6. Ore O. Theory of graphs. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXVIII, American Mathematical Society, 1962, 270 p.
7. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. Перевод с английского, Москва, Техносфера, 2003, 320 с., ISBN 5-94836-016-4.
8. Bârză S., Morgan L-M. Algoritmica grafurilor. București: Ed. Fundației România de Mâine, 2008, 148 p., ISBN 978-973-163-147-9 [vizitat 05.02.2018] http://www.ocpiilfov.ro/ocpi_ilfov/Man.pdf.
9. http://www.maplesoft.com/products/maple/new_features/maple18/Graph_Theory.aspx [vizitat 12.02.2018].

ALGEBRA AJUTĂ GEOMETRIA

Laurențiu Calmuțchi, dr. hab., prof. univ., UST

Dorin Afanas, dr. conf. univ., UST

Rezumat. În acest articol se aplică metoda algebrică de rezolvare a problemelor geometrice.

Cuvinte-chee: problemă de construcție; soluție; cercetare.

Abstract. This article the algebraic method to solving geometric problems.

Keywords: problem of construction; solution; research.

Pe parcursul secolelor geometria a servit bază nu numai a matematicii, dar și a altor științe. Anume în geometrie au apărut primele teoreme și primele demonstrații. Însăși legile gândirii matematice s-au format cu ajutorul geometriei. Multe probleme geometrice au contribuit la apariția a noi direcții științifice și invers, multe probleme științifice au fost rezolvate cu ajutorul metodelor geometrice.

Un rol deosebit de important în dezvoltarea multor ramuri matematice revine problemelor geometrice de construcție. Este suficient să ne amintim de problemele cuadraturii discului, dublării cubului și trisecției unghiului, care se cereau a fi rezolvate doar cu ajutorul riglei și a compasului. Aceste probleme,apărute încă în secolul IV î.e.n., au devenit clasice și abia la sfârșitul secolului al XIX-lea s-a demonstrat că ele nu pot fi rezolvate cu ajutorul riglei și a compasului. Cercetările asupra acestor probleme au dezvoltat mai multe ramuri ale matematicii, mai cu seamă algebra,care la rîndul său a permis de a rezolva pe o cale mai simplă, iar uneori chiar și imposibil de a rezolva pe altă cale unele probleme geometrice.

Vom considera că elevii au făcut cunoștință cu construirea segmentului, determinat de următoarele formule:

1. $x = a + b;$
2. $x = a - b\ (a > b);$
3. $x = na, unde\ n \in N;$
4. $x = \frac{a}{n}\ , unde\ n \in N\ ;$
5. $x = \frac{m}{n}a, \quad unde\ n, m \in N;$

6. $x = \frac{ab}{c}$ (construirea celui de al patrulea segment proporțional cu trei segmente date).
7. $x = \frac{a^2}{c}$.
8. $x = \sqrt{ab}$.
9. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.
10. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a > b)$.

În continuare vom aduce exemple de aplicare a metodei algebrice la rezolvarea problemelor geometrice de construcție.

1. Este dat triunghiul ABC. De construit pe laturile AC și BC corespunzător punctele D și E astfel încât $[DE]$ și $[AB]$ să fie paralele, iar $|AD| + |BE| = n|DE|$.

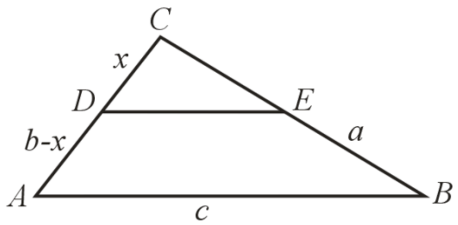

Fig. 1

***Soluți**e*. Să presupunem că problema este rezolvată și în triunghiul ABC segmentul $[DE]$ satisface condițiilor problemei (fig.1) . Notăm laturile triunghiului ca deobicei prin a, b și c. Fie $|CD| = x$, atunci $|AD| = b - x$. Evident triunghiurile ABC și DEC sunt asemenea. Prin urmare ,

$\frac{|AC|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|EC|}$, de unde obținem: $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|BC|}$ sau $|BE| = \frac{|BC||AD|}{|AC|} = \frac{a(b-x)}{b}$.

Din asemănarea acelorași triunghiuri obținem:

$$|DE| = \frac{|AB||CD|}{|AC|} = \frac{cx}{b}.$$

Din condiția problemei $|AD| + |BE| = n|DE|$, avem:

$$b - x + \frac{a(b-x)}{b} = \frac{ncx}{b}.$$

Rezolvând ultima ecuație, obținem:

$$x = \frac{b(a+b)}{a+b+nc}.$$

Rămâne să construim segmentul $[CD]$ astfel încât:

$$|CD| = \frac{b(a+b)}{a+b+nc}$$

și prin punctul D să construim segmentul $[DE]$ paralel la $[AB]$. Problema întotdeauna admite o singură soluție.

2. De construit triunghiul ABC, dacă se cunoaște latura a, înălțimea $h_a = h$ și suma $b + c = s$. (Fig. 2)

Soluție. Fie înălțimea AH împarte latura CB în segmentele CH și HB astfel încât, $|CH| = \frac{a}{2} - x$, $|HB| = \frac{a}{2} + x$. Atunci, $b = \sqrt{(\frac{a}{2} - x)^2 + h^2}$,$c = \sqrt{(\frac{a}{2} + x)^2 + h^2}$. Conform condiției, avem:

$$\sqrt{(\frac{a}{2} - x)^2 + h^2} + \sqrt{(\frac{a}{2} + x)^2 + h^2} = S$$

Rezolvând această ecuație, obținem unica soluție pozitivă

$$x = \frac{s\sqrt{s^2 - a^2 - 4h^2}}{2\sqrt{s^2 - a^2}}.$$

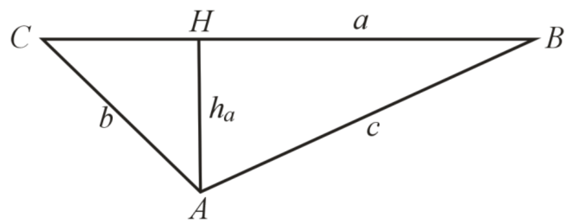

Fig. 2. Construcția

1. $y = \sqrt{s^2 - a^2}$;
2. $z = \sqrt{y^2 - 4h^2}$;
3. $x = \frac{sx}{2y}$;
4. $|CH| = \frac{a}{2} - x$;
5. $|HB| = \frac{a}{2} + x$;
6. ΔAHC;
7. ΔAHB;
8. ΔABC −construit.

Problema are o singură soluție pentru $s > a$ și $s^2 > a^2 - 4h^2$.

3. De construit un poligon regulat cu 10 laturi.

Soluție. Evident, problema construirii unui poligon cu 10 laturi va fi soluționată, dacă vom împărți un cerc oarecare în 10 părți congruente. Fie $\omega(O, r)$ un cerc arbitrar (fig. 3) . Să presupunem că AB este latura poligonului regulat cu 10 laturi înscris în cercul dat. Unim punctul O cu punctele A și B. Evident, în triunghiul AOB mărimea unghiului AOB este egală cu 36^0. Fie BM este bisectoare în triunghiul AOB. Atunci ,

$$\widehat{ABO} = \widehat{BAO} = \widehat{BMA} = 72^0, \qquad \widehat{ABM} = \widehat{MBO} = 36^0.$$

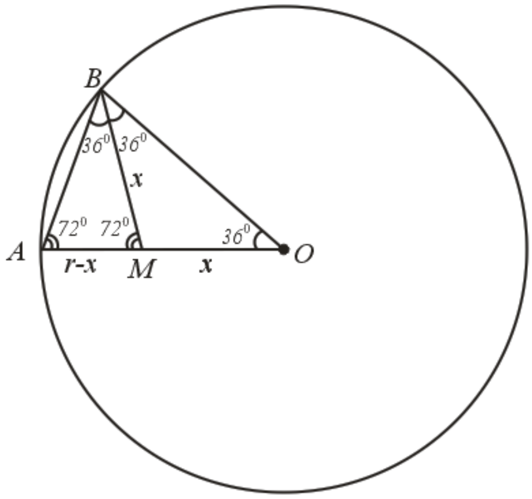

Fig. 3

Prin urmare, triunghiurile AOB și ABM sunt asemenea și deci, $\frac{|AB|}{|AM|} = \frac{|OB|}{|AB|}$. (1)

Notăm $|AB| = x$, atunci $|BM| = |OM| = x$, $|AM| = r - x$. În rezultat expresia (1) primește forma:

$$\frac{x}{r-x} = \frac{r}{x} \text{ sau } x^2 + rx - r^2 = 0$$

Rezolvând această ecuație pătrată, obținem unica soluție pozitivă

$$x = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2}. \quad (2)$$

Așa dar, latura pentagonului regulat este determinată de formula (2) .

Observație. Fiind construit pentagonul regulat cu 10 laturi putem considera că am rezolvat și problema construirii poligonului regulat cu 5 laturi. Această construcție era cunoscută încă de elevii lui Pitagora.

4. De construit pentagonul regulat, fiind dată diagonala acestui pentagon.

Soluție. Fie problema este rezolvată și în pentagonul regulat $ABCDE$ diagonala AC are lungimea d (fig. 4). Să observăm, că problema poate fi rezolvată ușor, dacă am putea construi triunghiul ABC. Să notăm lungimea laturii pentagonului regulat prin a. Pe latura AC a triunghiului ABC depunem segmentul $[CM]$ astfel încât $|CM| = a$. Deoarece în pentagonul regulat suma unghiurilor interioare este egală cu 540^0, urmează:

$$\widehat{ABC} = 108^0, \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 36^0, \widehat{MBC} = \widehat{BMC} = 72^0, \widehat{ABM} = 36^0.$$

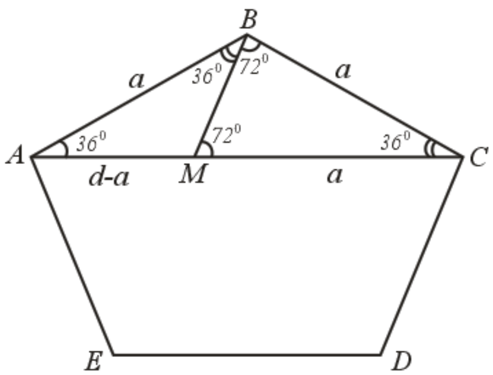

Fig. 4

Prin urmare, triunghiurile ABM și ABC sunt asemenea.

Din proporționalitatea laturilor acestor triunghiuri, urmează că $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AM|}$ sau $\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a}$, de unde obținem ecuația $a^2 + ad - d^2 = 0$

Evident, $d > a$ și atunci condițiilor problemei satisface doar $a = \frac{(\sqrt{5}-1)d}{2}$. După această formulă se construește latura acestui pentagon regulat.

Acum triunghiul isoscel ABC poate fi construit. Urmează să depunem unghiurile BAE și BCD congruente cu unghiul ABC , iar pe semidreptele $[AE)$ și $[CD)$ să construim punctele E și D corespunzător, astfel încât $|AE| = |CD| = a$. În rezultat obținem pentagonul regulat $ABCD,$ care și este soluția problemei.

5. De construit triunghiul dreptunghic fiind dată ipotenuza c și bisectoarea l dusă din vârful unghiului drept.

Soluție. Analiza. Fie că triunghiul ABC satisface condițiilor problemei (fig. 5). Observăm că acest triunghi ar putea fi construit dacă am cunoaște înălțimea h dusă din vârful unghiului drept. Așa cum punctul L aparține bisectoarei unghiului drept, urmează că L este egal depărtat de la catetele AC, BC și situat la distanța $\frac{l}{\sqrt{2}}$ de la aceste catete. Deoarece aria triunghiului ABC este egală cu suma ariilor triunghiurilor BLC și ALC, avem:

$$\frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}a\frac{l}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}b\frac{l}{\sqrt{2}} \quad \text{sau } ch\sqrt{2} = (a+b)l, \text{de unde}$$

$$2c^2h^2 = (a+b)^2l^2 \quad (1).$$

Din egalitățile $a^2 + b^2 = c^2$ și $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$, avem: $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ch$ sau

$$(a+b)^2 = c^2 + 2ch\,. \ (2)$$

Întroducem expresia (2) în (1) și obținem:

$$2c^2h^2 = (c^2 + 2ch\,)l^2 \text{ sau } 2ch^2 - 2l^2h - cl^2 = 0.$$

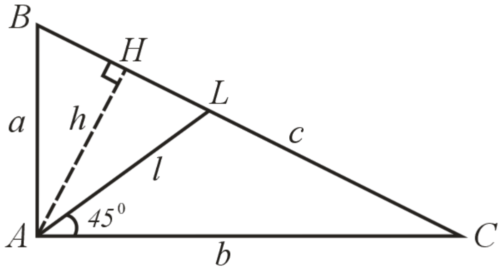

Fig. 5

Rezolvând ultima ecuație pătrată în raport cu h, obținem unica soluție pozitivă

$$h = \frac{l(l + \sqrt{l^2 + 2c^2})}{2c}. \ (3)$$

Pentru a soluționa problema vom proceda în felul următor. Construim segmentul de lungime h după formula (3). Pe o dreaptă arbitrară depunem segmentul $[AB]$ de lungime c. Pe segmnetul $[AB]$, ca pe diametru, construim cercul ω. Construim două drepte paralele la dreapta (AB) la distanțele h de la această dreaptă (fig. 6). Notăm prin C unul din punctele de

intersecție al cercului ω cu cele două drepte construite. Triunghiul ABC este unul din triunghiurile căutate. Demostrația rezultă nemijlocit din construcție.
Făcând cercetarea după pașii de construcție ne convingem că problema are soluții atunci și numai atunci, cțnd $h \leq \frac{c}{2}$, adică atunci când $\frac{l(l+\sqrt{l^2+2c^2})}{2c} \leq \frac{c}{2}$.

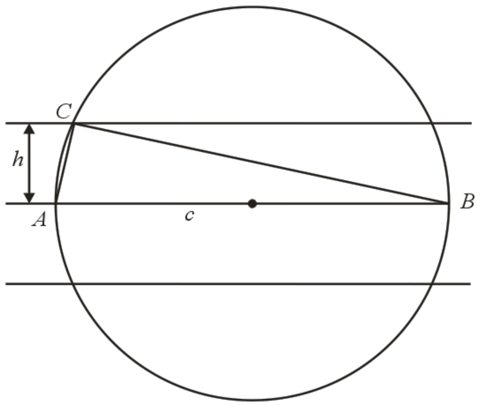

Fig. 6

După unele transformări aceasta condiție are forma: $l \leq \frac{c}{2}$.
Dacă $l < \frac{c}{2}$, cercul ω are patru puncte comune cu cele două drepte paralele construite. În acest caz există patru triunghiuri congruente, care satisfac condițiilor problemei. Cu exactitate de până la congruență în așa caz, problema are o singură soluție. Dacă $l = \frac{c}{2}$, atunci există două triunghiuri dreptunghice isoscele congruente și deci, iarăși avem o singură soluție. Așa dar, pentru $l \leq \frac{c}{2}$ problema are o singură soluție.

6. De construit triunghiul ABC, dacă sunt date înălțimile h_a, h_b și h_c.

Soluție. Din formulele de calculare a ariei triunghiului, avem:

$$a = \frac{2S}{h_a}, \qquad b = \frac{2S}{h_b}, \qquad c = \frac{2S}{h_c}.$$

Atunci,

$$a:b:c = \frac{2S}{h_a}:\frac{2S}{h_b}:\frac{2S}{h_c} = \frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c} = h_b h_c : h_a h_c : h_a h_b = \frac{h_b h_c}{m}:\frac{h_a h_c}{m}:\frac{h_a h_b}{m}.$$

Prin urmare,

$$a:b:c = \frac{h_b h_c}{m}:\frac{h_a h_c}{m}:\frac{h_a h_b}{m},$$

unde m este lungimea unui segment oarecare.
Construim triunghiul $A_1B_1C_1$ cu laturile

$$a_1 = \frac{h_b h_c}{m}, \qquad b_1 = \frac{h_a h_c}{m}, \qquad c_1 = \frac{h_a h_b}{m}.$$

Triunghiul $A_1B_1C_1$ va fi asemenea cu triunghiul ABC cu coeficientul de asemănare $k = h_a : h_{a_1}$. Fiind construit triunghiul $A_1B_1C_1$ ușor se construiește și triunghiul ABC.
Problema are o singură soluție, dacă poate fi construit triunghiul $A_1B_1C_1$.

Bibliografie

1. Calmuțchi L. Geometria pe care am pierdut-o. Materiarele conferinței internaționale Matematica fără frontiere. Focșani, 2018, pp.28-34.
2. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение. Москва, Учпедгиз, 1957, 266 с.
3. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. Москва, Учпедгиз, 1957, 266 с.

UTILIZAREA TIC LA STUDIEREA TRANSFROMĂRILOR GEOMETRICE ELEMENTARE

Mitrofan Cioban, academician
Larisa Sali, dr., conf. univ.
Universitatea de Stat din Tiraspol

Analiza literaturii metodice, a opiniilor profesorilor și a experienței personale demonstrează faptul că în școală modernă geometria devine o barieră de netrecut pentru mulți elevi. Motivele invocate se referă la axiomatizarea timpurie, solicitarea de dovezi riguroase pentru lucruri evidente, axarea pe metodele analitice, pe natura formală a cunoștințelor și abordarea insuficientă a procesului sub aspectul atingerii unor obiective de ordin afectiv. Este recomandabilă și psihologic justificată dezvoltarea strategiilor de predare-învățare a geometriei care îmbină prezentarea vizuală, activitatea constructivă practică și analiza logico-verbală.

Metoda transformărilor geometrice oferă oportunități de punere în aplicare a unei abordări constructive a predării cursului sistematic de geometrie, deschide calea pentru dezvoltarea gândirii spațiale, reflectă legi generale și relații dialectice ale fenomenelor realității.

Metoda transformărilor geometrice este una dintre ideile fundamentale utilizate în cursul sistematic al geometriei, exclusivitatea căreea se datorează și următoarelor prevederi:

- activitățile practice joacă un rol important în dezvoltarea competențelor matematice la acest capitol;
- transformările geometrice își găsesc aplicare nu numai în cursul de geometrie, dar, de asemenea, în cursurile școlare de algebră (funcțiile), fizică (mecanica, optica), chimie (corpurile cristaline), desen (construirea de imagini în diferite proiecții) și permit să consolideze relațiile intermediare ale geometriei cu alte discipline;
- transformările geometrice se asociază în structură de grup;
- transformările geometrice se interpretează ca generalizări ale conceptului de funcție și studierea lor permite crearea reprezentărilor despre figurile geometrice, dar și corelațiile între compartimentele matematicii.