CZU: 512(091)

EVOLUȚIA NOȚIUNII DE MONOM ȘI POLINOM

Cristina GRACILĂ, profesor la matematică
https://orcid.org/0000-0003-4557-8327
Gimnaziul Vărăncău, Soroca, RM
Valentina GHIMP, profesor la matematică
https://orcid.org/0000-0002-9455-3436
Liceul Teoretic Mălăiești Criuleni RM

Rezumat. În evoluția sa, matematica a trecut prin mai multe etape și la fiecare dintre ele a apărut un conținut mai perfect cu o nouă paradigmă. Așa a apărut algebra cu abstractul său care se supune în totalitate celor mai riguroase legi ale calculului numeric.
Cuvinte cheie: algebră, expresie algebrică, monom, polinom, fracție algebrică, ecuație trinomială.

THE EVOLUTION OF THE NOTION OF MONOMIAL AND POLYNOMIAL

Abstract. In its evolution, mathematics went through several stages and at each of them a more perfect content with a new paradigm appeared. This is how algebra appeared with its abstract which completely obeys the most rigorous laws of numerical calculation.
Keywords: algebra, algebraic expression, monomial, polynomial, algebraic fraction, trinomial equation.

La sfârșitul secolului XVI matematicianul francez Fransua Viette (1540 - 1603), bazându-se pe lucrările predecesorilor săi, introduce în algebră simbolica literară generală abstractă - un simbol. Viette notează necunoscutele prin litere vocale mari A, E, I, ..., iar cunoscutele – prin consoane B, C, D, ... El introduce coeficienți literali pe lângă necunoscute şi scrie ecuațiile, precum şi rezolvarea lor sub formă generală, prin formule. Așa dar, Viette a făcut cel mai important pas pentru trecerea la algebra retorică la algebra simbolică. De la el a pornit noțiunile de monom și polinom. S-a determinat că ***un monom*** este un polinom care are doar un singur termen. Poate avea următoarea structură: o constantă diferită de zero numită coeficientul monomului și care se scrie la începutul monomului, înmulțită cu litere din alfabetul latin (*variabile*) la diferite puteri (cu exponenți diferiți), care desemnează cantități abstracte și pot primi diverse valori numerice admisibile. Un monom fără variabile se numește *monom constant* sau *constantă*. Gradul unui termen constant este 0. Coeficientul unui monom poate fi orice număr, inclusiv fracții, numere iraționale sau negative

Polinoamele sunt construite din termeni numiți monoame, care sunt alcătuite dintr-o constantă (*numită coeficient*) înmulțită cu una sau mai multe variabile. Un polinom construit cu o singură variabilă se numește ***univariat***.

Această trecere a durat aproape un veac întreg. Simbolica algebrică a fost perfecționată de Renet Descartes, Isaac Newton, Gotfrid Leibnitz, Leonard Euler ș.a. Simbolica algebrică modernă a intrat în uz general abia la începutul secolului XVIII. Această simbolică reprezintă cea mai succintă limbă a științei moderne, limba matematicii, mai corect spus – limbajul matematic – cel mai perfect și aproape ideal limbaj utilizat la momentul actual. Acest limbaj a fost elaborat odată cu dezvoltarea înceată şi de lungă durată a algebrei înseși, a uşurat în mod considerabil studierea matematicii şi a contribuit la progresul acestei științe.

În crearea simbolicii un loc important a ocupat elaborarea notațiilor respective pentru puterile mărimilor. Încă în anul 1484 matematicianul francez Chuquet scria, de exemplu, *8^3, 56^2* (în loc de *$8x^3$, $56x^2$*). Viette exprima puterile atât prin cuvinte, cât şi prin inițialele respective: N (de la Numerus) – pentru puterea 1; Q (de la Quadratus) – puterea 2; C (Cubus) – puterea 3; QQ (patrat-patrat) – puterea 4 etc. (*un omagiu dat marelui matematician grec Diofante, care a inițiat, într-un oarecare fel simbolistica*). Matematicianul german din secolul XVI M. Stiefel ca şi cel englez Hariot din secolul XVII scriau AAA (în loc de A^3), aaaa (în loc de a^4). În deceniile 3-4 ale secolului XVII matematicianul francez Herigon folosește notațiile a2,a3 (în loc de a^2, a^3, ...). Notațiile contemporane a^3, a^4, a^5, .. au fost folosite pentru prima dată în mod sistematic de Renet Descartes în „*Geometria*" sa, apărută în anul 1637. Numai în loc de a^2 Descartes scria aa. Această rămășiță a dispărut şi ea, după ce Leibnitz (sec. XVII) a observat, că a^2, care nu ocupa mai mult loc decât aa, trebuie preferat pentru a unifica simbolica.

Algebra geometrică a grecilor cu formulele ei lungi şi metodele grele era foarte limitată în ceea ce privește posibilitățile ei de dezvoltare. Totuși ea a exercitat o influență asupra matematicienilor din Asia şi Europa până în secolul XVII. Abia Descartes şi mai ales Newton au reușit să rupă cu algebra geometrică şi să expună în simboluri moderne algebrice pe bază aritmetică.

În „*Aritmetica*" lui Magnițchi, care este primul manual important de matematică tipărit în Rusia şi editat în 1703, se expun pe lângă aritmetică şi unele noțiuni de algebră, geometrie etc. Magnițchi cunoştea simbolica folosită de Viette şi alți matematicieni din secolele XVI – XVII. Ca şi Viette, el nota necunoscutele prin vocale, iar cunoscutele – prin consonante. În loc de b^2, b^3, ... el scria bb, bbb, ... sau b2, b3,... Magnițchi expune în cartea sa regulile de operații algebrice şi unele procedee de rezolvare a ecuațiilor, însă el nu folosește numerele negative, care au intrat în uz general abia în secolul XVIII. În colțul de jos a foii titulare a „Aritmeticii" lui Magnițchi sunt atestate următoarele expresii: 2R + 1, 3R:2, 6q + 3R, :4R:2, 6q:1R:2.

$$\begin{array}{c} 2R+1 \\ 3R\div 2 \\ \hline 6q+3R \\ \div 4R\div 2 \\ \hline 6q\div 1R\div 2 \end{array}$$

Aici e vorba de înmulțirea a două polinoame, scrise în „*coloane*". Prin litera R (prima în cuvântul latin „*Radix*" - *rădăcină* se nota necunoscuta („*x*" al nostru); prin „*q*" (prima literă a cuvântului of „*quadratus"- pătrat*) se nota necunoscuta la pătrat („x^2"), iar semnul ÷ (:) se folosea pentru operația de scădere.

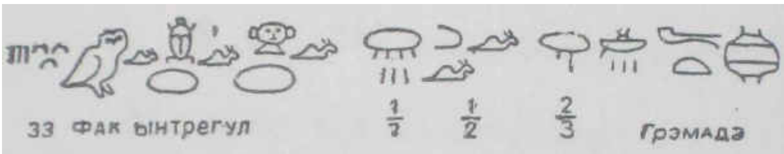
Problemă. Să se reprezinte înmulțirea de mai sus din „*Aritmetica*" lui Magnițchi prin simboluri moderne şi să se verifice.

Genialul savant englez Newton (1643-1727), care a descoperit legea atracției universale, legile mișcării şi altele, a scris şi o carte de algebră, întitulată „*Aritmetica universală*" şi editată în anul 1707. Este prima carte de algebră, scrisă în spirit modern, în strânsă legătură cu aritmetica. Newton motivează astfel denumirea de „*Aritmetica universală*", dată cărții: „*Calculele se fac fie cu ajutorul numerelor ca în aritmetica obișnuită, fie cu ajutorul literelor, ca în algebră. Ambele procedee se bazează pe aceleași principii şi duc la același scop, aritmetica – pe cale particulară, iar algebra – pe cale generală...nu se pot rezolva numai pe cale aritmetică. Încă în toate operațiile aritmetice sunt foarte necesare şi în algebră şi amândouă la un loc formează știința completă a calculului...*" Într-adevăr, monoamele şi polinoamele sunt de fapt niște numere abstracte, asupra cărora se pot efectua diferite operații.

Iată exemple de adunare a monoamelor din „*Aritmetica universală*" a lui Newton:

$$11bc + 15bc; 12x + 7a + 7x + 9a.$$

Algebra a luat naștere în legătură cu rezolvarea ecuațiilor. Folosirea ecuațiilor pentru rezolvarea diferitelor probleme practice datează din mileniile III – II î.e.n.



Astfel de procedee algebrice se întâlnesc în papirusurile din Egiptul Antic. Egiptenii antici numeau necunoscuta „*hau*" sau „*aha*" , adică „*grămadă*" în sens de „*cantitate oarecare*" şi o notau prin diferite semne ieroglifice speciale (vezi imaginea de mai sus).

Iată două probleme din papirusul lui Ahmes:

Problema 3. „*Grămadă, a patra parte din ea, întregul ei formează cincisprezece*".

În simbolica modernă ecuația respectivă se scrie astfel: $x\left(\frac{1}{4}+1\right)=15$.

Problema 4. „*Grămadă, două treimi ale ei, o șeptime a ei, întregul ei fac 33*".

În simbolurile contemporane ecuația, cu ajutorul căreia se rezolvă această problemă, se scrie în felul următor: $x\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+1\right)=33$.

Babilonienii şi grecii, chinejii şi hindușii aplicau de asemenea metoda alcătuirii şi rezolvării ecuaţiilor la diferite probleme. Astfel au luat origine procedee noi, știința algebrei.

Prima încercare de a sistematiza toate chestiunile, care privesc rezolvarea ecuaţiilor, o găsim în „*Aritmetica*" lui Diophante. Pentru „*necunoscută*" Diophante folosea termenul „*un număr oarecare de unități*".

Iată una din indicațiile, indicate de Diophante: „*Dacă la rezolvarea unei probleme se ajunge la o ecuație, ale cărei ambele părți conțin termeni egali, încă cu coeficienți diferiți, atunci trebuie să reducem termenii asemenea. Dacă avem termeni care se scad (adică numere negative), trebuie să adăugăm la ambele părți ale ecuației aceleași mărimi pentru a avea numai termeni care se adună (adică numere pozitive). Astfel se va continua, până când în fiecare parte a ecuației va rămâne câte un singur termen*".

Aceste indicații, din care, de altfel, se constată, că Diophante nu opera cu numere negative, sunt de fapt suficiente pentru rezolvarea ecuaţiilor de gradul I cu o singură necunoscută. Iată o problemă din „Aritmetica" lui Diophantes:

Problema 5. Să se adauge la 20 şi să se scadă din 100 unul şi acelaşi număr astfel, încât suma obținută să fie de 4 ori mai mare decât diferența obținută.

Procedeele algebrice folosite de Diophante n-au fost dezvoltate mai departe în Grecia antică, declinul căreia începuse tocmai în secolele IV – V. Lucrările lui Diophante au exercitat încă o influență asupra dezvoltării ulterioare a matematicii în Evul Mediu, în particular în secolele XVI –XVII.

În lucrările matematicienilor indieni Ariabhata (sec V), Brahmagupta (sec VII), Mahavira (sec IX) şi Bhaşcara (sec XII) sunt capitole dedicate algebrei, în special rezolvării ecuaţiilor. În antichitate, mai ales în India, se folosea pentru rezolvarea problemelor o metodă numită latineşte în Evul Mediu „*regula falsi*", adică „*regula presupunerii false*". S-o lămurim, rezolvând următoarea problemă din vechiul manuscris indian de la Bahşali (sec. VI):

Problema 6. *Din patru donatori a dat de două ori mai mult decât primul, al treilea – de trei ori mai mult decât al doilea, al patrulea – de patru ori mai mult decât al treilea, iar toți împreună au dat 132. Cât a dat primul?*

În prezent problema se rezolvă prin alcătuirea ecuației: $x + 2x + 6x + 24x = 132,$ însă autorul indian anonim procedează altfel. El scrie: „*dacă primul ar fi dat 1, atunci al doilea ar fi dat 2, al treilea 6, al patrulea – 24, iar toți împreună 33. Dar de fapt au dat 132, adică de patru ori mai mult: primul 4, al doilea 8, al treilea 24, iar al patrulea 96*". Așa dar, plecând de la presupunerea falsă, că primul ar fi dat 1, autorul ajunge în sfârșit la rezultatul adecvat. Regula presupunerii false era folosită pe larg în tot Evul Mediu atât în Asia, cât şi în Europa.

În cartea „Aritmetica universală" Newton numește literele, semnele de operații monoamele Pentru a afla mărimile căutate, pentru a rezolva o problemă, - scrie Newton – „*trebuie numai de tradus problema în limba algebrei, adică de expus problema cu ajutorul simbolurilor...*". Traducerea problemei în limba algebrei duce la rezolvarea ei prin alcătuirea de ecuaţii.

În cartea sa „*Aritmetica universală*" (1707) Newton a expus în mod sistematic, clar şi simplu regulile de operații cu numere şi expresii algebrice, însoțindu-le de numeroase exemple.

Iată ce scrie Newton: „*Fiți atenți, ca la împărţirea mărimilor ele să fie de același fel, adică să se împartă coeficienții la coeficienți, litere la litere... Dacă deîmpărţitul nu poate fi* *descompus într-un produs de factori, e destul să se scrie împărțitorul sub deîmpărțit, despărțindu-le printr-o linie fracționară. De exemplu, pentru a împărți ab la c scriem ab/c. Pentru a împărți un polinom la un monom, se împarte la acesta fiecare monom din termenii polinomului...*”.

Newton a fost primul savant, care la împărţirea polinoamelor le așază după puterile descrescătoare ale uneia şi aceleiași litere.

Iată un exemplu, de împărțire a două polinoame din „*Aritmetica universală*” a lui Newton. Problema 8.

$$
\begin{array}{l|l}
y^6+(a^2-2c^2)y^4+(c^4-a^4)y^2-a^2c^4-a^6-2a^4c^2 & y^2-a^2-c^2 \\ \cline{2-2}
\underline{y^6-(a^2+c^2)y^4} & y^4+(2a^2-c^2)y^2+a^4+a^2c^2 \\
0+(2a^2-c^2)y^4 & \\
\underline{+(2a^2-c^2)y^4-(2a^4+a^2c^2-c^4)y^2} & \\
\qquad 0+(a^4+a^2c^2)y^2 & \\
\qquad\qquad \underline{+(a^4+a^2c^2)y^2-a^6-2a^4c^2-a^2c^4} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Viette opera numai cu numerele pozitive şi folosea de obicei numai litere mari ale alfabetului. Dintre semnele de operații Viette întrebuința numai + şi - , în locul semnului modern de egalitate el scria „aequ” (prescurtarea cuvântului latin „aequatur” – egal). Iată cum scria de exemplu, Viette ecuația $x^3 - 8x^2 + 16x = 40$:

1C – 8Q + 16N aequ 40.

Matematicianul belgian Steven (1548-1620) a exclus expresii de felul „patrat-patrat”, „cubo-cub”, înlocuindu-le prin cuvintele „puterea a patra”, „puterea a cincea” etc. Un matematician englez din același timp, Outred, scria Aqq în loc de A^4, Aqqcc în loc de A^{10}. Notația modernă: y^3, y^4 etc., introdusă de Descartes, a fost adoptată de Newton şi de alți matematicieni de vază în sec XVII şi a rămas în vigoare până în prezent. Termenul „*putere*” (latineşte – „*potestas*”) a fost introdus de Viette, pe când termenul „*exponent*” (latineşte – „*exponens*”) a fost folosit pentru prima dată de matematicianul german Șteifel în sec XVI.

La descompunerea polinoamelor în factori se folosesc mereu parantezele. Unele semne pentru indicarea ordinii de efectuare a operaţiilor sau pentru a pune în evidență unicitatea unei expresii algebrice au apărut încă în secolul XV. Așa, de exemplu, în anul 1484 Chuquet sublinia polinoamele printr-o linie orizontală. Astfel proceda în anul 1550 şi matematicianul italian Bombelli, care mai târziu însă folosea ca paranteze litera latină L şi răsturnata ei; de la aceasta se trag parantezele zise „*mari*” sau „*pătrate*”. Parantezele mici „*rotunde*” din polinoame se găsesc în lucrările lui Tartaglia, Șteifel, Jirard. La sfârșitul secolului XVI în scrierile lui Viette apar pe lângă parantezele mari şi cele figurate, acolada { }. Cu toate acestea în decursul secolului XVII se foloseau încă în loc de paranteze linii orizontale, scrise de asupra expresiilor algebrice. Astfel procedau Dechartes, Hariot, ş.a. Newton se folosea chiar de câteva etaje de liniuțe. Începând cu anul 1709, apar şi se folosesc sistematic parantezele mari, zise pătrate. Folosirea largă a parantezelor de toate felurile, începând cu secolul XVIII, se datorește mai ales lui Leibnitz şi lui Euler.

Legile fundamentale ale operaţiilor aritmetice erau cunoscute încă în antichitate şi considerate pe baza practicii îndelungate a omului ca fiind de la sine înțelese.

Cu dezvoltarea teoriei aritmetice şi algebrei apare necesitatea de a demonstra proprietățile, considerate mai înainte ca evidente.

În cartea a VII a „*Elementelo*r" sale Euclid demonstrează legea comutativă a înmulțirii ($ab = ba$), iar în cartea a II-a el demonstrează geometric legea distributivă: $a(b + c + d + ...) = ab + ac + ad + ...$ Euclid formulează această lege cam astfel:

Dacă din două segmente *a, m* unul (m) este împărțit în câteva părți (*b, c, d, ...*), atunci dreptunghiul (*a, m*) este egal cu suma dreptunghiurilor *ab, ac, ad,...* Dovada este evidentă.

La fundamentarea riguroasă a regulilor şi legilor operaţiilor aritmetice s-a ajuns abia în a doua jumătate a secolului XIX.

Scrierea fracțiilor cu ajutorul liniuței orizontale, care desparte numărul de numitor, o întâlnim de acum în lucrările savanților Greciei antice, Geron şi Diofante, cât şi la matematicianului arab Al-Hasar (sec. XII). Printre matematicienii din Europa Medievală savantul Italian Leonardo Fibonacci (sec. XII-XIII) a fost primul, care se folosea în mod sistematic de liniuță fracționară. Însă abia în sec. XVI ea a început să fie folosită peste tot. I. Newton, în loc de „*simplificarea fracțiilor*", zicea „*reducerea fracțiilor la cei mai mici termeni*"

În anul 1768 a apărut la Petersburg „*Aritmetica universală*" a celui mai mare matematician din sec. XVIII, Leonard Euler (1707-1783). Ceva mai târziu această carte minunată, care a servit zece ani ca model pentru toți autorii de manual de algebră a fost editată şi în limba germană (1770), franceză (1774), engleză (1797). Ea a fost reeditată de câteva ori în rusește. Cartea lui Euler a fost scrisă pentru toți doritorii de a se iniția în studiul sistematic al algebrei. Ea cuprinde un material bogat, variat, expus sistematic şi clar, o mulțime de probleme şi exerciții. În carte sa Euler folosește termenul „*cantitatea*" pentru cea ce noi azi numim expresia algebrică, „*cantitatea simplă*"-*monom*, „*cantitate compusă*" - *polinom.*

Bibliografie

1. BOTH, N. *Istoria Matematicii.* Cluj-Napoca: Alc Media Grup, 1999. 256 p.
2. GLEIZER, G.I. *Istorismul în predarea matematicii. Algebra. Partea II.* Chișinău: Lumina, 1963. 226 p. (*cu caractere chirilice*).
3. ДЕПМАН, И.Я. *История арифметики*. Москва: Просвещение, 1959 г. 192 стр.
4. KOLMAN, E. *Istoria matematicii antichitate.* București: Editura științifică, 1963. 246 p.