

# METODOLOGIA APLICĂRII CONCEPTELOR MATEMATICE ȘI GEOGRAFICE ÎN LOCALIZAREA POZIȚIEI UNUI VEHICUL AERIAN FĂRĂ PILOT

**Dorin AFANAS**, doctor, conferențiar universitar

Universitatea de Stat din Tiraspol

**Rezumat.** Geolocalizarea joacă un rol important la determinarea poziției în spațiu a unui vehicul aerian fără pilot uman la bord. Cunoașterea noțiunilor din cadrul temei date facilitează considerabil conștientizarea noțiunilor matematice și geografice respective aferente aplicațiilor practice prin intermediul problemelor cu aspect cotidian.

**Summary.** Geolocation plays an important role in determining the space position of an unmanned aerial vehicle on board. Knowledge of the notions within the given topic considerably facilitates the awareness of the respective mathematical and geographical notions related to the practical applications through everyday problems.

**Cuvinte cheie:** vehicul aerian fără pilot, trigonometrie, geolocalizare, sistem geografic de coordonate.

**Keywords:** unmanned aerial vehicle, trigonometry, geolocation, geographic coordinate system.

## 1. Repere teoretice

Studentii trebuie să posede următoarele cunoștințe și competențe din cadrul temelor: Coordonate carteziane tridimensionale; Teoria secțiunilor conice; Trigonometria; Formulele de transformare ale coordonatelor; Coordonate polare; Teoria elementară a suprafețelor de ordinul doi; Formula distanței dintre două puncte; Sistem geografic de coordonate: longitudine (vest sau est), latitudine (nord sau sud), altitudine (Fig. 1).

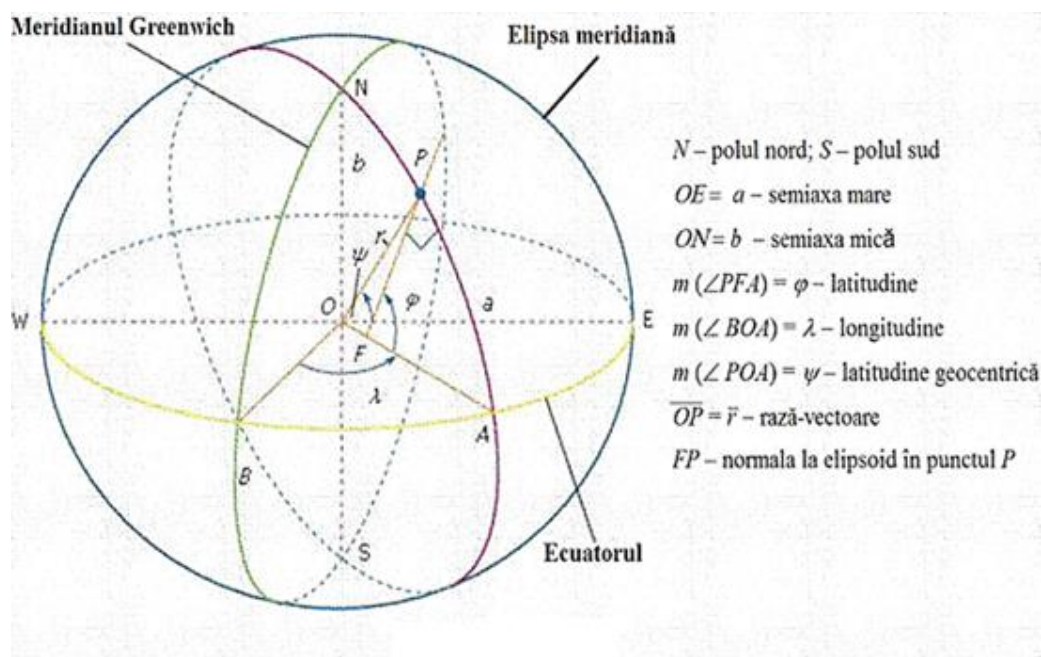


Fig. 1. Sistem geografic de coordonate

În general există următoarele metode de convertire/transformare ale coordonatelor:

1.1. Metoda aproximativă de conversie/transformare a coordonatelor locale în coordonate GPS. Se realizează activități după următorul algoritm:

- Stabilim un sistem de trei axe reciproc perpendiculare ( $Ox$ ), ( $Oy$ ) și ( $Oz$ ) în curte sau în sala de gimnastică, conform următoarelor criterii: ( $Ox$ ) → Est; ( $Oy$ ) → Nord și ( $Oz$ ) → direcție locală "sus" (Fig. 2).



Fig. 2. Sistem de coordonate cartezian în trei dimensiuni

- Aproximăm elipsoidul la o sferă identificată în spațiul local.
- Selectăm un număr finit de puncte în spațiul din jur.
- Convertim/transformăm coordonatele locale ale punctelor în coordonate GPS și invers.
- Verificăm corectitudinea calculelor cu ajutorul unui smartphone, tabletă, laptop, calculator.

1.2. Metoda exactă de conversie/transformare a coordonatelor locale în coordonate GPS. Se realizează activități după următorul algoritm:

- Considerăm elipsoidul WSG84 în spațiul local.
- Stabilim o structură de trei axe perpendiculare ( $Ox$ ), ( $Oy$ ) și ( $Oz$ ) în curte sau în sala de gimnastică, conform următoarelor criterii: ( $Ox$ ) → Est; ( $Oy$ ) → Nord și ( $Oz$ ) → direcție locală "sus".
- Selectăm un număr finit de puncte în spațiul din jur.
- Convertim/transformăm coordonatelor locale ale punctelor în coordonate GPS și invers.
- Verificăm corectitudinea calculelor cu ajutorul unui smartphone, tabletă, laptop, calculator.

Formule utile:

$$\begin{pmatrix} e \\ n \\ h \end{pmatrix} = R(\varphi, \lambda) \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} X = X_0 + \Delta X, \\ Y = Y_0 + \Delta Y, \\ Z = Z_0 + \Delta Z. \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = R^{-1}(\varphi, \lambda) \cdot \begin{pmatrix} e \\ n \\ h \end{pmatrix},$$

$$R^{-1}(\varphi, \lambda) = R^T(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\sin \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

## 2. Modele de probleme cu rezolvări

Poziția unui punct de pe suprafața terestră poate fi determinată cu ajutorul ternei  $(\varphi; \lambda; h)$ , unde  $\varphi$  este latitudinea,  $\lambda$  – longitudoinea, iar  $h$  – altitudinea față de nivelul mării.

Fixăm un sistem de referință cartezian așa cum este arătat în figura 2. Dacă admitem că Pământul are o formă sferică, atunci coordonatele spațiale ale unui punct la nivelul mării se determină conform relațiilor:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda, \\ y = r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda, \\ z = r \cdot \sin \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

unde  $r$  este raza Pământului,  $r \approx 6370$  km.

**Problema 2.1.** Determinați coordonatele spațiale în *km* față de un sistem rectangular cartezian ale unor orașe pe care le-ați vizitat sau sunteți interesat, căutând latitudinea și longitudoinea pe internet. Determinați distanța dintre aceste orașe în kilometri (prezentați calculele cu trei cifre după virgulă).

**Rezolvare.** Alegem, de exemplu, orașele: Chișinău, Bălți, Tiraspol, Cahul și Leușeni. Latitudinea și longitudoinea le aflăm din internet, care ușor pot fi convertite în grade zecimale. Apoi, prin intermediul formulelor (1) obținem coordonatele rectangulare carteziene  $(x; y; z)$  în kilometri. În fine obținem tabelul:

Localitatea	Latitudinea și longitudoinea în grade zecimale $(\varphi; \lambda)$	Coordonatele carteziene în <i>km</i> $(x; y; z)$
CHIȘINĂU	(47,01; 28,868)	(3803,766; 2097,02; 4659,481)
BĂLȚI	(47,766; 27,916)	(3783,424; 2004,572; 4716,385)
TIRASPOL	(46,844; 29,633)	(3787,147; 2154,285; 4646,877)
CAHUL	(45,904; 28,198)	(3906,578; 2094,513; 4574,773)
LEUȘENI	(46,82; 28,192)	(3841,732; 2059,285; 1906,12)

Calculăm în continuare distanța dintre aceste orașe utilizând formula distanței [1, 2, 3].

De exemplu, distanța dintre orașele Chișinău și Bălți va fi:

$$\begin{aligned} d_{CB} &= \sqrt{(-20,342)^2 + (-92,448)^2 + 56,904^2} = \\ &= \sqrt{413,796964 + 8546,632704 + 3238,065216} = \\ &= \sqrt{12198,494884} = 110,446 \text{ (km)}. \end{aligned}$$

Problema 2.1 este rezolvată.

**Problema 2.2.** În Fig. 3 sunt prezentate datele înregistrate de la bordul unui vehicul aerian fără pilot uman la bord care a efectuat un zbor rectiliniu trecând prin punctele  $A$  și  $B$ . Determinați lungimea traiectoriei acestui vehicul dintre punctele  $A$  și  $B$  exprimată în metri. Calculele le efectuați cu trei cifre după virgulă.

**Rezolvare.** Conform datelor înregistrate de la bordul vehiculului aerian fără pilot uman la bord observăm că vehiculul aerian în timpul zborului a trecut prin punctul  $A(47,149^{\circ}; 28,961^{\circ})$  și prin punctul  $B(47,151^{\circ}; 28,964^{\circ})$ , adică punctul  $A$  are latitudinea  $\varphi = 47,149^{\circ}$  și longitudinea  $\lambda = 28,961^{\circ}$ , iar punctul  $B$  are latitudinea  $\varphi = 47,151^{\circ}$  și longitudinea  $\lambda = 28,964^{\circ}$ .

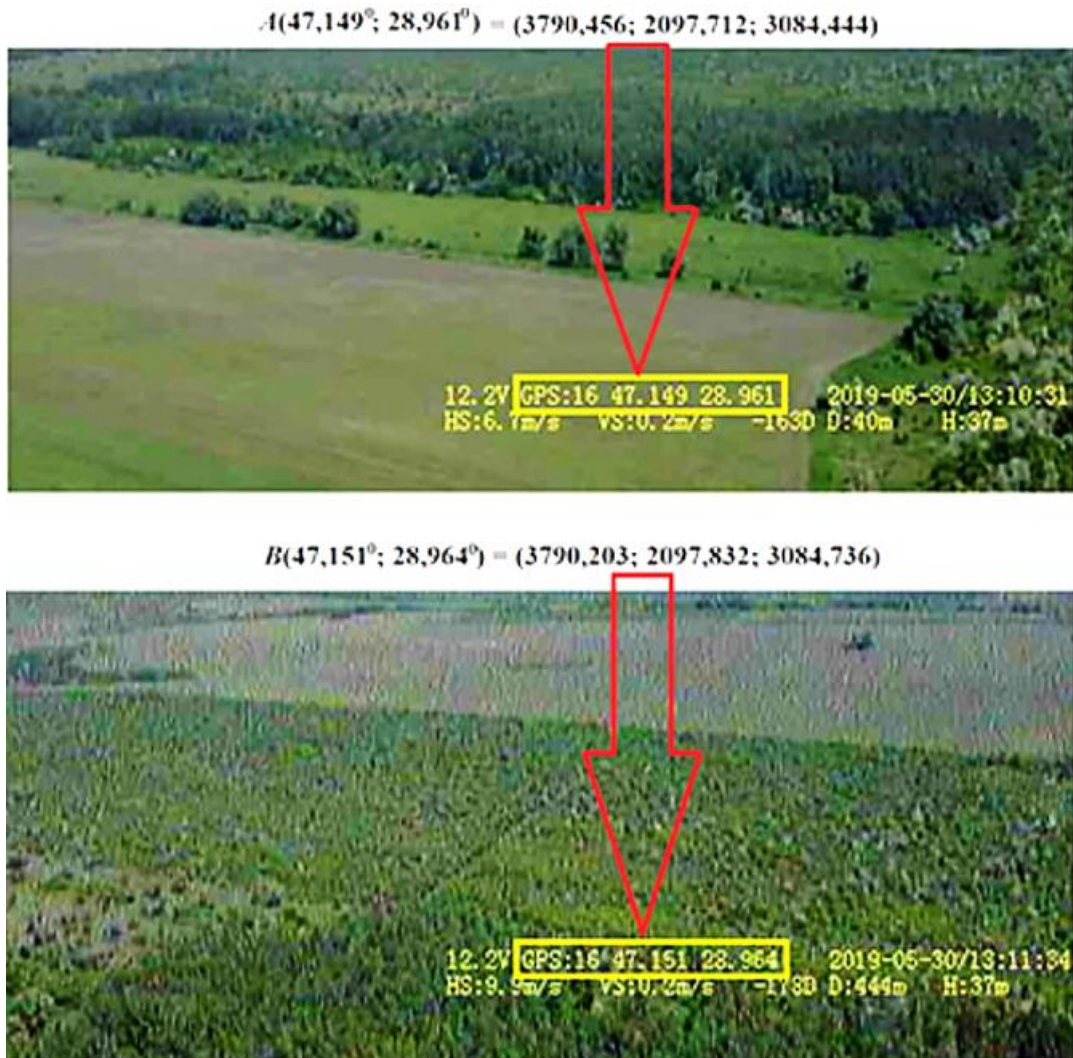


Fig. 3. Înregistrările de la bordul unui vehicul aerian fără pilot

Pentru a calcula distanța dintre punctele  $A$  și  $B$  vom trece mai întâi la coordonate rectangulare carteziene, luând în considerație că raza Pământului  $r = 6370 \text{ km}$ . Astfel vom obține:

– pentru punctul  $A$ :

$$\begin{cases} x = 6370 \cdot \cos 47,149^{\circ} \cdot \cos 28,961^{\circ}, \\ y = 6370 \cdot \cos 47,149^{\circ} \cdot \sin 28,961^{\circ}, \\ z = 6370 \cdot \sin 47,149^{\circ}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3790,456, \\ y = 2097,712, \\ z = 3084,444. \end{cases}$$

– pentru punctul  $B$ :

$$\begin{cases} x = 6370 \cdot \cos 47,151^{\circ} \cdot \cos 28,964^{\circ}, \\ y = 6370 \cdot \cos 47,151^{\circ} \cdot \sin 28,964^{\circ}, \\ z = 6370 \cdot \sin 47,151^{\circ}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3790,203, \\ y = 2097,832, \\ z = 3084,736. \end{cases}$$

Prin urmare, coordonatele rectangulare carteziene ale punctelor  $A$  și  $B$  sunt:  $A(3790,456; 2097,712; 3084,444)$  și  $B(3790,203; 2097,832; 3084,736)$ .

Aplicând formula distanței dintre două puncte, vom obține:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-253)^2 + 0,12^2 + (-0,292)^2} = \\ &= \sqrt{0,064009 + 0,0144 + 0,085264} = \sqrt{0,163673} \approx 0,404 \text{ (km)}. \end{aligned}$$

Deoarece răspunsul se cere de prezentat în metri, atunci  $0,404 \text{ km} = 404 \text{ m}$ . Astfel, lungimea traiectoriei vehiculului aerian fără pilot uman la bord dintre punctele  $A$  și  $B$  este egală cu  $404 \text{ m}$ .

După determinarea lungimii traiectoriei  $AB$ , propunem să efectuăm verificarea. Pentru aceasta, apelând iarăși la figura 3, observăm că în punctul  $A$  datele vehiculului aerian ne indica distanța  $D = 40 \text{ m}$ , iar în punctul  $B - 444 \text{ m}$ . Deci

$$AB = 444 - 40 = 404 \text{ (m)}.$$

Problema 2.2 este rezolvată.

Problema 2.2 se poate modifica prezentând coordonatele punctelor  $A$  și  $B$  nu prin grade zecimale, dar prin grade, minute și secunde.

După aceste activități se trece la rezolvarea problemelor de tipul:

Cum se schimbă relația anterioară în cazul punctelor (de exemplu a sateliților artificiali), a căror altitudine deasupra nivelului mării este  $h$ , comparabilă cu raza Pământului  $r$  ?

**Indicație:**

$$\begin{cases} x = (r + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda , \\ y = (r + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda , \\ z = (r + h) \cdot \sin \varphi . \end{cases}$$

Se continuă cu probleme, unde Globul Pământesc se aproximează cu un elipsoid (de exemplu WSG84).

## Concluzii

1. Geolocalizarea joacă un rol important la determinarea poziției în spațiu a unui vehicul aerian fără pilot uman la bord.

2. Cunoașterea noțiunilor din cadrul temei date facilitează considerabil conștientizarea noțiunilor matematice, cum ar fi:

- ◆ Coordonate carteziene tridimensionale.
- ◆ Teoria secțiunilor conice.
- ◆ Trigonometria.
- ◆ Formulele de transformare ale coordonatelor.
- ◆ Coordonate polare.
- ◆ Teoria elementară a suprafețelor de ordinul doi.
- ◆ Formula distanței dintre două puncte.

3. Cunoașterea noțiunilor din cadrul temei date facilitează considerabil conștientizarea noțiunilor geografice, cum ar fi sistemul geografic de coordonate: longitudine (vest sau est), latitudine (nord sau sud), altitudine, înălțime.

4. Problemele cu aspect cotidian joacă un rol important în formarea abilităților de a controla zborul unei aeronave în spațiu.

*Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)”, inclus în „Program de stat” (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare.*

### **Bibliografie**

1. CALMUȚCHI L., AFANAS D., CIOBAN M. Geometrie analitică în spațiu. Chișinău: Tipografia Universității de Stat din Tiraspol, 2014, 210p. ISBN 978-9975-76-118-5
2. CIOBAN M., CALMUȚCHI L. Geometrie diferențială. Probleme. Chișinău: Tipografia Universității de Stat din Tiraspol, 2004, 194 p. ISBN 9975-9815-0-X
3. AFANAS D., NIȚICA L. *Utilizarea metodei coordonatelor și a transformărilor geometrice la planificarea traectoriilor vehiculelor aeriene fără pilot.* În: Materialele conferinței republicane a cadrelor didactice. Vol. 1. Didactica științelor exacte, Chișinău, Republica Moldova, 27-28 februarie, 2021. Chișinău: Tipografia Universității de Stat din Tiraspol, 2021. pp. 93-100. ISBN 978-9975-76-324-0