CZU: 514.112.4

METODA GENETIC-ISTORICĂ DE STUDIERE A NOȚIUNII DE POLIGON REGULAT

Marius VIOREANU, inspector școlar
https://orcid.org/0000-0001-9284-0012
IȘJ Vrancea România

Rezumat. Poligonul, ca o figură geometrică plană, este delimitat de o linie frântă închisă. În școală se studiază doar cele convexe, poligoanele regulate și construcția lor.
Cuvinte cheie: geometrie, plan, poligon, laturi, unghiuri, construcție, riglă, busolă.

THE GENETIC-HISTORICAL METHOD OF STUDYING THE NOTION OF A REGULAR POLYGON

Abstract. Polygon as a plane geometric figure, is bounded by a closed broken line. In school only convex ones are studied, regular polygons and their construction.
Keywords: geometry, plane, polygon, sides, angles, construction, ruler, compass.

Liniile materiale, trasate de noi oricât de subțiri ar fi au totuși o anumită lățime sau grosime, ele ne dau numai o idee aproximativă despre liniile geometrice care au numai lungime. Punctul la fel. Același lucru se poate spune și despre celelalte noțiuni fundamentale ale geometriei.

Așa dar, noțiunile geometrice fundamentale își trag originea din lumea materială reală, dar totuși ele sunt o creație a cugetului omenesc, însă împrumutate din mediul înconjurător, apoi utilizate ca idei abstracte cu aplicaţie practică.

La Euclid printre axiomele sale se pot atesta și astfel de propoziții:

- ✓ Punctul este ceva ce nu are nici o parte.
- ✓ Linia este lungime fără lățime.
- ✓ Suprafața este ceea ce are numi lungime și lățime.
- ✓ Planul este suprafața situată la fel de toate dreptele conținute.

De aici a pornit noțiunea de poligon ca figură geometrică plană mărginită de o linie frântă închisă (*polus*-numeros, *gonia*-unghi – figura cu mai multe unghiuri). Poligoanele sunt denumite după numărul laturilor sau unghiurilor: triunghi, patrulater, pentagon, hexagon etc. Sunt atestate poligoane concave și poligoane convexe. În școală se studiază doar cele convexe, adică acele care sunt situate totalmente de o singură parte a dreptei atașate determinat de oricare dintre laturile lui. Încă în Grecia Antică s-a determinat proprietățile diagonalelor poligonului duse din același vârf cu referire la numărul lor. Din fiecare vârf al poligonului cu n laturi pot fi trasate $n – 3$ diagonale. Numărul tuturor diagonalelor poligonului cu n laturi este: $\frac{n(n-3)}{2}$.

Poligoanele convexe cu toate laturile și unghiurile egale se numesc poligoane regulate. Fiecare unghi al poligonului regulat cu *n* laturi este egal cu: $\frac{\pi(n-2)}{2}$ radiani.

Cea mai simplă figură plan, care mai poartă, uneori denumirea de plan, este triunghiul. Triunghiul este cel mai simplu poligon. Omul cunoaște această figură încă din antichitate şi a folosit-o mult în practică. Din timpuri străvechi se întrebuințează în diferite construcții figuri de formă triunghiulară, ceea ce se explică nu numai prin simplitatea, dar mai ales prin rigiditatea acestei figuri. Probleme asupra triunghiurilor şi figurilor de formă triunghiulară le găsim în papirusurile egiptene şi în alte documente vechi. Istoricește se considera că la început a apărut noțiunea de triunghi echilateral, apoi cea de triunghi isoscel şi în sfârșit cea de triunghi scalen.

Istoricește primul patrulater, cu care a făcut cunoștință omenirea, este probabil, ***pătratul***. Euclid numeşte pătratul chiar „*patrulater*". Au urmat apoi dreptunghiul, trapezul isoscel şi cel dreptunghic etc. Aceste figuri se întâlnesc în papirusurile egiptene şi în alte documente antice.

Noțiunea de patrulater, la care laturile opuse sunt paralele, era cunoscută încă pitagorienilor; termenul respectiv „*paralelogram*" (*paralelo – liniar*) a fost introdus abia de Euclid, care în „*Elementele*" sale demonstrează numai următoarele: *într-un paralelogram laturile opuse, cât şi unghiurile opuse sunt egale între ele, iar diagonala paralelogramului împarte unghiurile opuse pe jumătate.* Alte teoreme despre paralelograme nu găsim în cartea lui Euclid. Teoria completă a paralelogramelor a fost elaborată abia la sfârșitul Evului Mediu. Ea se bazează, bine înțeles, pe axioma dreptelor paralele a lui Euclid.

Ideea despre arie s-a născut în timpurile străvechi şi s-a format în procesul activității practice a omului. La început oamenii evaluau din ochi arii pentru scopuri practice, iar mai târziu, în baza unei experiențe îndelungate, au descoperite cele mai scumpe ***legi***, adică ***reguli*** (formule), de exemplu, aria unui dreptunghi – prin produsul lungimii laturilor sale. Aceste reguli erau folosite pentru agricultori pentru a calcula ariile câmpurilor însămânțate, a evalua recolta etc.

Din tăblițele cuneiforme babiloniene, descoperite în urma săpăturilor arheologice, s-a aflat, că încă cu 4000 de ani în urmă babilonienii știau să determine aria dreptunghiului şi altor figuri în ***unități pătratice***.

Pătratul servea dintotdeauna ca unitate de măsură a ariilor. Aceasta se datorește faptului, că pătratul este o figură regulată, cel mai perfect patrulater. El are toate laturile egale, toate unghiurile drepte şi egale, el este simetric faţă de centrul său, faţă de diagonalele sale, cât şi faţă de dreptele, care unesc mijlocurile laturilor opuse. Se poate acoperi uşor orice porțiune de plan cu diferite pătrate, fără a lăsa vre-un loc liber

În monumentele antice din civilizația mesopotamiană sau egipteană sunt atestate poligoane regulate ca: patrulatere, hexagoane și octogoane sub formă de imagini pe pereți și bijuterii, prelucrate din piatră.

Savanții greci aveau un interes deosebit către figurile regulate încă pe timpul lui Pitagora. Divizarea cercului într-un oarecare număr de părți egale pentru a construi poligoane regulate era o prioritate pentru pitagorieni, care aveau crezul, că numerele guvernează lumea. Studiul cu referire la poligoanele regulate, inițiate în școala lui Pitagora, prelungit și perfectat în secolele V-IV î.e.n. a fost sistematizat de către Euclid și expus în cartea a IV-a a *IV-a* a *Elementelor.* În afară de construcția triunghiului echilateral, a pătratului, pentagonului și hexagonului, Euclid rezolvă și problema construirii poligonului regulat cu 15 laturi, folosind doar rigla și compasul. Această figură geometrică era destul de curioasă pentru geometrii antici, deoarece s-a depistat că, arcul eclipticii către ecuator reprezintă prin sine a 1/15 parte din întreaga lungime a cercului, adică este întinsă de latura poligonului regulat cu 15 laturi.

Cunoscând, cum se poate de construit un poligon regulat cu *n* laturi, lejer se poate construi un poligon regulat cu *2n* laturi. Matematicienii de valoare din lume mult timp minuțios au căutat procedee de a construi poligonul regulat cu 7 laturi, cu 9 laturi, cu 11 laturi etc., ne fiind încrezuți în faptul, dacă este posibil de a construi astfel de poligoane în genere doar cu ajutorul compasului și a riglei. Această problemă a fost soluționată către sfârșitul sec. XVIII de către matematicianul de 17 ani K.F. Gauss, unul dintre cei mai eminenți matematicieni ai lumii – Regele matematicii din Europa, care a demonstrat, că cu ajutorul compasului și a riglei se poate de divizat cercul într-un număr *N* prim de părți egale, care poate fi exprimat prin formula: $N = 2^{2^n} + 1$, unde *n* – un număr natural sau zero.

Iată câteva exemple:

1) $n = 0, N = 3.$
2) $n = 1, N = 5.$
3) $n = 2, N = 17.$
4) $n = 3, N = 257.$
5) $n = 4, N = 65537.$ *etc.*

Exemple de construire a poligoanelor regulate în ciclul gimnazial:

A) $n = 3,$ adică triunghiul echilateral. Se ia o deschizătură a compasului egală cu raza cercului și cu compasul se fixează puncte de intersecție pe cerc. Se obțin exact 6 puncte, care fiind unite succesiv cu rigla și creionul prezintă imaginea concretă a hexagonului regulat. Iar dacă se unește peste un punct, obținem imaginea triunghiului regulat sau echilateral. În a doua variantă se poate pe o dreaptă de selectat un punct și cu compasul de trasat un arc de cerc care intersectează dreapta dată, apoi din cel de-al doilea punct al dreptei, cu aceeași deschizătură a compasului de trasat cei de-al doilea arc de cerc până la intersecția cu primul arc trasat. Punctul de intersecție al acestor două arce împreună cu cele două fixate pe dreapta dată reprezintă cele trei vârfuri ale triunghiului căutat. Unindu-le succesiv cu rigla și compasul obținem imaginea triunghiului echilateral.

B**)** $n = 4,$ adică poligonul echilateral cu 4 laturi – pătratul. Se construiesc în cerc două diametre reciproc perpendiculare între ele, unind succesiv punctele de intersecție a acestor diametre cu cercul, obținem imaginea unui pătrat. Se poate și altfel: construim o linie dreaptă pe care fixăm două puncte (*distanța dintre aceste puncte – latura pătratului căutat*); în fiecare din aceste două puncte construim perpendiculara în acest punct la dreapta dată; pe fiecare din aceste perpendiculare depunem de la punctele date e dreapta dată segmente egale cu lungimea distanței dintre punctelor de pe dreapta dată; astfel am obținut încă două puncte care la un loc cu primele două de pe dreapta dată sunt vârfurile pătratului căutat; unind cu rigla și creionul în mod succesiv aceste patru puncte obținem imaginea pătratului.

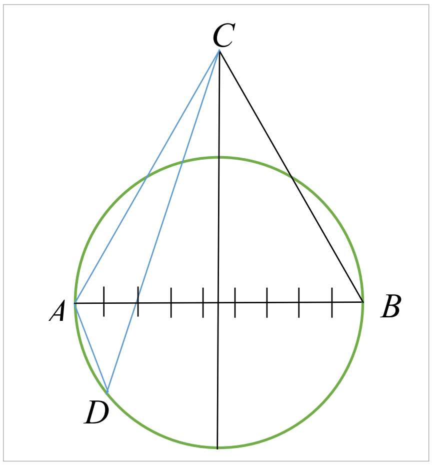
C) *n = 5,* adică poligonul echilateral cu 5 laturi – pentagonul regulat. Se construiește din centrul cercului o rază. Se construiește un unghi la centru cu mărimea de 72°. Unind punctele de intersecție a laturilor acestui unghi cu cercul obținem o coardă, lungimea cărei este lungimea laturii pentagonului regulat căutat. Cu ajutorul compasului măsurăm această lungime și o depunem în mod succesiv pe lungimea cercului dat; se obțin 5 puncte, care fiind unite succesiv cu rigla și creionul ne dă imaginea pentagonului regulat.

D) *n = 6,* adică poligonul echilateral cu 6 laturi – pentagonul regulat. Se ia o deschizătură a compasului egală cu raza cercului și cu compasul se fixează puncte de intersecție pe cerc. Se obțin exact 6 puncte, care fiind unite succesiv cu rigla și creionul prezintă imaginea concretă a hexagonului regulat.

După excelenta descoperire a lui Gauss a devenit clar, că, pe lângă poligoanele regulate cunoscute de mai demult cu *3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, ...*laturi, pot fi construite cu ajutorul riglei și compasului poligoane regulate cu *17, 34, 68, 126, 252, ...* laturi. Pe de altă parte, este imposibil doar cu ajutorul numai a riglei și compasului de a construi poligoane regulate cu un oarecare număr de laturi ca: *7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, etc.*

Încă în antichitate se practicau pentru a satisface cele mai diverse oferte o construire cât mai aproximativă a unui poligon regulat necesar. Astfel, de exemplu, Heron determină valoarea aproximativă a laturii poligonului regulat cu 9 laturi.

Problema construirii unui poligon regulat cu *n* laturi se reduce la divizarea cercului în *n* părți egale. Un procedeu practic a unei astfel de divizări a propus matematicianul francez N. Bion. Procedeul constă în următoarele: Fie că avem de divizat cercul în 9 părți egale. Pe diametrul cercului se construiește un triunghi echilateral *ABC.*



Diametrul *AB* se divide în 9 părți egale. Unind cel de-al doilea punct de divizare cu vârful triunghiului, punctul *C,* prelungim dreapta până la intersecția cu cercul în punctul *D.* Arcul de cerc *AD* reprezintă cea de a noua parte a cercului dat. Coarda *AD* este latura poligonului regulat cu 9 laturi.

În atare mod pot fi construite poligoane regulate cu un număr arbitrar de laturi.

Bibliografie

1. GLEIZER, G.I. *Istorismul în predarea matematicii. Geometria și trigonometria. Partea III.* Chișinău: Lumina, 1966. 208 p. (*cu caractere chirilice*).
2. KRAMOR, V.S. *Repetăm și sistematizăm cursul școlar de geometrie.* Moscova: Prosveșcenie, 1992. 320 p. (*în rusă*).
3. KOSTOVSCHI, A.N. *Construcții geometrice numai cu compasul în plan. Lecții populare la matematică nr. 29. Ediția a treia prelucrată și completată.* Moscova: Nauka, 1989. 113 p. (*în rusă*).