CZU: 51:629.73

APLICAREA UNOR MODELE MATEMATICE PENTRU VEHICULE AERIENE FĂRĂ PILOT

Dorin AFANAS, doctor, conferenţiar universitar
https://orcid.org/0000-0001-7758-943X
Catedra Algebră, Geometrie și Topologie
Lilia CARCHILAN, master în științe ale educației, lector universitar
https://orcid.org/0000-0001-7864-8868
profesor de informatică grad didactic unu, IPLT „Minerva" mun. Chișinău

Rezumat. Pentru a construi modele matematice aferente vehiculelor aeriene fără pilot sunt necesare cunoștințe profunde din diferite ramuri ale matematicii. În prezentul articol este cercetat aparatul matematic ce ne permite să determinăm traiectoria cea mai scurtă a unor astfel de aparate.
Cuvinte cheie: vehicul aerian fără pilot, traiectorie, programare, funcție, linie frântă.

APPLICATION OF MATHEMATICAL MODELS FOR UNMANNED AIR VEHICLES

Abstract. In order to build mathematical models related to unmanned aerial vehicles, deep knowledge in different branches of mathematics is required. In this article, the mathematical device that allows us to determine the shortest trajectory of such devices is researched.
Keywords: unmanned aerial vehicle, trajectory, programming, function, broken line.

Vehiculele aeriene fără pilot uman la bord, mai ales cele multirotor, motoarele căruia sunt bazate pe consumul energiei electrice, posedă un dezavantaj: sunt limitate de timpul de zbor. Majoritatea dintre ele se pot menține în aer cel mult 30 – 35 minute. Din această cauză este foarte important să cunoaștem cum putem planifica un zbor astfel încât traiectoria dintre punctele A și B să fie cea mai scurtă.

Tema cercetată aici pune în discuție anume problema menționată. Sunt prezentate diferite metode matematice de determinare a celei mai scurte traiectorii a unui vehicul aerian fără pilot uman la bord. În dependență de metoda aplicată, vor fi necesare cunoștințe din matematica superioară sau din matematica elementară.

Activitățile realizate în cadrul acestei teme facilitează conștientizarea aplicațiilor instrumentelor matematice la rezolvarea problemelor cu conținut cotidian atât la nivel gimnazial, liceal cât și la nivel de facultate.

Pentru a rezolva astfel de probleme studenții trebuie să posede următoarele cunoștințe și competențe din cadrul temelor:

- Teoria funcțiilor de mai multe variabile.
- Derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale funcțiilor de mai multe variabile.
- Algoritmul determinării extremelor funcțiilor de două variabile.
- Sistemul rectangular cartezian de coordonate în spațiu.

- Formula distanței dintre două puncte în spațiu.
- Ecuațiile dreptei în spațiu.
- Ecuațiile planului.
- Triunghiul dreptunghic.
- Teorema lui Pitagora.
- Rezolvarea triunghiurilor.

Se încep activitățile cu rezolvarea problemei de tipul: dependența funcțională $f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha}$ ne caracterizează traiectoria matematică specifică a unui vehicul aerian fără pilot uman la bord din punctul A în punctul B, dependența funcțională $g(y) = \sqrt{y^2 + \beta}$ – din punctul B în punctul C și dependența funcțională $\varphi(z) = \sqrt{z^2 + \gamma}$ – din punctul C în punctul D.

Determinați:

a) traiectoria cea mai scurtă dintre punctele A și D, dacă variabilele x, y și z trebuie să satisfacă ecuației planului $ax + by + cz = \delta$;
b) expresia analitică în coordonate rectangulare carteziene a traiectoriei vehiculului aerian fără pilot uman la bord ce conține punctele A, B, C și D;
c) expresiile parametrice ale traiectoriei vehiculului aerian fără pilot uman la bord ce conține punctele A, B, C și D;
d) valorile parametrului t pentru fiecare dintre punctele A, B, C și D.

După realizarea acestor activități, problema de mai sus poate fi modificată propunându-se și rezolvându-se probleme cu un grad sporit de dificultate, în care obținem nu triunghiuri dreptunghice, dar triunghiuri arbitrare.

Problemă. Dependența funcțională $T(x) = \sqrt{x^2 + 1600}$ ne caracterizează traiectoria matematică a unui vehicul aerian fără pilot dintre punctele O și A, $T(y) = \sqrt{y^2 + 6400}$ – dintre punctele A și B, iar $T(z) = \sqrt{z^2 + 14400}$ – dintre punctele B și C.

Determinați:

a) traiectoria cea mai scurtă dintre punctele O și C, dacă variabilele x, y și z trebuie să satisfacă ecuația planului $x + y + z = 180$;
b) expresia analitică în coordonate rectangulare carteziene a celei mai scurte traiectorii a vehiculului aerian într-un plan paralel cu planul (xOy);
c) expresiile parametrice ale celei mai scurte traiectorii a vehiculului aerian;
d) valorile parametrului t pentru fiecare dintre punctele O, A, B și C.

După obținerea rezultatelor matematice:

e) programați în limbajul Scratch cu ajutorul blocurilor traiectoria vehiculului aerian;
f) realizați zborul la un simulator specializat conform traiectoriei programate;
g) realizați un zbor real cu un vehicul aerian educațional conform traiectoriei programate.

Rezolvare. Din condițiile problemei rezultă că traiectoria cea mai scurtă dintre punctele O și C va fi egală cu suma lungimilor traiectoriilor OA, AB și BC, adică $OC = OA + AB + BC$.

Pentru determinarea celei mai scurte traiectorii a vehiculului aerian dintre punctele O și C vom prezenta două metode [1].

<u>Metoda 1.</u> Această metodă poate fi prezentată studenților care sunt cunoscuți cu teoria funcțiilor de mai multe variabile și extremele lor.

Pentru determinarea celei mai scurte traiectorii trebuie să cercetăm la extrem funcția de trei variabile $f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + 1600} + \sqrt{y^2 + 6400} + \sqrt{z^2 + 14400}$, unde $x + y + z = 180$, adică trebuie să determinăm minimul ei. Această metodă ne conduce la calcule destul de voluminoase care sunt reflectate în continuare.

Deoarece $z = 180 - x - y$, atunci obținem funcția de două variabile:

$$f(x; y) = \sqrt{x^2 + 1600} + \sqrt{y^2 + 6400} + \sqrt{(180 - x - y)^2 + 14400}.$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale acestei funcții sunt:

$$f_x^/(x; y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1600}} - \frac{180 - x - y}{\sqrt{(180 - x - y)^2 + 14400}},$$

$$f_y^/(x; y) = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 6400}} - \frac{180 - x - y}{\sqrt{(180 - x - y)^2 + 14400}}.$$

Egalând aceste derivate cu zero: $f_x^/(x; y) = f_y^/(x; y) = 0$, vom primi

$x\sqrt{y^2 + 6400} = y\sqrt{x^2 + 1600}$, $x^2y^2 + 6400x^2 = x^2y^2 + 1600y^2$, $y^2 = 4x^2$, $y = \pm 2x$.

Admitem că $y = 2x$. Atunci obținem ecuația

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1600}} - \frac{180 - 3x}{\sqrt{(180 - 3x)^2 + 14400}} = 0,$$

ce admite unica soluție $x = 30$. Dar atunci $y = 60$ și $z = 90$. Deci un punct staționar are coordonatele: (30; 60; 90).

Admitem acum $y = -2x$. Atunci primim ecuația:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1600}} - \frac{180 + x}{\sqrt{(180 + x)^2 + 14400}} = 0,$$

de unde rezultă ecuația pătrată:

$$x^2 - 45x - 4050 = 0,$$

care admite soluțiile: $x_1 = -45$ şi $x_2 = 90$. Dar atunci

$$y_1 = 90 \text{ şi } y_2 = -180, \text{ iar } z_1 = 135 \text{ şi } z_2 = 270.$$

Astfel am obținut trei puncte staționare:

(30; 60; 90), (–45; 90; 135) şi (90; – 180; 270).

Aflăm valorile funcției $f(x; y; z)$ în punctele staționare:

$$f(30; 60; 90) = \sqrt{900 + 1600} + \sqrt{3600 + 6400} + \sqrt{8100 + 14400} =$$
$$\sqrt{2500} + \sqrt{10000} + \sqrt{22500} = 50 + 100 + 150 = 300;$$

$$f(-45; 90; 135) = \sqrt{2025 + 1600} + \sqrt{8100 + 6400} + \sqrt{18225 + 14400} =$$
$$= \sqrt{3625} + \sqrt{14500} + \sqrt{32625} = 30\sqrt{145} \approx 361{,}25;$$

$$f(90;\ -180;270) = \sqrt{8100+1600} + \sqrt{32400+6400} + \sqrt{72900+14400} =$$
$$= \sqrt{9700} + \sqrt{38800} + \sqrt{87300} = 60\sqrt{97} \approx 590{,}93.$$

Astfel studenții ajung la concluzia că traiectoria cea mai scurtă dintre punctele *O* și *C* va fi egală cu 300, deoarece valoarea cea mai mică a funcţiei cercetate este egală cu 300.

Pentru determinarea celei mai scurte traiectorii a vehiculului aerian dintre punctele *O* și *C* putem indica o altă metodă care nu necesită cunoștințe din domeniul matematicii superioare și deci o astfel de problemă poate fi rezolvată cu elevii din ciclul gimnazial.

<u>Metoda 2.</u> Această metodă se bazează pe ilustrații geometrice, triunghiul dreptunghic și teorema lui Pitagora.

Cercetăm figura 1. Traiectoria vehiculului aerian va fi cea mai scurtă atunci când lungimea liniei frânte *OABC* va avea lungimea cea mai mică.

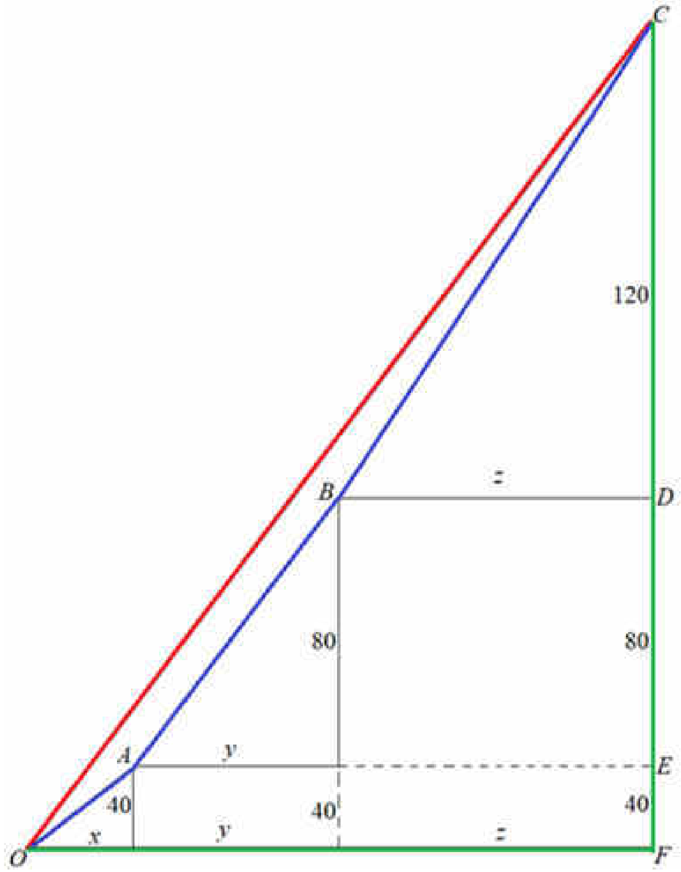

Figura 1.

Aceasta este posibil numai atunci când punctele *O*, *A*, *B* și *C* vor fi situate pe una și aceeași dreaptă, adică lungimea cea mai mică trebuie să fie lungimea segmentului *OC*, care este ipotenuza triunghiului dreptunghic *OFC*. Deoarece catetele triunghiului dreptunghic sunt 180 şi 240, rezultă că *OC* = 300.

b) Pentru a determina expresia analitică în coordonate rectangulare carteziene a traiectoriei vehiculului aerian fixăm un sistem rectangular cartezian de coordonate cu originea în punctul *O* (vezi fig. 2). Direcțiile pozitive ale axelor (*Ox*) și (*Oy*) le alegem așa cum este indicat în figura 2.

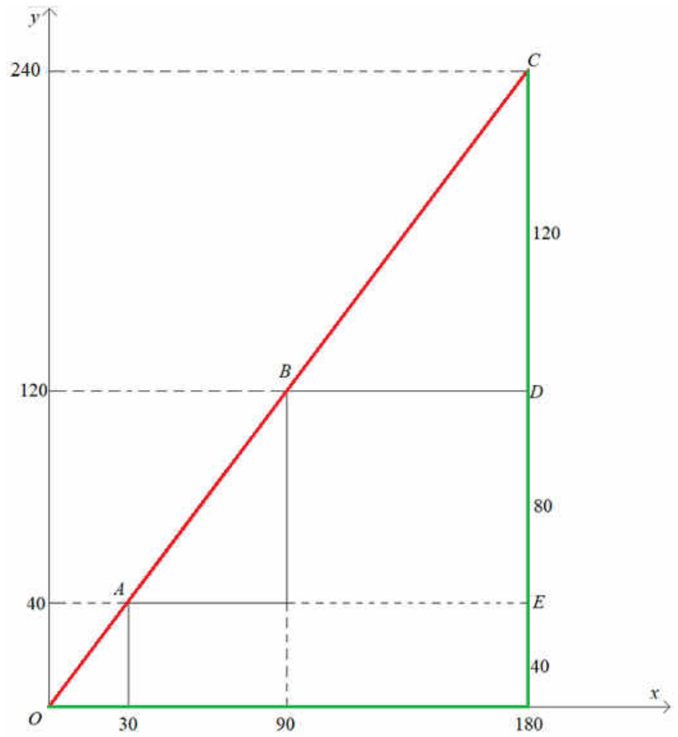

Figura 2.

Notăm $O(x_0;\ y_0)$ $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$ și $C(x_C;\ y_C)$. Deoarece punctul O este originea sistemului rectangular cartezian de coordonate, rezultă că $O(0;\ 0)$. Conform rezultatelor obținute mai sus rezultă că prima coordonată a punctului A este 30. Din egalitatea $AB = \sqrt{x^2 + 1600}$, formula distanței

$$OA = \sqrt{(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2} = \sqrt{(30 - 0)^2 + (40 - 0)^2},$$

modul cum a fost ales sistemul rectangular cartezian de coordonate, din considerente practice și de securitate a realizării unui zbor cu vehiculul aerian, respectând legislația Republicii Moldova în vigoare, tragem concluzia că a doua coordonată a punctului A este 40. Deci punctul A are coordonatele (30; 40). În mod analog obținem: $B(90;\ 120)$ și $C(180;\ 240)$.

Deoarece traiectoria vehiculului aerian reprezintă o dreaptă, iar dreapta se determină în mod univoc de orice două puncte distincte ale ei, atunci alegem, de exemplu, punctele O și A cu ajutorul cărora determinăm ecuația ei în coordonate rectangulare carteziene:

$$\frac{x - x_0}{x_A - x_0} = \frac{y - y_0}{y_A - y_0}, \qquad \frac{x}{30} = \frac{y}{40}, \qquad 4x - 3y = 0.$$

Dacă substituim coordonatele punctelor B și C în ecuația dreptei obținute, atunci ne putem convinge că ele de asemenea aparțin dreptei $4x - 3y = 0$.

Prin urmare, ecuația traiectoriei vehiculului aerian are forma: $4x - 3y = 0$.

c) Expresiile sau ecuațiile parametrice ale traiectoriei vehiculului aerian ce conține punctele O, A, B și C vor avea forma:

$$\frac{x}{30} = \frac{y}{40} = t, \text{de unde } \begin{cases} x = 3t, \\ y = 4t. \end{cases}$$

d) Valorile parametrului t pentru fiecare dintre punctele O, A, B și C le aflăm substituind coordonatele punctelor respective în ecuațiile parametrice ale traiectoriei.

Astfel, pentru punctul $O(0;\ 0)$ avem $t = 0$, pentru punctul $A(30;\ 40)$ valoarea parametrului $t = 10$, pentru punctul $B(90;\ 120)$ obținem $t = 30$, iar pentru punctul $C(180;\ 240)$ parametrul $t = 60$.

După obținerea rezultatelor matematice continuăm cu activitatea de programare a zborului.

e) Programul pentru realizarea zborului vehiculului aerian fără pilot uman la bord în limbajul Scratch prin intermediul blocurilor este prezentat în figura 3.

Figura 3. Programul pentru realizarea zborului

Din considerente de securitate și comoditate zborul se va realiza în planul ce se determină de ecuația $4x - 3y + z = 90$. Realizarea zborului în acest plan și în localul respectiv nu necesită acordul autorităților respective.

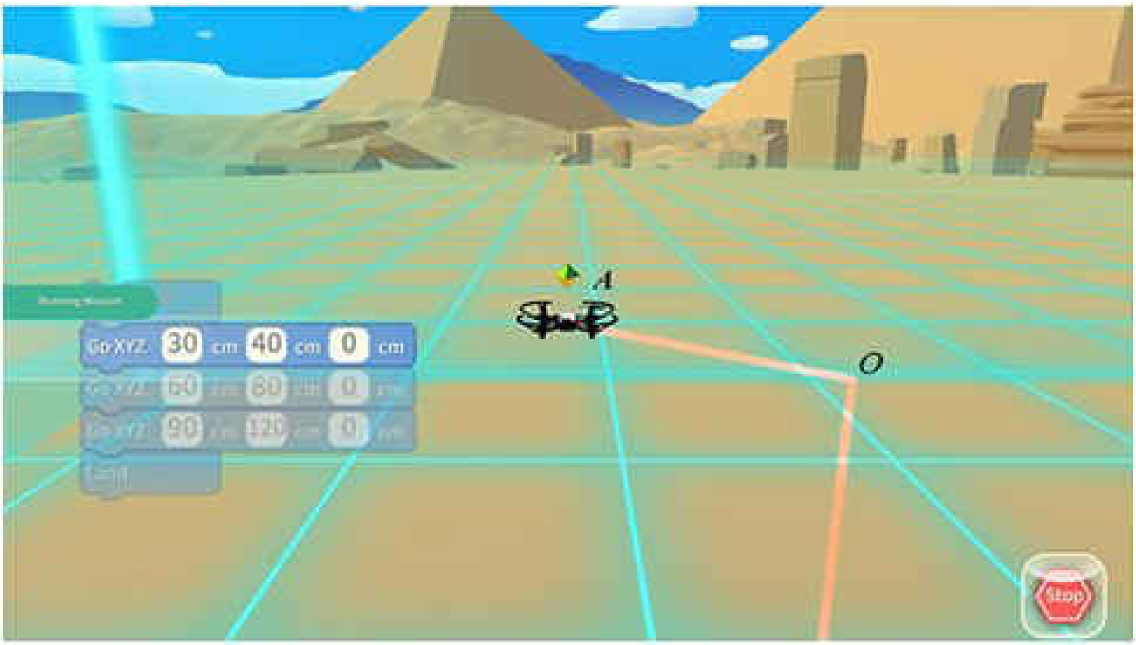

Figura 4. Traiectoria vehiculului aerian fără pilot din punctul *O* în punctul *A*

După ce a fost programată traiectoria vehiculului aerian fără pilot uman la bord, studenții vor fi capabili să modeleze un zbor atât la un simulator specializat cât și să realizeze un zbor cu un vehicul aerian real printr-o singură apăsare pe butonul respectiv.

În figurile 4 – 6 este prezentată traiectoria vehiculului aerian, la un simulator, ce conține punctele O, A, B și C.

Figura 5. Traiectoria vehiculului aerian fără pilot din punctul *A* în punctul *B*

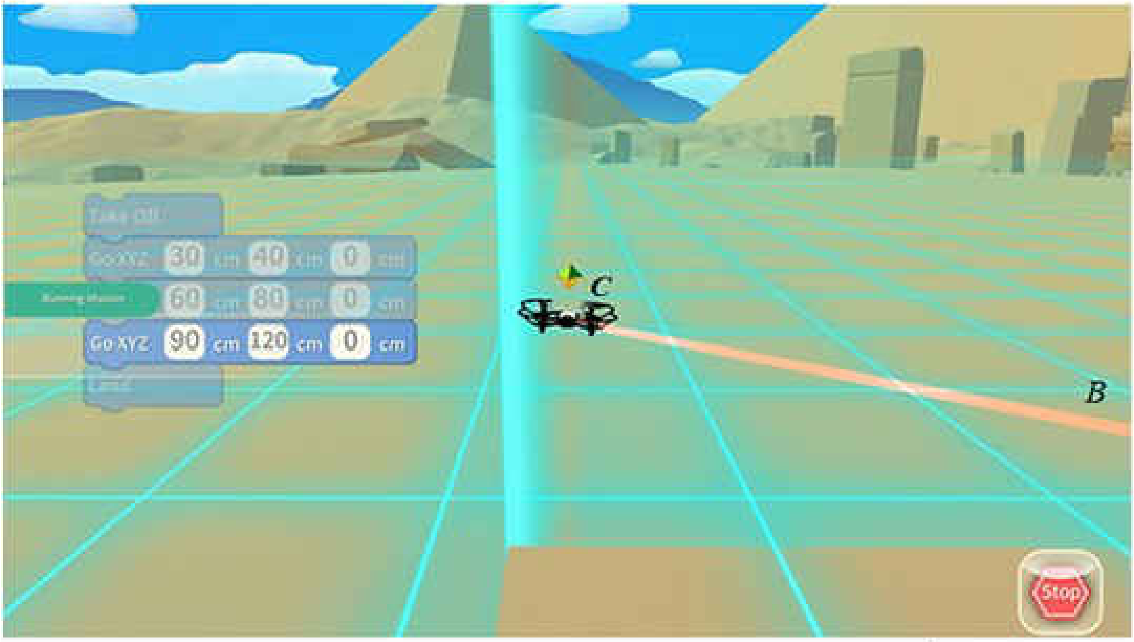

Figura 6. Traiectoria vehiculului aerian fără pilot din punctul *B* în punctul *C*

Evident, cadrul didactic poate modifica această problemă cerînd, de exemplu, să fie determinate toate traiectoriile posibile ale vehiculului aerian fără pilot aferente punctelor staționare ale funcției de trei variabile

$$f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + 1600} + \sqrt{y^2 + 6400} + \sqrt{z^2 + 14400},$$

unde $x + y + z = 180$ și pentru traiectoriile obținute studenții să:

f) scrie programul în limbajul Scratch cu ajutorul blocurilor;

g) realizeze zborul la un simulator specializat;

h) realizeze zborul cu un vehicul aerian real.

În asemenea caz pentru punctul staționar cu coordonatele (–45; 90; 135), prin modelare, vom obține că traiectoria vehiculului aerian trece prin punctele $O(0; 0)$, $A_1(-45; 40)$, $B_1(90; 80)$ și $C_1(135; 120)$.

Observăm că punctele O, B_1 și C_1 aparțin dreptei $8x - 9y = 0$, iar punctul A_1 nu aparține dreptei date (fig. 7).

Însă punctele $O(0; 0; 90)$, $A_1(-45; 40; 90)$, $B_1(90; 80; 90)$ și $C_1(135; 120; 90)$ aparțin planului $z = 90$. Prin urmare, zborul îl putem realiza în planul ce se determină de ecuația $z = 90$. Traiectoria matematică a vehiculului aerian fără pilot este prezentată în figura 7.

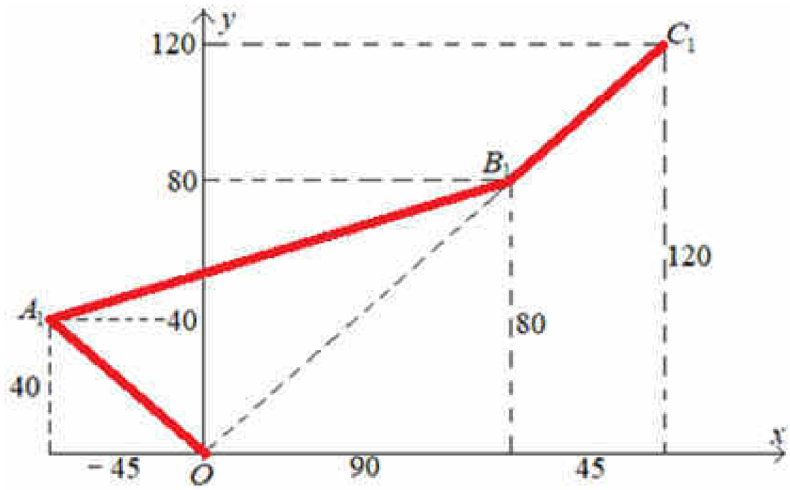

Figura 7. Traiectoria matematică a vehiculului aerian fără pilot pentru punctul staționar (-45; 90; 135)

Programul pentru realizarea zborului vehiculului aerian fără pilot în limbajul Scratch prin intermediul blocurilor este prezentat în figura 8.

Pentru punctul staționar cu coordonatele (90; –180; 270) – traiectoria vehiculului aerian de asemenea este o linie frântă și trece prin punctele: $O(0; 0)$, $A_2(90; 40)$, $B_2(-180; 80)$ și $C_2(270; 120)$. Observăm că punctele O, A_2 și C_2 aparțin dreptei $4x - 9y = 0$, iar punctul B_2 nu aparține dreptei date. Însă punctele $O(0; 0; 90)$, $A_2(90; 40; 90)$, $B_2(-180; 80; 90)$ și $C_2(270; 120; 90)$ aparțin planului $z = 90$. Prin urmare, zborul îl putem realiza de asemenea în planul ce se determină de ecuația $z = 90$. Traiectoria matematică a vehiculului aerian este prezentată în figura 9.

Figura 8. Programul pentru realizarea zborului aferent punctului staționar (-45; 90; 135)

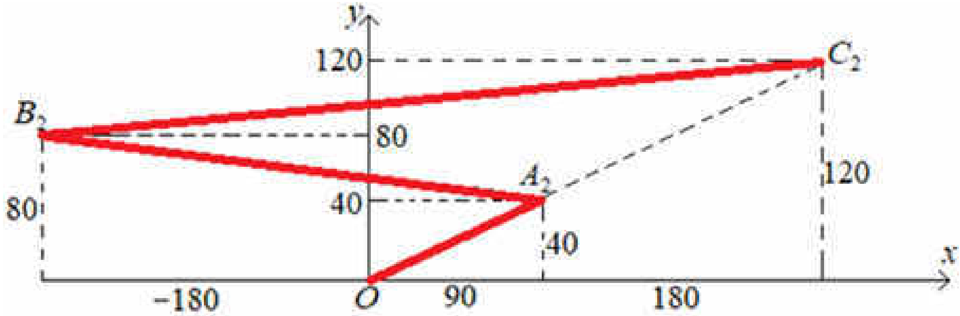

Figura 9. Traiectoria matematică a vehiculului aerian fără pilot pentru punctul staționar (90; -180; 270)

Figura 10. Programul pentru realizarea zborului aferent punctului staționar (90; -180; 270)

Programul pentru realizarea zborului vehiculului aerian în limbajul Scratch prin intermediul blocurilor este prezentat în figura 10.

Pentru consolidarea cunoștințelor și formarea competențelor de rezolvare a problemelor de tipul celei de mai sus prin metoda nonstandardă pot fi rezolvate și alte probleme, generalizându-le până la triunghiuri arbitrare.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. CALMUȚCHI, Laurențiu; AFANAS, Dorin; CIOBAN, Mitrofan. Geometrie analitică în spațiu. Chișinău: Univ. de Stat din Tiraspol, Catedra Algebră, Geometrie și Topologie, 2014, 210 p. ISBN 978–9975–76–118–5.