CZU: 51:37.037

ASPECTE ALE DEZVOLTĂRII ABILITĂȚILOR DE MODELARE MATEMATICĂ ÎN CADRUL ACTIVITĂȚII EXTRACURRICULARE

Marcel TELEUCA, dr., conf. univ.
https://orcid.org/0000-0003-1730-5284
Larisa SALI, dr., conf. univ., larisa.sali@tsu.com
https://orcid.org/0000-0003-1172-3055

Rezumat. In articol sunt examinate unele aspecte ce țin de dezvoltarea abilităților de modelare matematică din perspectiva cognitivă. În particular, sunt examinate probleme care pot fi modelate în baza valorificării cunoștințelor din matematică, fizică, chimie ale elevilor. Sunt expuse concluziile vis-a-vis de aplicarea strategiilor de amplificare a programei școlare.
Cuvinte cheie: modelare matematică, curriculum, context, problemă.

ASPECTS OF THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODELING SKILLS IN EXTRACURRICULAR ACTIVITIES

Abstract. The article examines some aspects related to the development of mathematical modeling skills from a cognitive perspective. In particular, contexts that can be modeled based on the valorisation of students' knowledge in mathematics, physics, chemistry are examined. The conclusions vis-a-vis the application of the strategies to amplify the school program are presented.
Keywords: mathematical modeling, curriculum, context, problem.

La etapa actuală din punct de vedere psihopedagogic se creionează din ce în ce mai mult ideea că, în procesul de învățare a matematicii, elevul cu abilități mai pronunțate nu trebuie numai să urmărească și să înțeleagă raționamentele profesorului, ci este indicat ca el să parcurgă sub îndrumarea acestuia un traseu de cunoaștere, având multiple puncte comune cu cel care are loc în mintea creatorului de matematică. În concordanță cu această teorie, elevii ar trebui să formuleze probleme şi tot ei să caute soluții [4]. Când copiilor li se oferă motive care au sens pentru ei pentru a-și articula gândirea, când sarcinile sunt plasate în contexte importante, ei manifestă comportamente metacognitive și auto-reglatoare, iar progresul individual al copiilor în dezvoltarea acestor abilități poate fi influențat semnificativ de anumite practici pedagogice [6]**.**

Predarea și învățarea modelării matematice au devenit sarcini importante în educația matematică şi standardele educaționale în multe țări prevăd formarea de competențe pe această dimensiune. Scopul principal al modelării matematice este de a face educația matematică interesantă și de a ajuta elevii să se bucure de matematică nu numai pentru rezultatele lor academice, ci și pentru a descoperi modul în care sunt capabili să conecteze matematica la situații din viața reală. Toți elevii au potențialul de a se angaja în modelarea matematică. Implicarea elevilor la modelarea fenomenelor și proceselor servește ca bază pentru dezvoltarea abilităților de rezolvare a problemelor, permite aprecierea importanței și relevanței matematicii în viața lor [1].

Primii paşi în promovarea studiului modelării matematice pot fi realizaţi prin adoptarea unui program de amplificare a conţinuturilor şcolare. Strategia de amplificare sau îmbogăţire şcolară presupune conceperea unor serii de programe speciale, destinate unui individ sau unui grup mic de elevi, în afara programului şcolar. Programele vor include conţinuturi suplementare la disciplinele din aria curriculară aleasă, care nu sunt acoperite decât parţial de cursurile obişnuite [2].

Există o recunoaştere certă a importanţei deţinerii abilităților de modelare matematică de către absolvenții de universități. Cursurile de modelare au proliferat în studiile de licență în matematică din întreaga lume. La nivel mondial sunt organizate multe competiții universitare de modelare matematică, dar la nivel școlar ele aproape că lipsesc. O modalitate importantă de a influența cultura școlii secundare și practicile de predare și învățare este instituirea unui concursului International Mathematical Modeling Challenge (IM^2C). Problemele reale propuse necesită un amestec de diferite tipuri de matematică pentru analiza și rezolvarea lor, timp și muncă în echipă. Aceasta este o adevărată competiție de echipă, desfășurată pe parcursul mai multor zile, cu elevi capabili să folosească orice resurse.

Cercetătorii recomandă examinarea procesului de formare a abilității de modelare matematică din următoarele perspective: matematic, cognitiv, curricular, instrucțional și al formării profesorilor școlari.

În lucrarea [3] se constată că atunci când modelarea matematică este examinată din perspectivă cognitivă, accentul se pune pe procesele de gândire individuale care sunt exprimate, în principal, prin anumite acțiuni verbale și non-verbale în combinație cu soluții scrise în timpul activităților de modelare ale indivizilor (inclusiv profesorilor). În condițiile când experimentarea directă nu este posibilă în laboratoare specializate, un rol important îl poate avea studiul sistemic al modelelor matematice realizate de savanți-experimentatori în diverse domenii. In calitate de strategie didactică de formare a abilităților elementare de modelare matematică poate fi recomandată rezolvarea sistematică de probleme contextuale care necesită aplicarea a diverse dependențe funcționale pentru diferite domenii: științe ale naturii; economie; științe sociale; medicină.

Complexitatea problemelor extrase din contexte va crește gradual - de la situații familiare din cotidian, la fenomene și procese mai sofisticate care se produc în natură sau în activitatea umană modernă.

Vom specifica faptul că la concursurile tradiționale de matematică problemele care presupun modelarea matematică nu se întâlnesc în număr mare. Însă, este recunoscut, că elevii capabili de performanțe înalte la matematică, aplică cu succes aparatul matematic la concursurile de fizică, chimie, biologie. Propunem câteva exemple cu diferit grad de dificultate, care permit generalizări, interconexiuni și matematizarea contextelor.

Concentrația substanțelor

Problema 1. Se ia un pahar cu cafea neagră. Se bea $\frac{1}{5}$ din cantitatea de cafea și se toarnă lapte în pahar pentru a umple paharul. Iar se bea $\frac{1}{5}$ din cantitatea de cafea cu lapte și se toarnă lapte în pahar pentru a umple paharul. Apoi se beau $\frac{3}{5}$ din cantitatea de cafea cu lapte și se constată că în cantitatea rămasă cafea este cu $28\,cm^3$ mai mult decât lapte. Să se afle volumul paharului.

Problema a fost propusă la un concurs pentru clasele a 6-a, până ca elevii să fie familiarizați cu noțiunea de concentrație. Omitem să propunem soluția, ea fiind accesibilă elevilor.

Un context mai sofisticat distingem în următoarea problemă, care va permite elevilor să argumenteze nu doar din punct de vedere matematic niște efecte chimice, dar și să explice comportamentul chimiștilor.

Problema 2. Un vas cu acid și un pahar gradat cu apă curată au fost lăsate în cabinetul de chimie după lecție. Profesorul a golit vasul și urmează să-l clătească cu apă din pahar. Pentru a face acest lucru, intenționează să împartă toată apa din pahar în porții, nu neapărat egale între ele, și să clătească bine vasul cu fiecare porție de apă separat: mai întâi cu prima porție, apoi cu a doua și așa mai departe. Se știe că după fiecare golire a vasului, pe pereții acestuia rămâne o cantitate de lichid (de fiecare dată aceeași cantitate).

a) Pentru care dintre următoarele patru valori ale lui $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ după spălare cu ***n*** porții egale de apă, vasul va deveni, în cele din urmă, mai curat (adică va conține mai puțin acid)?
b) În ce raport este mai bine să împărțiți apa din pahar în $n = 3$ porții, astfel încât vasul să ajungă cât mai curat?
c) Este adevărat că cu cât este mai mare numărul de porții egale în care se împarte apa, cu atât vasul devine mai curat în final?
d) Este adevărat că, pe măsură ce numărul de porții egale crește, cantitatea de acid rămasă în vas ca urmare tinde spre zero?

Soluţie. Să luăm ca unitate (întregul) cantitatea de lichid rămasă pe pereții vasului după golirea acestuia. Dacă în vas se toarnă o cantitate x de apă pură, soluție de acid în vas va fi $x + 1$, iar raportul dintre cantitatea de acid și cantitatea de soluție va fi $\frac{1}{x+1}$. Adică cantitatea de acid într-o unitate de soluție se va micșora de $x + 1$ ori, iar după golire, va rămâne exact o unitate din această soluție care conține $\frac{1}{x+1}$ acid.

a, c) Dacă cantitatea inițială x de apă este împărțită în n părți egale, atunci la sfârșit în soluție se obține $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$ acid, iar dacă se iau $n + 1$ porții, atunci va fi $\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{-(n+1)}$ acid.

Considerăm raportul:

$$\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}}{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{-(n+1)}} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{(n+1)}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}} = \frac{n^n(n+1+x)^{n+1}}{(n+x)^n(n+1)^{n+1}} = \frac{n+1+x}{n+1}\left(1 - \frac{x}{n^2+nx+n+x}\right)^n.$$

Conform inegalității lui Bernoulli (pentru $x \geq -1$ și $r \geq 1$, are loc inegalitatea $(1+x)^r \geq 1+rx$) obținem: $\frac{n+1+x}{n+1}\left(1-\frac{x}{n^2+nx+n+x}\right)^n > \frac{n+1+x}{n+1}\left(1-\frac{nx}{n^2+nx+n+x}\right)^n = \frac{n+1+x}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+x}{n^2+nx+n+x} = \frac{n^3+n^2(2+x)+n(1+2x)+x+x^2}{n^3+n^2(2+x)+n(1+2x)+x} > 1.$

Prin urmare, cu creșterea numărului ***n*** vasul devine mai curat.

b). Dacă cantitatea inițială ***x*** de apă este împărțită în ***n*** porții neegale $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, atunci $x_1+x_2+x_3+\cdots x_n = x$ și, conform inegalității mediilor, cantitatea totală de acid permite o estimare de jos:

$((1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\dots(1+x_n))^{-1} \geq \left(\frac{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\dots(1+x_n)}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}.$

Egalitatea se realizează doar în cazul porțiilor egale $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = \frac{x}{n}$.

d) Dacă cantitatea de apă pură ***x*** este fixată și $n \to \infty$, atunci, notând $t = \frac{n}{x}$, rezultă că $t \to \infty$. Pentru cantitatea minimă finală de acid, folosind a doua limită remarcabilă, obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{-x} = e^{-x} > 0.$$

Răspuns: a) 4. b) În părţi egale. c) Da. d) Nu.

Localizarea obiectelor spațiale

Problema 3. În sistemul de navigație prin satelit se pot distinge două componente principale: cosmică și de control. Componenta cosmică constă dintr-o constelație de sateliți distanțați uniform în jurul Pământului. Componenta de control, situată pe Pământ, asigură, în particular, sincronizarea timpului pentru întreg „sistemul" și utilizarea unui singur sistem de coordonate. Fiecare satelit transmite în mod constant mesaje de navigație care conțin, în particular, coordonatele satelitului la momentul în care mesajul a fost trimis și ora la care a fost trimis. Un receptor care primește un astfel de mesaj poate calcula distanța până la satelit:

$$d = (t_r - t_0)c.$$

În această formulă, t_0 este ora lansării semnalului, t_r este ora recepției semnalului, c este viteza de propagare a semnalului radio, adică viteza luminii.

Dacă într-un sistem de coordonate carteziene coordonatele receptorului sunt (x, y, z), iar coordonatele satelitului la momentul trimiterii mesajului erau $(x_1; y_1; z_1)$, atunci putem calcula distanța dintre satelit și receptor $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = d_1^2$.

Dacă receptorul primește simultan mesaje de navigație de la încă doi sateliți, va putea găsi coordonatele receptorului rezolvând un sistem de trei ecuații:

$$\begin{cases}(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = d_1^2,\\(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 = d_2^2,\\(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + (z-z_3)^2 = d_3^2,\end{cases}$$

unde $(x_i; y_i; z_i)$ sunt coordonatele satelitului i, iar d_i – distanța de la receptor până la satelit.

Interpretarea geometrică a acestui sistem este următoarea. Fiecare satelit este considerat centrul unei sfere cu centrul pe satelit și raza egală cu distanța de la satelit până la receptor. Toate cele trei sfere au un punct comun, fapt care rezultă din însăși compoziția sistemului. Dintre cele două soluții „formale" (intersecția cercului cu a treia sferă), una este neplauzibilă, a doua - coordonatele receptorului.

Schema descrisă a sistemului de navigație prin satelit este simplificată, realitatea forțează utilizarea unui model mai complex. Problema de mai jos este de un grad mai înalt de dificultate și necesită cunoștințe ample de fizică.

Problema 4. Conform presei, pe 3 iulie 2020 a avut loc corectarea orbitei Stației Spațiale Internaționale (SSI), în rezultatul căreia viteza stației s-a schimbat cu 0.5 m/s, iar raza orbitei s-a mărit cu 900 m. Masa SSI este 420t, raza Pământului 6400 km și accelerația gravitațională este 10 m/s^2.

a) Aflați energia necesară pentru această corectare.
b) Ce distanță va putea parcurge un automobil folosind energia respectivă, dacă motorul acestuia are o putere de 70 kW și o viteză constantă de 90 km/h?
c) Folosind datele primite și g = 9.8 m/s^2 (accelerația gravitațională), aflați înălțimea orbitei SSI față de suprafața Pământului.
d) Cu ce precizie (în metri) trebuie să fie măsurată schimbarea în raza orbitei ca eroarea calculării înălțimii orbitei față de Pământ sa nu fie mai mare de 100 km.

Soluție: Pentru simplitatea creării modelului orbita stației este considerată circulară atât înainte, cât și după corectare. Accelerația centripetă este creată de forța de atracție gravitațională: $m\frac{v^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$, unde m și M sunt masele stației și a Pământului respectiv, G - constanta gravitațională, v - viteza stației, iar R - raza orbitei. Pentru o orbită la înălțimea d față de suprafața Pământului, avem:

$$\frac{mv^2}{R_0 + d} = mg\frac{{R_0}^2}{(R_0+d)^2} \qquad (1)$$

R_0 - raza Pământului, g = GM/${R_0}^2$ - accelerația gravitațională la suprafața Pământului. Deci, obținem:

$$v^2 = \frac{g{R_0}^2}{R_0+d}. \qquad (2)$$

Observăm ca viteza scade cu mărirea razei orbitei. Putem astfel deduce că, în rezultatul manevrei date, viteza stației a scăzut.

Orbita SSI se află aproape de suprafața Pământului, deci vom considera că în timpul execuției manevrei accelerația gravitațională se schimbă nesemnificativ și nu diferă mult de g. Lucrul depus pentru a efectua manevra este:

$$E = \frac{m(v + \Delta v)^2}{2} + mg(H + \Delta H) - \left[\frac{mv^2}{2} + mgH\right] \approx mv\Delta v + mg\Delta H$$

Δv = 0.5 m/s este mult mai mic decât prima viteză cosmică, cu care corpurile se mişcă în orbita terestră joasă, ceea ce ne permite sa efectuăm aproximația dată. Valoarea primei viteze cosmice poate fi aflată din formula (2) pentru d = 0: $v_I = \sqrt{gR_0} = 8\ km/s$.

Folosind ceea ce am demonstrat mai sus ($\Delta v < 0$), obținem:

$$E = m\left(g\Delta H - |\Delta v|\sqrt{gR_0}\right) = 2.1 \cdot 10^9\ J$$

b) Aflăm timpul cât va lucra motorul automobilului T (P - puterea) $E = PT$ și distanța parcursă $L = VT = \frac{VE}{P}$.

Pentru V = 25 m/s, obținem L = 750 km.

c) Rescriem formula (2) pentru două situații: 1) înainte de corectare $d = H, v = v_0$; 2) după corectare $d = H + h, v = v_0 + \Delta v$.

$$v_0^2 = \frac{gR_0^2}{R_0 + H}, \quad (v_0 + \Delta v)^2 = \frac{gR_0^2}{R_0 + H + h} = \frac{gR_0^2}{R_0 + H}\left(1 + \frac{h}{R_0 + H}\right)^{-1}$$

Deoarece $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ pentru $x \ll 1$ și $|\Delta v| \ll v_0, h \ll (R_0 + H)$, obținem:

$$2v_0\Delta v = -\frac{gR_0{}^2}{(R_0+H)^2}h \qquad (3)$$

Este evident, deci, că $\Delta v < 0$. Formăm sistemul de ecuații: $\begin{cases} \frac{v_0(R_0+H)^2}{gR_0^2} = -\frac{1}{2}\frac{h}{\Delta v_0}, \\ v_0^2 = \frac{gR_0^2}{R_0+H}. \end{cases}$

Rezolvându-l, obținem:

$$H = R_0\left[\left(\frac{g}{4R_0}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{h^2}{(\Delta v)^2}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right] = 476km. \qquad (4)$$

d) Folosind formula (3), magnitudinea valorilor omise este $(\Delta v/v_0)^2 \sim 10^{-8}$ și $(h/R_0)^2 \sim 10^{-7}$, deci utilizarea aproximărilor nu schimbă semnificativ valoarea aflată H. Pentru a calcula precizia căutată, scriem derivata relației (4), presupunând că toate valorile în afară de h sunt cunoscute și fixate:

$$\frac{dH}{dh} = \frac{2}{3}\left(\frac{g}{4(\Delta v)^2}\right)^{\frac{1}{3}} R_0^{\frac{2}{3}} h^{-\frac{1}{3}} \approx 5100.$$

Schimbarea valorii lui h cu Δh va duce la modificarea valorii lui H cu ΔH: $\Delta H = \frac{dH}{dh}\Delta h \approx 5100\Delta h$. Erorii $\Delta H = 100\ km$ îi revine $\Delta h = 10^5/5100 \approx 19.5m$.

Concluzii

Matematica este un instrument important al științelor naturii și al tehnologiei. Matematica joacă acest rol de la teorie la aplicații în implementarea zborurilor spațiale, în îmblânzirea energiei atomice și în viața lumii computerelor.

Recunoscând rolul matematicii în diverse domenii, este importantă dezvăluirea „componentei” matematice și a instrumentelor matematice folosite de acestea, adesea special concepute pentru o anumită aplicație.

Problemele cu caracter aplicativ în mod constant și exigent înaintează noi sarcini față de teoria matematică în sine. Pe de altă parte, progresul în matematică deschide noi posibilități, dă naștere unor probleme tehnice și soluții care nici nu puteau fi bănuite înainte, iar uneori rezultatele matematicii teoretice așteaptă implementarea lor practică timp de multe decenii, apoi se ivesc în mod neașteptat și cu o eficiență incredibilă.

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare.

Bibliografie

1. ASEMPAPA, R. S.; STURGILL, D.R. Mathematical Modeling: Issues and Challenges in Mathematics Education and Teaching. In *Journal of Mathematics Research. Published by Canadian Center of Science and Education*; Vol. 11, No. 5; October 2019, p. 71-81.
2. CAI, J.; CIRILLO, M.; PELESCO, J. and other. Mathematical modeling in school education: mathematical, cognitive, curricular, instructional and teacher education perspectives. In *Proceedings of the 38th meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vancouver, Canada: IGPME, 2014.
3. BENITO, Y. Copiii supradotaţi. Educaţie, dezvoltare emoţională şi adaptare socială. Iaşi: Polirom, 2003. 192 p.
4. TELEUCĂ, M.; LUPU, I.; SALI, L. Transpunerea didactică a conţinuturilor pentru dezvoltarea gândirii matematice. Revista *Acta et commentationes. Ştiinţe ale Educaţiei*. Nr. 1. 2012.
5. TELEUCĂ, M.; SALI, L.; CIOBAN-PILEŢCAIA, A. Dezvoltarea abilităților de modelare matematică. In: *The 29th Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2022*. 25-27 august 2022, Chișinău. Republica Moldova: TSU, 2022, pp. 206-211.
6. WHITEBREAD, D.; COLTMAN, P. Aspects of pedagogy supporting metacognition and self-regulation in mathematical learning of young children: evidence from an observational study. In: *ZDM Mathematics Education* (2010), p. 163-178.