $x = 1 - 37t, y = -1 + 21t$ și obținem punctele: $(38, -22), (1, -1), (-36, 20)$.

Răspuns: coordonatele celor trei puncte sunt: $(38, -22), (1, -1), (-36, 20)$.

Problema 3. Determinați toate punctele cu coordonate întregi din planul xOy prin care trec laturile triunghiului cu vârfurile: $A(1,2), B(6,7), C(14,4)$.

Soluție: Folosind ecuația dreptei ce trece prin două puncte, determinăm corespunzător ecuațiile dreptelor AB, AC, BC.

1) AB: $\frac{x-1}{6-1} = \frac{y-2}{7-2} \Leftrightarrow y = x + 1.$

Cum abscisa punctelor cu coordonate întregi de pe latura AB este cuprinsă între numerele 1 și 6, obținem mulțimea punctelor cu coordonate întregi de pe această latură a triunghiului $\{(1,2), (2,3), (3,4), (5,6), (6,7)\}$.

2) AC: $\frac{x-1}{14-1} = \frac{y-2}{4-2} \Leftrightarrow 2x - 13y = -24.$

Aflăm mulțimea soluțiilor întregi ale acestei ecuații cu ajutorul congruențelor liniare.

$2x \equiv -24(mod\ 13) \Leftrightarrow x \equiv -12(mod\ 13) \Leftrightarrow x \equiv 1(mod\ 13).$

Astfel obținem $x = 1 + 13t, t \in Z$, respectiv $y = 2 + 2t, t \in Z$.

Cum abscisele punctelor cu coordonate întregi de pe latura AC sunt cuprinse între 1 și 14. rezultă că acestea se obțin din soluția generală a ecuației pentru $t \in \{0; 1\}$. Astfel unicele puncte cu coordonate întregi de pe latura AC a triunghiului dat sunt $(1,2), (14,4)$, adică vârfurile A și C.

3) BC: $\frac{x-6}{14-6} = \frac{y-7}{4-7} \Leftrightarrow 3x + 8y = 74.$

Rezolvăm și în acest caz congruența liniară corespunzătoare pentru aflarea mulțimii soluțiilor întregi. $3x \equiv 74(mod\ 8) \Leftrightarrow 3x \equiv 2(mod\ 8) \Leftrightarrow x \equiv 6(mod\ 8)$.

Astfel obținem $x = 6 + 8t, t \in Z, y = 7 - 3t, t \in Z$.

Cum abscisele punctelor cu coordonate întregi de pe latura BC sunt cuprinse între 6 și 14, rezultă că acestea se obțin din soluția generală a ecuației pentru $t \in \{0; 1\}$.

Și în cazul dat obținem că unicele puncte cu coordonate întregi de pe latura BC a triunghiului sunt doar vârfurile $B(6,7)$ și $C(14,4)$.

Deci, obținem că laturile triunghiului trec prin 6 puncte cu coordonate întregi.

Răspuns: $\{(1,2), (2,3), (3,4), (5,6), (6,7), (14,4)\}$.

În încheiere, menționăm că în problemele alcătuite și rezolvate de către autori în această lucrare au fost abordate unele aspecte ale interdisciplinarității teoriei numerelor, a teoriei congruențelor și a geometriei analitice, care pot fi utile elevilor de liceu, studenților și profesorilor de matematică.

Bibliografie

1. MINUȚ, P. Teoria numerelor. Vol. II. Iași: Editura Crenguța Gâldău, 1997.
2. CIOCANU, Gh., GOIAN, I., MARIN, V. Teoria numerelor. Chișinău: CEP USM, 2013.
3. RUSU, E. Aritmetica și teoria numerelor. București: Editura didactică și pedagogică, 1963.
4. КАЗАЧЕК, Н., ПЕРЛАТОВ, Г., ВИЛЕНКИН, Н., БОРОДИН, А. Алгебра и теория чисел. МГЗПИ, Москва: Просвещение, 1984.
5. ВИНОГРАДОВ, И. Основы теории чисел. Москва: Наука, 1981.