

## ISTORICUL EXTINDERII NOȚIUNII DE NUMĂR. NUMERELE FRAȚIONARE

Luminița TICU, profesor la matematică ȘG Mera,  
Coordonator Centrul Metodic Odobești a profesorilor de matematică

<https://orcid.org/0000-0002-5282-5296>

Județul Vrancea, România

**Rezumat.** Pe parcursul anilor de studiu, conform Planului de Matematică Școlar, elevii se familiarizează an de an cu o nouă extindere a noțiunii de număr, de data aceasta cu mulțimea numerelor fracționare în toată amploarea sa.

**Cuvinte cheie:** număr, parte, fracție, număr fracționar, măsuri, sistem de măsurare, sistem metric.

## THE HISTORY OF THE EXPANSION OF THE NOTION OF NUMBER. FRACTIONAL NUMBERS

**Abstract.** During the years of study in accordance with the School Mathematics Curriculum, students year after year become acquainted with a new extension of the notion of number, this time with the set of fractional numbers in all its breadth.

**Keywords:** number, part, fraction, fractional number, measures, measurement system, metric system.

Odată cu necesitatea de a număra obiectele, care a dat naștere la numerele naturale, din timpurile cele mai vechi sa ivit la oameni și necesitatea de a măsura mărimile: lungimile sau lățimile drumurilor, ariile loturilor de pământ, volumele clădirilor, greutatea corpurilor, timpul.

Rezultatul măsurării nu poate fi exprimat întotdeauna prin numere întregi naturale. Trebuie luate în considerație și părțile unității de măsură folosite. În felul acesta au apărut în procesul măsurării primele fracții. Ele s-au născut ca părți ale unor unități de măsură luate ca etalon. De exemplu, cuvântul „Cetverti” sau „Ceti” înseamnă în Rusia veche o măsură agrară, a patra parte dintr-o anumită unitate de măsură în română sub numirea de șfert. Abia mai târziu acest cuvânt a început să exprime numărul fracționar. Așa dar, la început au fost numai fracții concrete, ca părți ale anumitor unități de măsură. Mai târziu odată cu dezvoltarea științei, au apărut fracțiile abstracte, care nu erau legate de măsuri și obiecte concrete, numerele fracționare, fracții ordinare.

Un lucru grandios în evoluția studiului referitor la fracțiile ordinare au efectuat matematicienii hinduși. La ei se întâlnește cum fracțiile obișnuite, adică de forma  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{7}$  etc., așa și cele derivate de la ele adică fracțiile cu numitori diferiți. Notarea modernă a fracțiilor ordinare (doar că fără linia fracționară) a fost acceptată în India secolului VIII. Liniuța de delimitare a numitorului de numărător a fost utilizată încă de Heron din Alexandria (sec. I) și Diofante (sec. III). Mai apoi ea se întâlnește la savantul arab Hassar (sec. XIII), la

Leonardo Fibonacci (sec. XII-XIII), după Leonardo linia de delimitare în fracțiile ordinare a început a fi utilizată pe larg.

În operele primilor autori de manuale din Moldova fracțiile erau numite frângeri/frâhgeroase, adică *ruperea întregului în părți*, numerele fracționare erau numite *numere frâhgeroase*, în alte surse (A. Hotiniul) se numeau *rămășițe*; numărătorul era numit *socotitoriu* sau *numărătoriu*, numitorul – *cvalificator* (Gh. Asachi) sau *numitoriu*.

Prima fracție concretă, care a făcut cunoștință omul a fost, probabil,  $1/2$ , jumătatea oricărui obiect sau mărimi. A urmat jumătatea jumătății, adică  $1/4$ , apoi  $1/8$ ,  $1/16$ ,... mai târziu au apărut și  $1/3$ ,  $1/6$  etc., adică fracții, care exprimă o parte dintr-un întreg. Astfel de fracții, al căror numărător este 1, se numesc fracții *unitare*, sau fracții de *bază*. La egipteni erau numite fracții *alicote*.

Orice fracție ordinară se exprimă la egipteni ca o sumă de fracții subunitare - alicote. De exemplu, egiptenii nu luau  $3/4$  dintr-un întreg ci  $1/2$  și  $1/4$ . Ei aveau tabele speciale pentru descompunerea fracțiilor în sume de fracții unitare.

Fracțiile alicote numite încă și „*egiptene*” au fost folosite mult timp la greci, slavi și alte popoare.

**Fracții șasezecimale (babiloniene).** Sistemul de măsuri a babilonienilor era adaptat sistemului lor de numerație cu baza 60. Unitatea de greutate, care mai servea ca unitate monetară, se împărțea în 60 de părți egale: 1 talant = 60 mine, 1 mină = 60 șecheli. Împărțind mereu măsurile în 60 de părți egale, babilonienii au creat și au dezvoltat fracțiile *șasezecimale*, la care numitorul este în totdeauna 60,  $60^2$ , (adică  $60 \cdot 60$ ),  $60^3$  ( $60 \cdot 60 \cdot 60$ ) etc.

Matematica babiloniană a avut o mare influență asupra matematicii hinduse și grecești. Urmele numerației șasezecimale s-au păstrat și în știința modernă la măsurarea timpului și a unghiurilor. Anume: ora se împarte în 60 de minute, minutul – în 60 secunde. Tot astfel cercul se împarte în 360 de grade. Gradul – în 60 de minute, minutul – 60 de secunde. „*Minuta*” înseamnă în limba latină „*partea mică*” (*prima parte*), „*secunde*” – „*a doua*” (parte mică).

Babilonienii au fost de asemenea întemeietorii astronomiei. De fracții șasezecimale s-au folosit în astronomie toți savanții lumii până în secolul al XVII-lea, numindu-le fracții *astronomice*. Spre deosebire de acestea fracțiile de ordin comun, de orice numitor, de care ne folosim în prezent au fost numite *ordinare*.

**Fracții zecimale** au luat naștere relativ târziu, abia în secolul XV, deși de ele se simțea nevoie și mai înainte. Fracțiile zecimale și operațiile asupra lor într-o formă deja mult mai sistematizată au fost descrise de savantul din Asia Mijlocie Gesimid al Cași în cartea sa „*Cheia spre aritmetică*” (1427). În Europa studiul referitor la fracțiile zecimale este expus pentru întâia oară în operele savantului flamand Simon Stevin „*A zecea*” (1585).

Al-Cași și S. Stevin scriau partea întreagă și partea fracționară într-un rând, însă fără virgula zecimală. Virgula zecimală au introdus-o în uz matematicianul englez Dj. Napyer (1550-1617) și astronomul german I. Kepler (1571-1630).

Fracțiile zecimale se întâlnesc în operele lui Gh. Asachi, A. Teodorescu, A. Velini etc., după anii 1820, până la aceste opere nu se întâlnește nici un izvor în care să fie urme de calcule cu numere fracționare zecimale.

Babilonienii foloseau fracțiile șasezecimale deoarece sistemul lor de numerație și de măsuri avea baza 60; în prezent însă se folosesc fracțiile zecimale, care simplifică calculele, fiind că sistemul nostru de numerație și de măsuri are ca bază numărul 10.

După introducerea sistemului metric de măsuri (secolul XIX) fracțiile zecimale au devenit cel mai mult folosite în practică și în știință, deoarece ele au o bază analogă cu cea a sistemului pozițional zecimal și cea a sistemului metric de măsuri.

**Fracții douăsprezecimale (romane/unciile).** Asul servea la romanii vechi drept unitate de bază pentru măsurarea greutateilor. Aceiași denumire o avea și una din monedele romane. Asul se împărțea în 12 părți egale, numite *uncii*. În legătură cu aceasta romanii foloseau pentru ușurarea socotelilor gospodărești fracții *douăsprezecimale*, adică fracții cu numitorul 12, de exemplu  $1/12$ ,  $4/12$ ,  $7/12$ ,  $9/12$ ,  $11/12$  etc. Mai târziu se subînțelegeau prin unci și fracții abstracte. În loc de  $1/12$  romanii spuneau „o uncie”,  $5/12$  - „*cinci unci*” etc. Trei unci ( $3/12$ ) se numeau „*sfert*”, patru unci - „*treime*”, 6 unci - „*jumătate*”.

În India veche erau foarte răspândite calculele cu fracții ordinare. La scăderea lor numărătorul și numitorul nu se despărțea printr-o liniuță fracționară, de exemplu, se scria  $1_3$ , în loc de  $\frac{1}{3}$ .

Matematicianul Brahmagupta (secolul VII) a expus regulile privitoare la operațiile cu fracțiile ordinare aproape așa ca în zilele noastre. Bhașcara (secolul VII) a scris o carte, numită „*Lilavati*”, adică „*Splendida/frumoasa*” (calificând astfel știința aritmetică). Matematicienii hinduși scriau deseori lucrările lor în versuri sau sub formă de povestiri, ilustrând cărțile cu ghirlande de flori, fluturi și păsărele, pentru ca aritmetica să fie nu numai utilă, dar și plăcută. Iată o problemă din „*Lilavati*” a lui Bhașcara: „*Dacă vom înmulți un număr oarecare cu 5, vom scădea din produs o treime din el, vom împărți restul la 10 și vom adăuga la numărul obținut  $1/3$ ,  $1/2$  și  $1/4$ , vom obține 68. Să se afle numărul.*”

Cea mai veche carte de matematică chineză (secolul II î.e.n.), „*Matematica în nouă cărți*”, era destinată necesităților practice. Ea cuprindea pe lângă calculul ariilor și al volumelor reguli privitoare la operațiile cu fracțiile ordinare. Iată o problemă din această carte: „*Rața sălbatică ajunge în zbor de la Marea de Sud la Marea de Nord în 7 zile, iar gânsacul ajunge în nouă zile de la Marea de Nord la Marea de Sud. Peste câteva zile se vor întâlni*

*aceste păsări, dacă ele au pornit în același timp?*  $\frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{16}{63}$ ,  $\frac{63}{16} = 3\frac{15}{16}$ .”

**Probleme cu fracții la vechii armeni.** Se știe, că unul dintre cele dintâi stat cunoscut din istoria antică a fost statul Urartu în Transcaucazia (secolul VII – VIII î.e.n.). Ruinele cetăților și palatelor vechi ale Urartului, ce se păstrează încă în zilele noastre în Armenia,

vorbesc despre nivelul înalt al arhitecturii în Urartu, care presupune la rândul său un nivel înalt de cunoștințe matematice.

Popoarele din Urartu cunoșteau aritmetica babiloniană, care a fost mai târziu însușită de armenii vechi.

În secolul VII a trăit renumitul învățat armean Anania din Șirac, care s-a proslăvit și ca un demn luptător pentru eliberarea țării sale de sub jugul ocupanților străini. Anania este autorul unor cărți de matematică, geografie și astronomie. Printre cărțile lui Anania este o aritmetică și o culegere de probleme, din care se vede, că încă cu 1300 de ani în urmă, Anania rezolva probleme cu fracții, care păreau foarte grele multor învățați europeni din acele timpuri.

Iată problemele lui Anania:

1. Un negustor a trecut prin 3 orașe, plătind în fiecare oraș taxa vamală: în primul oraș el a plătit jumătate și o treime din avere, în orașul al doilea – jumătate și o treime din ceea ce ia rămas, iar în orașul al treilea i s-a luat iarăși jumătate și o treime din ceea ce a avut. Când a ajuns acasă, iau rămas 11 dahecani. Să se afle câți dahecani a avut negustorul la început.

2. În orașul Atena era un bazin, care comunica cu 3 țevi. Prima putea să împle bazinul într-o oră, a doua – în 2 ore, a treia – în 3 ore. Să se afle în cât timp cele 3 țevi puteau să împle împreună tot bazinul.

**Fracțiile în Rusia Veche.** Cartea călugărului învățat rus Chiric din Novgorod (1134) se întâlnesc următoarele fracții subunitare, folosite la măsurarea timpului („ore fracționare”), reprezentând părți din zi:  $1/5$ ,  $1/25$ ,  $1/125$  etc.

Fracțiile în Rusia veche erau numite „*doli*” (*părțile*), iar mai târziu „*numere frânte*”. În vechile manuscrise ruse găsim următoarele denumiri ale fracțiilor:  $\frac{1}{2}$  - poltina (jumătate)  $\frac{1}{3}$  - treti (o treime),  $\frac{1}{4}$  - ceti (sfert)  $\frac{1}{5}$  - peatina (o cincime),  $\frac{1}{8}$  - polceti (o jumătate de sfert)  $\frac{1}{6}$  - poltreti (o jumate de treime),  $\frac{1}{16}$  - polpolceti (o jumate de jumate de sfert),  $\frac{1}{12}$  - polpoltreti (o jumate de jumate de treime),  $\frac{1}{32}$  - polpolpolceti (malaia ceti) (un sfert mic),  $\frac{1}{24}$  - malaia treti (o treime mică),  $\frac{1}{7}$  - sedmina (o șeptime),  $\frac{1}{10}$  - deseatină (o zecime). („Desetină” era numită și o unitate de măsură ( $\approx 1,09$  ha), folosită până la introducerea sistemului metric).

**Fracțiile în Moldova** erau numite înainte „frânturi”, ele se împărțeau în „adevărate” sau „proprii” (subunitare) și „improprii” (supraunitare), „curate” (fără întregi) și „amestecate” (numere mixte). Pentru simplificarea fracțiilor Amfilohie Hotiniul folosea termenul „schimbare” sau întindere. Operațiile cu fracții se făceau așa, cum le facem noi azi.

**De la fracțiile șasezesimale la fracțiile zecimale.** Fracțiile șasezesimale, de care se foloseau babilonienii, aveau următoarele avantaje: a) baza sistemului de numerație era și baza sistemului de măsuri, ceea ce înlesnea calculele obișnuite; b) regulile operațiilor cu fracțiile șasezesimale erau aceleași ca și cu numere întregi. Datorită acestor avantaje fracțiile șasezesimale au fost introduse și în alte țări. Astronomii greci, printre care și renumitul savant

Ptolomeu (secolul II), operau numai cu fracții șasezesimale, folosind simboluri speciale pentru grade minute și secunde. De aici fracțiile șasezesimale au pătruns în Asia Centrală și în Europa Apuseană. Așa dar, în Evul Mediu se folosea pe de o parte sistemul pozițional zecimal pentru calcule obișnuite cu numere întregi, iar pe de alta – sistemul șasezesimal pentru calcule cu fracții, mai ales în știință. Aceasta ducea la o mare încurcătură. Operațiile cu fracții erau considerate foarte dificile. La nemți s-a păstrat încă până în prezent proverbul – „*a nimeri în fracție*”, ceea ce înseamnă „*a se păcăli*” iar la italieni *a nimeri în fracție* era echivalent cu a nimeri într-o daravelă.

Pe baza fracțiilor șasezesimale și a sistemului pozițional zecimal au apărut fracțiile zecimale.

Matematicianul englez John Neyer (secolul XVII) folosea punctul drept semn despărțitor (în locul virgulei noastre). În Anglia și America punctul ca semn despărțitor s-a păstrat până în prezent. Virgula, de care ne folosim noi, a fost introdusă pentru prima dată de I. Kepler, vestitul astronom, care a descoperit legile mișcărilor planetelor.

Însă fracțiile zecimale nu și-a ocupat de odată locul cuvenit. Ca și sistemul zecimal de numerație pozițional fracțiile zecimale și-au croit drum într-o luptă aprigă cu vechile fracții șasezesimale. Datorită marilor lor avantaje, fracțiile zecimale au început să fie folosite din ce în ce mai mult.

Pătrunderea din ce în ce mai adâncă a fracțiilor zecimale în toate domeniile științei și economiei în secolul XVIII – XIX se datora faptului, că la aceste fracții se pot aplica regulile numerației zecimale și ale operațiilor cu numerele întregi.

După introducerea sistemului metric de măsuri avantajele practice ale fracțiilor zecimale și superioritatea lor față de fracțiile ordinare au devenit și mai evidente.

### **Extinderea noțiunii de număr: de la numerele naturale la numerele fracționare.**

Noțiunea de număr este una din noțiunile de bază ale matematicii, întrucât omul are de a face cu numere la fiecare pas.

Însă noțiunea de număr nu a fost una și aceeași în diferite timpuri. Ea se schimba, se dezvolta și se lărgea pe măsură ce se dezvolta economia și cultura societății omenești.

Dacă la început se înțelegeau prin „numere” numai numerele naturale 1, 2, 3, 4..., apoi mai târziu, după introducerea lui zero și a fracțiilor, noțiunea de număr a devenit mai largă. Numerele fracționare, ca și cele întregi, se supun aceluiași legi: comutativă, asociativă, distributivă. Orice număr natural prezintă un caz particular al unui număr fracționar, de exemplu:  $5 = \frac{5}{1}$ , sau 5,00. Zero poate fi privit și el ca un număr fracționar:  $0 = \frac{0}{1}$  sau 0,00 etc. Aceasta înseamnă, că numerele întregi au devenit o parte din numerele mai generale – numerele fracționare. Datorită acestei lărgiri a noțiunii de număr s-a putut efectua împărțirea oricărui număr întreg la alt număr întreg (afară de zero).

Astfel extinderea noțiunii de număr, trecerea de la numerele naturale la cele fracționare satisface cerințele practice la măsurare și la împărțirea întregului în părți, precum și cerințele teoretice: posibilitatea împărțirii oricăror 2 numere întregi.

În clasele superioare se va vedea, că lărgirea noțiunii de număr nu se reduce la introducerea numerelor fracționare; se va face cunoștință cu o lume nouă de numere: negative, raționale, iraționale, imaginare și complexe.

### **Bibliografie**

1. GLEIZER, G.I. *Istorismul în predarea matematicii. Algebra. Partea II*. Chișinău: Lumina, 1963. 226 p. (cu caractere chirilice).
2. DĂNCILĂ, Ioan *Matematica gimnazială între elev și profesor*. București: Editura Corint, 1996. 287 p.
3. KOLMAN, E. *Istoria matematicii antichitate*. București: Editura științifică, 1963. 246 p.
4. KOLOSOV, A.A. *Carte pentru citire extrașcolară la matematică pentru elevii clasei a VIII-a*. Moscova: Ucipedghiz, 1958. 208 p. (în rusă).