

TRIGONOMETRIA PENTRU EDUCAȚIA STEAM

Andrei BRAICOV, dr., conf. univ.

<https://orcid.org/0000-0001-6416-2357>

Angela GLOBALA, dr., conf. univ.

<https://orcid.org/0000-0002-2653-0320>

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău

Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. În articol sunt descrise metode și exemple de valorificare reciprocă în scop academic a conceptelor din trigonometrie și abordarea STEAM. S-a constatat că această simbioză stimulează dezvoltarea la elevi a competențelor specifice de rezolvare a problemelor de trigonometrie, dar și a competențelor de soluționare a problemelor practice complexe, integratoare.

Cuvinte-cheie: STEAM, trigonometrie, matematică, informatică, fizică, educație.

TRIGONOMETRY FOR STEAM EDUCATION

Abstract. The article describes methods and examples of mutual valorization for academic purposes of concepts from trigonometry and the STEAM approach. It was found that this symbiosis stimulates the development in students of the specific skills for solving trigonometry problems, but also the skills for solving complex, integrative practical problems.

Keywords: STEAM, trigonometry, mathematics, computer science, physics, education.

Introducere

Abordarea STEAM în educație a prins rădăcini preponderent în cadrul disciplinelor opționale și/sau integratoare din ariile *Matematică și științe, Tehnologii*, cum ar fi Robotica, Chimia și explorarea mediului, Proiectarea și dezvoltarea WEB, Matematică aplicativă, Inteligența artificială, Proiectarea și dezvoltarea aplicațiilor mobile etc., ceea ce constituie o situație firească, pentru că, în sine, aceste discipline sunt orientate spre formarea abilităților de proiectare și creare a unor produse reale, a aplicațiilor funcționale sau a dispozitivelor și presupun implicarea cunoștințelor din domeniile conceptului STEAM. Totuși, să nu uităm că unul dintre principalele scopuri ale strategiilor didactice, inovatoare sau tradiționale, este creșterea dorinței, motivației de învățare a elevilor și a rezultatelor procesului educațional, ori tocmai acest scop este cel mai esențial pentru disciplinele exacte Fizică, Matematică, Chimie etc.

Presupunând că abordarea STEAM stimulează „mișcarea” spre acest obiectiv, mai multe curricula actuale, inclusiv cea din învățământul general al Republicii Moldova [1, 2], recomandă probleme integrative și proiecte STEAM nu doar per ansamblu, dar și în cadrul modulelor disciplinelor fundamentale. De exemplu, curricula la Matematică pentru Liceu recomandă teme de proiecte și oferă exemple de probleme integrative pe capitole ([2], pag. 164). În același timp constatăm că există deficit de soluții metodologice pentru „livrarea”

conținuturilor matematice în cheia integrării lor cu subiectele abordate și instrumentele utilizate în cadrul altor discipline.

Trigonometria integrată pentru conceptul STEAM

Analizând [1, 2], constatăm că, în afară de Matematică, doar două discipline din curricula de bază, Fizica și Informatica, valorifică elementele de trigonometrie. Examinând lista disciplinelor opționale, constatăm că trigonometria se poate utiliza în predarea Design-ului grafic (la explicitarea reprezentărilor și transformărilor în spațiu) și a cursului Proiectarea și dezvoltarea aplicațiilor mobile (la dezvoltarea aplicațiilor cu efecte de animație).

Sigur, aplicațiile în practică ale trigonometriei sunt mult mai dense decât cele sugerate de actele educaționale menționate.

- Cu referire la *programare*, menționăm că orice reprezentare dinamică în plan sau în spațiu poate fi mai ușor descrisă cu ajutorul coordonatelor sferice și/sau a coordonatelor polare. Relațiile de transformare a coordonatelor sferice în coordonate carteziane implică funcțiile trigonometrice. Transformarea de rotație, de asemenea este descrisă de o relație în care apar funcțiile trigonometrice.
- Cel mai ilustrativ exemplu de utilizarea a trigonometriei în *medicină* este ecuația funcționării inimii, care este una trigonometrică complexă (cu peste 30 de necunoscute).
- *Biologii* susțin că drumul parcurs de pești în apă are traiectorie sinusoidală (sau cosinusoidală), iar în timp ce înoată corpul lor ia forma graficului tangentei (sau cotangentei).
- În *Geografie*, la măsurarea distanțelor terestre dintre două puncte accesibile, între care, deseori, sunt obstacole, se folosește teorema cosinusului. Aceeași teoremă se utilizează și la calcularea distanței dintre două puncte inaccesibile.
- În *Arhitectură* pentru calcularea înălțimilor se folosește așa numitul unghi de elevație, care se determină din relații cu funcții trigonometrice.
- În *Arta decorativă* întâlnim curbe de ordinul doi și fractali, care se generează (altfel zis, sunt descrise) inclusiv trigonometric.

Dezvoltatorii de software-uri sunt conștienți de marea importanță a trigonometriei, de aceea întâlnim tot mai multe aplicații care nu doar realizează calcul trigonometric, dar și permit reprezentarea grafică a funcțiilor trigonometrice și evidențierea elementelor-cheie (adică a caracteristicilor) acestor funcții.

- Una dintre cele mai simple, comode și disponibile aplicații pentru construirea graficelor funcțiilor este aplicația *Calculator* (fig. 1, 2).

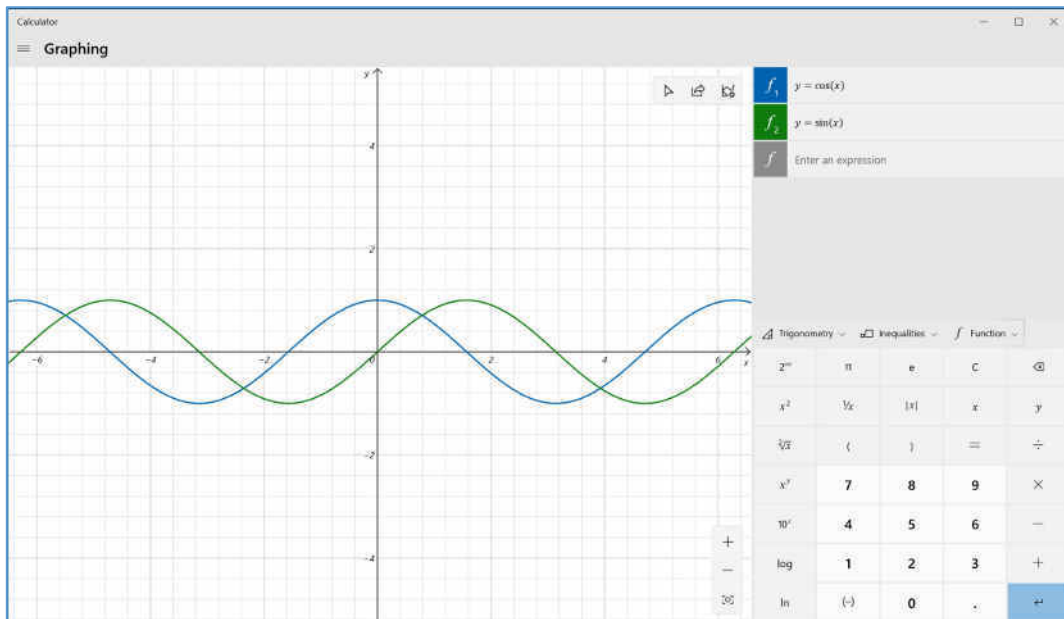


Figura 1. Graficele funcțiilor trigonometrice reprezentate de aplicația *Calculator*

Cu ajutorul aplicației *Calculator* putem analiza funcțiile trigonometrice construite. Acest fapt poate constitui un avantaj în cercetarea proprietăților acestor funcții.

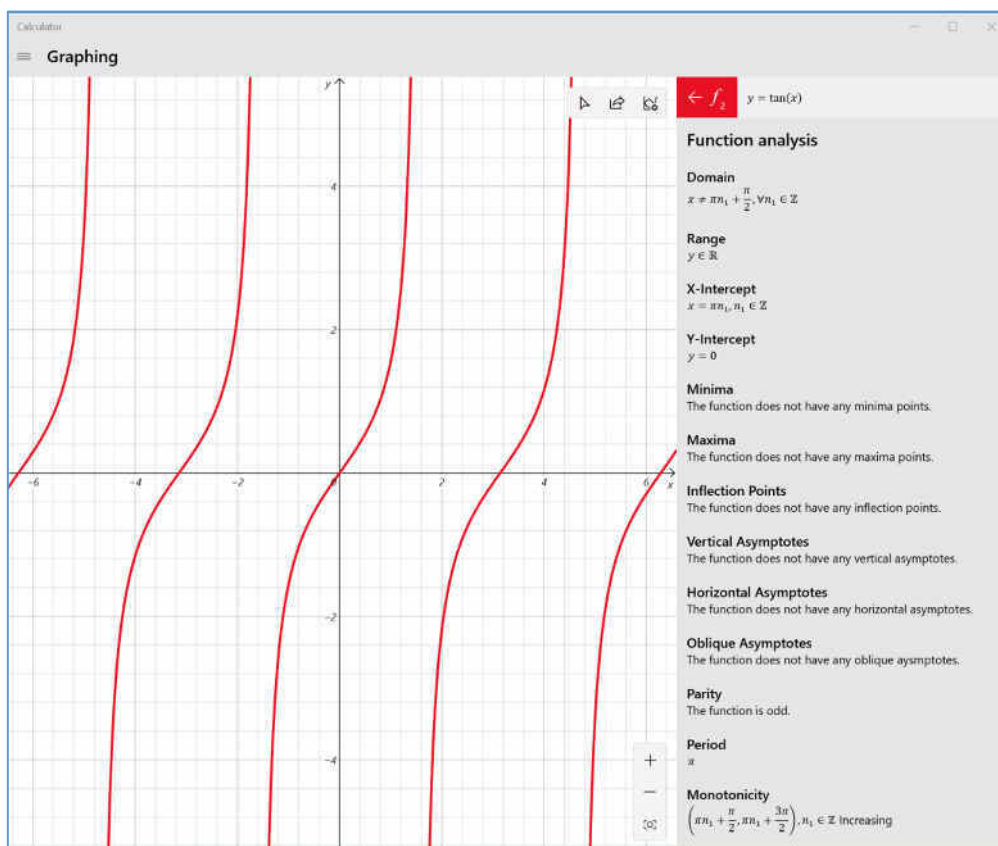


Figura 2. Graficele funcțiilor trigonometrice și caracteristicile lor (aplicația *Calculator*)

• *Desmos Graphing Calculator* este o aplicație gratuită, disponibilă online, care permite construirea graficului unei funcții și studierea proprietăților acestei funcții.

Pentru a crea un grafic este necesar doar de a introduce expresia analitică, care descrie funcția. Calculatorul desenează graficul funcției pe hârtie milimetrică.

De exemplu, pentru construirea graficului funcției $y = a \cdot \arccos(bx + c)$ graficul construit va arăta ca în figura 3:

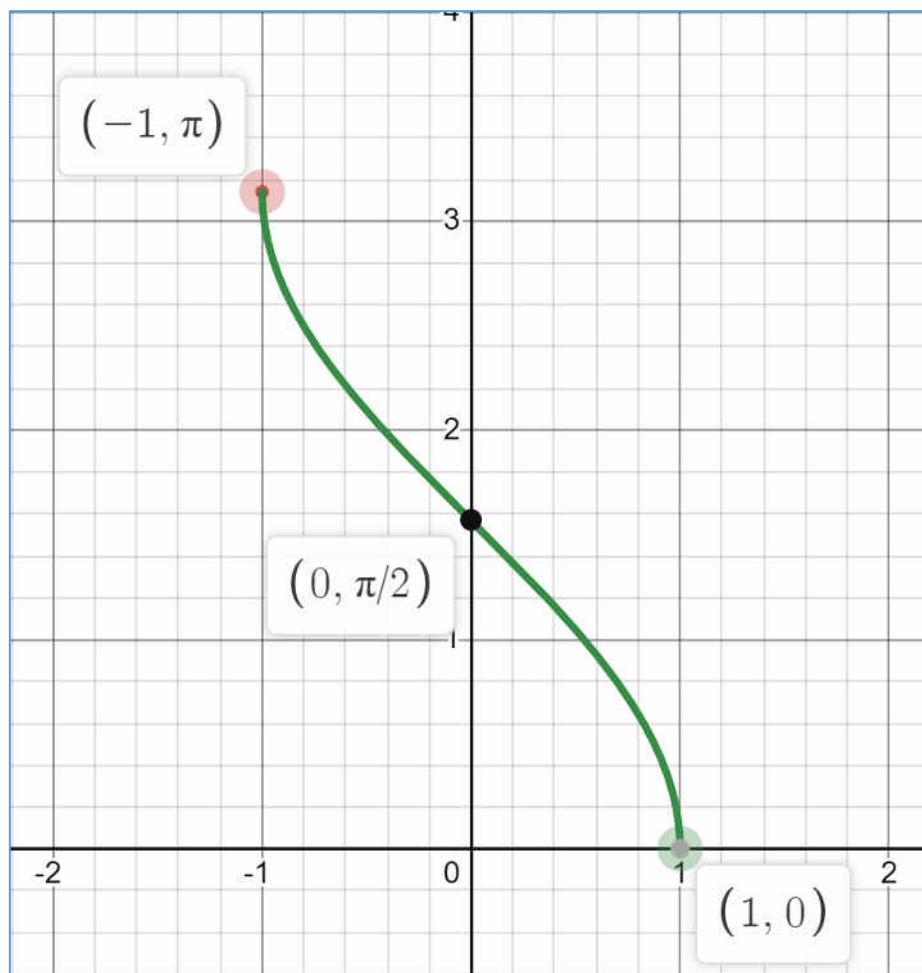


Figura 3. Graficul funcției $y = a \cdot \arccos(bx + c)$ construit cu *Desmos Graphing Calculator*

Pentru rezolvarea inecuațiilor trigonometrice (de exemplu, $2\sin x + 1 \geq 0$) se vor parcurge pașii:

1. scriem expresia analitică $y = 2\sin x + 1$, pentru a construi graficul acestei funcții;
2. în următorul rând, scriem $2\sin x + 1 \geq 0$, care ne va permite afișarea pe axa \overrightarrow{Ox} a intervalelor care satisfac inecuația dată;
3. fixăm pe axa \overrightarrow{Ox} extremitățile intervalelor afișate (fig. 4);

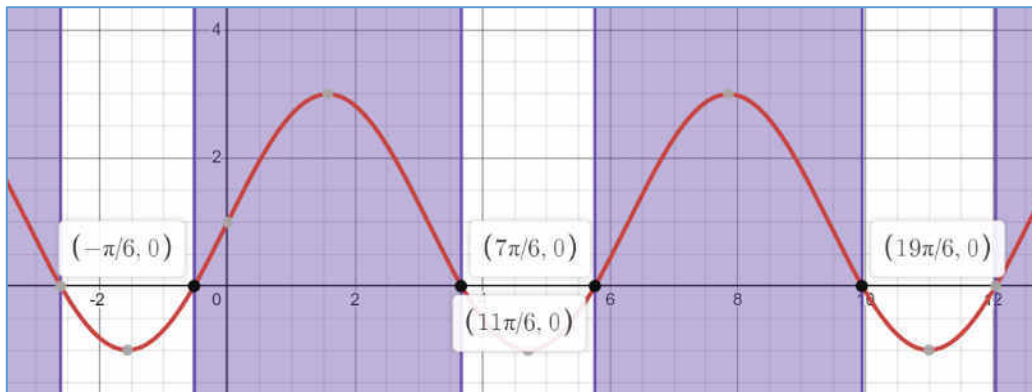


Figura 4. Fixarea extremităților intervalelor formate pe axa Ox

4. ușor se poate calcula că perioada este egală cu 2π , iar soluția inecuației de mai sus este $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.

Un ghid elementar al utilizatorului poate fi consultat la adresa [4].

Sistemul de consultanță complet pentru Desmos poate fi accesat la adresa:

<https://help.desmos.com/hc/en-us>.

- *Wolfram Mathematica* (<https://www.wolfram.com/>) este un software specializat lansat pe piață de peste 20 de ani și destinat atât matematicienilor, fizicienilor, informaticienilor, chimiștilor profesioniști, cât și profesorilor, studenților și elevilor care doresc să facă calcule matematice, să construiască reprezentări grafice în plan și în spațiu.

Această aplicație poate fi un instrument valoros pentru explicitarea trigonometriei, dar și pentru realizarea eficientă a problemelor și proiectelor STEAM. De exemplu, folosind comenzile *PolarPlot* și *Plot3D* putem crea reprezentări 2D și 3D, utile în domeniile *Artă* și *Arhitectură* (fig. 5, 6).

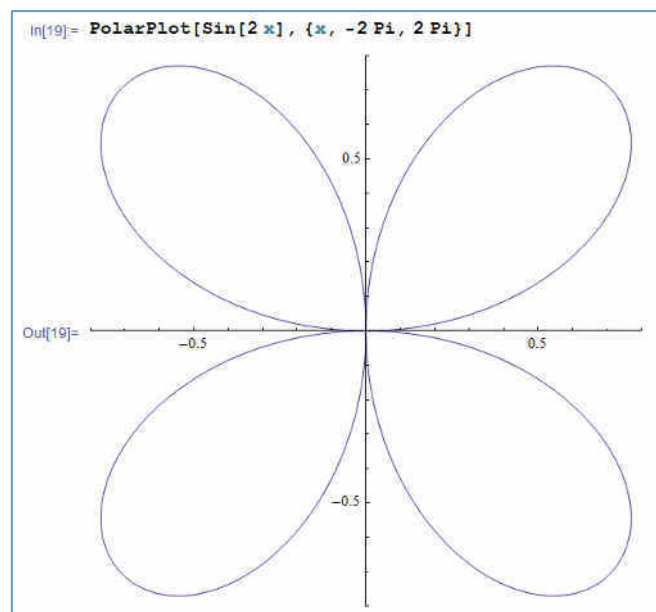


Figura 5. Grafic al unei funcții descrise prin funcții trigonometrice

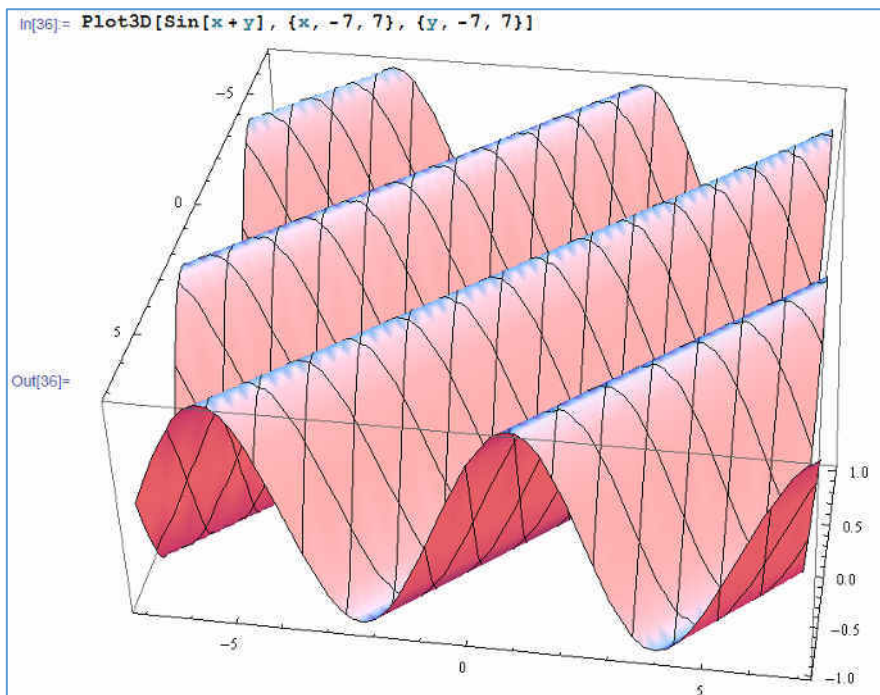


Figura 6. Reprezentări în plan și în spațiu, descrise prin funcții trigonometrice

- *Trigonometry. Unit circle* este o aplicație Android care poate fi instalată pe un dispozitiv digital mobil pentru care este disponibil Magazin Google Play. Ea poate fi utilizată pentru a studia trigonometria: graficul funcției (simetrie, deplasări, periodicitate etc.); reprezentarea pe cercul unitar; tabelul de valori al funcțiilor trigonometrice; formule trigonometrice, identități; transformarea gradelor în radiani și invers etc.



Figura 7. Aplicația *Trigonometry. Unit circle*

Exemplu de problemă STEAM care implică la rezolvarea ei funcțiile trigonometrice

Aplicarea aparatului matematic pentru rezolvarea problemelor din cadrul concursurilor de programare este un lucru firesc, care permite concurenților de a lua punctaj maxim. Nu fac excepție, în acest caz, nici funcțiile trigonometrice.

Pendulul. (Olimpiada Balcanică de Informatică, 2002, Belgrad, Serbia)

Enunț. Vom cerceta un pendul matematic, fixat de originea coordonatelor cu un fir (matematic și el). Poziția inițială a pendulului este $(-r, 0)$. În momentul eliberării pendulul începe să oscileze, realizând o semicircumferință. Pentru a modifica traiectoria pendulului, în plan au fost bătute câteva cuie matematice. Mișcarea pendulului devine mai complicată, dar peste un timp el va începe să realizeze oscilații periodice.

Se știe că, în spațiul matematic ideal: grosimea cuielor și a firului sunt nule; energia pendulului nu se pierde deoarece nu există forță de frecare; pendulul nu se atinge de cuie, de ele se atinge numai firul; firul se îndoaie numai la atingerea unui cui.

Cerință. Se cere să se determine *lungimea orbitei finale, periodice* a pendulului.

Date de intrare. De pe prima linie de intrare se vor citi numărul de cuie N ($0 \leq N \leq 500$) și un număr real r – lungimea firului. De pe următoarele N linii se vor citi perechea de numere (x, y) , care reprezintă coordonatele unui cui distinct ($|x| < 1000$, $|y| < 1000$, $y < 0$).

Date de ieșire. Ieșirea standard va conține o singură linie cu afișarea unui singur număr real, care indică lungimea orbitei periodice finale a pendulului. Distanța parcursă de pendul până la ieșirea pe această orbită nu se ia în considerație. Răspunsul se va afișa cu exactitatea 10^{-2} .

Exemple.

<i>Nr. caz.</i>	<i>Date de intrare</i>	<i>Date de ieșire</i>
1	2 16.0 3 -4 -3 -4	87.66
2	1 18.0 5 -12	31.42

Rezolvarea acestei probleme implică transformarea de rotație cu unghiul α a punctului cu coordonatele (x, y) față de punctul cu coordonatele (x_0, y_0) diferit de originea sistemului de coordonate, care analitic se descrie astfel:

$$\begin{cases} x' = x_0 + (x - x_0) \cos \alpha - (y - y_0) \sin \alpha \\ y' = y_0 + (x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha \end{cases}$$

Observație. O soluție foarte originală de rezolvare a acestei probleme (care poate fi analizată în literatura de specialitate) a fost propusă de Cornel Margine în 2002 în cadrul Olimpiadei Balcanice de Informatică (Belgrad, Serbia).

Un șir de probleme de informatică inter și transdisciplinare, în a căror rezolvare se aplică trigonometria întâlnim în lucrările [5 – 7].

Concluzii

1. Abordarea STEAM în educație realmente contribuie la formarea și dezvoltarea competențelor de soluționare a problemelor practice complexe, dar, pentru cadrele didactice de științe exacte constituie o provocare. Ei sunt puși în diferite situații în care trebuie să găsească metode rapide pentru organizarea procesului instructiv în cheia conceptului menționat:

- ✓ identificarea problemelor-proiecte cu caracter trans și inter-disciplinar integrator;
- ✓ racordarea sarcinilor de rezolvare cu pre-achizițiile elevilor la câteva discipline simultan;
- ✓ cunoașterea și valorificarea dispozitivelor și instrumentelor digitale capabile să simplifice căile de atingere a rezultatelor;
- ✓ ghidarea continuă a elevilor în realizarea proiectelor și oferirea unui feedback constructiv;
- ✓ selectarea și aplicarea unei metodologii de evaluare obiectivă a activității STEAM de grup, dar și a celei individuale.

2. Implementarea STEAM trebuie să fie continuă, cu sarcini de durate diferite, pe parcursul unui modul și pe parcursul câtorva module. Se va ține cont că STEAM-ul trebuie organizat astfel, încât să îmbunătățească calitatea procesului educațional, să crească motivația intrinsecă a elevilor pentru învățarea științelor reale: matematică, fizică, informatică, chimie, biologie.

3. Competența digitală a cadrului didactic este esențială în valorificarea eficientă a metodologiilor STEAM.

4. Matematica, Informatica și Fizica sunt domenii-cheie în realizarea proiectelor STEAM, de aceea în procesul de pregătire inițială a tuturor cadrelor didactice de științe reale recomandăm includerea cursurilor din cele 3 domenii.

5. Trigonometria este un compartiment de studii care oferă o gamă largă de situații-problemă și soluții pentru proiecte STEAM.

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)”, inclus în „Program de stat” (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifra 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare.

Bibliografie

1. ACHIRI, Ion; BAȘ, Ludmila; BRAICOV, Andrei; ȘPUNTENCO, Olga; CABINA, Iulia; COPĂCEANU, Roman; LAȘCU, Aliona. *Matematică. Clasele V–IX. Curriculum disciplinar. Ghid de implementare*. Chișinău: Lyceum, 2020. 180 p. ISBN 978-9975-3438-7-9.

2. ACHIRI, Ion; BAȘ, Ludmila; BRAICOV, Andrei; ȘPUNTENCO, Olga; CABINA, Iulia; COPĂCEANU, Roman; LAȘCU, Aliona. *Matematică. Clasele X–XII. Curriculum disciplinar. Ghid de implementare*. Chișinău: Lyceum, 2020. 192 p. ISBN 978-9975-3438-6-2.
3. <https://www.desmos.com/calculator/eqjsokzeco?lang=en>
4. https://s3.amazonaws.com/desmos/Desmos_Calculator_User_Guide.pdf
5. BRAICOV, Andrei. *Turbo-Pascal. Informatica. Culegere de probleme*. Chișinău: Prut Internațional, 2005. 232 p. ISBN 9975-697-887.
6. CORLAT, Sergiu. *Algoritmi și probleme de geometrie computațională*. Chișinău: Editura Prut Internațional, 2009. 76 p.
7. GLOBALA, Angela; CORLAT, Sergiu. Didactic aspects regarding to creating test sets for competition problems. În: *Acta et Commentationes. Științe ale Educației. Revistă științifică* Nr.4(18) (2019). Chișinău: Universitatea de Stat din Tiraspol, 2019. p. 73-85. ISSN 1857-0623, E-ISSN 2587-3636.