CZU: 511.12(091)

EVOLUȚIA GENETIC-ISTORICĂ A NOȚIUNILOR DEPENDENȚEI DIRECT ȘI INVERS PROPORȚIONALE ÎN MATEMATICĂ

Svetlana RAHIMOV, Gimnaziul Volovița „Alexandru Lupașcu" Soroca, RM
https://orcid.org/0000-0002-1941-0929

Rezumat. Omul în activitatea sa practică a trebuit întotdeauna să rezolve cele mai variate situaţii sub forma unor probleme care conţin dependenţe între mărimi. Rezolvarea unor astfel de situații în timp s-a transformat în teoria proporțiilor.

Cuvinte cheie: proporţii, dependențe direct proporționale, dependențe invers proporționale, regula de trei, mărimi proporționale.

THE GENETIC-HISTORICAL EVOLUTION OF THE NOTIONS OF DIRECTLY AND INVERSELY PROPORTIONAL DEPENDENCE IN MATHEMATICS

Abstract. Man in his practical activity has always had to solve the most varied situations in the form of problems containing dependencies between quantities. Solving such situations over time turned into the theory of proportions.

Keywords: proportions, directly proportional dependencies, inversely proportional dependencies, rule of three, proportional quantities.

Problemele la distribuirea între obiecte neomogene, a ceva mai general, în bună parte îi interesa pe matematicienii antici în legătură cu problemele împărțirii unei moșteniri, a unei dobânzi sau a cheltuielilor. Sub formă generală problemele de acest tip se reduc la distribuirea unei oarecare cantități A într-un număr oarecare x_i de părți în corespundere cu numerele n_i, astfel încât: $n_1:n_2:n_3: :\dots n_k = x_1:x_2:x_3: \dots :x_k$, $\sum_1^k x_i = A$ cu toate că din soluționarea acestor probleme, operația de împărțire nici într-un mod nu se exclude, deoarece: $x_i = \frac{A*n_i}{\sum n_i}$, totuşi aici ea este camuflată prin ideea generală a soluționării, bazată pe operarea cu şirul proporţional: $\frac{x_1}{n_1} = \frac{x_2}{n_2} = \frac{x_3}{n_3} = \dots = \frac{x_k}{n_k} = \frac{A}{\sum n_i}$, este un tip de probleme cu o aplicare destul de vastă în matematica antică, care a preocupat în aceeași măsură mințile tuturor civilizațiilor antice şi nu şi-au pierdut semnificația nici în matematica Evului Mediu din țările islamului, nici în Bizanț, sau Europa Occidentală.

Dependența proporțională a fost completamente însușită de antici şi de rând cu metodele care utilizau noțiunea de media aritmetică, era practicată pentru soluționarea problemelor de cele mai variate tematice.

Drept bază logică a multor reguli practice aritmetica din punct de vedere teoretic servește noțiunea de mărime proporţională şi studiul referitor la proporţii. În aceste repere sunt incluse relațiile între mărimile direct proporţionale şi cele invers proporţionale. În epocile timpurii ale evoluției matematicii, în particular la hinduși, greci, arabi proporţiile jucau un rol, predominant, deoarece ele serveau ca metodă pentru soluționarea acelor probleme, care noi actualmente le rezolvăm prin utilizarea ecuaţiilor de gradul întâi. În afară de aceasta, în matematica hindușilor, grecilor numărul raţional sau fracţia ordinară erau concepute ca un raport a două numere, iar operațiile asupra fracțiilor - ca operații asupra raporturilor, şi din această cauză se reduceau la cercetarea proporţiilor, ceea ce şi mai mult subliniază specificul importanței studiului proporţiilor. Prin acestea se explică acel rol important, care era acordat studierii proporţiilor de către matematicienii hinduși, greci, arabi. Simplitatea şi exactitatea aplicării proporţiilor în calcule, se explică prin faptul că chiar şi după ce limbajul matematic simbolic a căpătat o largă utilizare în ecuaţii, rezultatele numerice se determinau cu ajutorul proporţiilor, dar şi actualmente ele au largă utilizare în soluționarea multor probleme din disciplinele ciclului real (chimie, biologie etc.).

Studiul proporţiilor este atestat deja în primele documente matematice cunoscute: tabelele cuneiforme sumeriene şi papirusurile egiptene, (Papirusul Moscovit şi Rhind). În primul papirus este atestat chiar un special simbol hieratic pentru noțiunea de raport, iar la sumerieni utilizarea proporţiilor au avut o aplicare mult mai extinsă. Probabil din matematica mesopotamiană rezultă rădăcinile începutului studiului proporţiilor. În textele cuneiforme din tăblițele de lut din Sumer adeseori este atestat un termen special pentru raporturi. Studiul proporţiilor în Grecia Antică capătă o largă utilizare şi fundamentare. Dacă inițial școala lui Pitagora, utiliza doar trei proporţii, numite în greacă *analogii*:

- ✓ *Aritmetică* $a - b = c - d$,
- ✓ *Geometrică* $a:b = c:d$ *şi*
- ✓ *Armonică* $a:b = (a - b):(b - c)$,

atunci ulterior matematicienii greci dezvoltă acest studiu şi obțin:

- ✓ *Proporțiile continue* $a - b = b - c$ *și* $a:b = b:c$,
- ✓ *Media aritmetică* $b = \frac{a+c}{2}$,
- ✓ *Media geometrică* $b = \sqrt{ac}$,
- ✓ *Media armonică* $b = \frac{2ac}{a+c}$.

Pitagoricii cunoșteau relația $a:\frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b}:b$. Totodată în antichitate erau cunoscute noțiunile de *proporţie aritmetică* şi *proporţie geometrică*, cu sensul de şir numeric, numite astăzi *progresii.*

Euclid, bazându-se pe teoria lui Eudox în *Elementele* sale evidențiază proporțiile derivate ce rezultă din proporția $a:b=c:d$.

1. $b:a = d:c$
2. $a:c = b:d$
3. $(a + b):b = (c + d):d$,
4. $(a - b):b = (c - d):d$,
5. $a:(a - b) = c:(c - d)$.

Tot Euclid cunoștea următoarele proprietăţi ale proporţiilor:

1. *Din proporțiile* $a:b = d:e$ *și* $b:c = e:f$ *rezultă* $a:c = d:f$;
2. *Din proporțiile* $a:b = e:f$ *și* $b:c = d:e$ *rezultă* $a:c = d:f$;

3. *Din proporțiile* $a_1:b_1 = c:d$ *şi* $a_2:b_2 = c:d$ *rezultă* $a_1:b_1 = a_2:b_2$;
4. *Din proporțiile* $a:b = c:d = e:f$ *rezultă* $(a + c + e)(b + d + f) = a:b = c:d = e:f$;
5. *Din proporțiile* $a:b = c:d$ *rezultă* $na:nb = c:d$;
6. *Din proporțiile* $a:b = c:d$ *şi* $e:b = f:d$ *rezultă* $a:e = c:f$;
7. *Din proporțiile* $a:b = d:e$ *şi* $b:c=f:d$ *rezultă* $a:c=f:e$

În bună parte nu am exagera că în matematica antichității în linii generale, în bună parte, erau cercetate şi dependențe liniare. Celelalte dependențe, neliniare, se reduceau după caz la primele. Spre exemplu, trecerea la rezolvarea ecuaţiilor pătrate a fost făcută de matematicienii antici pentru prima oară sub presupunerea, că pentru aceasta se potriveşte Regula Falsei Presupuneri, bazată pe o dependență proporțională a valorii necunoscute atât cea presupusă cât şi cea falsă. Însă prin acest procedeu se pot rezolva doar ecuațiile pătrate necomplete. Alt exemplu sunt progresiile, cu subiect îndrăgit de cercetare sau de soluționare a problemelor de către matematicienii antici, care s-au adeverit a fi foarte bine legate de metoda bazată pe dependență proporțională. Primele probleme legate de progresii, după cum confirmă documentele antice, anume se reduceau la probleme legate de cele de împărțire proporțională. Aceasta, îndeosebi bine se poate urmări, după textele matematice chineze *Cele zece cărți*.

Regula este formulată sub formă generală în următorul mod: „*Fiecărui determină raportul corespunzător, adună - acesta-i împărțitorul. Uneşte împărțitorul şi deîmpărţitul. Dacă împărțitorul este mai mare decât deîmpărțitul, atunci numeşte împărțitorul*”. Regula în mod perfect corespunde formulei expusă mai sus pentru părțile proporţionale căutate, în care trebuie de împărțit numărul dat. Alegerea numerelor tematice, fac textele problemelor să fie cât mai originale. Iată unele probleme din *Matematica în nouă cărți.*

1. Țesătoarea iscusită

O țesătoare iscusită țese în fiecare următoare zi de 2 ori mai mult de cât în ziua precedentă. În 5 zile ea a țesut 5 ci. Se întrebă, câtă țesătură ea țese în fiecare zi.

Rezolvarea antică:

În prima zi ea a țesut $1^{19}/_{31}$ țuni, în ziua următoare ea a țesut $3^{7}/_{31}$ țuni, în ziua a treia ea a țesut $6^{14}/_{31}$ ţuni, în ziua a patra ea a țesut 1 ci $2^{28}/_{31}$ ţuni, în ultima zi ea țesut 2 ci $5^{25}/_{31}$ ţuni.

Răspuns: $1^{19}/_{31}$ ţuni; $3^{7}/_{31}$ ţuni; $6^{14}/_{31}$ ţuni; 1 ci $2^{28}/_{31}$ ţuni; 2 ci $5^{25}/_{31}$ ţuni. 1 ci = 10 ţuni.

2. Împărţirea aurului

Un şef a alocat din visterie 59 ţzîni 1 lan aur, a dăruit acest aur la 9 vani, 12 guni, 15 hou, 18 ţză, 21 nani. Fiecare va a primit aur cu 5 lani mai mult, de cât un gun; fiecare gun a primit aur cu 4 lani mai mult, de cât un hou; fiecare hou a căpătat cu 3 lani mai mult, de cât un ţzî; fiecare ţzî a primit aur cu 2 lani mai mult, de cât un nani. Se întreabă cât aur a căpătat fiecare dintre vani, guni, hou, ţzî, nani aparte?

Rezolvare:

Dacă notăm cea mai mică dăruire a uni vani prin x, atunci avem următoarea tabelă:

Fiecare separat	toți separat
Vani $(x + 9) + 5 = x + 14$	$9(x + 14) = 9x + 126$

Gun $(x + 5) + 4 = x + 912(x + 9) = 12x + 108$

Hou $(x + 2) + 3 = x + 515(x + 5) = 15x + 75$

Ţzî $x + 2$ $18(x + 2) = 18x + 36$

Nani x $21x = 21x$

toți în total $75x + 345$.

Așa cum *un ţzin* este egal cu *16 lani*, atunci *59 ţzini 1 lani* este egal cu

(59 – 16 + 1) lani sau *945 lani*.

În aceste condiții avem ecuația $75x + 345 = 945$, $75x = 600$, $x = 8$.

Prin urmare *unui nani* îi revine *8 lani*, *unui ţzî – 10 lani*, *unui hou – 13 lani*, *unui gun – 17 lani = 1ţzîni*, *unui vani îi revine 22 lani = 1 ţzini 6 lani*.

Răspuns: *1 vani – 1 ţzîni 6 lani, 1 gun – 1 ţzîni 1 lani, 1 hou – 13 lani, 1 ţzî – 10 lani, 1 nani – 8 lani.*

Împărţirea invers proporțională este atestată în operele antice chineze. În carte a II-a din *Matematica în nouă cărți* îndată după problemele *în trepte* (la împărţirea proporțională directă) urmată de problemele la *treptele inverse* (proporționalitatea inversă) (fani cini), la care se referă o indicație destul de scurtă şi confuză, neclară.

Materialul dat poate fi folosit la tema: „*Proporții*".

In practica cotidiană sunt atestate o mulțime imensă de probleme la această temă: problemele legate de mișcare (*d = v×t – distanța parcursă este în dependență direct proporțională cu viteza aparte și cu timpul la fel, viteza și timpul între ele, când distanța se consider constantă, se află în relația dependenței invers proporționale*); problemele de vânzare-cumpărare (*cantitatea mărfii, prețul unei unități, costul mărfii în întregime*); calcularea ariei unui dreptunghi (*mărimile: bazei, înălțimii, ariei*); umplerea unui bazin prin două țevi (*capacitatea bazinului, viteza debitului apei la fiecare țeavă, timpul de curgere a apei, cantitatea de apă, care curge în bazin în timpul de lucru a țevilor*) etc. Practic în fiecare din aceste exemple avem o regulă, care permite de a calcula una dintre componente, dacă sunt cunoscute valorile numerice a celorlalte. În acest tip de probleme ce cere de împărțit un număr/mărime în părți: 1) direct proporționale mai multor numere date, pentru care este suficient de a-l împărți la suma acestor numere și câtul obținut de înmulțit, pe rând, la fiecare dintre aceste numere; 2) invers proporționale mai multor numere date, este suficient de a împărți acest număr în părți, direct proporționale numerelor, inverse față de cele date.

Bibliografie

1. KOLMAN, E. *Istoria matematicii în antichitate*. București: EȘ, 1963, 246 p.
2. ВОЛОДАРСКИЙ, А. И. *Очерки истории средневековой индийской математики.* Москва: Наука. 1977 г., 180 стр.
3. ДЕПМАН, И.Я. *История арифметики*. Москва: Просвещение. 1959 г. 192 стр.
4. ЧИСТЯКОВ, В.Д. *Материалы по истории математики в Китае и Индии* Москва: Учпедгиз. 1960 г. 168 стр.