CZU: 514.113

SOLUȚIONAREA PROBLEMELOR DE GEOMETRIE COMPETITIVĂ PRIN INTERMEDIUL CONCEPTULUI DE ARIE

Sergiu PORT, dr. conf. univ., UPS „Ion Creangă”
https://orcid.org/0000-0001-8923-7116

Rezumat. În această lucrare, sunt prezentate demonstrații geometrice, folosind software-ul matematic. Aceste demonstrații ar trebui prezentate în manualele școlare, pw lângă demonstrațiile analitice.

Cuvinte cheie: demonstrații geometrice, software matematic, demonstrații analitice.

SOLVING COMPETITIVE GEOMETRY PROBLEMS THROUGH THE AREA CONCEPT

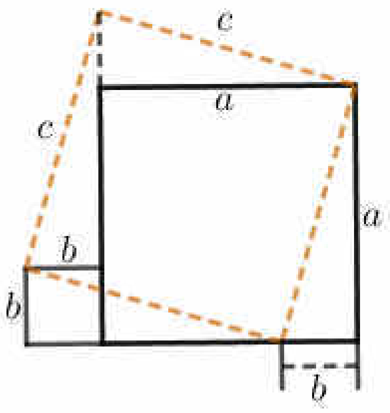
Abstract. In this paper, using mathematical software, geometrical proofs are presented. These proofs should be presented, in school textbooks, additionally to the analytical demonstrations.

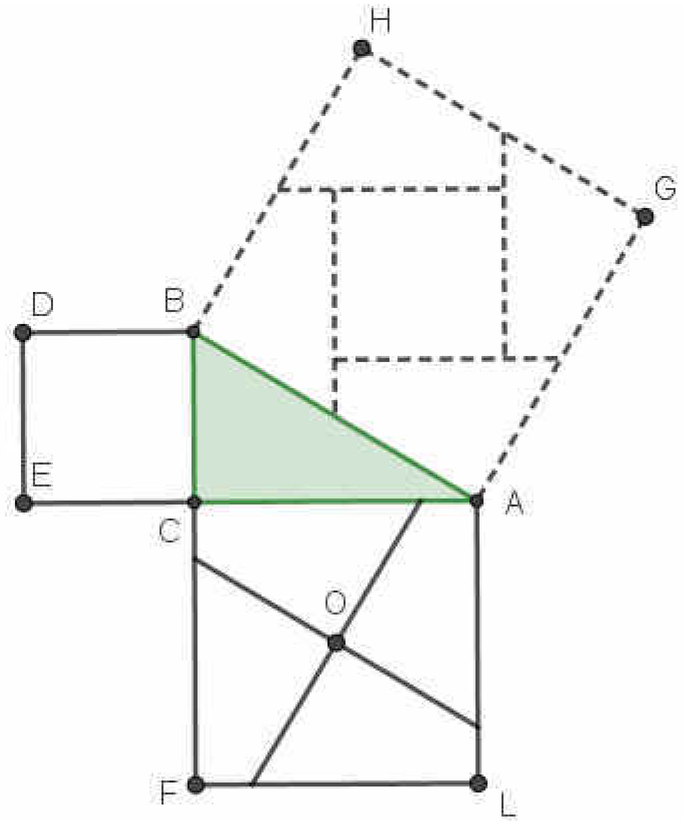
Keywords: geometrical proofs, mathematical software, analytical demonstrations.

În acest articol voi aduce demonstrații a unor probleme de concurs la geometrie bazate pe conceptul de arie. Sunt prezentate diferite metode de demonstrații.

În prima problemă sunt aduse demonstrații pentru teorema lui Pitagora. Demonstrațiile propuse nu sunt analitice.

În școală, teorema lui Pitagora se demonstrează cu ajutorul teoremei catetei.





Teorema lui Pitagora are formula în forma $a^2 + b^2 = c^2$ unde a și b sunt lungimile catetelor, iar c lungimea ipotenuzei. Ariile pătratelor construite pe catete și ipotenuză sunt egale cu a^2 ,b^2 ,c^2 corespunzător. Aici am aplicat un alt tip de demonstrație utilizând conceptul de arie.

Cu ajutorul aplicației Geogebra am construit pentru fiecare demonstrație desenele de mai sus cu evidențierea triunghiurilor și pătratelor. Din desenele date pe foaie pot fi decupate cu foarfecile figurile necesare, care pot fi suprapuse. Dacă considerăm primul desen atunci este evidentă suprapunerea în pătratul cu latura *c* a părților decupate din pătratele cu laturile *a* și *b*.

Al doilea desen de asemenea prezintă o demonstrație prin suprapunere. Triunghiul *ABC* este dreptunghic și *CEDB, FCAL, BHGA* – pătrate. Pătratul *FCAL* este divizat în patru patrulatere congruente de două segmente, ce trec prin punctul *O* – centrul pătratului, încât aceste segmente sunt egale fiecare cu ipotenuza *AB*. Decupăm pătratul *CEDB* și pătratul *FCAL* divizat în patru patrulatere. Le aplicăm conform desenului pe ipotenuza *AB* și în rezultat obținem pătratul *BHGA*. Aceste demonstrații sunt interesante prin simplitatea geometrică. Mai mult ca atât nu conțin formule iar construcțiile se memorează ușor. Consider că astfel de demonstrații geometrice sunt binevenite în manualele școlare în paralel cu demonstrațiile analitice.

Problemele de optimizare geometrică sunt cunoscute din antichitate [2]. Am utilizat metoda optimizării geometrice pentru următoarea problemă.

Problema. De determinat volumului maximal a vaselor, construite dintr-un pătrat cu latura egală cu *1 m*.

Soluționarea se bazează pe teoremă mediilor.

Teoremă: Dacă suma a *n* variabile pozitive este egală cu o constantă, atunci produsul acestor variabile va avea valoarea maximă, când toate variabilele sunt egale cu aceiași valoare.

În această problemă sunt analizate trei cazuri reprezentate în figurile de mai jos.

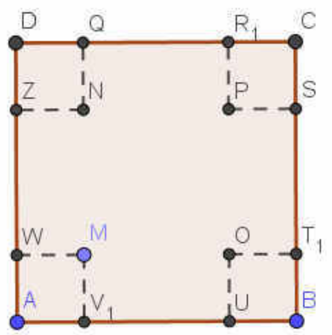


fig. 1

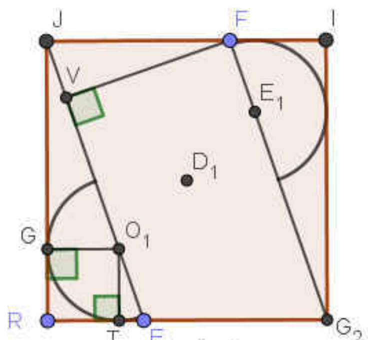


fig. 2

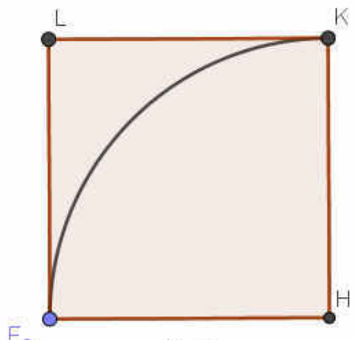


fig. 3

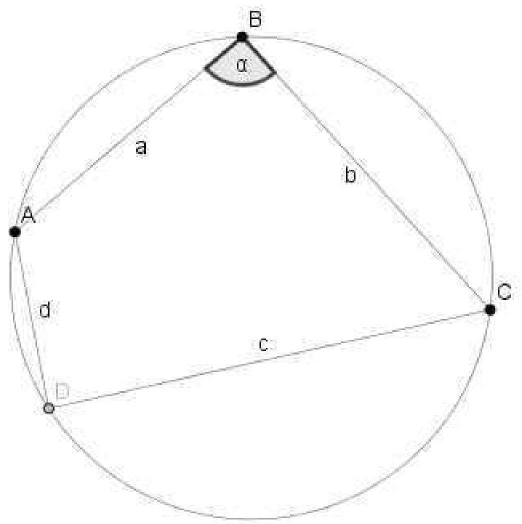
Cazul 1. Din vârfurile pătratului *ABCD* se decupează pătrate egale încât din partea rămasă se construește o cutie. Aflați volumul maxim a cutiei (fig.1).

Rezolvare: Pătratele decupate sunt *AWMV,DQNZ,CSPR,BUOT* și notăm latura $AW=x$ $(0<x<0,5)$. Baza cutiei este pătratul *MNPO* cu aria $S=(1-2x)^2$. Volumul cutiei depinde de x $V=x(1-2x)^2$. Aducem acest produs în forma teoremei de mai sus $x(1-2x)^2=(1-2x)\,(1-2x)\cdot 4x$ $0,25$. Conform teoremei valoarea maximă va fi atinsă când $4x=1-2x$, adică pentru $x=\frac{1}{6}$. Substituind această valoare în formula volumului de mai sus obținem $V_1=\frac{2}{27}$ $(\approx 0,074)$.

Cazul 2. Din pătrat se construește o căldare cilindrică, încât suprafața laterală să fie dintr-o bucată, iar baza din două semicercuri. Aflați volumul maxim a căldării (fig.2).
Rezolvare: În urma cercetărei sa stabilit amplasarea suprafeței căldărei conform fig.2, încât suprafața laterală este paralelogramul JFG_2E în care notăm înălțimea $FV=h$. Raza bazei $O_1G=r$. Evident că lungimea cercului bazei $L=2\pi r=JE$. Construcția se realizează conform metodei algebrice [1]. Volumul căldării $V=h\pi r^2$. Din asemănarea triunghiurilor ΔJFV, ΔO_1JG, ΔEGR rezultă că $h=\frac{1-2r}{2\pi(1-r)}$, iar volumul $V=\frac{1}{2}r^2(1-\frac{r}{1-r})$. Analog cazului 1, aflăm $r=\frac{7-\sqrt{17}}{8}$ și îl substituim în formula de mai sus, pentru care obținem volumul maxim $V_2(\approx 0,028)$.
Cazul 3. Din pătrat se construește un vas în formă de con circular, încât suprafața laterală să fie dintr-o bucată. Aflați volumul maxim a vasului (fig.3).
Rezolvare: Volumul maxim se obține pentru suprafața laterală reprezentată de o pătrime de cerc F_2KH cu centrul în H și raza $KH=1$. Acest fapt se datorează dependenței dintre raza bazei conului notată prin r și înălțimea h adică $h=\sqrt{1-r^2}$. Deoarece lungimea bazei conului este egală cu lungimea arcului F_2K rezultă că $2\pi r=0,5\pi$ de unde $r=0,25$. Volumul vasului are formula $V=\frac{1}{3}h\pi r^2$ în care substituim rezultatele de mai sus și obținem $V_3=\frac{\sqrt{15}}{192}$ $(\approx 0,021)$.
Concluzia rezultă din compararea volumurilor, adică volumul cel mai mare este în cazul 1.

Următoarea problemă are ca rezultat o relație invariantă pentru patrulaterele înscrise.

Problemă. Demonstrați că aria unui patrulater înscris în cerc are formula $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, unde a,b,c,d sunt laturile, iar p semiperimetrul.
Demonstrație.



Aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu suma ariilor triunghiurilor ABC și ADC conform formulei

$S=0,5(ab+cd)\sin\alpha$. (1) unde α este unghiul de la vârful B.

Apoi aplicăm teorema cosinusurilor pentru aceleași triunghiuri, egalând expresiile pentru pătratul lui *AC* din ambele formule. Vom ține cont de condiția pentru patrulaterele înscrise în cerc, adică unghiurile opuse sunt suplimentare.

$a^2+b^2-2ab\ \cos\alpha=c^2+d^2-2cd\ \cos(\pi-\alpha)$, de unde evidențiem $\cos\alpha$, iar prin formulele de transformări trigonometrice obținem $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)}}$ (2). Substituim (2) în (1)

$S^2=0,25^2(4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2)= 0,25^2((a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d))=$
$=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$, unde $2p=a+b+c+d$.

Am obținut formula, ce trebuia demonstrată.

Bibliografie

1. PORT, S. *Geometrie Constructivă*. Chișinău, 2009.
2. PORT, S. TRIFAN, V. *Istoria Matematicii*. Chișinău, 2015.
3. АДЛЕР, А. (перевод с немецкого Фр. Фихтенгольца) *Теория геометрических построений*. Ленинград: Учпедгиз, 1940. 232 с.
4. GARDNER, M. *Mathematical puzzles and diversions*. London: Beil and Sons, 1971.
5. NAGIBEN, F.; KANIN, E. *Caleidoscop matematic*. Chișinău: Lumina, 1987.