CZU: 517.38

ASPECTE DIDACTICE PRIVIND APLICAREA INTEGRALEI DEFINITE ÎN REZOLVAREA DE PROBLEME

Dumitru COZMA, dr. hab., profesor universitar
https://orcid.org/0000-0003-4794-1935
Larisa SALI, dr., conferențiar universitar
https://orcid.org/0000-0003-1172-3055
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chişinău

Rezumat. În lucrare este realizată o analiză a metodelor de integrare şi a unor greşeli întâlnite la calcularea integralelor definite. Sunt propuse unele sugestii privind diversificarea contextelor de aplicare a integralei definite în rezolvarea de probleme matematice.
Cuvinte cheie: integrala definită, metode de integrare, aplicații ale integralei definite.

DIDACTIC ASPECTS REGARDING THE APPLICATION OF THE DEFINITE INTEGRAL IN PROBLEM SOLVING

Abstract. In this paper an analysis of the integration methods and some mistakes encountered in the calculation of the definite integrals is carried out. Some suggestions regarding the diversification of contexts in application of the definite integral in solving mathematical problems are proposed.
Keywords: definite integral, integration methods, applications of the definite integral.

Introducere

Studiul matematicii în liceu are ca scop să contribuie la formarea şi dezvoltarea capacităţii elevilor de a reflecta asupra lumii, de a formula şi rezolva probleme pe baza relaţionării cunoștințelor din diferite domenii [1].

Calculul diferențial și cel integral sunt printre invențiile cele mai mari ale matematicii, cu efecte profunde asupra dezvoltării științelor reale și ale naturii. Bazele calculului integral au fost puse de către Isaac Newton, în 1666, pornind de la probleme de natură cinematică. Pentru Newton, calculul integral însemna găsirea „fluenților" atunci când sunt cunoscute „fluxiunile" (derivatele), obiectivul principal fiind determinarea legii de mişcare a unui punct material atunci când este cunoscută permanent viteza sa. Gottfried Wilhelm Leibniz a exprimat relația inversă de integrare și diferențiere, numită mai târziu teorema fundamentală a calculului în lucrarea sa din 1693 Supplementum geometriae dimensoriae.

Standardele de eficiență a învățării sunt instrumente esențiale pentru evaluarea succeselor elevilor. Astfel, în legătură cu noțiunea de integrală este formulat standardul 14: Elevul recurge la concepte şi metode de analiză matematică în abordarea unor situaţii cotidiene, pentru rezolvarea unor probleme uzuale sau studiul unor fenomene din ştiinţă, tehnică, societate. Indicatorii de eficiență sunt: 14.3. Aplică în situaţii reale sau modelate noţiunile de primitivă, integrală nedefinită, integrală definită. 14.4. Investighează valoarea de adevăr a unei afirmaţii referitoare la relaţii, şiruri, funcţii, derivată, *diferenţială, integrală definită, integrală nedefinită. 14.5. Interpretează un rezultat sau demers simplu utilizând concepte (relaţii, şiruri, funcţii) şi metode de analiză matematică studiate [3].

Autorii manualului [2] recomandă la studierea modulului *Integrale definite* atingerea a patru obiective de bază: identificarea integralei definite în diverse contexte; calcularea integralei definite; utilizarea interpretării geometrice a integralei definite în rezolvări de probleme; utilizarea proprietăţilor integralelor definite în diverse contexte. Se aplică integrala definită la calcularea ariei subgraficului unei funcţii, calcularea volumului unui corp de rotaţie, calcularea lungimii graficului unei funcţii (opțional), calcularea ariei unei suprafeţe de rotaţie (opțional) și calcularea coordonatelor centrului de greutate a unei plăci (opțional). Integrale definite se întâlnesc frecvent la examenul de Bacalaureat, fiind propuse exerciții de calculare a integralei definite sau probleme de geometrie care solicită aplicarea integralei definite.

Constatăm că obiectivul privind utilizarea proprietăţilor integralelor definite în diverse contexte nu poate fi atins, dacă avem la dispoziție doar conținuturile expuse în manual. Pe lângă aplicațiile menționate mai sus, în cursul liceal de matematică integrala definită poate fi aplicată în contexte ce țin de calculul unor limite de şiruri, demonstrarea unor inegalități, determinarea funcțiilor cu anumite proprietăți extremale, calcularea drumului parcurs de un punct la mișcarea neuniformă, calcularea lucrului efectuat de forța variabilă etc.

Asupra metodelor de calcul a integralelor definite

În manualul pentru clasa 12-a nominalizat deja sunt descrise trei metode de calcul a integralei definite:

1. integrarea directă (prin aplicarea formulei Leibniz-Newton);
2. integrarea prin schimbarea de variabilă (metoda substituției);
3. integrarea prin parţi.

Cele mai simple integrale definite se calculează aplicând formula Leibniz-Newton, care reduce calculul integralei definite la determinarea unei primitive şi efectuarea unor operaţii asupra acestei primitive [2]:

Teorema 1 (formula Leibniz-Newton). Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă, care admite primitive pe $[a, b]$ şi $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ o primitivă oarecare a funcţiei f. Atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Formula (1) se aplică la calcularea integralelor definite de la funcţii $f(x)$ continue pe $[a, b]$ doar în cazul, când egalitatea $F'(x) = f(x)$ se realizează pe întreg segmentul $[a, b]$. În particular, primitiva $F(x)$ trebuie să fie o funcţie continuă pe întreg segmentul $[a, b]$. Vom examina unele contexte care conduc la erori de calcul al integralelor definite din motivul că nu sunt examinate minuțios cerințele de aplicare a metodelor de integrare. Deseori aplicând formula (1) nu se ţine cont de faptul că se poate obţine o primitivă a funcţiei $f(x)$ care este discontinuă în careva puncte din $[a,b]$. Folosirea unei primitive discontinue poate duce la rezultate greşite.

Exemplul 1. Aplicarea incorectă a primitivei la calcularea integralei definite:

$$I=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{1}{1+3\,\mathrm{tg}^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{d(\mathrm{tg}\,x)}{1+3\,\mathrm{tg}^2 x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{d(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x)}{1+(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x)\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}\right)-\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Să observăm că funcţia de integrare este pozitivă $f(x)=\frac{1}{1+2\sin^2 x}>0, \forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$, iar $I=-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}<0$. S-a obţinut un rezultat greşit, fiindcă aplicarea formulei Leibniz-Newton cu o primitivă $F(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x)$ discontinuă în punctul $x=\frac{\pi}{2}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ nu este legitimă. Rezultatul corect putea fi obţinut astfel:

$$I=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{1}{\mathrm{ctg}^2 x+3}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{d(\mathrm{ctg}\,x)}{\mathrm{ctg}^2 x+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

În acest caz, primitiva $F(x)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sqrt{3}}\right)$ este continuă pe întreg segmentul $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ şi formula Leibniz-Newton poate fi aplicată.

Integrale definite, mai complexe pot fi calculate prin metoda schimbării de variabilă. Această metodă este urmată de transformarea unor integrale complicate în integrale simple care pot fi calculate aplicând formula Leibniz-Newton. De obicei, schimbarea de variabilă se efectuează în baza următoarei teoreme [2]:

Teorema 2. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ şi $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ funcţii cu proprietăţile:

a) funcţia $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$;

b) funcţia $x=\varphi(t)$ este derivabilă și are derivata φ' continuă şi diferită de zero pe $[\alpha,\beta]$;

c) $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$. Atunci este adevărată *formula schimbării de variabilă*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt. \tag{2}$$

Exemplul 2. Aplicarea incorectă a metodei substituției la calcularea integralei definite:

$$I=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{dx}{2-\cos x}=\begin{bmatrix}\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t;\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ x=2\,\mathrm{arctg}\,t;\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x=\frac{\pi}{2}, t=\alpha;\ x=\frac{3\pi}{2}, t=\beta;\\ \alpha=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1;\ \beta=\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}=-1\end{bmatrix}=$$

$$= \int_1^{-1} \frac{2dt}{(1+t^2)\left(2-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int_1^{-1} \frac{2dt}{1+3t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_1^{-1} \frac{d(\sqrt{3}t)}{1+(\sqrt{3}t)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}t)\Big|_1^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - \operatorname{arctg}(\sqrt{3})\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

Am obţinut $I < 0$ şi acest rezultat e greşit, fiindcă funcţia de integrare este pozitivă $f(x) = \frac{1}{2-\cos x} > 0, \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Substituţia $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ nu este admisibilă. Funcţia $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ este discontinuă în punctul $x = \pi$, nu respectă condiţiei b) din Teorema 2.

Rezultatul corect poate fi obţinut prin substituţia $t = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$:

$$I = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dx}{2-\cos x} = -2\int_1^{-1} \frac{dt}{t^2+3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\Big|_1^{-1} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

La aplicarea formulei (2) trebuie să ţinem cont şi de *monotonia* funcţiei $x = \varphi(t)$. Dacă ea nu este monotonă, atunci sistemul de ecuaţii $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ poate avea mai multe soluţii distincte. În acest caz trebuie luată una dintre soluţiile sistemului, care determină intervalul $[\alpha, \beta]$ şi pe care funcţia $x = \varphi(t)$ este monotonă [4].

Exemplul 3. Să se calculeze integrala

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sin t, \\ dx = \cos t\, dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x = 1/2, t = \alpha;\ x = \sqrt{3}/2, t = \beta; \\ \frac{1}{2} = \sin\alpha;\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\beta \end{bmatrix}.$$

Limitele noi de integrare α şi β se determină din sistemul de ecuaţii:

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}, \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mulţimea soluţiilor sistemului constă din mulţimea perechilor (α, β), unde

$$\alpha = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, \beta = (-1)^m\frac{\pi}{3} + \pi m, k, m \in \mathbb{Z}.$$

Să luăm, de exemplu, perechea $(\alpha, \beta) = (\pi/6, \pi/3)$, atunci în intervalul $(\pi/6, \pi/3)$ funcţia $x = \sin t$ este strict monotonă. Astfel $\alpha = \pi/6$ şi $\beta = \pi/3$ pot fi luate ca noi limite de integrare. În intervalul $[\pi/6, \pi/3]$ avem $\cos t > 0$, prin urmare $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$.

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos t\, dt}{\sin t \cos t} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t - 1}{\cos t + 1}\right|\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

În acelaşi timp, perechea $(\pi/6, 2\pi/3)$ nu poate fi luată ca noi limite de integrare. În intervalul $(\pi/6, 2\pi/3)$ funcţia $x = \sin t$ nu este monotonă. Se poate lua şi altă pereche, spre exemplu, perechea (α, β), unde $\alpha = 5\pi/6$ şi $\beta = 2\pi/3$. În intervalul $(5\pi/6, 2\pi/3)$ funcţia $x = \sin t$ este crescătoare, $\cos t < 0$ şi $\sqrt{1-\cos^2 t} = -\cos t$. Atunci

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int_{5\pi/6}^{2\pi/3} \frac{\cos t\, dt}{\sin t \cos t} = -\int_{5\pi/6}^{2\pi/3} \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t + 1}{\cos t - 1}\right|\Bigg|_{5\pi/6}^{2\pi/3} = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

Integrale definite, mai complexe, pot fi calculate şi prin metoda integrării prin părţi.

Teorema 3. Fie $u: [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $v: [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţii derivabile pe $[a, b]$ cu derivatele $u': [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $v': [a, b] \to \mathbb{R}$ continue pe $[a, b]$. Atunci este adevărată formula

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx, \qquad (3)$$

numită *formula de integrare prin părți*.

Rolul metodei integrării prin părţi este de a reduce integrala complicată $\int_a^b u(x)v'(x)dx$, prin intermediul formulei (3), la integrala $\int_a^b v(x)u'(x)dx$, care se presupune a fi mai uşor de calculat. Formula (3) se aplică la calcularea integralelor de forma $\int_a^b f(x)g(x)dx$, unde $f(x)$ este o funcţie algebrică, iar $g(x)$ este o funcţie transcendentă. Vom alege ca funcţie scrisă sub forma unei derivate întotdeauna acea funcţie care în urma aplicării formulei integrării prin părţi va simplifica calculul integralei.

Concluzii

Dificultăţile majore întâlnite la calcularea integralelor definite sunt:

1. Rezolvitorii nu verifică cu atenţie condiţiile de aplicabilitate a metodelor de integrare.
2. Adesea elevii aplică unele tipuri de substituţii identificate în manuale si culegeri de probleme, fără a ține cont de cerințele metodei.
3. Elevii evită studiul aprofundat al teoriei şi de aici rezultă multe greşeli la calcularea integralelor și la aplicarea formulelor.

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)”, inclus în „Program de stat” (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare.

Bibliografie

1. https://mecc.gov.md/sites/default/files/ghidmatematicaliceu.pdf
2. ACHIRI, I.; CIOBANU, V.; EFROS, M. *Matematică: Manual pentru clasa a XII-a*. Chişinău: Prut Internaţional, 2017. 264 p.
3. *Standarde de eficienţă a învăţării*. Chișinău: Lyceum, 2012. 232 p.
4. ВАВИЛОВ, В.В. и др. *Задачи по математике. Начала анализа*. Москва: Наука, 1990. 607 с.
5. МАРОН, И.А. *Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах*, Москва: Наука, 1970. 400 с.