CZU: 37.016:511.178

APLICAȚIILE REGULILOR ȘI PRINCIPIILOR DIN COMBINATORICĂ

Dorin AFANAS, dr., conf. univ.
Dumitru COZMA, dr. hab., prof. univ.
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. În prezentul articol sunt cercetate aplicațiile regulilor și principiilor din combinatorică. Sunt cercetați subfactorialii și problema generală a permutărilor. Se demonstrează formula subfactorialilor prin două metode.

Abstract. This article investigates the applications of combinatorics rules and principles. Subfactories and the general issue of permutations are being investigated. The formula of the subfactories is proved by two methods.

Cuvinte cheie: combinatorică, permutare, subfactorial, problemă.
Keywords: combinatorial, permutation, subfactorial, problemă.

Prezentare generală. Specialiștii diferitelor domenii pe parcursul activității sunt nevoiți să rezolve probleme ce conțin diferite combinații din litere, cifre și alte obiecte. Managerul unei firme trebuie să distribuie mai multe tipuri de activități, fermierul – să semene culturi agricole pe mai multe câmpuri, prodecanul – să alcătuiască orarul lecțiilor, savantul-chimist – să ia în considerație posibilele legături între atomi și molecule, lingvistul – să ia în considerație diferite variante de semnificații ale literelor unei limbi străine, etc.

Domeniul matematicii în care se cercetează câte combinații diferite, ce satisfac unor sau altor condiții putem alcătui din obiectele date, se numește *combinatorică*.

Combinatorica se ocupă cu studiul mulțimilor (de obicei finite) de obiecte și modalitățile de a le „combina” sau asocia, sau pune laolaltă [1, 2, 3].

Problemele „tipice” ale combinatoricii sunt:

- determinarea numărului de elemente ale unei mulțimi sau submulțimi;
- precizarea elementelor unei mulțimi sau submulțimi;
- determinarea numărului de moduri de a alege elemente dintr-o mulțime;
- determinarea numărului de moduri de a combina elementele unei/unor mulțimi;
- etc.

Regula produsului. Deseori, la realizarea combinațiilor din două elemente, este cunoscut faptul în câte moduri putem alege primul element și în câte moduri al doilea element, precum modurile de alegere a elementului al doilea nu depinde de modurile de alegere a primului element. Admitem că primul element poate fi ales în m moduri, iar elementul al doilea în n moduri. Atunci perechea formată din aceste două elemente poate fi aleasă în mn moduri. Cu alte cuvinte: *dacă obiectul A poate fi ales în m moduri și de fiecare dată după o astfel de alegere obiectul B poate fi ales în n moduri, atunci alegerea perechii* (A, B) *în ordinea indicată poate fi realizată în mn moduri*.

Pentru a demonstra regula produsului, observăm că fiecare din m moduri de alegere a obiectului A poate fi combinat cu n moduri de alegere a obiectului B, fapt care ne conduce la mn moduri de alegere a perechii (A, B).

Regula produsului poate fi ilustrată cu ajutorul tabelului de mai jos:

$$\begin{array}{|ccc|}\hline (A_1, B_{11}) & \cdots & (A_1, B_{1n}) \\ (A_2, B_{21}) & \cdots & (A_2, B_{2n}) \\ \multicolumn{3}{|c|}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ (A_i, B_{i1}) & \cdots & (A_i, B_{in}) \\ \multicolumn{3}{|c|}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ (A_m, B_{m1}) & \cdots & (A_m, B_{mn}) \\ \hline \end{array}$$

În tabelul de mai sus, prin A_1, A_2, ..., A_m am notat m moduri de alegere a obiectului A, iar prin B_{1n}, B_{2n}, ..., B_{mn} – n moduri de alegere a obiectului B, dacă obiectul A a fost ales în modul i.

Dacă modul de alegere a obiectului B nu depinde de modul alegerii obiectului A, atunci obținem un tabel mai simplu:

$$\begin{array}{|cccc|}\hline (A_1, B_1) & (A_1, B_2) & \cdots & (A_1, B_n) \\ (A_2, B_1) & (A_2, B_2) & \cdots & (A_2, B_n) \\ \multicolumn{4}{|c|}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \multicolumn{4}{|c|}{(A_m, B_1) \quad (A_m, B_2)} \\ \multicolumn{4}{|c|}{\cdots \quad (A_m, B_n)} \\ \hline \end{array}$$

Exemplul 1. Dan și Alexandru trebuie să participe la o cursă de drone. Antrenorul a pregătit 9 drone. În câte moduri se pot aloca dronele celor doi piloți ?

Rezolvare. Alocarea se poate descompune în două operații distincte: alocarea unei drone pentru Dan, urmată de alocarea unei drone pentru Alexandru. Atunci există 9 alternative pentru prima operație deoarece sunt 9 drone în total. Pentru operația a doua există numai 8 alternative deoarece o dronă a fost deja alocată lui Dan. Conform regulii produsului obținem $9 \cdot 8 = 72$ (variante).

Regula sumei. Fiind date două mulțimi A și B, dacă există X moduri de a alege un element din A și Y moduri de a alege un element din B, atunci există $X + Y$ moduri de a alege un element care să aparțină uneia dintre cele 2 mulțimi. Aici se are în vedere că nici o alegere din A nu coincide cu nici o alegere din mulțimea B.

Generalizarea acestei reguli este: Fiind date n mulțimi A_1, A_2, …, A_n, dacă există x_1 moduri de a alege un element din mulțimea A_1, x_2 moduri de a alege un element din mulțimea A_2, …, x_n moduri de a alege un element din mulțimea A_n, atuni există $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ moduri de a alege un element care să aparțină uneia din cele n mulțimi.

Exemplul 2. Mihai are 5 oferte de la echipe din Anglia, 3 oferte de la echipe din Spania și 8 oferte de la echipe din Italia. În câte moduri poate alege o ofertă ?

Rezolvare. Poate alege în 5 moduri o ofertă din Anglia, în 3 moduri o ofertă din Spania și în 8 moduri o ofertă din Italia. Conform regulii sumei sunt $5 + 3 + 8 = 16$ variante de a alege o ofertă.

Exemplul 3. Andrei scrie un program în care numele variabilelor folosite conțin cel mult 3 caractere (litere mari, litere mici și cifre). Câte variabile poate declara dacă primul caracter al variabilei trebuie să fie obligatoriu o literă ? (sunt 10 cifre, 26 litere mari, 26 litere mici și se face deosebire între literele mari și literele mici).

Rezolvare. Procedăm în modul următor:

- notăm cu N_1 numărul de variabile de lungime 1, cu N_2 numărul de variabile de lungime 2 și cu N_3 numărul de variabile de lungime 3;
- $N_1 = 52$, deoarece există 52 de moduri de a declara o variabilă de lungime 1 (26 litere mari + 26 litere mici);
- $N_2 = 52 \cdot 62 = 3224$, deoarece există 52 de moduri de a alege primul caracter al variabilei și 62 de moduri de a alege al doilea caracter al variabilei (26 litere mari + 26 litere mici + 10 cifre).

Conform regulii produsului într-adevăr obținem $N_2 = 52 \cdot 62 = 3224$.

- $N_3 = 52 \cdot 62 \cdot 62 = 199888$, deoarece există 52 de moduri de a alege primul caracter al variabilei, 62 de moduri de a alege al doilea caracter al variabilei (26 litere mari + 26 litere mici + 10 cifre) și 62 de moduri de a alege al treilea caracter al variabilei (26 litere mari + 26 litere mici + 10 cifre). Astfel, conform regulii produsului, $N_3 = 52 \cdot 62 \cdot 62 = 199888$.
- Conform regulii sumei în total pot fi declarate 52 + 3224 + 199888 = 203164 de variabile.

Principiul includerii și excluderii. Fiind date două mulțimi A și B, care pot avea elemente comune. Dacă există X moduri de a alege un element din A și Y moduri de a alege un element din B, atunci există $X + Y - |X \cap Y|$ moduri de a alege un element care să aparțină uneia dintre cele 2 mulțimi, unde $|X \cap Y|$ reprezintă numărul de elemente comune care pot fi selectate.

Atunci când mulțimile au elemente comune prin regula sumei elementele comune sunt alese (incluse) de două ori, de aceea acestea trebuie excluse ulterior din soluție.

Subfactorialii. Numerele

$$D_n = P_n - C_n^1 P_{n-1} + C_n^2 P_{n-2} - \cdots + (-1)^n C_n^n \tag{1}$$

se numesc *subfactoriali*, deoarece posedă multe proprietăți ale factorialului. De exemplu, pentru factoriali este justă egalitatea:

$$n! = (n-1)[(n-1)! + (n-2)!]. \tag{2}$$

Într-adevăr

$$(n-1)[(n-1)! + (n-2)!] = (n-1)(n-2)!\,n = n!\,.$$

Vom demonstra că aceeași egalitate este justă și pentru subfactorialii D_n, adică vom demonstra justețea egalității:

$$D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}]. \tag{3}$$

Aplicând formula (1) obținem:

$$(n-1)[D_{n-1}+D_{n-2}] = (n-1)[(n-1)!+(n-2)!] \times$$
$$\times \left[1-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-\tfrac{1}{3!}+\cdots+\tfrac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\right]+(-1)^{n-1}(n-1).$$

Însă conform formulei (2):

$$(n-1)[(n-1)!+(n-2)!] = n!\,,$$

iar

$$(-1)^{n-1}(n-1) = n!\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

Astfel,

$$(n-1)[D_{n-1}+D_{n-2}] = n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right] = D_n.$$

Egalitatea (3) poate fi demonstrată utilizând raționamente pur combinatorice. Cercetăm toate permutările în care toate elementele sunt deplasate. Primul loc în asemenea permutări îl poate ocupa orice element cu excepția primului. Deoarece numărul elementelor rămase este egal cu $n-1$, atunci D_n permutări sunt divizate în $n-1$ grupe în dependență de faptul care element ocupă prima poziție. Este clar, că în fiecare grupă numărul de elemente va fi egal.

Calculăm câte elemente sunt în una din grupe, de exemplu în grupa unde prima poziție o ocupă elementul al doilea. Această grupă o divizăm în două clase: una – în care primul element se află pe locul al doilea, iar alta – toate celelalte elemente. Dacă primul element a ocupat poziția a doua, iar al doilea element – prima poziție, atunci cele $n-2$ elemente le putem permuta în orice mod cu condiția ca nici unul din ele să nu ocupe poziția sa. Aceasta poate fi realizat în D_{n-2} moduri. Deci prima clasă constă din D_{n-2} permutări.

Demonstrăm în continuare, că a doua clasă constă din D_{n-1} permutări.

Într-adevăr, în clasa a doua vor intra numai permutările, în care primul element nu se află pe poziția a doua, iar celelalte elemente nu se află pe pozițiile sale. Dacă temporar vom considera că poziția a doua este ”legitimă” pentru primul element, vom obține că primul element, al treilea, al patrulea, ..., elementul n nu se află pe pozițiile sale. Deoarece numărul acestor elemente este $n-1$, atunci în clasa a doua sunt D_{n-1} permutări. Dar atunci întreaga grupă conține $D_{n-1}+D_{n-2}$ permutări. Deoarece mulțimea tuturor permutărilor deplasate conține $n-1$ grupe, rezultă că ea conține $(n-1)[D_{n-1}+D_{n-2}]$ permutări. Egalitatea (3) este demonstrată.

Din egalitatea (3) rezultă:

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}].$$

Cu schimbarea lui n ultima egalitate își schimbă numai semnul. Aplicând această egalitate de câteva ori, vom obține că

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^{n-2}[D_2 - 2D_1].$$

Însă $D_2 = 1$ și $D_1 = 0$. Prin urmare, $D_n = nD_{n-1}+(-1)^n$. Formula obținută ne amintește de formula $n! = (n-1)!\cdot n$. Prezentăm în continuare valorile primelor 12 subfactoriali:

n	D_n
1	0
2	1
3	2
4	9
5	44
6	265
7	1854
8	14833
9	133496
10	1334961
11	14684570
12	176214841

Problema permutărilor în combinatorică. Aflați numărul permutărilor D_n din n elemente la care nici un element nu rămâne în poziția inițială.

Răspunsul la această întrebare îl putem da cu ajutorul formulei:

$$D_n = P_n - C_n^1 P_{n-1} + C_n^2 P_{n-2} - \cdots + (-1)^n C_n^n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right). \quad (4)$$

Persoanele cunoscute cu teoria seriilor recunoaște expresia din paranteze ca suma parțială a descompunerii e^{-1}.

Dacă generalizăm formula (4), atunci pentru $n = 0$, natural, vom considera $D_0 = 1$.

Numărul permutărilor la care exact r elemente rămân în pozițiile inițiale, iar celelalte $n–r$ își schimbă pozițiile poate fi determinat prin intermediul formulei:

$$D_{n,r} = C_n^r D_{n-r}. \quad (5)$$

Într-adevăr, mai întâi trebuie să alegem care r elemente rămân în pozițiile inițiale. Aceasta poate fi realizat în C_n^r moduri. Celelalte $n – r$ elemente le putem permuta în diferite moduri, cu condiția ca nici unul din ele să nu-și păstreze poziția inițială. Aceasta poate fi realizat în D_{n-r} moduri. Conform regulii produsului vom obține că numărul total de permutări cerute este $C_n^r D_{n-r}$.

Descompunem toate permutările pe clase în dependență de faptul câte elemente rămân fixe la permutarea dată. Deoarece numărul tuturor permutărilor este egal cu $n!$, atunci obținem următoarea identitate:

$$n! = \sum_{r=0}^{n} D_{n,r} = \sum_{r=0}^{n} C_n^r D_{n-r}. \quad (6)$$

O altă identitate, ce stabilește legătura dintre $P_n = n!$ și numărul $D_{n,r}$, se obține în modul următor: considerăm toate permutările P_n a elementelor $a_1, a_2, ..., a_n$ și calculăm câte elemente în toate permutările rămân pe pozițiile lor. Acest calcul poate fi realizat în două moduri. În primul, observăm, că dacă elementul a_1 rămâne în poziția inițială, atunci celelalte elemente le putem permuta în $P_{n-1} = (n-1)!$ moduri. De aceea în $(n-1)!$ permutări elementul a_1 se va afla pe poziția întâi. Analog, în $(n-1)!$ permutări elementul a_2 se va afla pe poziția a doua, etc. În total obținem $n(n-1)! = n!$ elemente ce se află în pozițiile inițiale.

Însă numărul acestor elemente poate fi calculat și în alt mod. Numărul permutărilor în clasa r, adică în clasa în care r elemente se află pe pozițiile lor este egal cu $D_{n,r}$. Fiecare astfel de permutare ne dă r elemente fixe. De aceea numărul total al elementelor fixe în permutările clasei r va fi egal cu $rD_{n,r}$ și deci în total vom obține $\sum_{r=0}^{n} rD_{n,r}$ elemente fixe. Astfel am demonstrat identitatea:

$$n! = \sum_{r=0}^{n} rD_{n,r} = \sum_{r=0}^{n} rC_n^r D_{n-r}. \qquad (6')$$

Principiul includerii și excluderii ne permite să rezolvăm și așa problemă: determinați numărul permutărilor din n elemente, în care r elemente sunt deplasate (iar celelalte elemente pot fi atât deplasate cât și pe pozițiile lor). Răspunsul îl putem obține prin intermediul formulei:

$$n! - C_r^1(n-1)! + C_r^2(n-2)! - \cdots + (-1)^r(n-r)!\,.$$

Acest articol a fost elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", Programul „Program de stat" (2020- 2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20

Bibliografie

1. ВИЛЕНКИН Н. Я. *Комбинаторика*. Москва: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1969, 328 стр.
2. https://www.hackerearth.com/practice/math/combinatorics/basics-of-combinatorics/tutorial/
3. www.wikipedia.org