CZU:37.016:514

APLICAȚII ALE OMOTETIEI ÎN DEMONSTRAREA UNOR TEOREME CLASICE ȘI ÎN REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE CONSTRUCȚII GEOMETRICE

Monica BERENDE, profesor de matematică

Liceul Tehnologic „Liviu Rebreanu”, Maieru, România

Rezumat. *Grupurile de transformări stau la baza conceptului de geometrie. Deși acest fapt nu se oglindește în programele și manualele actuale de gimnaziu și liceu, studiul succint al acestora este necesar pentru a le putea utiliza în rezolvarea problemelor. Multe probleme și teoreme pot fi demonstrate folosind omotetia, chiar dacă se pot rezolva și prin metode tradiționale, dar sunt necesare construcții ajutătoare- segmente, unghiuri, drepte, plane, etc - a căror alegere depinde de ingeniozitatea rezolvitorului. Folosirea desenului atrage după sine complicații suplimentare, deoarece alegerea elementelor de desen presupune considerarea de cazuri particulare. Prin utilizarea transformărilor geometrice, în rezolvarea problemelor de geometrie, evităm construcțiile auxiliare și simplificăm raționamentele. Definiția și proprietățile omotetiei, pot fi teme pentru pregătirea Olimpiadelor și concursurilor de matematică. Am ales ca exemplu demonstrarea Teoremei lui Menelaus și reciproca ei cu ajutorul omotetiei și o problemă de construcție geometrică.*

Cuvinte cheie*: geometrie, omotetia, teorema lui Menelaus, construcții geometrice.*

Introducere

Matematica are un rol important în înțelegerea realității. Permite clasificarea și uneori, sintetizarea în formule scurte a unor cunoștințe. Matematica influențează viața celorlalte discipline, fie ele tehnice, științifice sau artistice, și chiar viața socială, practica vieții curente. În plus, formarea gândirii, a aptitudinilor intelectuale și morale, se realizează la orele de matematică, în general și, de geometrie, în special.

Formarea conceptelor geometrice, spre deosebire de altele, ridică probleme de ordin psihologic și pedagogic deosebite, matematica seamănă mai degrabă cu suferință și groază decât altceva. Ca orice mit, și acesta se demontează greu și ai nevoie de talent și de efort sistematic ca să-i ajuți să reconstruiască o relație sănătoasă cu această disciplină, care să implice curiozitate, bucurie și capacitatea de a o lua nestingherit de la capăt. Procesul prin care se ajunge la concepte geometrice abstracte, ca entități mintale, este un proces complex și îndelungat. Trecerea de la geometria „desenelor” din clasele 1-5, la geometria bazată pe deducții logice, la formarea abilității de a rezolva probleme de geometrie este dificilă și de lungă durată.

La matematică, mai mult decât la alte discipline, existența unor diferențieri privind capacitatea de însușire a cunoștințelor este mai evidentă. În timp ce unii își formează unele concepte ca urmare a mai multor observații, depind o metodă de rezolvare a problemelor mai greu, numai ca urmare a aplicării ei în mai multe situații, alții, chiar după prima aplicație, o pot utiliza ingenios. Rezultă că, diferențierea activității didactice trebuie să fie o prioritate.

Pe de altă parte, cred că n-ar trebui să subestimăm capacitatea elevilor noștri de a înțelege și utiliza conținuturi abstracte. Nu cred că orice lecție trebuie sprijinită imediat de un conținut aplicat. Nu doar pentru că riscăm să facem asocieri care nu sunt riguroase, ci și pentru că alimentăm percepția că orice achiziție intelectuală trebuie făcută cu un scop imediat, palpabil. Elevii pot să se bucure și de concepte care sunt frumoase prin propria lor strălucire abstractă, prin rigoare, simetrie sau spectacol al raționamentului.

În cadrul orelor de consultații săptămânale pentru pregătirea concursurilor și olimpiadelor am reușit să aduc multe zâmbete pe chipul elevilor, să-i pot conduce la generalizări inaccesibile întregii mase de elevi, la particularizări interesante, la clasă neexistând timp suficient.

În timpul acestor ore am folosit cu precădere metoda descoperirii dirijate, îmbinarea activităților de grup cu activitatea frontală, activități care asigură realizarea feed-back-ului, oferă cadrul unei activități active, stimulează interesul elevilor în pregătire, le formează abilități pentru rezolvarea problemelor, elimină pașii neesențiali și încercările ineficiente. Am stabilit teme în cadrul cărora să se rezolve anumite tipuri de probleme sau să se demonstreze anumite teoreme clasice cu ajutorul altor metode.

Voi pune accent aici asupra transformărilor neizometrice, în special omotetia, tocmai pentru farmecul deosebit al acesteia.

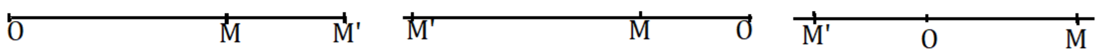
Pentru utilizarea lor în diverse probleme concrete trebuie să le deprindem a le folosi. Aceasta constă în:

1. Construirea imaginii unui punct printr-o transformare geometrică.
2. Determinarea punctelor ce se corespund printr-o transformare.
3. Remarcarea elementelor care determină o transformare.
4. Construirea imaginii unei figuri printr-o transformare geometrică.

Am ales să prezint ca exemplu demonstrarea Teoremei lui Menelaus și reciproca ei cu ajutorul omotetiei. Este necesar să se stabilească centrul de omotetie și raportul de omotetie, dar în așa fel încât să se simplifice pe cât posibil demonstrația.

Definiție. Fie O punct fixat în planul euclidian ε_2 și $k \epsilon R, k \neq 0$. Se numește omotetie de centru O și raport k o aplicație $H_{0,}k: \varepsilon_2 \to \varepsilon_2$ $H_{0,}k(M) = M' \forall M \in \varepsilon_2$ care îndeplinește următoarele condiții.

1. $H_{0,}k(O) = O.$
2. Dacă M$\neq$ 0, atunci punctele O, M, M' sunt coliniare.
3. Dacă numărul real k este pozitiv, atunci $M' \in [OM$ iar dacă k este negativ atunci $O \in [MM']$.



4. $OM' = |k| \cdot OM.$

Punctul M′ se numește omoteticul punctului M. Când $k>0$ omotetia se numește directă, iar când $k<0$ omotetia se numește inversă.

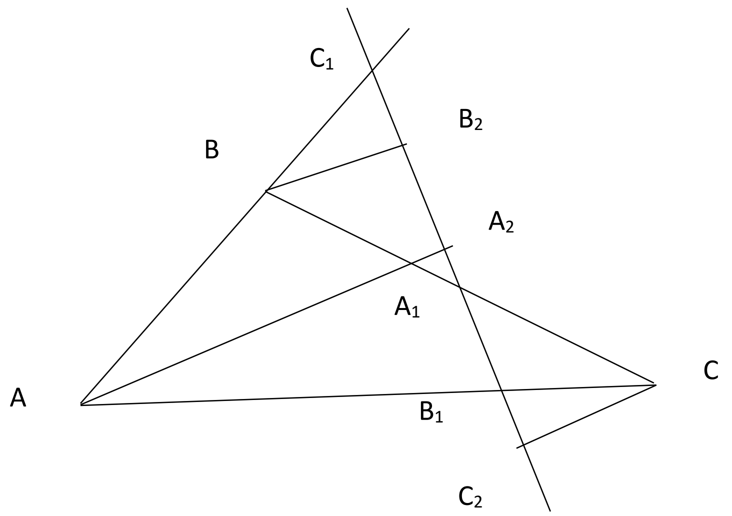
Proprietățile omotetiei

- nu păstrează distanțele;
- păstrează orientarea poligoanelor;
- păstrează unghiurile;
- drepte paralele vor fi transformate în drepte paralele, iar transformata unei drepte va fi paralelă cu dreapta;
- are ca punct fix centrul de omotetie;
- două omotetii succesive $H_1(O_1, k_1)$ și $H_2(O_2, k_2)$ se compun într-o translație sau omotetie $H_3(O_3, k_1 + k_2)$;
- în general, omotetiile nu comută.

Definiție. Orice dreaptă d care intersectează dreptele AB, BC, AC care conțin laturile [AB], [BC], [AC] respectiv, ale unui triunghi ABC se numește transversală a triunghiului ABC.

Teoremă. Dacă o transversală intersectează dreptele AB, BC, AC care conțin laturile [AB], [BC], [AC] respectiv, ale triunghiului ABC în punctele C_1, A_1, B_1, respectiv, atunci are loc relația.

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1.$$



Demonstrație. Fie *t* o transversală care intersectează dreptele AB, BC, CA care conțin laturile triunghiului ABC, în punctele C_1, A_1, B_1. Construim semidreptele paralele $(AA_2, (BB_2, (CC_2$ care intersectează transversala t în punctele A_2, B_2, C_2respectiv.

Rezultă că $[AA_2], [BB_2], [CC_2]$ sunt segmente paralele.

Considerăm omotetiile $H_{A1,k1}$ astfel încât $H_{A1,k1}(B) = C$; $H_{B1,k2}$, astfel încât $H_{B1,k2}(C) = A$ $H_{C1,k3}$, astfel încât $H_{C1,k3}(A) = B$.

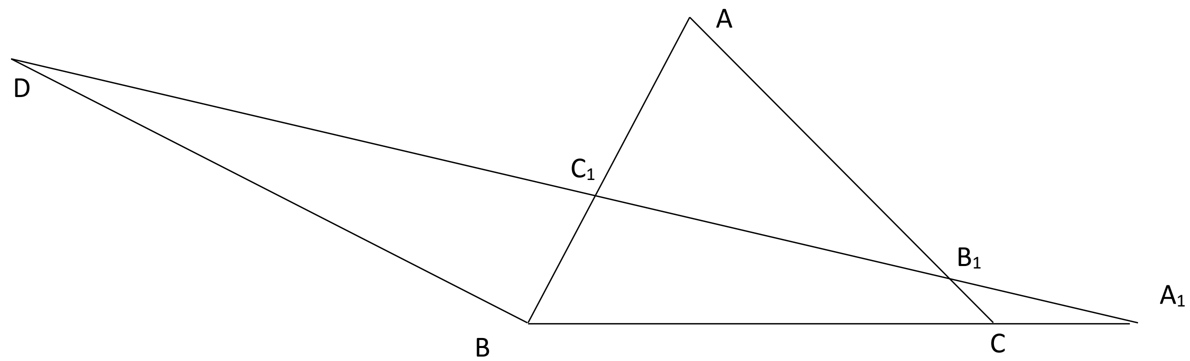
Deci, $A_1C = k_1 \cdot A_1B.$, $B_1A = k_2 \cdot B_1C$, $C_1B = k_3 \cdot C_1A$, adică $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{1}{k_1}$ $\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{1}{k_2}$ $\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{1}{k_3}$.

Rezultă că $H_{A1,k1}(B_2) = C_2$ $H_{B1,k2}(C_2) = A_2$ $H_{C1,k3}(A_2) = B_2$

și $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BB_2}{CC_2}$ $\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{CC_2}{AA_2}$ $\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{AA_2}{BB_2}$.

Cele trei egalități înmulțite membru cu membru, prin simplificare în membrul drept, conduc la relația din enunț.

O altă demonstrație a teoremei lui Menelaus cu ajutorul omotetiilor este următoarea.



Considerăm omotetia $H_1 = H_{A1,BD/B1C}$ de centru A1 și raport $\frac{BD}{B_1C}$. Avem D=H1(B1) și B=H1(C).

Rezultă că $\frac{A1B}{A1C} = \frac{BD}{B1C}$, relația (1).

Considerăm acum omotetia $H_2 = H_{C1,AB1/BD}$ de centru C1 și raport $\frac{AB1}{BD}$. Avem A=H2(B) și B1=H2(D).

Rezultă că $\frac{C1A}{C1B} = \frac{AB1}{BD}$, relația (2). Înmulțind relațiile (1) și (2) se obține relația cerută.

Reciproca teoremei lui Menelaus

Dacă pe dreptele AB,BC,CA care conțin laturile unui triunghi ABC, se consideră punctele C_1, A_1, B_1respectiv astfel încât să fie satisfăcută relația $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$,atunci punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare.

Demonstrație Fie C' punctul de intersecție al dreptelor AB și A_1B_1. Din teorema lui Menelaus rezultă că $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$

Comparând egalitatea obținută cu egalitatea din enunțul teoremei avem $\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{C'A}{C'B}$ deci punctul C_1 împarte segmentul AB în același raport ca și punctul C', ceea ce nu se poate decât dacă $C_1 = C'$.

Dintre problemele de geometrie, problemele de construcții geometrice sunt acelea care stimulează în gradul cel mai înalt creativitatea, imaginația, spiritul de observație, de claritate și de logică. Natura fiecărei probleme chiar a acelora care în aparență seamănă, cere o cale proprie de rezolvare ceea ce face să nu poată fi încadrată într-o metodă care să-I dea soluția cu siguranță, pe cale elementară, cu rigla și compasul.

De obicei în geometrie, dăm elevilor figuri geometrice și cerem să le descopere proprietățile. În problemele de construcții geometrice elevii cunosc unele proprietăți și caută să execute figuri care să aibă proprietățile cerute. În general aceste probleme se rezolvă în două moduri

1) Construind direct elementele date și obținând astfel figura cerută (în general dacă problema e simplă)-aici avem etapele-construcție, discuție

2) Presupunând figura (cu proprietățile date) construită și descoperind și alte proprietăți care să stea la baza construcției cu rigla și compasul. etapele sunt -soluția, construcția, demonstrația și discuția.

În cazul în care pe baza cunoștințelor pe care le avem putem executa construcția atunci rezolvarea necesită doar ultimele trei etape. Când rezolvarea cuprinde și prima etapă se spune că s-a făcut prin analiză.

Este necesar să se stabilească centrul de omotetie și raportul de omotetie, dar în așa fel încât să se simplifice pe cât posibil demonstrația. Construim apoi figura omotetică cu cea căutată după care pe baza anumitor teoreme sau proprietăți ale omotetiei, determinăm un element al noii figuri care se află în relație cu omoteticul său din problema ce trebuie demonstrată.

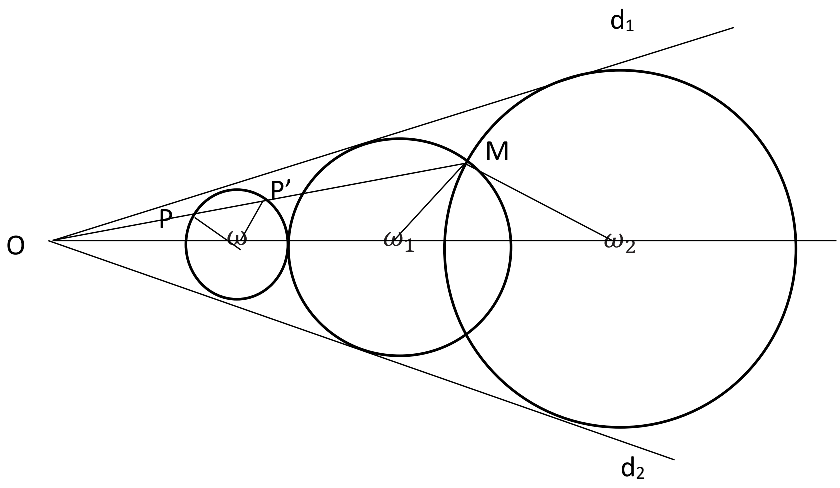
Fie următoarea problemă: *Să se construiască un cerc tangent la două drepte date și trecând printr-un punct dat, dacă dreptele sunt concurente.*

Fie dreptele d_1 și d_2 iar $d_1 \cap d_2 = \{O\}$. Notăm punctul dat cu M, $M \notin d_1$, $M \notin d_2$ și $M \neq O$.

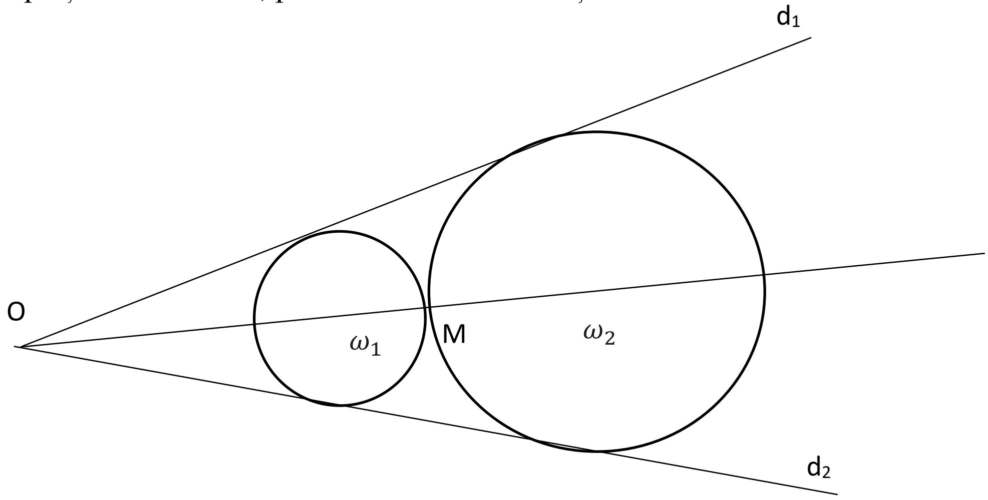
Centrul ω_1 al cercului căutat $\mathcal{C}_1$ se va afla pe bisectoarea unghiului celor două drepte. Cercul $\mathcal{C}_1$este omotetic oricărui cerc tangent dreptelor d_1 și d_2, centrul omotetiei fiind O.

Vom construi bisectoarea unghiului dreptelor d_1 și d_2 și cercul $\mathcal{C}(\omega, r)$cu centrul pe bisectoare și tangent dreptelor d_1 și d_2.

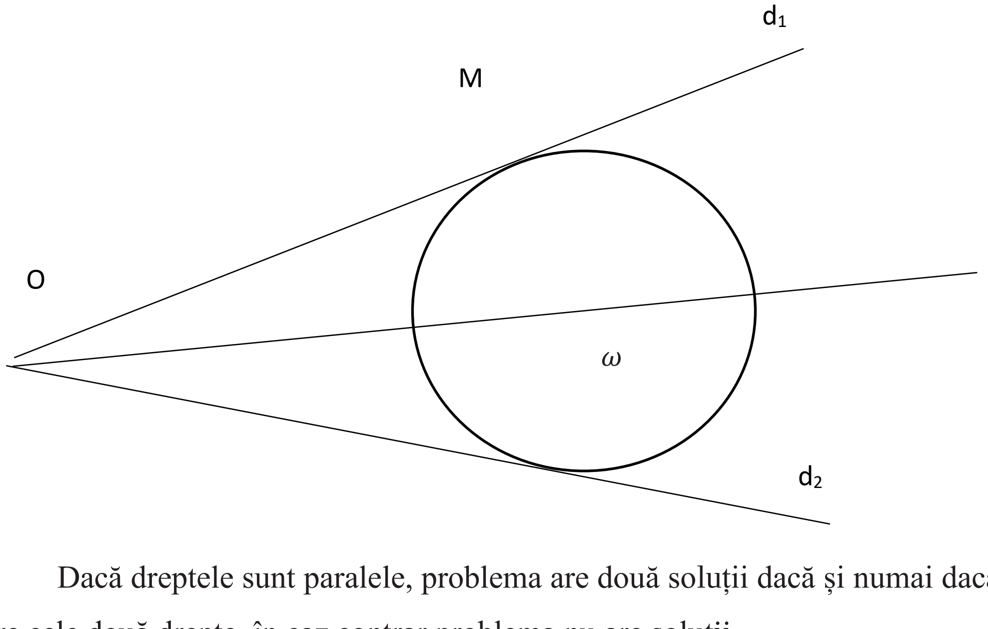
Dreapta OM intersectează cercul $\mathcal{C}$ în punctele P și P'. Deoarece $\mathcal{C}_1$ este omoteticul lui $\mathcal{C}$ în omotetia de centru O, ducem din M paralela la P'ω, respectiv Pω. Aceste paralele vor intersecta bisectoarea în punctele ω_1,respectiv ω_2 care vor fi centrele cercurilor $\mathcal{C}_1$și $\mathcal{C}_2$ căutate. Observăm că problema are două soluții: cercurile $\mathcal{C}_1$și $\mathcal{C}_2$ de centre ω_1și ω_2.



Dacă M aparține bisectoarei, problema are două soluții.



Dacă M aparține lui d_1 sau M aparține lui d_2, problema are o singură soluție.



Dacă dreptele sunt paralele, problema are două soluții dacă și numai dacă punctul dat M este între cele două drepte, în caz contrar problema nu are soluții.

Bibliografie

1. COTA, A., RADO, M., RADUȚIU, M., VOMICESCU, F. Geometrie și trigonometrie, Manual cl. a IX-a, București: Ed. Didactică și pedagogică, 1995.

2. DUICAN, L., DUICAN, I. Transformări geometrice. Culegere de probleme. București: Ed. Științifică și enciclopedică, 1987.

3. ENGHIȘ, P. Despre transformări geometrice și anumite implicații în rezolvarea unor probleme. În: Lucrările seminarului de didactica Matematicii, UBB, Cluj-Napoca, Facultatea de Matematică, 1987.