CZU: 511.11(091)

METODA GENETIC-ISTORICĂ DE STUDIERE A ECUAȚIILOR PĂTRATICE

Rică ZAHARIA, inspector școlar
https://orcid.org/0000-0003-3079-5505
IȘJ Vrancea, România

Rezumat. Ecuațiile cuadratice au apărut în antichitate profundă din nevoi practice, în special, calcule concrete legate de cultivarea pământului.

Cuvinte cheie: algebră, ecuații pătratice, soluții, retorică, simbolism, metode antice de rezolvare a problemelor.

THE GENETIC-HISTORICAL METHOD OF STUDYING QUADRATIC EQUATIONS

Abstract. Quadratic equations appeared in deep antiquity from practical needs, in particular, concrete calculations related to the cultivation of the earth.

Keywords: algebra, quadratic equations, solutions, rhetoric, symbolism, ancient methods of problem solving.

Încă în antichitate unele probleme legate de necesități practice, de necesitățile agriculturii, arhitecturii şi astronomiei, duceau la rezolvarea ecuaţiilor de gradul doi. Chinejii, grecii şi hindușii antici cunoșteau diferite metode de rezolvare a ecuaţiilor de gradul doi. Ecuațiile de gradul doi au apărut odată cu prelucrarea pământurilor, cu apariția agriculturii.

Cu 4000 de ani în urmă savanții babilonieni știau să rezolve ecuaţii pătrate. Iată un exemplu de expunere în stil babilonian a condițiilor și rezolvării unei probleme: „*Eu am scăzut din arie o latură a pătratului meu și s-a obținut 870. Tu iei aceasta unu. Tu o împarți în jumătăți a doua. Tu înmulțești o jumătate la o jumătate, asta e o pătrime. Tu aduni aceasta cu 870. Aceasta este 870 și o pătrime, care este pătratul pentru 29$\frac{1}{2}$. Tu aduni o doime din cele înmulțite cu 29$\frac{1}{2}$. Obții 30, latura pătratului.*"

Dacă aplicați limbajul algebric actual, notând latura pătratului prin *x,* vă puteți convinge, că problema antică se poate reduce la ecuația: $x^2 - x - 870 = 0$. Matematicianul babilonian nu alcătuia ecuația deoarece algebra era încă retorică (*adică verbală – formule nu existau*), dar, rezolva problema după regula:

$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 870} + \frac{1}{2} = 29\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 30$. Desigur a fost selectată doar soluția pozitivă. Matematicianul babilonian a descris mersul soluționării dar nu a motivat nici un pas. De obicei înțelepții antici nu lămureau nici odată nimic, indicând doar că astfel și numai astfel trebuie de procedat.

Se ştie că în Grecia antică se cultiva așa zisă „*Algebra Geometrică*". Eudox (sec. V î.e.n.), Euclid, Arhimede (sec. III î.e.n.) ş.a. foloseau metode geometrice, construcții, efectuate cu rigla şi compasul, pentru rezolvarea problemelor, pe care noi le rezolvăm prin alcătuirea ecuaţiilor de gradul I sau II.

Abia Diofante savant grec (sec. III) a folosit metode algebrice propriu zise. „*Aritmetica*" lui Diofante nu conține, desigur, vre-o expunere sistemică a teoriei ecuaţiilor în sens modern, dar în schimb cuprinde un şir de probleme, aranjate în mod sistematic şi însoțite de lămuriri.

Din cele 13 „cărți" (adică părți) ale „*Aritmeticii*" la noi au ajuns numai 6. Prima din ele conține probleme, ce se rezolvă prin alcătuirea ecuaţiilor de gradul întâi şi doi, pe când celelalte sunt dedicate ecuaţiilor nedeterminate.

Iată un exemplu de problemă de gradul II, unde se aplică metoda de rezolvare a lui Diofante: Problema 19. „*Să se afle două numere, suma cărora este 20,iar produsul 96*".

Diofante judeca astfel: „*Din condițiile problemei rezultă, că cele două numere căutate nu sunt egale (altfel produsul lor ar fi 100 şi nu 96), deci, unul va fi mai mare decât jumătatea lui 20, adică 10 + x, iar celălalt 10 - x, diferența lor 2x. Alcătuim ecuația: (10 - x)(10 + x) = 96 şi o rezolvăm.*"

Despre regulile de rezolvare a ecuaţiilor pătrate complete, folosite de Diofante, nu se ştie aproape nimic.

Al-Horezmi (sec. IX), așa numitul tată al algebrei, a fost primul care a sistematizat diferite procedee de rezolvare a ecuaţiilor pătrate. Ca mulți alți matematicieni medievali el nu recunoștea rădăcinile negative ale ecuaţiilor.

Al-Horezmi (sec. IX) a fost primul matematician medieval, care a expus sistematic metoda de rezolvare a ecuaţiilor de gradul doi. Cartea lui „*Kitab al-djebr va-l-mukabala*" constă din două părți. În prima parte se expun regulile de adunare, scădere şi înmulţire a expresiilor algebrice, iar în a doua se vorbește despre rezolvarea ecuaţiilor. Al-Horezmi distinge următoarele șase tipuri de ecuaţii liniare şi pătrate, în care toți termenii sunt pozitivi: $ax - c$; $ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $ax^2 + bx = c$; $ax^2 + c= bx$; $ax^2 = bx + c$.

Minunatul său tratat la algebră al-Horezmi l-a scris pe la anul 830 şi l-a propus în calitate de recomandare metodică la algebră pentru tineret. E necesar de menţionat, că termenul „*algebra*", ca termen recunoscut pe plan mondial a provenit de la cuvântul „*al-djabr*", adică de la denumirea tratatului matematic „*Kitab al-djabr va-l mukabala*" (*Cartea despre trecerea dintr-o parte în alta a semnului egalității a termenilor unei ecuații şi reducerea termenilor asemenea*).

E cunoscut faptul că al-Horezmi cunoştea două metode de rezolvare a ecuaţiilor pătrate: algebric, prin evidenţierea pătratului perfect (metoda hindusă) şi geometric, prin desen (metoda greacă – matematica elenă era geometrizată, adică ilustrată grafic).

Al-Horezmi descrie aceste șase forme ale ecuațiilor în felul următor (*columna a doua descrie textul așa cum era scris în formă retorică în cartea de algebră a lui al-Horezmi, columna a treia – sunt indicate ecuațiile scrise în simbolica modernă*):

1.	*Pătratul este egal cu soluțiile*	$x^2 = 8x$

2.	*Pătratul este egal cu numărul/dihrema*	$x^2 = 16$
3.	*Soluțiile sunt egale cu numărul/dihrema*	$3x = 12$
4.	*Pătratul și soluțiile egale cu numărul/dihrema*	$x^2 + 7x = 228$
5.	*Pătratul și numărul/dihrema egale cu soluțiile*	$x^2 + 21 = 10x$
6.	*Soluțiile și numărul/dihrema sunt egale cu pătratul*	$12x + 220 = x^2$

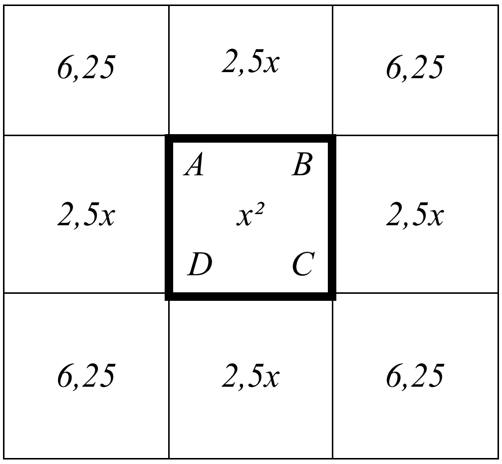
Uneori autorul scrie cuvântul „*numărul*”, alteori scrie „*dihrema*” (*monedă de argint de cea mai mică valoare nominală, care putea servi drept unitate la numărare contabilă, de exemplu*). Actualmente algebra cuprinde toate aceste forme de ecuații reduse sub forma generalizată a ecuației pătrate complete: $ax^2 + bx + c = 0$, deoarece prin $a, b, c \in R$ pot fi substituite și subînțelese orice numere reale inclusiv și valoarea numerică zero. În Europa această cercetare a ecuațiilor după al-Horezmi a apărut doar către finele secolului XVI.

Rezolvare: În limbajul matematicii arabe al acelor timpuri (*algebra era retorică și totul era dat prin cuvinte, inclusiv numerele*) ecuația se citea „*pătratele şi 10 soluții, egale cu 39 dirheme (sau numere)*” (*dirhemă – era o monedă de argint*).

Al-Horezmi scria „*Ceea ce se referă la pătratele şi soluțiile egale cu un număr, atunci spre exemplu, tu spui: pătratul și 10 soluții sunt egale cu 39 dirheme, atunci aceasta înseamnă, că dacă adaogi la un oarecare pătrat, aceea, ce este egal cu 10 soluții, se va căpăta 39. Regula este următoarea: îndoiește (numărul) soluțiile, se va căpăta în această problemă 5, înmulțește aceasta la egalul lui, va fi 25. Adună aceasta la 39, va fi 64. Extrage din aceasta rădăcina, va fi 8, şi scade din aceasta jumătatea de soluții (numărul), adică 5, va fi 3: aceasta şi va fi soluția pătratului căutat, iar pătratul este 9. În același mod (se procedează) şi dacă sunt indicate două pătrate, trei sau mai puțin sau mai mult – tu le aduci la un pătrat, iar soluțiile şi numărul, [cele date] cu el, reduci la același lucru, ca şi pătratul*”.

Totul aceasta corespunde acelui procedeu, pe care la momentul actual îl scrie orice elev din clasele superioare ale ciclului preuniversitar: (*În acest caz, urmând cele spuse de al-Horezmi, noi înainte de rădăcina pătrată am luat doar un semn*).

Tot el (*al-Horezmi*) dă o motivare geometrică a problemei date, adică a soluționării ecuației $x^2 + 10x = 39$.



Presupunem, că *ABCD* – este pătratul căutat cu latura *x* (vezi desenul alăturat). Împărțim *10* la *4*, obținem *2,5*. La fiecare latură a pătratului vom alătura un dreptunghi, lungimile laturilor cărora vor fi *x* şi 2,5. Aria acestor *4* astfel de dreptunghiuri va fi $2,5x \times 4 = 10x$, iar a figurii $x^2 + 10x$, ceea ce este egal cu *39*. Adăugăm acuma la figură, căpătăm construcțiile suplimentare, completând figura până la un pătrat, adică o completăm cu patru pătrate, care au ariile $2,5 \times 2,5 = 6,25$. Suma ariilor lor vor fi $6,25 \times 4 = 25$. Aria pătratului mare va constitui *39 + 25 = 64*, latura lui va fi *8*, tot ea este $x + 5$, de unde $x = 8 - 5 = 3$.

În algebra sa al-Horezmi expune astfel soluționarea ecuației $x^2 + 21 = 10x$: „*Împarte pe jumătate numărul soluțiilor, vei obține 5; înmulțește numărul obținut cu el însuși și scade din produsul obținut 21, vei obține restul 4; extrage rădăcina pătrată, vei obține 2; scade acest număr din jumătatea numărului soluțiilor (adică din 5), vei obține 3, sau adună 2 cu 5 și vei obține 7. Iată soluțiile.*" După cum vedeți este nu altceva decât aplicarea formulei de calculare a soluțiilor a ecuației pătrate de forma: $x^2 + px - q = 0$ ($x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$) descrisă în forma retorică.

Să se rezolve sistemul de ecuații:

a). $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 + y^2 = 58. \end{cases}$;

b). $\begin{cases} y - x = 2, \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{2}. \end{cases}$.

Rezolvare:

Mai întâi trebuie de menționat, că al-Horezmi folosea metoda retorică de expunere, noi, însă în majoritatea cazurilor vom apela la metodele moderne de soluționare, cu toate că în unele cazuri vom indica și calea folosită de autorul algebrei arabe.

a). $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 + y^2 = 58. \end{cases}$ Prin metoda substituției la momentul actual acest sistem de două ecuații cu două necunoscute se rezolvă destul de ușor: $y = 10 - x$, de unde prin substituire în ecuația a doua avem: $2x^2 - 20x + 42 = 0$ sau $x^2 - 10x + 21 = 0$ (*rezolvare deja cunoscută de la autorul medieval*), de unde: $x_1 = 3$ și $x_2 = 7$, apoi : $y_1 = 7$ și $y_2 = 3$. Prin urmare: perechile de numere (*3; 7*) și (*7; 3*) reprezintă soluțiile sistemului dat de două ecuații. R: (*3; 7*) și (*7; 3*).

b). $\begin{cases} y - x = 2, \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{2}. \end{cases}$ În primul rând redăm textul scris sub forma retorică: „*Diferența a două numere/dihreme este 2, iar câtul lor este numărul invers. Să se determine aceste numere.*" În simbolica modernă din $\begin{cases} y - x = 2, \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{2}. \end{cases}$ avem $\begin{cases} y = 2 + x, \\ 2x = y. \end{cases}$, de unde: $4 + 2y = y$ sau $y = 2$.

R: (*2; 4*).

Numărul căutat.

De găsit un număr astfel, încât dacă se scăzut din acest număr 1/3 şi 1/4 din el, atunci restul va fi 8.

Rezolvare:

Această problemă al-Horezmi o rezolvă prin formula „*regulii falselor presupuneri*" aducând următoarele raționamente. „*Fie că numărul căutat este egal cu 12, atunci restul va* *fi egal cu 5, în loc de 8, adică cu 3 mai puţin. Dacă însă presupunem că numărul este egal cu 24, atunci restul va fi 10 în loc de 8, adică cu 2 mai mult*" (*Sub forma unui raport numit balanța (un fel de medie ponderată) avem:* $\frac{3\times24+12\times2}{3+2} = 19\frac{1}{5}$). Atunci avem: $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = 8$, de unde $12x - 7x = 96$, $x = \frac{96}{5} = 19\frac{1}{5}$. Răspuns: $19\frac{1}{5}$.

Clasificarea ecuaţiilor, precum şi rezolvarea lor se face fără nici un fel de simboluri, verbal. Terminul liber c e denumit „număr", necunoscuta la puterea întâi e numită „*rădăcină*", iar necunoscuta la pătrat e numită „*pătrat*" (sau „*cenzus*" în latină).De exemplu, ecuația ax^2 - bx se exprimă astfel: „*pătratele sunt egale cu rădăcinile*"; ecuația ax^2 - c – „*pătratele sunt egale cu un număr*" etc. Al-Horezmi lămurește regulile de rezolvare prin exemple concrete de ecuaţii cu coeficienți numerici, trecând apoi la demonstrații geometrice.

Iată un exemplu:

Problema 20. „*Pătratul şi numărul 21 sunt egale cu 10 rădăcini. Din ce se compune pătratul?*", ceea ce înseamnă: să se rezolve ecuația: $x^2 + 21 = 10x$

Al-Horezmi expune astfel regula rezolvării: „*împarte în jumătate numărul rădăcinilor, vei obține 5; înmulțește numărul obținut cu sine însuși și scade din produs 21,vei obține restul 4. Extrage rădăcina pătrată, vei obține 2, scade acest număr din jumătatea numărului rădăcinilor (adică din 5), vei obține 3, sau adună 2 cu 5 şi vei obține 7. Iată soluțiile*".

Regula este de fapt aceeaşi, pe care o folosim şi noi actualmente, însă datorită simbolicii moderne ea se exprimă azi mult mai simplu şi mai scurt prin formula

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ ,$$

Iar în cazul de faţă $x = 5 + \sqrt{25-21}$.

Această formulă era probabil cunoscută încă de babilonieni, apoi de hinduși înaintea lui al-Horezmi, însă tocmai acesta din urmă a expus-o în mod clar, iar de la el au aflat-o şi savanții europeni.

Spre deosebire de babilonieni şi greci, hindușii calculau nu numai rădăcinile pozitive ale ecuaţiilor pătrate, dar şi cele negative.

De la Al-Horezmi **la Francois Viette**

(Materialul se va folosi în legătură cu următoarele chestiuni din program: „Suma şi produsul rădăcinilor ecuației pătrate. Descompunerea trinomului de gradul doi în factori liniari".)

În țările Islamului opera algebrică a lui Al-Horezmi a fost continuată şi dezvoltată de Abu Kamil (850-930), Al-Karadji (sec. XI), Omar Hayam (sec. XI-XII) ş.a.

Între timp, însă, în Europa au fost traduse în limba latină lucrările arabe etc.

„*Cartea Abakului*" (1202) a savantului italian Leonardo Fibonacci a fost în Evul Mediu prima lucrare europeană originală, consacrată aritmeticii şi algebrei. Datorită stilului ei precis şi clar această carte a servit în decurs de două secole drept manual de bază la studierea matematicii, pregătind terenul pentru înflorirea algebrei în epoca Renașterii. Printre cei mai de seamă algebraiști ai secolelor XIV-XVI figurează italienii Bombelli, Tartaglia, Deli-Fero, Cardano, Ferarri, cei germani Regiomontanus, Rudolf, Shtifel, niderlandezi Stevin, Gerar, francejii Chuquet, Viette, englezi Tonstal, Record, Hariott etc.

Teorema despre relațiile dintre coeficienții şi rădăcinile ecuației pătrate, cunoscută sub numele de „*Teorema lui Viette*”,a fost formulată de el în anul 1591 astfel: „*Dacă B + D înmulțit cu A – A^2, este egal cu BD atunci A este echivalent cu B şi cu D*”. Așadar, dacă $(a + b)x - x^2 = ab$ (sau: $x^2 - (a + b)x + ab = 0$),avem $x_1 = a$ şi $x_2 = b$.

Viette nu recunoștea rădăcinile negative şi nici cele iraționale. Însă în prima jumătate a secolului XVII, datorită lui Gerar şi Descartes, tot mai mult se iau în considerație şi rădăcinile negative la rezolvarea ecuaţiilor pătrate. Datorită lui Viette și Descartes s-a trecut de la algebra retorică la cea simbolică.

În secolul XVIII rezolvarea ecuaţiilor pătrate a luat forma modernă.

(Materialul se va folosi în legătură cu următoarele chestiuni din program: „ecuaţii pătrate complete şi necomplecte”, „rezolvarea ecuaţiilor pătrate”)

Bibliografie

1. GLEIZER. G.I. *Istorismul în predarea matematicii. Algebra. Partea II.* Chișinău: Lumina, 1963. 226 p. (*cu caractere chirilice*).
2. KOLMAN. E. *Istoria matematicii antichitate.* București: Editura științifică, 1963. 246 p.
3. KOLOSOV. A.A. *Carte pentru citire extrașcolară la matematică pentru elevii clasei a VIII-a.* Moscova: Ucipedghiz, 1958. 208 p. (*în rusă*).
4. NIKIFOROVSCHI. V.A. *Din istoria algebrei sec. XVI-XVI. Seria „Istoria științei și tehnicei” AȘ URSS.* Moscova: Nauka, 1979. 207 p. (*în rusă*).
5. NIKIFOROVSCHI. V.A. *În lumea ecuațiilor. Seria „Istoria științei și tehnicei” AȘ URSS.* Moscova: Nauka, 1987. 173 p. (*în rusă*).