CZU:517.93:517.951

DESPRE GRADELE FIZICE DE LIBERTATE ÎN CAZUL TEORIILOR CU DERIVATE DE ORDIN SUPERIOR

SĂRARU Silviu-Constantin
Departamentul de Fizică, Universitatea din Craiova,
13 Al. I. Cuza Str., Craiova 200585, România

Rezumat. *În această lucrare analizăm gradele fizice de libertate în cazul teoriilor cu derivate de ordin superior. Considerăm un model cu derivate de ordin superior descris de o acțiune Lagrangiană care se scrie ca o sumă dintre termenul Maxwell, o extensie cu trei derivate a termenului Chern-Simons și termenul de masă Proca. În urma analizei canonice Hamilton a modelului considerat obținem că este un modelul supus la constrângeri de clasă II și are trei grade de libertate.*
Cuvinte cheie: *sisteme dinamice cu constrângeri, teorii cu derivate de ordin superior.*

A NOTE ON DEGREES OF FREEDOM IN HIGHER DERIVATIVE THEORIES

Abstract. *In this paper we analyze the degrees of freedom in the case of theories with higher order derivatives. We consider a higher order derivatives model described by a Lagrangian action that is written as a sum of the Maxwell term, a three-derivative extension of the Chern-Simons term, and the Proca mass term. Performing the Hamiltonian canonical analysis of the model MTCSP, we obtain that it is subject to the second-class constraints and has three degrees of freedom.*
Keywords: *constraints dynamics, higher derivatives theories.*

Introducere

Electrodinamica masivă topologic obținută prin adăugarea unui termen de masă topologic (CS) la termenul Maxwell (M) este descrisă de o acțiune Lagrangeană cu derivate de ordinul doi, cu un singur grad de libertate, fiind o teorie de clasă I (modelul MCS) [1]-[4]

$$S_{MCS} = \int d^3x \left(-\frac{a}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - b \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^{\mu} \partial^{\nu} A^{\rho} \right). \tag{1}$$

Adaugând un termen de masă convențional în modelul MCS obținem o teorie de clasă II cunoscută sub numele de modelul MCS-Proca (MCSP) [5]

$$S_{MCSP} = \int d^3x \left(-\frac{a}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - b \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^{\mu} \partial^{\nu} A^{\rho} - \frac{m^2}{2} A_{\mu} A^{\mu} \right). \tag{2}$$

S-a arătat prin diferite metode faptul că modelul MCSP este echivalent cu un dublet de modele MCS [6]-[9]. Pornind de la modelul cu derivate de ordinul trei (modelul MTCS) [10]

$$S_{MTCS} = \int d^3x \left(-\frac{a}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2b} \varepsilon_{\mu\nu\rho} (\Box A^{\mu}) \partial^{\nu} A^{\rho} \right), \tag{3}$$

și adăugând un termen de masă Proca [11], [12] obținem o altă teorie cu derivate de ordinul trei (modelul MTCSP) descrisă de acțiunea Lagrangeană

$$S_{MTCSP} = \int d^3x \left(-\frac{a}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2b}\varepsilon_{\mu\nu\rho}(\Box A^{\mu})\partial^{\nu}A^{\rho} - \frac{m^2}{2}A_{\mu}A^{\mu}\right). \tag{4}$$

Mai întâi realizăm analiza canonică a modelului MTCSP si apoi abordăm reducerea hamiltoniană a acestuia.

Modelul MTCSP

În urma scrierii celui de al doilea termen din relația (4) într-o formă echivalentă

$$\frac{1}{2b}\int d^3x\, \varepsilon_{\mu\nu\rho}(\Box A^{\mu})\partial^{\nu}A^{\rho} = -\frac{1}{2b}\int d^3x\, \varepsilon_{\mu\nu\rho}F^{\mu\lambda}\partial^{\nu}F^{\rho}{}_{\lambda}, \tag{5}$$

obținem pentru că acțiunea Lagrangeană (4) se scrie sub forma

$$S_{MTCSP} = \int d^3x \left(-\frac{a}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2b}\varepsilon_{\mu\nu\rho}F^{\mu\lambda}\partial^{\nu}F^{\rho}{}_{\lambda} - \frac{m^2}{2}A_{\mu}A^{\mu}\right). \tag{6}$$

Pentru a realiza analiza canonică vom utiliza o variantă a formalismului Ostrogradsky care presunune trecerea de la modelul cu derivate de ordinul trei la un model echivalent prin introducerea unor noi câmpuri B_{μ} definite prin

$$B_{\mu} = \partial_0 A_{\mu}, \tag{7}$$

și impunerea constrângerilor Lagrangiene

$$B_{\mu} - \partial_0 A_{\mu} = 0, \tag{8}$$

prin intermediul multiplicatorilor Lagrange ξ^{μ} [13]-[15]. Lagrangeanul pentru modelul de ordinul întâi echivalent se scrie sub forma

$$\begin{aligned} L = &-\frac{a}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{a}{2}(B_i - \partial_i A_0)\left(B^i - \partial^i A^0\right) - \frac{1}{2b}\varepsilon_{0ij}(B^k - \partial^k A^0)\partial^i F^{j}{}_{k} \\ &-\frac{1}{2b}\varepsilon_{i0j}\left(\partial^i A^0 - B^i\right)\left(\partial^j B_0 - \partial_0 B^j\right) - \frac{1}{2b}\varepsilon_{i0j}F^{ik}\left(\partial^j B_k - \partial_k B^j\right) \\ &-\frac{1}{2b}\varepsilon_{ij0}F^{ik}\partial^j(B_k - \partial_k A_0) - \frac{m^2}{2}A_{\mu}A^{\mu} + \xi^{\mu}\left(B_{\mu} - \partial_0 A_{\mu}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

În urma analizei canonice a modelului descris de Lagrangeanul (9), obținem că spațiul fazelor redus este parametrizat local de câmpurile A_i, B_i și impulsurile p^i, în timp ce Hamiltonianul se scrie sub forma

$$\begin{aligned} H = \int d^2x \Big[&\frac{a}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{a}{2}\left(B_i - \frac{1}{m^2}\partial_i\partial_j p^j\right)\left(B^i - \frac{1}{m^2}\partial^i\partial_k p^k\right) \\ &+\frac{1}{2b}\varepsilon_{0ij}F^{ik}\partial^j\left(B_k - \frac{1}{m^2}\partial^k\partial_l p^l\right) + \frac{1}{2b}\varepsilon_{0ij}F^{ik}\partial_k\left(B^j - \frac{1}{m^2}\partial^j\partial_l p^l\right) \\ &+\frac{m^2}{2}A_iA^i + \frac{1}{2m^2}\partial_i p^i\partial_j p^j - \xi^{\mu}B_{\mu}\Big]. \end{aligned} \tag{10}$$

Parantezele Dirac nenule dintre variabilele spațiului fazelor redus sunt

$$\left[A_i(x), p^j(y)\right]^*_{x_0=y_0} = \delta_i^j\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \tag{11}$$

$$\left[B_i(x), B_j(y)\right]^*_{x_0=y_0} = -b\varepsilon_{0ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{12}$$

$$\left[A_i(x), B_j(y)\right]^*_{x_0=y_0} = \frac{1}{m^2}\partial_i\partial_j\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{13}$$

Algebra (11)–(13) se poate rezolva in termenii a trei câmpuri canonice libere $\{\alpha, \beta, \phi\}$

$$A_i = -\varepsilon_{0ij}\hat{\partial}^j\alpha + \frac{1}{m}\hat{\partial}_i\Pi_\beta, \tag{14}$$

$$p_i = \varepsilon_{0ij}\hat{\partial}^j\Pi_\alpha + m\hat{\partial}_i\beta, \tag{15}$$

$$B_i = -\varepsilon_{0ij}\hat{\partial}^j\Pi_\phi + b\hat{\partial}_i\phi + \frac{1}{m}\partial_i\partial_j\hat{\partial}^j\beta, \tag{16}$$

unde $\hat{\partial}_i = \frac{\partial_i}{\sqrt{-\nabla^2}}$ iar $\{\Pi_\alpha, \Pi_\beta, \Pi_\phi\}$ sunt impulsurile corespunzatoare

$$[\alpha(x), \Pi_\alpha(y)] = \left[\beta(x), \Pi_\beta(y)\right] = \left[\phi(x), \Pi_\phi(y)\right] = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{17}$$

Înlocuind relațiile (14)–(16) în (10), obținem pentru Hamiltonian următoarea formă

$$H = \int d^2x \left[\frac{1}{2a}(-a\alpha-\phi)\partial_i\partial^i(-a\alpha-\phi) - \frac{1}{2}\beta\partial_i\partial^i\beta - \frac{1}{2a}\phi\partial_i\partial^i\phi \right.$$
$$\left. + \frac{a}{2}\left(-\frac{1}{a}\Pi_\alpha\right)^2 - \frac{1}{2}\Pi_\beta^2 - \frac{a}{2}\left(-\frac{1}{a}\Pi_\alpha + \Pi_\phi\right)^2 - \frac{m^2}{2}\alpha^2 - bm\beta\phi - \frac{ab^2}{2}\phi^2\right]. \tag{18}$$

În urma transformării canonice

$$\{\alpha, \beta, \phi, \Pi_\alpha, \Pi_\beta, \Pi_\phi\} \to \{\alpha', \beta', \phi', \Pi'_\alpha, \Pi'_\beta, \Pi'_\phi\} \tag{19}$$

cu

$$\alpha' = -a\alpha - \phi,\ \Pi'_\alpha = -\frac{1}{a}\Pi_\alpha, \tag{20}$$

$$\beta' = \beta,\ \Pi'_\beta = \Pi_\beta, \tag{21}$$

$$\phi' = \phi,\ \Pi'_\phi = -\frac{1}{a}\Pi_\alpha + \Pi_\phi \tag{22}$$

obținem pentru Hamiltonian o forma simplificată

$$H = \int d^2x \left[\frac{1}{2a}\alpha'\partial_i\partial^i\alpha' - \frac{1}{2}\beta'\partial_i\partial^i\beta' - \frac{1}{2a}\phi'\partial_i\partial^i\phi' + \frac{a}{2}(\Pi'_\alpha)^2 \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(\Pi'_\beta\right)^2 - \frac{a}{2}\left(\Pi'_\phi\right)^2 - \frac{m^2}{2a^2}(\alpha'+\phi')^2 - bm\beta'\phi' - \frac{ab^2}{2}(\phi')^2\right]. \tag{23}$$

Trecând la formalismul Lagrangean găsim că

$$S_{MTCSP} = \int d^3x \left[-\frac{1}{2a}\alpha'\Box\alpha' + \frac{1}{2}\beta'\Box\beta' + \frac{1}{2a}\phi'(\Box + a^2b^2)\phi' \right.$$
$$\left. + \frac{m^2}{2a^2}(\alpha')^2 + \frac{m^2}{2a^2}(\phi')^2 + \frac{m^2}{a^2}\alpha'\phi' + bm\beta'\phi'\right]. \tag{24}$$

Corespondența cu modelul MTCS

În lucrarea [10], pornindu-se de la modelul MTCS si realizând o descompunere hamiltoniană s-a arătat că modelul MTCS descrie o pereche de moduri de excitație

$$S_{MTCS} = \int d^3x \left[-\frac{1}{2a}A\Box A + \frac{1}{2a}E(\Box + a^2b^2)E\right], \tag{25}$$

unul fără masa iar celălalt cu masă. Observăm absența tahyonilor pentru orice alegere a parametrului a, în timp ce semnul minus dintre cei doi termeni indică prezența modurilor ghost. În continuare analizăm legătura dintre modelul de clasă II MTCSP și modelul MTCS. Analizând acțiunea Lagrange (24) remarcăm că poate fi scrisă ca suma dintre acțiunea (25) și termeni a căror prezență se datorează apariției termenului $m^2 A_\mu A^\mu$ în acțiunea (4)

$$S_{MTCSP} = \int d^3x \left[-\frac{1}{2a}\alpha'\Box\alpha' + \frac{1}{2a}\phi'(\Box + a^2b^2)\phi'\right] + \int d^3x \left[\frac{1}{2}\beta'\Box\beta' + \tilde{L}(m)\right], \quad (26)$$

unde

$$\tilde{L}(m) = \frac{m^2}{2a^2}(\alpha')^2 + \frac{m^2}{2a^2}(\phi')^2 + \frac{m^2}{a^2}\alpha'\phi' + bm\beta'\phi'. \quad (27)$$

Se observă simplu că modelul MTCS are două grade de libertate [10], în timp ce modelul MTCSP prezintă trei grade de libertate [11]. Pe baza acestei neconcordanțe dintre numărul gradelor de libertate, rezultă că o echivalență de tipul celei dintre modelele MCSP și MCS nu este posibilă. Cu toate acestea, comparând (25) cu acțiunea Lagrange (26) putem identifica o corespondență între gradele de libertate a celor două modele cu derivate de ordinul trei ($\alpha' \leftrightarrow A$ and $\phi' \leftrightarrow E$). Cel de al treilea grad de libertate, β apare datorită prezenței termenului de masă $m^2 A_\mu A^\mu$. O analiză complete a modurile de excitație pentru modelul MTCSP s-a realizat în [11], [16], [17].

Bibliografie

1. S. DESER, R. JACKIW and S. TEMPLETON, *Ann. Phys. (NY).*1982, 140, 372.
2. P. K. TOWNSEND, K. PILCH and P. VAN NIEUWENHUIZEN, *Phys. Lett. B*. 1984, 136, 38.
3. S. DESER and R. JACKIW, *Phys. Lett. B*. 1984, 139, 371.
4. R. BANERJEE, H. J. ROTHE A and K. D. ROTHE, *Phys. Rev. D*. 1997, 55, 6339.
5. S. K. PAUL and A. KHARE, *Phys. Lett. B*. 1984, 171, 244.
6. R. BANERJEE, B. CHAKRABORTY and T. SCARIA, *Int. J. Mod. Phys. A*. 2001, 16, 3967.
7. R. BANERJEE and S. KUMAR, *Phys. Rev. D*. 2001 63, 125008.
8. S. DESER and B. TEKIN, *Class. Quant. Grav.* 2002, 19, L97.
9. D. DALMAZI, *JHEP*. 2006, 0608, 040.
10. S. DESER and R. JACKIW, *Phys. Lett. B*. 1999, 451, 73.
11. S. C. SARARU, *Eur. Phys. J. C*. 2015, 75, 526.
12. S. C. SARARU, M. T. UDRISTIOIU, *Mod. Phys. Lett. A*. 2016, 31, 1650205.
13. M. OSTROGRADSKY, *Mem. Ac. St. Petersbourg VI*. 1850, 4, 385.
14. J. M. PONS, *Lett. Math. Phys.*1989, 17, 181.
15. R. BANERJEE, P. MUKHERJEE and B. PAUL, *JHEP*. 2011, 1108, 085.
16. S. C. SARARU, *AIP Conf. Proc.* 2017, 1796, 020005.
17. S. C. SARARU, M.T. UDRISTIOIU, *AIP Conf. Proc.* 2017, 1916, 020009.