CZU: 37.026:51(091)

METODE DIDACTICE DE SOLUȚIONARE A PROBLEMELOR PRACTICATE DE PROFESORII DE MATEMATICĂ ÎN MOLDOVA ANILOR 1800-1900

Gabriela GHERMAN, Inspector școlar la matematică
https://orcid.org/0000-0001-8598-3576
IȘJ Vrancea, România

Rezumat. În matematica care se practica în Moldova medievală, se practicau aceleași procedee de rezolvare a problemelor ca în restul Europei, unele pur și simplu aveau o culoare națională specifică.
Cuvinte cheie: Probleme de matematică, metode de rezolvare, metode didactice, regula de trei, regula de companie sau de companie, regula de amestecare.

DIDACTIC METHODS OF SOLVING PROBLEMS PRACTICED BY MATHEMATICS TEACHERS IN MOLDOVA IN THE YEARS 1800-1900

Abstract. In the mathematics that was practiced in medieval Moldova, the same problem-solving procedures were practiced as in the rest of Europe, some simply had a specific national color.
Keywords: Mathematical problems, solving methods, didactic methods, the rule of three, the companionship or company rule, the mixing rule.

În mod similar ca și în toate școlile din Europa, în școlile din țările române se practicau, în linii generale aceleași procedee didactice de soluționare a problemelor, care s-au statornicit încetul cu încetul cu împrumuturi de la civilizațiile anterioare. În special a fost influența școlii arabe, datorită cărei au apărut primele universități în Europa și, odată cu ele o anumită ordine de a studia matematica.

Printre cele mai frecvente procedee pot fi enumerate: metoda reducerii la unitate, metoda balanței, metoda falsei presupuneri, metoda comparației, metoda reducerii la soluționarea unei anumite ecuații de gradul 1-IV, ecuații nedeterminate etc., metoda mersului retrograd

Ne vom mărgini astăzi la metoda Regulii de Trei.

În operele matematicienilor din Lumea Antică, a celor din Evul Mediu cât şi a celor de i-au urmat mai pe urmă, pot fi întâlnite adeseori diverse procedee de soluționare a problemelor matematice de unul sau alt tip particular. Unele dintre aceste procedee s-au transformat cu timpul în metode tradiționale didactice, ce au înfruntat veacurile şi au devenit adevărate capodopere matematice, altele s-au transformat sau perfectat în dependență de circumstanțele timpului sau de ajunsurile științei la momentul dat, dând naștere la alte procedee sau metode didactice, care cu timpul au fost recunoscute drept perle de înțelepciune matematică. Se vorbește în literatura istorică didactică matematică de circa 26 de astfel de reguli, în genere adaptate pentru problemele aritmetice de anumite tipuri, însă în manualele vechi de matematică care au ajuns până în zilele noastre se pot atesta cu mult mai multe. Unele din aceste reguli sau metode didactice pot fi grupate sub logotipul *Regula de Trei.* Din ele fac parte regulile ce se referă la relațiile proporţionale dintre mărimile date în enunțul problemei.

Prin urmare trebuie cunoscute toate relațiile posibile dintre mărimile proporţionale. Studiul relațiilor dintre proporţii a fost cel mai minuțios cercetat şi mai detaliat elaborat dintre toate studiile matematice din antichitate.

Regula de Trei, numită *Profeta artei calculului* sau *Regula de Aur* era cunoscută încă din timpurile vechi. Problemele, rezolvate prin, *Regula de Trei*, constituiau cea mai mare parte din problemele aritmetice practice la toate popoarele civilizaților lumii. Procedeul constă în următoarele: mărimile, ce se află într-o dependență proporțională directă sau inversă una faţă de alta, omul le tot depista la tot pasul în practica sa cotidiană şi el în conformitate cu raționamentul cugetului omenesc rezolva problemele legate de relațiile cu astfel de mărimi.

Procedeul soluționării problemelor la *Regula de Trei* prin reducerea la unitate era cunoscut în India Antică. În afara hotarelor Indiei primele urme ale utilizării acestui procedeu este atestat în matematica chineză sau arabă, de unde *Regula* a trecut in Europa. Însăşi denumirea *Regula de Trei* are origine hindusă numit în sanscrită procedeul sau regula *Trai Rașika* ceea ce înseamnă *Trei-regulă*, care subînțelege trei termeni, care de obicei au denumirile de: *mărimea dată (a), rezultatul (b), mărimea căutată(c*). Uneori ele simplu sunt numite primul termen, al doilea, al treilea, iar alteori – primul, de mijloc, ultimul.

Regula celor Trei mărimi este una dintre cele mai importante în aritmetica hindusă. La utilizarea ei se reduceau multe probleme practice legate de viața cotidiană a popoarelor civilizației hinduse. Pentru prima dată regula apare la Ariabhata (circa 475 e.n.), iar mai apoi în toate operele matematice hinduse. Regula era aplicată la calcularea procentelor, a operaţiilor comerciale şi de măsurare.

Către secolul al XII-lea matematicienii hinduși, Şridhara şi Bhaşcara practică deja şi *Regula de Trei Compusă*. Se determina regula după datele din enunțul problemei în conformitate cu care rezolvarea se reducea la înmulțiri şi împărțiri mecanice. Se menționează în operele matematice că primul şi ultimul termen trebuie să fie omogeni, adică să posede una şi aceeaşi denumire. Tipuri de asemenea probleme, ce se referă la *Regula de Trei*, fără îndoială erau atestate şi la alte civilizații: China, Grecia, Egipt, Bizanţ, Fenicia, Elam, însă doar în India această regulă a fost evidențiată în rang deosebit, devenind o ***metodă didactică*** generală de soluționare a problemelor, alteori extinse la metode cu referire la cazurile de cinci, șapte, nouă etc. mărimi. Ariabhata I (sec. V) recomandă: în *Regula de Trei Mărimi* de înmulțit rezultatele la mărimea căutată şi de împărțit la cea dată. Se obține un rezultat, care corespunde celui căutat. Exemplele corespunzătoare nu sunt atestate la marele matematician hindus, însă ele sunt atestate la urmașii lui, spre exemplu la Şridhara sunt atestate următoarele probleme:
Problema 1: *Dacă $1^1/_3$ pala de piper negru costă 1¼ pana, atunci spune fără a chibzui mult ce cantitate de piper negru poți cumpăra de 10 fără $^1/_3$ pana*.
Rezolvarea antică: Problema dată matematicianul antic o rezolvă în felul următor:

"*Aranjăm:* $\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{array}$. *Transformând în fracții supraunitare, înmulțim cel căutat la rezultat şi împărțim la cel dat, căpătăm 10 şi rest* $^{14}/_{45}$ "

În simbolica actuală scrierea ar fi următoarea: dacă $1\frac{1}{3}$ pala costă $1\frac{1}{4}$ pana, atunci câte pala se pot cumpăra de $10 - \frac{1}{3} = 9\frac{2}{3}$ pana. Schematic avem:

$1\frac{1}{3}$ pala — 1 pana

$1\frac{1}{4}x$ pala — $9\frac{2}{3}$ pana

de unde avem: $x = \frac{1\frac{1}{3}\cdot 9\frac{2}{3}}{1\frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{29}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{4\cdot 29\cdot 4}{5\cdot 3\cdot 3} = \frac{464}{45} = 10\frac{14}{45}$ (pala).

Cu ajutorul Regulii de Trei se pot rezolva cele mai variate probleme.

Indicăm unele probleme luate din lucrarea matematică hindusă „*Pataganita*‘.

Problema 2: *O persoană a parcurs distanţa de 1/8 iodjana în 1/3 zi. Spune în cât timp el va parcurge o distanță egală cu 100 iodjana*? R-s: În 166 2/3 zile.

Problema 3: *O insectă traversează distanţa de 1/6 angula timp de ¼ zile. În cât timp ea va traversa 10 ½ iodjană*? Notă: 1 iodjană = 768000 angula. R-s: În 12096000 zile.

Problema 4: *Elefantul parcurge timp de 6, înmulțit la $^1/_5$, înmulțit la $^1/_9$, înmulțit la $^1/_3$, înmulțit la 1¼ zile, distanţa de $^1/_2$, înmulțită la $1^1/_4$, înmulțită la 1 fără $^1/_3$, înmulțită la 1½ iodjana, şi se întoarce înapoi, parcurgând timp de 1½ zile distanţa de 2 înmulțită la 1 fără $^1/_3$ iodjana. O prietene în cât timp el va parcurge distanţa de 100 iodjana?* R-s: În 10 zile.

Problemele analoage sunt atestate în cel mai vechi manuscris matematic hindus Bhaşcali. Astfel una din problemele din manuscrisul Bhaşcali are următorul enunț: *„Barca se deplasează înainte cu viteza ½*$^1/_3$+($^1/_4$+$^1/_3$) iodjana timp de ½*$^1/_3$ zile, însă ea este mânată de vânt înapoi cu ½+$^1/_5$ iodjana în $^1/_7$*3 zile. În cât timp ea va parcurge 108 iodjana?”*

Reciproca Regulei de Trei. Termenul sanscrit pentru *Regula Reciproca a Regulii de Trei - Viasta Trai Raşica* (regula reciproca pentru trei mărimi). Reciproca Regulii de Trei se aplică la soluționarea majorităților problemelor, în care cel dat este invers proporțional celui căutat, adică constă în determinarea lui *x* care formează cu numerele date *a, b, c,* proporția: *a:b = x:b*. Regula spune: *„Pe parcursul variației unității de măsură media se înmulțește la prima şi se împarte la ultima.”*

De la hinduși această regulă a trecut în literatura matematică arabă, apoi în cea vest europeană. Vom ilustra această regulă printr-un exemplu:

Problemă: *Cât aur de titlu 11 varna se poate căpăta în schimbul cu 168 suvarna de aur de titlu 16 varna?*

Rezolvarea hindusă: Calculatorul hindus rezolvă astfel: *„Aranjăm 16 168 11. Înmulţim primul termen 16 cu 168, produsul 168 împărțim la al treilea termen 11, obținem 244 suvarna, 5 mana $4^1/_{11}$ gundja.”*

Proporția Compusă. *Regulile de cinci, șapte, nouă mărimi* reprezintă cazuri particulare de proporţie compusă. Termenii în sanscrită pentru proporția compusă – *Pancia raşica* (Regula de Cinci Mărimi); *Şapta Raşica* (Regula de Şapte), *Nava Raşica* (Regula de Nouă) etc. *Regula de Cinci mărimi* constă în determinarea mărimii necunoscute *x*, care cu cinci cunoscute formează o proporţie compusă *a/b*c/2 = x/e. Regula de Șapte mărimi* constă în determinarea mărimii necunoscute *x*, care cu șapte cunoscute formează o proporţie compusă *a/b*c/d*e/f = x/g.* În mod analog se definesc *Regulile de Nouă, Unsprezece etc. mărimi.* Alteori toate aceste reguli sunt numite „*Reguli în număr impar de termeni*". Proporția compusă era deja cunoscută lui Ariabhata I, cu toate că el indică doar regula de Trei. Bhaşcara I în comentariile sale la *Ariabhatia* scrie: *„Aici Ariabhata a descris doar Regula De Trei. Cum totuși se pot obține bine cunoscutele Reguli de Cinci, Șapte etc.? Eu cuget astfel: Ariabhata a descris doar proporțiile fundamentale – toate celelalte tipuri de proporţii, așa ca, Regula de Cinci, Șapte etc. rezultă din această regulă fundamentală a proporției. Regula de Cinci constă din două reguli de Trei, iar Regula de Șapte constă din Trei Reguli de Trei etc."*

Iată regula proporției compuse: „*După permutarea rezultatului dintr-o parte în alta, trebuie de schimbat încă cu locurile numitorii, înmulțind numerele obținute în fiecare parte, trebuie de împărțit partea cu numărul mai mare a numărătorilor cu cealaltă parte."* Această regulă originală este studiată şi astăzi ca una dintre cele mai importante reguli de soluționare a problemelor matematice, fiind atestată ca metodă de soluționare a unui anumit tip de probleme în conformitate cu curriculumul actual la matematică.

Regula tovărășiei. Aceasta regulă a fost o metodă destul de des şi destul de eficace aplicată în soluționarea problemelor legale cu relațiile de asociere a activității oamenilor în comun în Moldova Medievală.

În prima carte de matematică scrisă în limba română – *Elemente aritmetice arătate firești* de Amfilohie Hotiniul în 1795 la Iași la capu 3I, adică 17 autorul prin întrebări (Î) şi răspunsuri (R), (deoarece cartea era scrisă în forma catehetică) lămurește rezolvarea problemelor prin metoda – Regulei de Trei, pe care autorul o numește „*orânduiala tovărășiei neguțitorești*".

"*Î: Ce lucru este tovărășia neguțitorească?*

R: Este o tocmeală, între doua, au şi mai multe fețe neguțitorești, puind bani au marfa în tovărășie, au slujbă şi istețime, dar se tâmplă că la o vreme vine ca să aibă socotelile lor de câștig ori de pagubă. Obișnuită este orânduiala de trei, de atâtea ori prefăcută pe câte fețe vor fi."

Această regulă este atestată aproape în toate cărțile de aritmetică din secolul al XIX-lea şi ceva mai devreme. În Aritmetica lui Gh. Asachi editată la 1834 regula este numită regula tovărășiei sau companie:

„148. Regula de companie (sau soțietate) este spre a împărți în porții sau părți proporţionale cu numere date. Ea se întrebuințează la negoțu spre a împărți câștigurile unei companii; în proporția comen ce au pus-o fieștecarile companion.

Exemplu: Trei companioni au făcut oarecare operație de comerț în care au câștigat 60000 lei. Acel dintâi companion a pus la mijloc 90000. Al doilea - - - - - - - -60000. Al treilea - - - - - - - - - - 40000. Se cere a ști câștigul a fiește căruia dintre acești companioni".

Autorul indică procedeul de calculare a sumei depuse de toți (*gheneralnica punere*) 190000 lei, apoi prin Regula de Trei Simplă:

I. *190000 lei* au dat câștigul de *60000 lei*

90000 lei - - - - - - - - - - - - -- x. De unde x = $28421\frac{1}{19}$

II. *190000 lei - - - - - - - - - - -60000 lei.*

60000 lei - - - - - - - - - - - - x. De unde x = $18947\frac{7}{19}$

III. *190000 lei - - - - - - - - - - - -60000 lei*

40000 lei - - - - - - - - - - - - x. De unde x = $12631\frac{11}{19}$

Desigur unele procedee se aplică și actualmente.

Bibliografie

1. ASAKY, Gh. *Aritmetica. Algebra. Geometria.* Iași, 1835.
2. HOTINIUL, A. *Elemente aritmetice arătate firești.* Iași, 1795.
3. VELINI, A. Manual de didactică. Iași, 1838.
4. DEPMAN, I. *Istoria Aritmeticii.* Moscova: Prosveșcenie, 1959 г. 192 стр. (în rusă).