CZU: 518.17:53

# APLICAREA TEORIEI GRAFURILOR ÎN FIZICĂ

**Igor POSTOLACHI**, dr., conf. univ.
https://orcid.org/0000-0002-1752-5386
**Nicolae BALMUȘ**, dr., conf. univ.
https://orcid.org/0000-0002-0491-2918
**Marina BOSTAN**, lector asistent
https://orcid.org/0000-0002-1191-9501
Universitatea de Stat din Tiraspol, Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”

**Rezumat**. În această lucrare este descrisă utilizarea teoriei grafurilor pentru rezolvarea problemelor de fizică referitor la circuite electrice ramificate. În rezultatul modelării matematice a fost creată o aplicație de simulare asistată de calculator a circuitelor electrice ramificate de curent continuu. Aplicația a fost elaborată o în mediul de programare Delphi 10. Avantajul acestui soft este posibilitatea de a genera și a găsi soluții pentru o mulțime de variante (de probleme) cu circuite electrice ramificate.
**Cuvinte cheie**: teoriei grafurilor, circuite electrice, Delphi 10, legile lui Kirchhoff.

## APPLICATION OF GRAPH THEORY IN PHYSICS

**Abstract**. This paper describes the use of graph theory to solve physics problems related to branched electric circuits. As a result of the mathematical modeling, a computer-aided simulation application of direct current branched electrical circuits was created. The application was developed in the Delphi 10 programming environment. The advantage of this software is the possibility to generate and find solutions for a lot of variants (of problems) with branched electric circuits.
**Key words**: graph theory, electrical circuits, Delphi 10, Kirchhoff's laws.

## Introducere

Teoria grafurilor servește ca model matematic pentru orice sistem care conține o relație binară. Un număr mare de probleme legate de obiectele discrete sunt formulate în termeni a teoriei grafurilor. Aceste probleme reprezintă un model structural universal al diferitelor sisteme fizice, în studiul căruia structura componentelor iese în prim-plan, adică legăturile și relațiile dintre componente (electrice, mecanice, pneumatice, chimice, biologice, biofizice, sociologice etc.). Teoria grafurilor se folosește în rezolvarea diferitor sarcini de proiectare și construcție, analiza fiabilității rețelelor de comunicații, circuitelor electronice, rețelelor de comunicații, în rezolvarea problemelor de transport legate de transport, planificare și management, în alcătuirea rutelor optime pentru livrarea mărfurilor, în modelarea proceselor tehnologice complexe, genetică, psihologie, sociologie, economie etc. Avantajul utilizării teoriei grafurilor rezultă din faptul că ele descriu fără ambiguitate structura sistemului, ecuațiile canonice, proprietățile fizice și dependența cauză-efect dintre variabile. Caracteristica principală a utilizării teoriei grafurilor este o abordare geometrică a studiului obiectelor, de exemplu. prezentare sub formă de diagrame. Modelarea matematică și simulările asistate de calculator au devenit o parte uzuală a cercetării științifice pentru studiul

unei multitudini de sisteme naturale din fizică, astrofizică, biologie, tehnică, etc. Aceste instrumente științifice permit studiul direcțiilor de evoluție ale sistemelor în diferite condiții inițiale și de mediu, reducând costurile experimentelor de laborator sau a altor tehnologii de investigare [3].

În problemele care apar în fizică, inginerie, programare, matematică și în alte domenii, apare adeseori necesitatea reprezentării unor relații arbitrare între diferite obiecte, respectiv a interconexiunilor dintre acestea. Unele exemple evidente sunt circuitele electrice în care interconexiunile dintre elementele de circuit joacă un rol central. Pentru funcționare elementele circuitelor electrice (rezistențe, tranzistoare, surse de energie, condensatoare, etc.) sunt interconectate prin fire electrice. Astfel de circuite pot fi reprezentate și prelucrate de către un sistem de calcul în scopul rezolvării unor probleme simple sau complicate.

Prin circuit electric se înțelege un ansamblu de elemente multipolare de circuit, interconectate prin intermediul bornelor lor de acces, într-un anumit mod, în vederea realizării unui anumit scop.

**Circuit electric de curent continuu**

***Definiție***: Se numește nod o bornă comună a cel puțin trei elemente multipolare de circuit.

***Definiție:*** Se numește latură o cale conductoare între două noduri.

***Definiție:*** Se numește buclă o mulțime de laturi împreună cu nodurile aferente lor în care mulțimea laturilor alcătuiește un contur închis și în care fiecare latură și fiecare nod sunt conținute o singură dată în conturul respectiv.[7]

Structurile de date care pot modela natura unui circuit electric de curent continuu sunt cele derivate din conceptul matematic cunoscut sub denumirea de graf. Teoria grafurilor este o ramură majoră a matematicii discrete care în timp a fost și este încă intens studiată.

Prin graf al unui circuit electric se înțelege reprezentarea geometrică a configurației acestuia, obținută prin asocierea câte un punct (numit nod al grafului) pentru fiecare nod al circuitului și câte unui arc de curbă (numit latură a grafului) pentru fiecare latură de circuit. Modul în care laturile sunt legate la noduri este identic pentru circuit și pentru graf asociat. Dacă pentru laturile grafului nu sunt precizate sensuri de parcurs, acesta se numește graf neorientat. Dacă se aleg sensuri arbitrare de parcurs pentru laturi, se obține un graf orientat sau digraf [6].

Pentru exemplificare se prezintă un circuit electric și digraful asociat (Figura 1).

Problema fundamentală a calculului unui circuit electric constă în determinarea intensităților curenților ale acestuia. Un sistem de ***n*** ecuații independente, dedicat acestui scop, se poate obține cu ajutorul celor două legi ale lui Kirchoff, considerate ca esențiale în teoria circuitelor electrice. Grafurile orientate pot fi utilizate pentru scrierea sistematică a ecuațiilor lui Kirchhoff, eventual în formă matriceală, având ca scop calculul curenților laturilor unui circuit electric.[4]

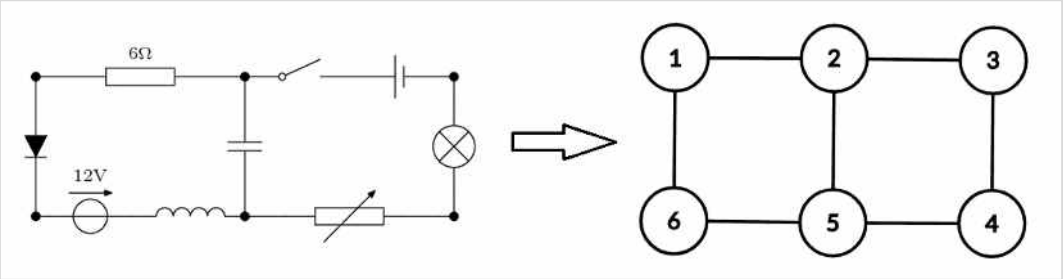


**Figura 1. Circuit electric și digraful asociat**

Prima lege a lui Kirchhoff (teorema nodurilor):

***În orice nod al circuitului electric suma algebrică a curenților ai laturilor care concură în acel nod este nulă.***

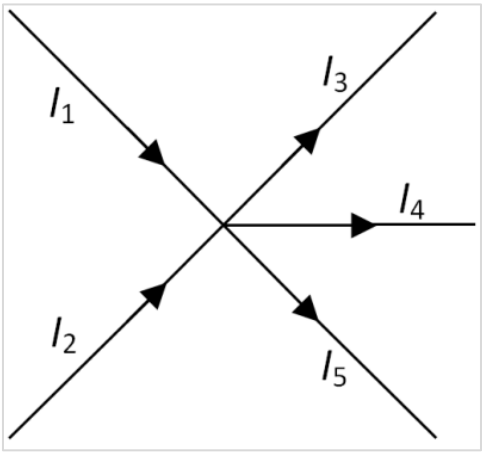


**Figura 2. Schema legii întâi a lui Kirchhoff pentru un nod**

Vom considera, curenții care intră în nod cu semn pozitiv și cu semn contrar curenții care ies din nod [5]: $\boldsymbol{I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5}$.

Sensurile curenților laturilor fiind identice cu sensurile laturilor corespondente din digraf.

A doua lege a lui Kirchhoff:

***Suma algebrică a căderilor de tensiune într-un contur închis de circuit este egală cu suma algebrică a surselor de curent.***

Vom utiliza metoda de calcul a circuitului bazată pe legea a doua a lui Kirchhoff, care se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații independente.

$$I_1R_1 - I_2R_2 = E_1 - E_2$$
$$I_3R_3 + I_2R_2 = E_2 - E_3$$
$$I_1R_1 + I_3R_3 = E_1 - E_{32}$$

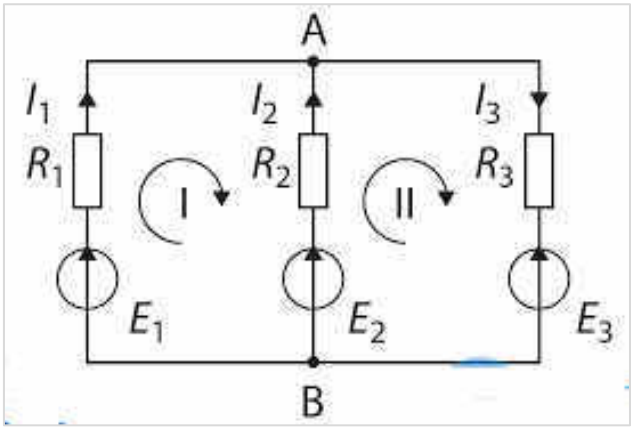


**Figura 3. Exemplu de circuit electric ramificat**

Pentru a aplica cele redate mai sus, vom examina următoarea problemă:

**Problema**: Pentru circuitul electric a cărui schemă este reprezentată în figura alăturată se cunosc: $E_0$=2V, $E_1$=1V, $E_2$=7V, $E_3$=5V, $E_4$=6V, $E_5$=3V, $E_6$=6V, $E_7$=5V, $R_0$=5Ω, $R_1$=5Ω, $R_2$=3Ω, $R_3$=7Ω, $R_4$=8Ω, $R_5$=2Ω, $R_6$=4Ω, $R_7$=5Ω. Determinați intensitățile curenților în ramurile circuitului.

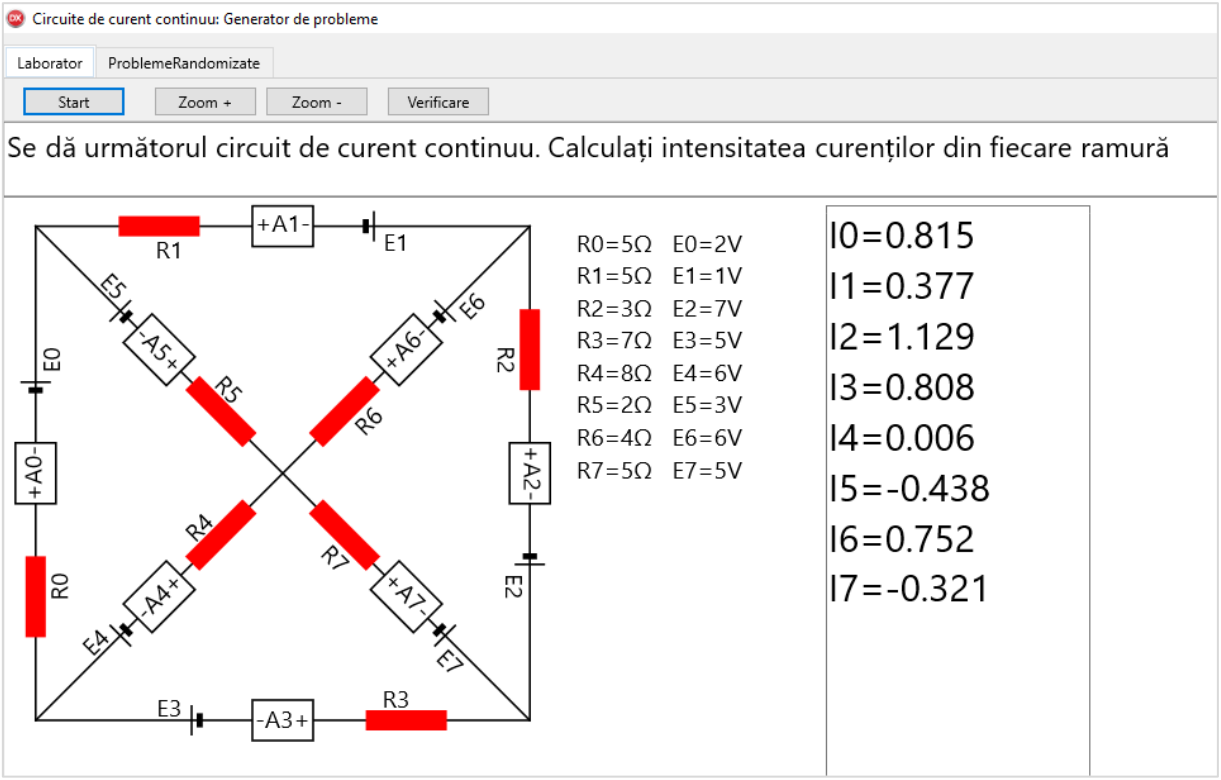


**Figura 4. Exemplu de circuit electric continuu**

Prin căderea de tensiune se înțelege produsul dintre intensitatea curentului și rezistența dată [5]. În fiecare buclă fundamentală, sensul tensiunilor la bornele laturilor circuitului fiind considerat identic cu sensul laturilor corespondente din digraf.

Ținând seama de sensurile marcate pe circuit, aplicarea teoremelor lui Kirchhoff conduce la sistemul de ecuații liniare cu coeficienți constanți (numere reale). În consecință, soluția acestui sistem va fi unică, deci se obțin valori unice pentru curenții laturilor.

Pentru circuitul examinat avem 5 noduri și 4 conture (bucle) închise de circuit.

În rezultat vom avea (5-1)+4=8 ecuații liniare cu 8 necunoscute:

$$\begin{cases} -I_1 - I_4 + I_5 = 0 \\ I_1 - I_2 - I_6 = 0 \\ I_2 + I_3 - I_7 = 0 \\ -I_3 + I_4 + I_8 = 0 \\ R_1 I_1 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = -E_1 + E_5 - E_6 \\ R_2 I_2 - R_6 I_6 + R_7 I_7 = -E_2 + E_6 + E_7 \\ -R_3 I_3 - R_7 I_7 - R_8 I_8 = E_3 - E_7 + E_8 \\ -R_4 I_4 - R_5 I_5 - R_8 I_8 = E_4 - E_5 - E_8 \end{cases}$$

Pentru valori cunoscute ale tensiunilor și rezistențelor, rezolvând acest sistem de 8 ecuații se obțin soluții pentru curenții din rezistențele respective:

$I_0$=0,815A; $I_1$=0,377A; $I_2$=1,129A; $I_3$==0,808A;

$I_4$=0,006A; $I_5$=-0,438A; $I_6$=0,752A; $I_7$=-0,321A.

De multe ori rezolvarea sistemului de 8 ecuații este anevoioasă și cere mult timp. Acest moment este potrivit pentru aplicarea tehnologiilor informaționale. În acest scop a fost elaborată o aplicația-soft în mediul de programare Delphi10, care realizează următoarele sarcini (funcții):

- generează schema unui circuit electric;
- generează o problemă (variante de probleme) cu date inițiale (sursele de curent ($E_0$,…, $E_7$) și rezistențe ($R_0$,…, $R_7$)) și necunoscutele (intensitățile curenților care trec prin acest circuit ($I_0$, …, $I_7$);
- calculează și afișează valorile intensităților necunoscute;
- verifică rezultatele introduse de către utilizator;
- salvează în fișierele separate problemele generate, rezultatele obținute și combinația acestora.

În aceasta ordine de idei, aceasta aplicația poate fi utilizată cât de către profesori, atât și de către studenți.

La baza acestei aplicației este un sistem de 8 ecuații liniare cu 8 necunoscute, elaborate conform legilor lui Kirchhoff , descrise mai sus. Acest sistem se calculează cu ajutorul algoritmul lui Gauss. Pentru prezentarea grafică a circuitului au fost elaborate 2 proceduri:

***Procedure RZOb(cs:TCanvas; x0, y0, h, l, alfag:Integer; r, e:Extended; i:integer);*** care construiește o singură ramură conform parametrilor formali și o procedură

***Procedure Schema(cs:TCanvas; xi, yi, d, h, l:Integer; var r, e:IRE);*** care construiește un circuit complet, în dependență de numărul de ramuri generate.

(Aici trebuie să vedem codul.... aceste sunt proceduri vechi)

Prin intermediul aplicației se generează următoarele variante de probleme a circuitului electric:

**Descrierea aplicației**

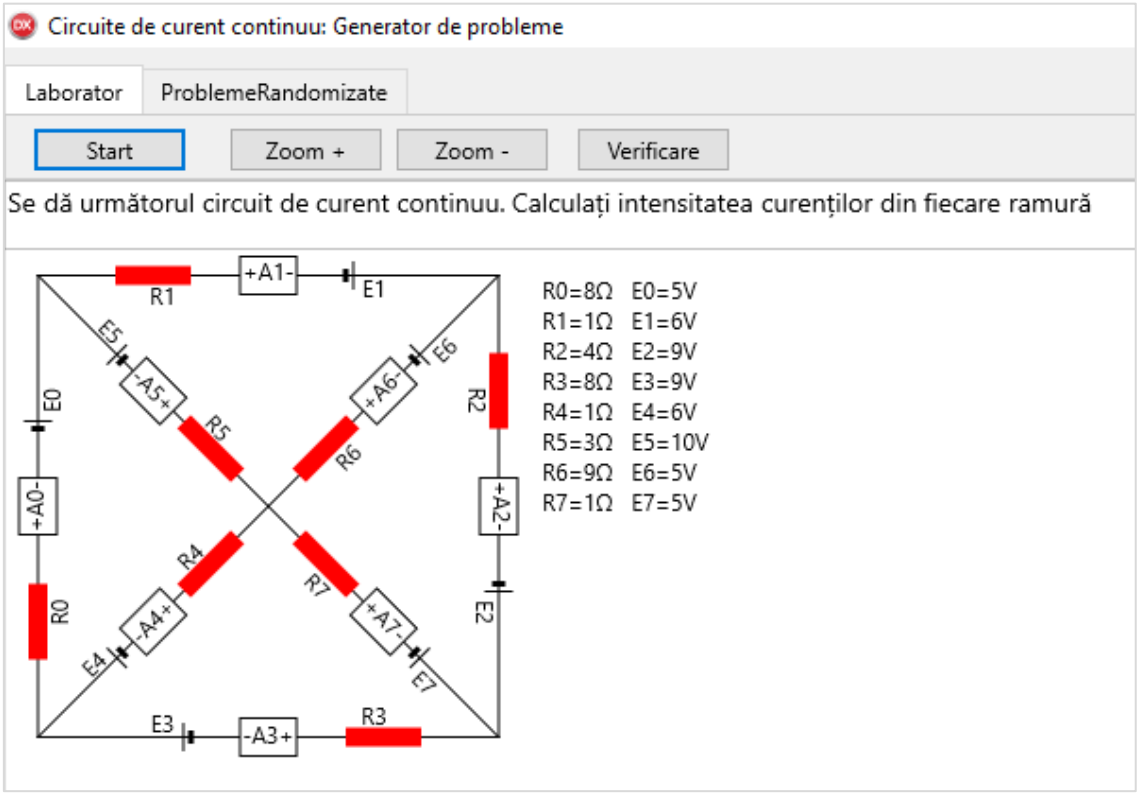


**Figura 5. Interfața aplicației**
***Generator de circuite de curent continuu* – fila *Laborator***

Aplicația conține 2 file(pagini): *Laborator* și *Probleme Randomizate*. În fila *Laborator* avem butonul *Start* prin apăsarea la care se generează un circuit cu un număr aleatoriu de ramuri până la 8. Butoanele *Zoom+* și *Zoom-* ne oferă posibilitatea de a mări respectiv a micșora desenul circuitului. La apăsarea butonului *Verificare* pe fereastră apare componenta de tip Memo în care sunt afișate rezultatele(răspunsurile) problemei generate.

În fila *Probleme Randomizate* avem posibilitatea de a seta numărul de variante de probleme care dori să generăm și numărul de ramuri în circuit. La apăsarea butonului *Generare* se generează problemele și răspunsurile, care ulterior pot fi salvate în documentul cu extensia *.pdf.

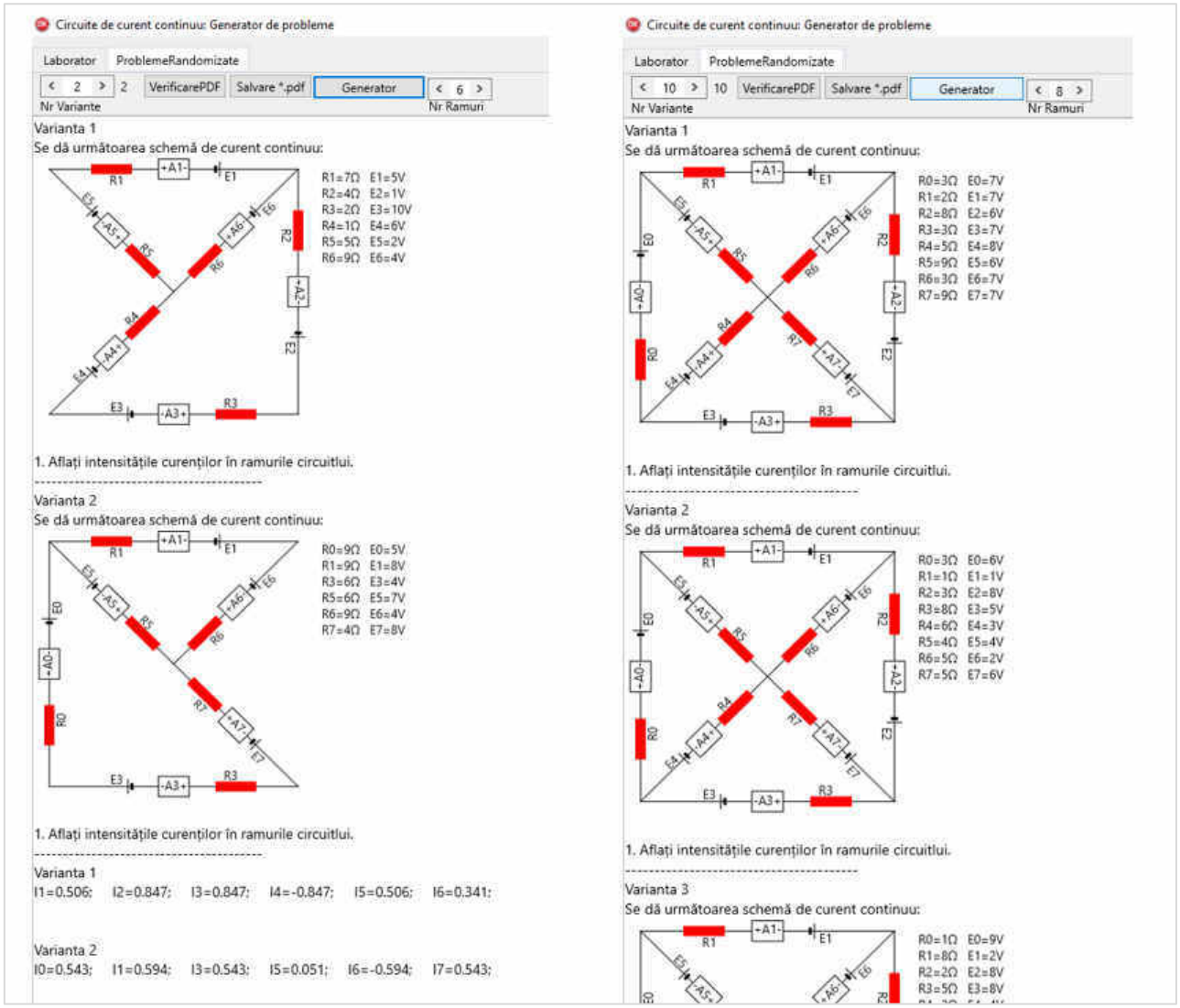


**Figura 6. Generarea problemelor în *Probleme Ranomizate***

## Implementarea aplicației în procesul educațional

### Varianta 1

Pentru circuitul electric a cărui schemă este reprezentată în figura alăturată se cunosc: $E_1$=1V, $E_3$=7V, $E_4$=4V, $E_5$=2V, $E_6$=3V, $E_7$=1V, $R_1$=1Ω, $R_3$=1Ω, $R_4$=9Ω, $R_5$=7Ω, $R_6$=2Ω, $R_7$=3Ω. Determinați intensitățile curenților în ramurile circuitului.

### Soluții:

### Varianta:1

$I_1$=0A; $I_3$==0,308A; $I_4$=-0,308A; $I_5$=0A; $I_6$=0A; $I_7$=0,308A.

### Varianta: 2

$I_0$=0,64A; $I_1$=0,163A; $I_3$==0A; $I_4$=0,64A; $I_5$=-0,478A; $I_6$=-0,163A.

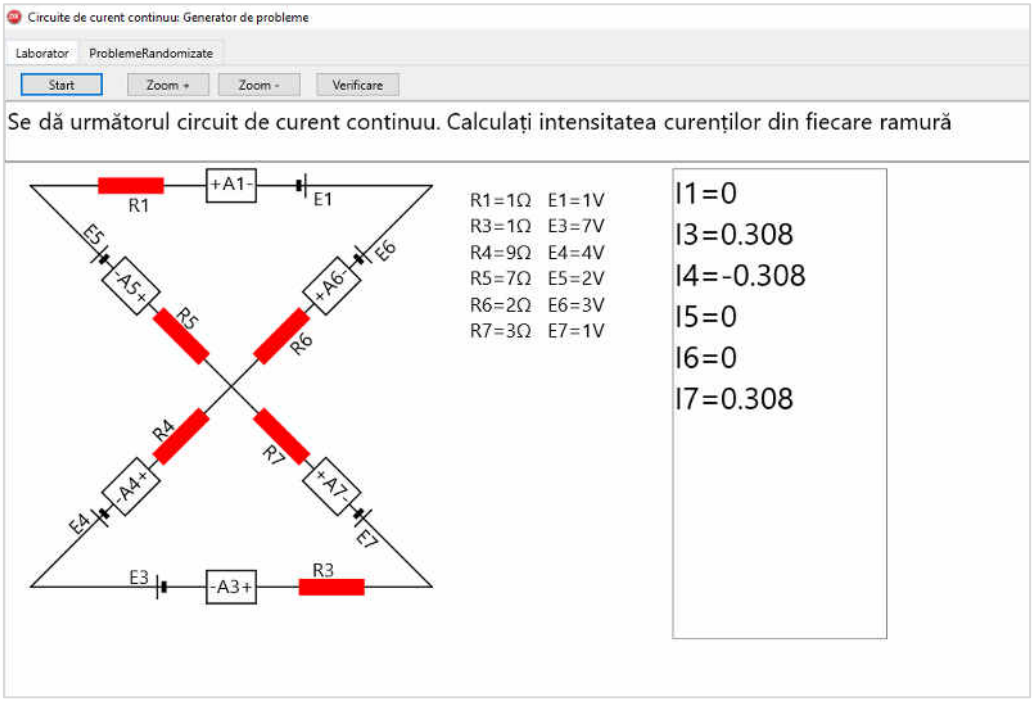


**Figura 7. Schema circuitului din variant I și soluția**

## Tranzistor bipolar

Denumirea de **tranzistor** provine de la: TRANsfer și reSISTOR și se referă la transferarea curentului dintr-un circuit cu rezistență mică – circuitul B-E, unde joncțiunea B-E este polarizată direct, într-un circuit cu rezistență mare – circuitul B-C, unde joncțiunea B-C este polarizată invers. TB poate fi conectat in circuit in trei moduri posibile, în dependență de terminalul comun intre intrare si iesire conform figurii 7(a,b,c).

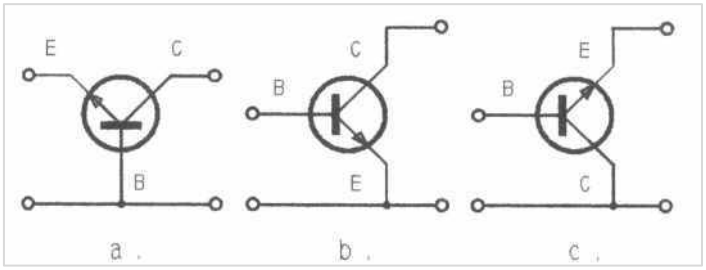


**Figura 8. Modurile de conectare în circuit ale tranzistorului bipolar: a-Bază comună (BC) , b-Emitor comun (EC) , c-Colector comun (CC)**

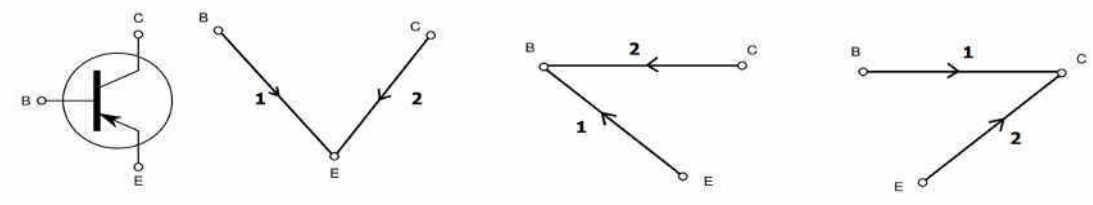


**Figura 9. Grafurile pentru cele trei moduri de conectare în circuit ale tranzistorului bipolar**

Tipul grafului unui circuit cu tranzistori depinde de alegerea polilor de bază ai tranzistorilor. De exemplu pentru circuitul din figura 10(a), obținem graful prezentat în figura 10(b) (arcurile grafurilor polilor tranzistoarelor sunt evidențiate cu linii aldine).

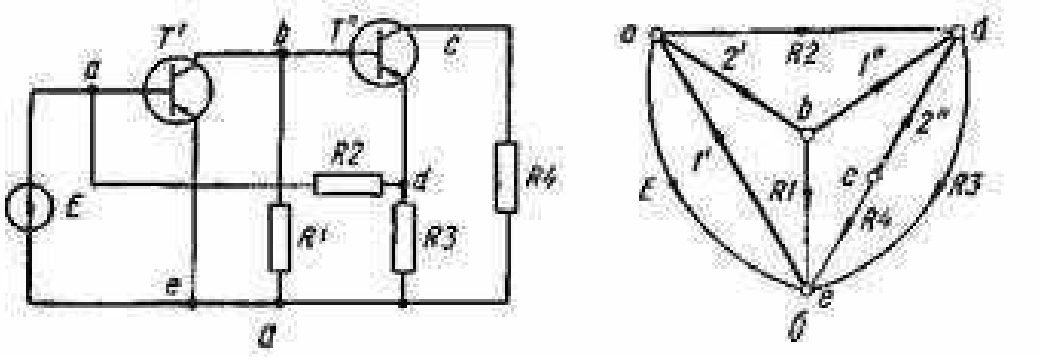


**Figura 10. Schema circuitului electric cu tranzistori bipolari și graful ei**

**Concluzii**

1. Ca rezultat al modelării matematice a fost creată o aplicație de simulare asistată de calculator a circuitelor electrice ramificate de curent continuu.
2. Aplicația a fost elaborată o în mediul de programare Delphi 10.
3. Cel mai important avantajul acestui soft este posibilitatea de a genera o mulțime de variante (de probleme) cu circuite electrice ramificate.
4. Schema variantei împreună cu rezultatele, pot fi salvate și imprimate pe un suport de hârtie.

**Bibliografie**


1. MALINOVSCHI, V. *Didactica Fizicii.* Bucureşti: E.D.P., R.A., 2003.
2. OLTEAN, M. Delphi 7.0 în 200 de aplicații. Albastră, 2004. 458 p.
3. DABU, C-M. Istoria utilizării modelării și simulării asistate de calculator în ştiinţă. 2012. http://noema.crifst.ro/doc/2012_3_14.pdf, [accesat 10.04.2015].
4. http://www.automation.ucv.ro/Romana/cursuri/beAB12/0%20Circuite%20electrice%20liniare.pdf, [accesat 02.02.2015].
5. http://www.elth.pub.ro/~nemo/Bazele_Electrotehnicii_1/Note%20de%20curs/Introducere.Circuite%20de%20curent%20continuu.pdf, [accesat 10.02.2015].
6. http://bigfoot.cs.upt.ro/~chirila/teaching/upt/id21-aa/lectures/AA-ID-Cap10-1.pdf, [accesat 10.02.2015].
7. Bazele elctrotehnicii. http://www.elth.pub.ro/~nemo/Bazele_Electrotehnicii_1/Note%20de%20curs/Introducere.Circuite%20de%20curent%20continuu.pdf, [accesat 03.02.2015].
8. GHEORGHE A.-G. Culegere de probleme de teoria circuitelor. București, 2012. p. 139. http://www.academia.edu/8320015/Culegere_de_probleme_de_teoria_circuitelor