CZU: 511.52

DESPRE SOLUȚIILE ECUAȚIEI DIOFANTIENE $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{19}{n}$

Boris ȚARĂLUNGĂ, dr. conf. univ.
https://orcid.org/0000-0002-2477-9376
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă"

Rezumat. În această lucrare este rezolvată ecuația $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{19}{n}$.

Cuvinte cheie: ecuație diofantină; soluții naturale.

ON SOLUTIONS TO THE DIOPHANTINE EQUATION $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{19}{n}$

Abstract. In this paper is solved the equation $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{19}{n}$.

Keywords: Diophantine equation; natural solutions.

În teoria numerelor se studiază intens ecuațiile diofantiene [1-8], ecuații ce admit doar soluții întregi. În literatura de specialitate este bine cunoscută conjectura: pentru care numere naturale m, n există numerele naturale x, y, z, încât să se verifice egalitatea $\frac{m}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Dacă $m=4$, atunci avem conjectura Erdos- Strauss. Dacă $m=5$, atunci avem conjectura Sierpinski. Dacă m =6, 7 atunci avem conjectura Aigner. In lucrarea [3] se arată că pentru $m=8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18$ există ecuaţii care nu au soluţii naturale.

În lucrare se studiază soluţiile naturale ale ecuaţiei $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{19}{n}$, pentru $n \in N$.

Teorema 1. Ecuația

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{19}{20}$$

are soluția $(x, y, z) \in \{(2,4,5)\}$.

Demonstrație. Vom considera, că $x \geq y \geq z$. Deoarece $\frac{1}{z}<\frac{19}{20}$, rezultă că $z \geq 2$. Analog, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq \frac{3}{z}$. Atunci $\frac{19}{20} \leq \frac{3}{z}$, de unde $z \leq 3$. Deci $z \in \{2,3\}$.

1. Fie $z=2$. Substituim și obținem ecuația $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{20}$.

Din această ecuație rezultă ecuaţia $z=2+\frac{2x+40}{9x-20}$.

Pentru $9x-20>2x-40$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x>8$. Atunci $x \in \{3,4,5,6,7,8\}$. Dacă $x=3$, nu avem soluţii. Dacă $x=4$, atunci $z=5$. Dacă $x=5$, atunci $z=4$. Dacă $x=6$, atunci nu avem soluții naturale. Dacă $x=7$, atunci atunci nu avem soluții naturale. Dacă $x=8$, atunci atunci nu avem soluții naturale.

2. Fie $z=3$. Substituim și obținem ecuația $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{37}{60}$.

Din această ecuație rezultă ecuaţia $z=1+\frac{23x+60}{37x-60}$.

Pentru $37x - 60 > 23x + 60$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x > 8$. Atunci $x \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$. Prin verificări directe se arată, că ecuaţia dată nu are soluţii naturale. Teorema este demonstrată.

Teorema 2. Ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{19}{23}$$

nu are soluții în mulțimea numerelor naturale.

Demonstrație. Considerăm că $x \geq y \geq z$. Deoarece $\frac{1}{z} < \frac{19}{23}$, rezultă că z$\geq 2$. Analog, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{z}$. Atunci $\frac{19}{23} \leq \frac{3}{z}$, de unde $z \leq 3$. Deci z$\in \{2,3\}$.

Avem următoarele cazuri:

1. Fie $z = 2$. Substituim și obținem ecuația $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{46}$.

Din această ecuație rezultă ecuaţia $y = 3 + \frac{x+138}{15x-46}$.

Pentru $15x - 46 > x + 138$, ecuația dată nu are soluții naturale. Deci obținem $x > 13$. Atunci $x \in \{3,4, \dots ,11,12,13\}$. Prin verificări directe se arată că ecuaţia dată nu are soluţii naturale.

2. Fie $z = 3$. Substituim și obținem ecuația $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{34}{69}$.

Din această ecuație, rezultă ecuaţia $y = 2 + \frac{x+138}{34x-69}$

Pentru $34x - 69 > x + 138$, ecuația dată nu are soluții naturale. Deci obținem $x > 6$. Atunci $x \in \{2,3,4,5,6\}$. Prin verificări directă se arată că ecuaţia dată nu are soluţii naturale. Teorema este demonstrată.

Teorema 3. Ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{19}{24}$$

are soluțiile $(x, y, z) \in \{(2,4,24), (2,6,8), (3,3,8)\}$.

Demonstrație. Vom considera, că $x \geq y \geq z$. Deoarece $\frac{1}{z} < \frac{19}{24}$, rezultă că $z \geq 2$. Analog, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{z}$. Atunci $\frac{19}{24} \leq \frac{3}{z}$, de unde $z \leq 3$. Deci $z \in \{2,3\}$.

1. Fie $z = 2$. Substituim și obținem ecuația $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{24}$.

Din această ecuație rezultă ecuaţia $y = 3 + \frac{3x+72}{7x-24}$.

Pentru $7x - 24 > 3x + 72$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x > 24$. Atunci $x \in \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14, 15,16,17,18,19,20,21,22,23,24\}$. Dacă $x = 4$, atunci $y = 24$. Dacă $x = 6$, atunci $y = 8$. Dacă $= 8$, atunci $y = 6$. Dacă $x = 24$, atunci $y = 4$. Pentru celelalte valori ale x nu avem soluţii naturale.

2. Fie $z = 3$. Substituim și obținem ecuația $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{11}{24}$.

Din această ecuație rezultă ecuaţia $z = 2 + \frac{2x+48}{11x-24}$.

Pentru $11x - 24 > 2x + 48$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $x > 10$. Atunci $x \in \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Dacă $x = 3$, atunci $y = 8$. Dacă $x = 8$, atunci $y = 3$. Pentru celelelte valori ale lui x nu avem solutii naturale. Teorema este demonstrată.

Bibliografie

1. AIGNER, A. Brucheh als Summs von Stammbruchen. *J. reine angew. Math.* 214/215, p. 174-179 (1964).
2. BERNSTEIN, L. Zur Losung der diophantinschen Gleichung m/n= 1/x=1/y+1/z, insbesondere im Falle m=4. *J. reine angew. Math*. 211,1-10 (1962).
3. BROWN, S. On a rational fractions not expressible as a sum of three unit fractions. *Notes on Number Theory and discret mathematics*. ISSN1310-5132, Vol.29,2014, No. 2, p. 61-64.
4. ERDOS, P. On a diophantine equation. *Mat. Lapok*, 1. P. 192-210 (1950).
5. PALAMA, G. Su di una congettura di Sierpinski relativa alla possibilita in numere natuarli dela 5/n=1/x+1/y+1/z. *Boll. Un. Mat. Ital.,* 13. P. 65-72 (1958).
6. SIERPNSCKI, W. Sur les decomposition de nombres rationnels en fractions primaires. *Mathesis.* 65, p. 16-32 (1956).