CZU: 37.016 :511.178

VALORIFICAREA CONTEXTELOR DE COMBINATORICĂ ÎN ABORDAREA STEAM

Marcel TELEUCA, dr., conf. univ.
Larisa SALI, dr., conf. univ.
Universitatea de Stat din Tiraspol, Republica Moldova

Rezumat. Articolul vizează aspecte ale utilizării diferitor strategii de rezolvare a problemelor de combinatorică care presupun organizarea învăţării integrate, fundamentate interdisciplinar şi transdisciplinar. Realizarea de conexiuni cognitive la nivelul disciplinei Matematica, cel al ariei curriculare Matematica și Științe și inter-arii este actuală în abordarea STEM/STEAM. Subiectele vizate în problemele de combinatorică elementară pot servi canava pentru designul diferitor situații multifactoriale și flexibile, de învățare interactivă în cheia conceptului STEAM la toate treptele și nivelele de instruire. Abordarea teoretico-metodologică axată pe concepția rezultantei contribuie la asigurarea condiţiilor motivaţionale de implementare şi dezvoltare a curriculumului şcolar.

Summary. The article focuses on aspects of using different strategies to solve combinatorics problems that involve the organization of integrated learning, based on interdisciplinary and transdisciplinary. The realization of cognitive connections at the level of the Mathematics discipline, that of the Mathematics and Sciences and inter-areas curricular area is a current one in the STEM / STEAM approach. Topics in elementary combinatorics can serve as a framework for the design of different interactive, multifactorial and flexible learning situations, at the heart of the STEAM concept at all levels and levels of training. The theoretical-methodological approach focused on the conception of the resultant contributes to ensuring the motivational conditions for implementation and development of the school curriculum.

Cuvinte cheie: combinatorică, concepția rezultantei, elevi dotați, strategie didactică.
Keywords: combinatorics, conception of the result, gifted students, didactic strategy.

Introducere

Matematica furnizează ştiinţelor naturii modele de raționamente coerente și clare, având o poziţie excepţională între ştiinţe prin faptul că este o construcție axiomatică consistentă, bazată pe o logică impecabilă. Tratarea riguros matematică a teoriilor din diverse domenii este indubitabil necesară şi se realizează ori de câte ori e posibil. Mai mult decât atât, matematica tinde să devină un mijloc de comunicare între oamenii de ştiinţă. Ca rezultat, dacă o anumită ramură a ştiinţei este prezentată în formă riguros matematică, eleganța și accesibilitatea ei sporesc. Problema dezvoltării capacității de a emite judecăți de valoare pentru rezolvarea problemelor în mod inventiv și euristic, de a face conexiuni cognitive la nivelul disciplinei, a ariei curriculare și inter-arii este una actuală în abordarea STEM/STEAM. Abordarea reflectă specificul activității intelectuale matematice la nivel de performanțe superioare, prin focalizarea atenției spre problemele de tip euristic creative și aplicative, în scopul formării unei imagini de ansamblu asupra științei ca sistem în permanentă evoluție și interacțiune cu mediul înconjurător.

Combinatorica este un compartiment al matematicii care vizează problemele de numărare atât ca mijloc cât și ca scop al studierii proprietăților unor structuri. Ea este o parte componentă a teoriei mulțimilor finite.

Combinatorica are aplicații în contexte largi, traversează o multitudine de capitole și se aplică în diverse domenii, precum logica, informatica, fizica, biologia, chimia etc.

Tipurile de probleme de combinatorică sunt variate, enunțurile referindu-se la stabilirea prin enumerare (numărare): a unor structuri specifice, ordonări, configurații; a existenței diferitor tipuri de structuri cu proprietăți predefinite; a construcției unor structuri specifice și identificarea versiunii optime a acestora.

1. Strategii didactice de soluționare a problemelor de combinatorică

Crearea contextelor și a strategiilor didactice pentru abordarea STEAM corelează cu *concepția rezultantei* (efectului îmbinat al unor cauze multiple), potrivit căreia dezvoltarea psihică generală, dar și dezvoltarea oricăror facultăți mintale particulare, inclusiv a celor matematice, este *rezultatul interacțiunii active multifactoriale flexibile permanente a individului și/sau grupului la acea sau altă vârstă a dezvoltării ontogenetice în cadrul activității, comunicării și comportamentului.* Această concepție este o continuare și o variantă desăvârșită a *concepției acțional-sistemice*, elaborată și demonstrată în contextul studiului teoretico-experimental al genezei negării și afirmării la copii, preadolescenți, adolescenți și adulți [4, 13].

Subiectele vizate în problemele de combinatorică elementară pot servi canava pentru designul diferitor situații multifactoriale și flexibile, de învățare interactivă în cheia conceptului STEAM. Elementele de combinatorică apar încă la formarea reprezentărilor matematice elementare în educația timpurie. Examinarea elementelor de combinatorică în cheia conceptului STEAM va presupune dezvăluirea a diverse scheme și „îmbrăcarea” lor în contexte care asigură respectarea principiilor variabilității matematice și cel al variabilității perceptuale.

Care ar fi schemele utile? Rezolvarea problemelor de combinatorică se bazează pe câteva strategii interconectate cu domeniul algoritmilor.

În lucrarea [14, p.28] este menționat că soluționarea problemelor de combinatorică se poate face în câteva niveluri. Nivelul începător constă în găsirea a cel puțin unei distribuiri a obiectelor, care posedă proprietatea din enunț. Dacă problema are mai multe soluții, apare întrebarea privind determinarea numărului acestora. Adesea în problemele de combinatorică soluțiile diferă prin careva parametri. În acest caz apare întrebarea aflării soluției optime. Autorii se referă doar la problema determinării numărului de soluții în problemele de combinatorică, accentuând importanța înțelegerii deosebirii dintre noțiunea de mulțime și cortegiu (șir, mulțime ordonată) din n elemente.

Formulele aplicate în acest manual apar în următoarea succesiune: aranjamente cu repetiții; numărul de aplicații ale unei mulțimi de n elemente într-o mulțime de m elemente; regula generalizată a produsului; aranjamente fără repetiții; permutări; combinări fără repetiții; permutări cu repetiții; combinări cu repetiții; regula sumei; îmbinări sumă-produs.

O clasificare nestrictă a problemelor elementare de combinatorică, în opinia noastră, poate fi realizată ținând cont de formula utilizată la rezolvare (Figura 1.1).

Figura 1.1. Modalitate de clasificare a problemelor de combinatorică după formula utilizată

Cea mai generală strategie împrumutată din domeniul algoritmilor este considerată „împarte și cucerește”, care constă în divizarea unei probleme într-o serie de probleme mai mici, soluționarea acestor porțiuni și combinarea ulterioară a rezultatelor obținute într-o soluție pentru întreaga problemă [3]. Strategia reunește: regula sumei, regula produsului, regula sumei-produs, cernerea (ciuruirea), construirea grafului, recursivitatea, numărarea prin bijecții, numărarea în două moduri ș.a.

Schema din Figura 1.2 poate servi la soluționarea problemelor elementare de numărare prin metoda probelor.

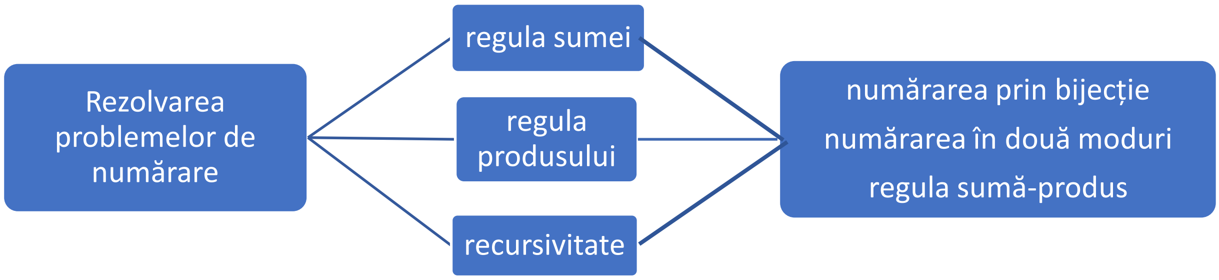

Figura 1.2. Reguli de rezolvare a problemelor de numărare

Enunțăm mai jos procedeele evidențiate în Figura 1.2 în diverse formulări.

Regula sumei:

1. Dacă o procedură se poate efectua în două feluri, pentru primul fel sunt n_1 variante, pentru al doilea fel sunt n_2 variante şi nici una din variantele de primul fel nu coincide cu vreo variantă de felul al doilea, atunci există n_1+n_2 variante de a efectua procedura [18].
2. Dacă obiectul *A* poate fi ales în *m* feluri, iar obiectul *B* poate fi ales în *n* feluri, atunci alegerea „sau a obiectului A, sau a obiectului B” poate fi realizată în *m*+*n* feluri.

Observație. Trebuie să urmărim ca nici unul dintre obiecte să nu nimerească în ambele clase din care se iau, respectiv, obiectele *A* și *B*. În cazul când aceste clase au *k* elemente comune, atunci alegerea „sau a obiectului *A* sau a obiectului *B*” poate fi realizată în *m*+*n*-*k* feluri [16].

Regula generalizată a sumei:

Presupunem că o procedură poate fi efectuată în *m* feluri, pentru felul i sunt n_i variante ($i = \overline{1, m}$), şi variantele efectuate în feluri diferite sunt diferite. Atunci există $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m$ variante de a efectua procedura respectivă [18].

Regula produsului:

1. Dacă o procedură poate fi descompusă în o secvenţă de două proceduri astfel încât prima se poate efectua în n_1 feluri, iar a doua se poate efectua în n_2 feluri, atunci există $n_1 n_2$ feluri de a efectua acea procedură [18].
2. Dacă elementul x poate fi ales dintr-o mulțime din n_1 elemente, iar elementul y poate fi ales dintr-o mulțime din n_2 elemente, atunci există $n_1 n_2$ feluri de a forma perechea ordonată (x, y). [14]
3. Dacă obiectul *A* poate fi a ales în *m* feluri, iar obiectul *B* poate fi ales în *n* feluri, atunci alegerea perechii ordonate (*A*,*B*) poate fi realizată în *mn* feluri.

Regula generalizată a produsului:

1. Dacă o procedură poate fi descompusă în o secvenţă de *m* proceduri astfel încât prima se poate efectua în n_1 feluri, a doua se poate efectua în n_2 feluri, . . ., a *m*-a se poate efectua în n_m feluri, atunci există $n_1 n_2 \dots n_m$ feluri de a efectua acea procedură [18].
2. Dacă elementul x_1 poate fi ales dintr-o mulțime de n_1 elemente, iar elementul x_2 poate fi ales dintr-o mulțime de n_2 elemente, ... x_m poate fi ales dintr-o mulțime de n_m elemente, atunci există $n_1 n_2 \dots n_m$ feluri de a forma mulțimea ordonată (cortegiul) $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$ [14].

Artur Enghel are următoarea abordare [3, p. 111].

Fie dată mulțimea A și $|A|$ este numărul elementelor ei. Un șir de r elemente din A se numește un $r - cuv\hat{a}nt$ din alfabetul A. În combinatorica enumerativă se realizează numărarea cuvintelor ce au o anumită proprietate.

Regula sumei

Dacă $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r$ este o partiție a lui A în r submulțimi (blocuri, părți), atunci $|A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_r|$. Aplicând această regulă la rezolvarea problemelor, se încearcă a împărți A în n părți A_i pentru care numărarea elementelor este mai simplă.

Regula produsului

Mulțimea W este formată din cuvinte de lungimea r din alfabetul A. Dacă există n_i posibilități de alegere pentru litera de pe locul *i*, independente de alegerile literelor anterioare, atunci $|W| = n_1 n_2 \dots n_r$.

Recursivitatea

O problemă este împărțită în mai multe părți care prezintă *copii mai mici ale problemei inițiale*, iar acestea din urmă sunt din nou împărțite în copii mai mici, ..., până când problema devine banală. La final, problemele parțiale sunt combinate pentru a genera soluția întregii probleme.

Regula sumă-produs constă în înmulțirea de-a lungul drumurilor și adunarea produselor obținute. Aici, obiectele ce trebuie numărate sunt văzute ca drumuri (orientate) într-un graf.

Aplicând creativ principiul „împarte și cucerește” sintetizăm noi metode: numărarea aceleiași mulțimi de elemente în două moduri diferite; numărarea prin bijecții **(**Dintre două mulțimi A și B cunoaștem $|B|$, dar $|A|$ nu este cunoscut. Dacă reușim să construim o bijecție $A \to B$, atunci $|A| = |B|$. Uneori, bijecția poate asocia grupuri de p elemente cu grupuri de q elemente).

2. Abordări didactice intra- și inter- arii curriculare la studierea elementelor de combinatorică

Abordarea STEAM se potriveşte cu implementarea metodei proiectului care în secolul al XXI-lea este susținută la nivel conceptual, normativ şi metodologic.

O sinteză a acestei metode este realizată de S. Cristea [1, p. 57-60]. Metoda proiectului la nivel conceptual reprezintă o „strategie de instruire centrată pe acţiunea de învăţare/auto-învăţare a elevilor, realizată prin valorificarea cunoştinţelor şi abilităţilor, interiorizate deja sau dobândite pe parcurs, „lucrând mai mult timp – în context formal şi, mai ales, non-formal – pentru a explora şi a găsi un răspuns la o întrebare, o problemă sau o provocare complexă”.

În plan normativ, ”este metoda de instruire prin care profesorii îi ghidează pe elevi printr-un proces de rezolvare de probleme”.

În plan metodologic, proiectul promovează acţiunea de învăţare „focalizată pe elev, inspirată de constructivism, ce constă în investigaţia aprofundată (individuală, în grupuri mici sau mari) a unei teme sau probleme, abordată pedagogic, ce captează interesul, energia şi timpul elevilor, în care se evaluează deopotrivă procesul şi produsele”, susţinute cognitiv (în special prin valorificarea gândirii), non-cognitiv (prin afectivitate pozitivă şi motivaţie internă) şi „sociointeracţional” (prin perfecţionarea corelaţiei dintre profesor, elevi, comunitate şcolară, educaţională, locală etc.).

Metoda proiectului este analizată în cadrul teoriei generale a instruirii cu deschideri multiple spre didacticele particulare la nivel de: metodă didactică bazată pe acţiune; model de abordare a instruirii la nivel de „învăţare integrată” fundamentată interdisciplinar şi transdisciplinar.

Problemele de combinatorică se referă la analiza numerică a diverselor fenomene ale naturii, sociale, economice etc. Problema cuantificării fenomenelor este o problemă de bază a ştiinţelor. Analiza combinatorică poate fi utilizată pentru a stabili corelaţiile între fenomene. Din aceste contexte va fi formulată tematica unor proiecte în cheia abordării STEM/STEAM.

Problemele de matematică care vizează utilizarea elementelor de combinatorică oferă scheme, structuri pentru compunerea de probleme pentru toate treptele și disciplinele de studii. Testarea soluțiilor acestor probleme pe cazuri particulare, cu numere mici, se pretează la dezvoltarea operațiilor gândirii: inducție, deducție, generalizare, particularizare, individualizare. Problemele au drept subiect mulțimile și operațiile cu ele, relațiile de incluziune și egalitate între mulțimi, legi de compoziție pe mulțimi, structuri algebrice, aplicații, funcții, transformări geometrice etc. [5, 6, 7, 8, 9, 12, 15]. Exemplele următoare sunt unele dintre cele mai elementare și poartă un caracter pur matematic.

Exemplul 1. Numărul de submulţimi ale unei mulţimi finite $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ este 2^n. Demonstrația acestui fapt poate fi realizată prin diverse metode, aplicând metodele și regulile specifice. Unele cazuri particulare vor fi rezolvate în continuare pe modele concrete.

Exemplul 2. Câte funcţii sunt de la o mulţime $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ cu m elemente la o mulţime $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ cu n elemente?

Fie $f: \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \to \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Definirea unei astfel de funcţii poate fi descompusă în m etape independente: în etapa i se fixează valoarea lui $f(a_i)$. Etapa i are n posibilităţi, deoarece putem alege pentru $f(a_i)$ orice valoare din mulţimea $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, atunci conform regulii produsului, numărul de funcţii este $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{de\ m\ ori} = n^m$.

Exemplul 3. Câte funcţii injective sunt de la o mulţime $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ cu m elemente la o mulţime $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ cu n elemente?

Fie $f: \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \to \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Observăm că este necesar ca $n \geq m$. Valoarea lui $f(a_1)$ poate fi aleasă în n moduri din mulțimea $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Valoarea lui $f(a_2)$ poate fi aleasă în $n - 1$ moduri din mulțimea $B \setminus \{f(a_1)\}$. Prin analogie fiecare valoare următoare $f(a_i)$ poate fi aleasă în $n - (i - 1)$ moduri din mulțimea $B \setminus \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{i-1})\}$. Atunci conform regulii produsului, numărul de funcţii injective este: $n(n - 1)(n - 2) \dots (n - m + 1)$.

În continuare propunem câteva exemple de aplicare a elementelor de combinatorică în contexte ale științelor naturii, informatică, arte ș.a., care pot servi la formularea tematicii unor proiecte în cazul abordării instruirii la nivel de „învăţare integrată" fundamentată interdisciplinar şi transdisciplinar.

Științe ale naturii

Exemplul 4. Un fermier trebuie să aleagă pentru terenul său câte un soi din 3 liste de soiuri de plante. Prima listă conţine 9 tipuri de plante medicinale, a doua – 8 tipuri de plante melifere, iar a treia 12 tipuri de plante ornamentale. Nici o plantă nu este prezentă în două liste diferite. Câte alegeri sunt posibile?

Tipul de plante poate fi ales independent din una din cele 3 liste. Deoarece nici o denumire de plantă nu apare în mai multe liste, putem aplica regula sumei ⇒ 9 + 8 + 12 = 29 posibilităţi.

Exemplul 5. Într-un regat toți oamenii se deosebesc prin setul de dinți pe care îl posedă. Să determinăm care este numărul maxim de cetățeni care pot locui în acest regat.

Numărul maximal posibil de dinți la o persoană adultă poate fi 32. Vom nota cu 0 poziția, dacă dintele lipsește și cu 1 – dacă dintele este prezent pe această poziție. Conform regulii produsului, există $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{de\ 32\ ori} = 2^{32}$ astfel de poziționări.

Exemplul 6. Un fermier trebuie să planteze pe terenul său 3 tipuri de plante medicinale (câte un rând de fiecare tip) din cele 9 tipuri propuse în cadrul unui proiect.

Problema necesită precizări de natură biologică, dacă trebuie să ținem cont de compatibilitatea plantelor, de necesitatea respectării unor restricții privind amplasarea rândurilor de plante. În dependență de aceste condiții, vom folosi diverse formule (aranjamente sau combinări fără repetiții).

Exemplul 7. Avem *n* organisme (natura lor poate fi precizată). Vom stabili în câte feluri poate fi determinat numărul necesar de eprubete pentru a distribui aceste n organisme în toate modurile posibile?

Etichetăm organismele cu numerele $1,2,3, \dots, n$. Prin partiție vom înțelege o modalitate de distribuire (fizică) în eprubete a tuturor organismelor: obținerea unor submulțimi disjuncte a căror reuniune reprezintă toată mulțimea de organisme. Vom include în numărul de partiții și cazul când toate organismele sunt distribuite într-o singură eprubetă. În acest caz vom avea o singură partiție.

Fie P_n numărul de partiții ale $\boldsymbol{n}$-mulțimii $\{1,2,3, \dots, n\}$. Dacă mulțimea este vidă, vom avea o partiție.

Considerăm încă un organism, al $n+1$ – lea și îl includem în una dintre partiții (submulțimi). Presupunem că în acea submulțime erau deja k-organisme. Aceste organisme pot fi alese în C_n^k- moduri. Cele $n-k$ organisme rămase pot fi partiționate în P_{n-k} feluri. Deoarece k poate lua orice valoare de la 0 până la *n*, regula sumă-produs generează recurența: $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, P_{n-k}$.

Cercetând inductiv această situație vom obține: $P_0 = 1$; $P_1 = 1$; $P_2 = 2$; $P_3 = 5$; $P_4 = 15$; $P_5 = 52$; $P_6 = 202$; $P_7 = 877$; $P_8 = 4140$ ș.a.m.d.

Exemplul 8. Un subiect relevant pentru examinare îl constituie descoperirea remarcabilă a secolului XX - descifrarea codului genetic.

Diverse molecule de ADN se deosebesc între ele prin faptul că 4 baze azotate: adenina, timina, guanina și citozina se succed într-o anumită ordine anumită. Aceste baze azotate determină ordinea „asamblării” proteinelor organismelor din cei 20 de aminoacizi standard. Fiecare aminoacid este cifrat cu codul constituit din trei baze azotate. Este ușor de înțeles cum a apărut numărul 3. Doar cu ajutorul „asamblării” a două baze azotate este posibil de cifrat doar 4^2=16 aminoacizi. Dacă s-ar lua câte 3 baze, atunci obținem 4^3=64 de aranjamente distincte cu repetiții. Elevii pot fi provocați să cerceteze cum se utilizează în natură surplusul de informație – doar numărul de aranjamente este egal cu 64, iar numărul de aminoacizi e de trei ori mai mic.

Întru-n cromozom sunt câteva zeci de baze azotate. Numărul de aranjamente cu repetiții în care ele pot fi „asamblate” succesiv este nespus de mare. O parte nesemnificativă de aceste ordonări este suficientă pentru a asigura toată diversitatea naturii vii pe tot parcursul existenței vieții pe Pământ.

Abordarea acestui subiect științific poate servi la derularea unor proiecte de cercetare interdisciplinare matematică-științe ale naturii la diverse niveluri de dificultate.

Arte

Exemplul 9. Un muzeu are 7 săli de expoziție. Muzeul a achiziționat un tablou al pictorului Mihail Grecu (22.11.1916 – 9.04.1998) şi un tablou al pictorului Igor Vieru (23.12.1923-24.05.1988). În câte feluri pot fi expuse aceste tablouri în două săli diferite?

Amplasarea se poate face în 2 moduri distincte: amplasarea tabloului pictorului A, urmată de amplasarea tabloului pictorului B. Există 7 alternative pentru prima operaţie, deoarece în total sunt 7 săli. Există 6 alternative pentru operaţia a doua, deoarece primul tablou a fost amplasat în una dintre cele 7 săli. Conform regulii produsului, sunt $7 \cdot 6 = 42$ variante.

Informatică

Exemplul 10. Câte şiruri diferite de 8 biţi există?

Fiecare din cei 8 biţi poate fi ales în 2 feluri: 0 sau 1.

Conform regulii produsului, există $2^8 = 512$ variante.

Exemplul 11. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ - variabile booleene (care pot primi valorile 0 și 1). Să se afle numărul tuturor combinațiilor posibile ale valorilor variabilelor $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Fiecare variabilă x_i poate primi valorile 0 sau 1.

Această problemă se reduce la stabilirea numărului de şiruri distincte de n biţi. Definirea unui şir de biţi de lungime n se poate descompune în n subprobleme distincte: subproblema i fixează valoarea bitului x_i. Conform regulii produsului, există $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{de\ n\ ori} = 2^n$ astfel de şiruri.

Exemplul 12. Se ştie că o parolă este un şir între 6 şi 8 caractere lungime, şi că fiecare caracter este fie o literă mare sau o cifră zecimală. Fiecare parolă conţine cel puţin o cifră. Câte parole posibile sunt?

Fie P numărul total de parole, şi P_6, P_7 şi P_8 numărul de parole cu lungimea 6, 7, sau 8. Conform regulii sumei, $P = P_6 + P_7 + P_8$. Calculul lui P_m pentru $m \in \{6, 7, 8\}$, se poate face astfel: Fie W_m numărul de şiruri de litere mari şi cifre cu lungimea m. Conform regulii produsului, $W_m = (26 + 10)^m = 36^m$. Fie N_m numărul de şiruri de litere mari cu lungimea m. Conform regulii produsului, $N_m = 26^m$. Se observă uşor că $P_m = W_m - N_m$

Prin urmare, $P = W_6 - N_6 + W_7 - N_7 + W_8 - N_8 = 36^6 - 26^6 + 36^7 - 26^7 + 36^8 - 26^8$.

Fizică, Inginerie

Exemplul 13. Abordarea istorico-genetică a evoluției mijloacelor de comunicație va conține neapărat și familiarizarea cu Alfabetul sau Codul Morse, care a fost folosit pentru a transmite informația prin telegraf. O schemă de codare a caracterelor (litere, cifre, semne de punctuație) ține de cele mai elementare cunoștințe din combinatorică, dar aceasta permitea operatorilor să trimită mesaje folosind o serie de impulsuri electrice scurte sau lungi (puncte și liniuțe în prezentarea grafică). În dependență de direcția de cercetare dorită subiectul poate servi la explorarea epistemologiei unor noțiuni din informatică, ingineria calculatoarelor etc.

Exemplul 14. Se planifică lansarea a $2n$ sateliți în jurul unei planete. Trebuie să fie formate perechi de sateliți ale căror orbite să se intersecteze (evitând ciocnirea). În câte moduri pot fi create aceste perechi?

Vom propune rezolvarea în trei moduri diferite:

1. Fie P_k numărul de perechi posibil a fi create în cazul când avem în $2k$ sateliți. Considerăm un satelit S. Pereche pentru acesta putem alege în $2n-1$ moduri. Atunci mai rămân în $n-1$ perechi, care pot fi create în P_{n-1} moduri. Aplicând recursivitatea și regula produsului obținem:

$$P_n = (2n-1)P_{n-1} = (2n-1)(2n-3)\dots 5\cdot 3\cdot 1 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2n(2n-2)(2n-4)\dots 4\cdot 2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

2. Etichetăm sateliții cu numerele naturale de la 1 la 2n. Putem face aceasta în $(2n)!$ moduri. Considerăm cazul când sateliții sunt aranjați într-un rând conform numărului de ordine și formăm perechile: (1,2), (3,4), ..., (2n-1, 2n). Împerecherea poate fi realizată într-un singur fel. Având în vedere că dacă vom efectua acest procedeu în cele $(2n)!$ moduri de etichetare unele perechi se vor întâlni de mai multe ori, urmează să eliminăm prin împărțire împerecherile care se repetă: ținând cont că putem aranja elementele în fiecare pereche în două moduri și perechile pot fi permutate între ele în $n!$ moduri, vom împărți la numărul $2^n n!$, deci $P_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

3. Vom aplica formula pentru combinări, considerând că perechile sunt alese una câte una. Prima pereche poate fi aleasă în C_{2n}^2, celelalte perechi sunt alese din elementele rămase și atunci numărul de variante posibile se calculează conform regulii produsului: $C_{2n}^2 C_{2n-2}^2 C_{2n-4}^2 \dots C_2^2$. Eliminăm prin împărțire la $n!$ ținând cont de faptul că nu contează ordinea perechilor.

Concluzii

Abordarea STEAM a educației matematice este menită să contribuie la formarea la elevi a valorilor și atitudinilor: formarea obișnuinței de a recurge la concepte și metode matematice în abordarea unor situații cotidiene sau pentru rezolvarea unor probleme în situații reale și/sau modelate; trezirea curiozității și a creativității în elaborarea strategiilor, a problemelor, a planurilor de activitate, în rezolvarea și realizarea acestora; dezvoltarea simțului estetic și critic; dezvoltarea unei gândiri deschise; aprecierea rigorii, a ordinii și a eleganței în arhitectura rezolvării unei probleme, în aplicarea unei metode, a unui algoritm sau a construirii unei teorii; cooperarea în calitate de membru al unui grup [2, p.7].

Compartimentul Combinatorica din cursul de matematică trebuie studiat de elevi fiind încorporat într-o gamă complexă de activități care să aibă rezultat clarificarea diverselor situații cu caracter inter-, intra-, trans-disciplinar.

Concepția rezultantei potrivit căreia dezvoltarea psihică generală, dar și dezvoltarea oricăror facultăți mintale particulare, inclusiv a celor matematice impunea rigoarea pentru crearea la clasă a unui mediu deschis, sigur pentru învăţare și comunicare didactică, manifestarea grijii pentru sporirea atractivităţii învăţării [17].

Articol elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de Stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20.

Bibliografie

1. CRISTEA, S. Învățarea prin proiecte. În Didactica Pro... Revistă de teorie și practică educațională a Centrului Educațional Pro Didactica, Nr.1 (107), 2018, p. 57-60
2. Matematică: Curriculum naţional: Clasele 10-12: Curriculum disciplinar: Ghid de implementare / MECC al RM; coordonatori: A. Cutasevici, V. Crudu, V. Ceapa; grupul de lucru: I. Achiri (coordonator) [et al.]. Chişinău: Lyceum, 2020. 192 p.
3. ENGHEL, A. Probleme de mathematică. Strategii de rezolvare. GIL 2006. 464 p.
4. JELESCU, P. Geneza negării la copii în perioada preverbală. Studiu teoretico-experimental. Chișinău: Editura Museum, 1999. 248 p.
5. LUPU, I., POȘTARU, A. Metodologia studierii combinatoricii și a binomului lui Newton. Ed. Prut Internațional, 2007.
6. LUPU, I.; SALI, L.; Teleucă, M. Utilizarea softurilor educaționale la studierea elementelor de combinatorică. În: *International Conference on mathematics, informatics and information technologies: dedicated to the ilustrious scientist Valentin Belousov*, Communcations. April 19-21, 2018, Bălți.
7. POP, V.; TELEUCĂ, M. Probleme de combinatorică elementară. Numărare, grafuri, jocuri. Biblioteca Societății de Științe Matematice din România. Matrixrom, 2013. 185 p.
8. POP, V.; TELEUCA, M. Matematici discrete. Combinatorica – Jocuri - Grafuri, Societatea Matematica Romaneasca. Bucuresti, Romania, 2012. 225 pag.
9. TELEUCĂ, M.; LUPU, I.; SALI, L. Didactical aspects of the organization of investigational activities in mathematics. În: *The 20th CAIM dedicated to academician Mitrofan M. Ciobanu*. Ch., August, 22-25, 2012. Communications in Education. p. 93 – 107.
10. TELEUCĂ, M.; JELESCU, P. Concepția privind elevii dotați la matematică și pregătirea lor pentru concursuri și olimpiade. În: *Acta et Commentationes, Sciences of Education*, nr. 4(22), 2020. pp. 32-38.
11. ULRICH, C. *Învățarea prin proiecte. Ghid pentru profesori*. Iași, Polirom, 2016.
12. ВИЛЕНКИН, Н. Я. *Популярная комбинаторика*. М.: Наука, 1975. 208 с.
13. ЖЕЛЕСКО, П.С.; РОГОВИН, М.С. *Исследование отрицания в практической и познавательной деятельности.* Кишинёв: Штиинца, 1985. 135 с.
14. АНТИПОВ, И.Н., ВИЛЕНКИН, Н., ИВАШЕВ-МУСАТОВ, О.С. и др. *Избранные вопросы математики. 9 кл. Факультативныи курс*. М. 1979. 191 с.
15. Математика. 5 класс. / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, И. Ф. Шарыгин, [и др.]; под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина. М.: Просвещение, 2003. – 368 с.
16. https://www.youtube.com/watch?v=AscXvFV-07g
17. https://mecc.gov.md/sites/default/files/standarde_cadre_didactice.pdf
18. https://staff.fmi.uvt.ro/~mircea.marin/lectures/TGC